Quelques cas particuliers de propagation de l'imbibition

Autor(en): **Guye, Ch. Eug.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **7 (1934)**

Heft VIII

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-110402

Quelques cas particuliers de propagation de l'imbibition

par **Ch. Eug. Guye.**

(12. X. 34.)

Résumé. — Dans ce mémoire, l'auteur envisage quatre cas particuliers de propagation de l'imbibition et celà dans l'hypothèse où cette propagation s'effectuer ait par un processus analogue à celui de la diffusion, comme semblent l'indiquer des expériences antérieures faites sur des bandes de grande longueur. — Si l'on détermine la répartition de l'imbibition et le débit en régime permanent, on peut à l'aide des relations établies, déduire les valeurs numériques des constantes qui interviennent dans la propagation et le problème se trouve alors entièrement déterminé. Des expériences du genre de celles qui ont été effectuées antérieurement, permettraient donc de vérifier dans qu'elle mesure l'hypothèse ci-dessus se trouverait justifiée.

En addition au mémoire paru récemment[1]) et de la note complémentaire y relative[2]), nous avons résumé ici les principales relations auxquelles nous a conduit l'étude théorique de quelques cas de propagation de l'imbibition dans l'hypothèse où cette propagation s'effectuerait par un processus analogue à celui de la diffusion, comme semblent l'indiquer des expériences antérieures faites sur des bandes de grande longueur.

Les quatre cas que nous avons envisagés nous paraissent présenter un intérêt particulier, en ce sens qu'ils sont susceptibles, théoriquement du moins, d'être soumis à un contrôle expérimental. Ils sont représentés par les équations différentielles ci-après.

1⁰ *Propagation horizontale.*

$$(a\,A)\,\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{\partial i}{\partial t}\,. \tag{1}$$

2⁰ *Propagation ascendante.*

$$a\left[A\,\frac{\partial^2 i}{\partial h^2} + \varrho g\,\frac{\partial i}{\partial h}\right] = \frac{\partial i}{\partial t}\,. \tag{2}$$

3⁰ *Propagation horizontale avec perte latérale.*

$$a\left[A\,\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - B\,i\right] = \frac{\partial i}{\partial t}\,. \tag{3}$$

---

[1]) C. E. Guye, Helv. Phys. Acta, **7**, p. 584, 1934.

[2]) Idem, Helv. Phys. Acta, **7**, p. 662, 1934.

4⁰ *Propagation ascendante avec perte latérale.*

$$a\left[A\,\frac{\partial^2 i}{\partial h^2}+\varrho\, g\,\frac{\partial i}{\partial h}-B\,i\right]=\frac{\partial i}{\partial t}$$

a A et B constantes; i degré d'imbibition; ϱ densité du liquide; g accélération de la pesanteur.

Nous avons été amené à l'étude des deux derniers cas par es considérations suivantes:

Lorsque des bandes de papier buvard, plus ou moins imbibées, sont soumises à l'air libre dans une expérience de longue durée, il se produit, ainsi que nous l'avons constaté[1]) une perte latérale par évaporation. C'était précisement pour éviter cette perte et la complication qui en résulte que, dans nos expériences nous avions placé les bandes de papier buvard dans des tubes de verre, à l'intérieur desquels l'atmosphère se trouvait saturée.

Mais ce dispositif présentait cependant un inconvénient. Dans les expériences de très longue durée, on pouvait en effet craindre que cette atmosphère saturée ne modifiât quelque peu l'état de dessication primitif de la bande.

Il ne nous a donc pas paru inutile, à cet égard, d'étudier aussi, d'un point de vue théorique, le cas de la propagation avec une perte latérale, qu'on peut, avec beaucoup de vraisemblance considérer comme proportionnelle à chaque instant au degré i d'imbibition de la bande, lorsque celle-ci se trouve placée dans une atmosphère sèche.

Pour chacun des quatre types de propagation, représentés par les équations ci-dessus, nous avons envisagé deux cas.

1⁰ Le cas d'une bande suffisamment longue ou haute, pour qu'on puisse la considérer pratiquement comme «indéfinie»; les conditions aux limites étant alors: pour $x=0$ ou $h=0$, $i=i_0$; pour $x=\infty$ ou $h=\infty$, $i=0$.

2⁰ Le cas d'une bande de longueur ou de hauteur finie X ou H avec les conditions aux limites pour $x=0$ ou $h=0$, $i=i_0$; pour $x=X$ ou $h=H$, $i=0$[2]).

L'étude du régime variable, dans les quelques cas où nous l'avons abordée (1er et 3e cas) conduit à des relations d'une extrême complication, nous nous sommes donc borné pour l'instant à l'étude du *régime permanent,* qui permet d'ailleurs de déterminer

---

[1]) C. E. Guye et H. Saini — Helv. Phys. Acta, **2**, p. 445, 1929.

[2]) On pourrait aussi envisager le cas où pour $x=X$ et $h=H$, on aurait une dessication partielle i_X ou i_H. Les formules seraient alors un peu moins simples.

plus aisément les valeurs numériques des constantes a, A et B de nos équations; et de ce fait se prête bien, à une vérification expérimentale.

1er Cas. PROPAGATION HORIZONTALE.

En *régime permanent* l'équation (1) devient

$$(a A) \frac{d^2 i}{d x^2} = 0$$

d'où l'on déduit pour la *répartition de l'imbibition*

$$i = i_0 \frac{X - x}{X}$$

et pour le *débit*

$$D = - a A \frac{d i}{d x} = \frac{a A i_0}{X} .$$

La valeur de D étant connue par l'expérience, on peut de cette relation tirer la valeur de la constante $(a \cdot A)$.

2e Cas. PROPAGATION ASCENDANTE.

L'équation différentielle devient

$$A \frac{d^2 i}{d h^2} + \varrho g \frac{d i}{d h} = 0$$

dont la solution est

$$i = i_0 \frac{e^{-K h} - e^{-K H}}{1 - e^{-K H}}$$

avec la condition

$$K = \frac{\varrho g}{A} .$$

Dans le cas où H est très grand, elle devient:

$$i = i_0 e^{-K h}.$$

C'est la répartition dans une bande de hauteur indéfinie. On en tire la relation expérimentale

$$K = \frac{1}{h} \log_e \frac{i_0}{i} .$$

K étant connu, on en déduit la valeur numérique de A par la relation $A = \frac{\varrho g}{K}$.

D'autre part, le débit ascensionnel, en régime permanent, a pour valeur

$$D_a = -a A \frac{d i}{d h} - a \varrho g i = a \varrho g i_0 \frac{e^{-KH}}{1 - e^{-KH}}$$

dont on peut tirer la valeur de a, par la connaissance expérimentale de ce débit ascensionnel.

Il est en outre possible de comparer le produit $a \times A$ (2e cas) ainsi obtenu, à la valeur $(a \cdot A)$ relative au 1er cas.

3e Cas. PROPAGATION HORIZONTALE AVEC PERTE LATÉRALE.

Nous avons alors

$$A \frac{d^2 i}{d x^2} - B i = 0$$

$$i = i_0 \frac{e^{K_1 (X-x)} - e^{-K_1 (X-x)}}{e^{K_1 X} - e^{-K_1 X}}$$

avec la condition $K_1 = \sqrt{\frac{B}{A}}$; d'où $K_1{}^2 = \frac{B}{A}$.

Dans le cas d'une bande de grande longueur on a

$$i = i_0 \, e^{-K_1 x}$$

d'où

$$K_1 = \frac{1}{x} \log_e \frac{i_0}{i}$$

K_1 étant connu expérimentalement, on en déduit la valeur de $\frac{B}{A}$ et par conséquent celle de B.

On remarquera que dans ce cas, comme dans le suivant, il ne peut plus être question, puisqu'il y a perte latérale, d'un débit le même à travers chacune des sections de la bande.

Mais alors le *débit à l'origine* est la somme du *débit à l'extrémité* et du *débit latéral*; ce que l'on exprime

$$-a A \left(\frac{d i}{d x}\right)_{x=0} = -a A \left(\frac{d i}{d x}\right)_{x=X} + a B \int_0^X i \cdot d x .$$

Chacun de ces débits peut être aisément calculé à l'aide des relations précédentes. Le débit à l'origine peut d'ailleurs être connu par la diminution de poids du système en regime permanent.

On a pour le débit total à l'origine

$$D_0 = -aA\left(\frac{di}{dx}\right)_{x=0} = aA\,i_0\,K_1\,\frac{e^{K_1 X} + e^{-K_1 X}}{e^{K_1 X} - e^{-K_1 X}}\,.$$

4e Cas. PROPAGATION ASCENDANTE AVEC PERTE LATÉRALE.

Nous avons

$$A\,\frac{d^2 i}{d h^2} + \varrho g\,\frac{d i}{d h} - B i = 0$$

$$i = i_0\,\frac{e^{\alpha' H}\,e^{\alpha h} - e^{\alpha H}\,e^{\alpha' h}}{e^{\alpha' H} - e^{\alpha H}}$$

avec

$$\alpha = -\frac{K}{2} + \sqrt{\frac{K^2}{4} + \frac{B}{A}}$$

$$\alpha' = -\frac{K}{2} - \sqrt{\frac{K^2}{4} + \frac{B}{A}}$$

dans lesquelles $K = \frac{\varrho g}{A}$ et $\frac{B}{A} = K_1^2$ (3e cas).

On remarquera que α est toujours positif et α' toujours négatif. Si donc on considère une bande de très grande hauteur, la répartition de l'imbibition devient:

$$i = i_0\,e^{\alpha' h} = i_0\,e^{-\left[\frac{K}{2} + \sqrt{\frac{K^2}{4} + \frac{B}{A}}\right] h}.$$

En désignant par K_2 le coefficient de h, on a en définitive

$$i = i_0\,e^{-K_2 h}$$

d'où l'on tire, comme précédemment:

$$K_2 = \frac{1}{h}\,\log_e\,\frac{i_0}{i}\,.$$

Le problème se trouve donc numériquement entièrement déterminé.

Enfin, entre le débit à l'origine, le débit à l'extrémité et le débit latéral, nous aurons comme précédemment

$$\left[-aA\left(\frac{di}{dh}\right)_{h=0} - a\varrho g\,i_0\right] = -aA\left(\frac{di}{dh}\right)_{h=H} + aB\int_0^H i\cdot dh.$$

d'où

$$D_0 = -aA\,i_0\,\frac{\alpha\,e^{\alpha' H} - \alpha'\,e^{\alpha H}}{e^{\alpha' H} - e^{\alpha H}} - a\varrho g\,i_0$$

Expression dans laquelle $\alpha' > \alpha$; α' toujours negatif, α toujours positif.

Remarque. En définitive, ***pour une bande de grande longueur***, qu'il s'agisse de propagation ascendante (2e cas), de propagation horizontale avec perte latérale (3e cas) ou de propagation ascendante avec perte latérale (4e cas), l'équilibre final est toujours représenté par une équation de la forme

$$i = i_0 \, e^{-Kh}$$

K ayant respectivement les valeurs K, K_1 ou K_2; ces trois grandeurs pouvant être déterminées par la connaissance des degrés i_0 et i d'imbibition.

Pour vérifier expérimentalement la validité des relations théoriques qui précèdent, il conviendrait, ainsi que nous l'avons fait déjà, de procéder de la façon suivante.

A près un temps suffisamment long pour que l'on puisse considérer le régime permanent comme établi, on coupe la bande en segments d'égale longueur que l'on enferme aussitôt dans de petits flacons en verre mince, pour éviter l'évaporation. On peut alors par pesée et par la connaissance du poids du flacon et de l'unité de longueur de la bande sèche, déterminer la valeur de i, correspondant aux diverses valeurs de h[1]). Quant au débit D, on peut le déterminer en observant la diminution de poids du système en régime permanent, dans un temps déterminé.

En résumé, on voit par ce qui précède que l'étude expérimentale de la répartition de l'imbibition et du débit en régime permanent, permettrait de véritier dans qu'elle mesure cette propagation peut être assimilée au point de vue mathématique, à une propagation par diffusion.

---

[1]) On obtiendrait certainement plus de précision en remplaçant le flacon de verre par une pochette en celluloide beaucoup plus légère.