Bemerkung zum Wentzelschen Näherungsverfahren in der relativistischen Dynamik des Elektrons

Autor(en): **Bechert, K.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **6 (1933)**

Heft I

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-110265

Bemerkung zum Wentzelschen Näherungsverfahren in der relativistischen Dynamik des Elektrons

von **K. Bechert.**

(10. I. 33.)

W. Pauli hat kürzlich in dieser Zeitschrift[1]) eine Note über „Dirac's Wellengleichung des Elektrons und geometrische Optik" veröffentlicht. Pauli benutzt dabei die von Dirac selbst eingeführten vierreihigen Matrizen α^k, β. Es ist aber bequemer und übersichtlicher, wie wir glauben, die von Sauter[2]) vorgeschlagene allgemeine Methode der unbestimmten Operatoren γ_l zu benützen, solange man nur allgemeine Beziehungen der Diracgleichung diskutiert, wie dies in § 2 der *Pauli*'schen Arbeit geschieht. Die Absicht der vorliegenden Note ist, dies kurz zu zeigen.

§ 1. Einleitung.

Wir erinnern zuerst an einige allgemeine Wahrheiten über die Diracgleichung, die in unserer Bezeichnung lauten soll:

$$(\gamma_l p_l + p_5)\psi = 0. \tag{1}$$

Über zweimal vorkommende Indizes ist zu summieren; $l = 1, 2, 3, 4$. Für die γ_l gilt

$$\gamma_k\gamma_l + \gamma_l\gamma_k = 2\,\delta_{kl}. \tag{2}$$

Ferner ist

$$p_l = \frac{\partial}{\partial x_l} + \frac{i\,e}{\hbar\, c}\,\Phi_l\,, \quad p_5 = \frac{\mathcal{E}_0}{\hbar\, c}\,; \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}\,; \quad x_l = \{x, y, z, ict\}. \tag{3}$$

h ist die gewöhnliche Planck'sche Konstante; die ersten drei Komponenten von Φ_l bilden das Vektorpotential; die vierte $\Phi_4 = i\,\Phi_0$, wo Φ_0 wie bei Pauli das elektrostatische Potential bedeutet. ψ ist für uns eine mit den γ nicht vertauschbare Grösse, für die wir den Sauter'schen Ansatz $\psi = \Sigma\,\Gamma_\nu\psi_\nu$ gemacht denken können. Die ψ_ν sind mit den γ vertauschbar — sie entsprechen den ψ_ϱ bei Pauli —, die Γ_ν sind Produkte aus den γ_l, deren Form uns vorläufig nicht kümmern soll.

---

[1]) Vol. V, Heft 3, S. 179 (1932).

[2]) F. Sauter, Z. Physik **63**, 803; **64**, 295, 1930.

Die Rechnung mit allgemeinen Operatoren γ_l führt auf dieselben Differentialgleichungen für die ψ_ν wie das von PAULI benutzte Rechnen mit vierreihigen Matrizen, wenn man die übliche physikalische Deutung der Diracgleichung beibehält[1]). Eine Spezialisierung der γ, d. h. ein Ausschreiben der Operatorengleichung (1) in ihre „Komponenten", wird erst nötig, wenn man die Wellenfunktionen ψ explizit anschreiben will, also ein spezielles Problem vor sich hat. Für die physikalisch wichtigen Grössen ist es gleichgültig, wie man die Operatoren γ wählt, wenn sie nur den Gleichungen (2) genügen.

Der Viererstrom des Elektrons folgt aus dem Erhaltungssatz:

$$\frac{\partial\,(\overline{\psi}\,\gamma_l\,\psi)}{\partial\,x_l} \equiv \frac{\partial\,s_l}{\partial\,x_l} = 0\,. \tag{4}$$

$\overline{\psi}$ ist die adjungierte Funktion zu ψ; sie genügt der adjungierten Differentialgleichung:

$$\overline{p}_l\,\overline{\psi}\,\gamma_l + p_5\,\overline{\psi} = 0 \tag{5}$$

mit

$$\overline{p}_l = -\frac{\partial}{\partial\,x_l} + \frac{i\,e}{\hbar\,c}\,\Phi_l\,. \tag{6}$$

Die Grösse s_l enthält bei unserer Rechnung noch Operatoren γ; sie hängt mit dem (γ-freien) Viererstrom σ_l so zusammen:

$$s_l = 4\,A\cdot\sigma_l\,. \tag{7}$$

A enthält die γ; in welcher Weise, interessiert uns hier nicht.

§ 2.

Das Wentzel-Brillouin-Kramers-Verfahren, in Operatoren geschrieben.

Wir setzen

$$\psi = a\,e^{\frac{i}{\hbar}S} \tag{8}$$

wo S wie bei PAULI die klassische Wirkungsfunktion werden soll, also die γ nicht enthalten darf; die γ_l kommen nur in a vor. a wird nach Potenzen von $\frac{\hbar}{i}$ entwickelt:

$$a = a_0 + \frac{\hbar}{i}\,a_1 + \cdots\,. \tag{9}$$

[1]) Vgl. K. BECHERT, Z. Physik **79**, 26, 1932.

Einsetzen von (8) und (9) in (1) gibt als Näherungsgleichungen:

$$i\,\pi_l\,\gamma_l\,a_0 + m_0\,c\,a_0 = 0 \left(\text{Faktor von } \frac{i}{\hbar}\right) \tag{10a}$$

$$i\,\pi_l\,\gamma_l\,a_1 + m_0\,c\,a_1 = -i\,\gamma_l\,\frac{\partial a_0}{\partial x_l}\;(\text{Faktor von } \hbar^0) \tag{10b}$$

....

$$i\,\pi_l\,\gamma_l\,a_n + m_0\,c\,a_n = -i\,\gamma_l\,\frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_l}\,; \left(\text{Faktor von } \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{n-1}\right).$$

Dabei ist

$$\pi_l = \frac{\partial S}{\partial x_l} + \frac{e}{c}\,\Phi_l \tag{11}$$

gesetzt. Durch linke Multiplikation von (10a) mit $i\pi_l\gamma_l - m_0\,c$ erhält man

$$(i\,\pi_n\,\gamma_n - m_0\,c)\,(i\,\pi_l\,\gamma_l + m_0\,c)\,a_0 = 0 = \left(-\sum_{l=1}^{4}\pi_l^2 - m_0^2\,c^2\right)a_0.$$

Die Klammer enthält keine γ mehr, also folgt

$$\sum_l \pi_l^2 + m_0^2\,c^2 = 0\,, \tag{12}$$

das ist die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung der klassischen Mechanik.

Für das Folgende brauchen wir die zu (10) adjungierten Gleichungen. Wir machen den (8) und (9) entsprechenden Ansatz

$$\overline{\psi} = \overline{a}\,e^{\frac{i}{\hbar}\overline{S}} \tag{13}$$

$$\overline{a} = \overline{a}_0 + \frac{\hbar}{i}\,\overline{a}_1 + \cdots \tag{14}$$

und erhalten aus (5), wie man ohne Rechnung einsieht:

$$i\,\overline{\pi}_l\,\overline{a}_0\,\gamma_l + m_0\,c\,\overline{a}_0 = 0 \tag{15a}$$

$$i\,\overline{\pi}_l\,\overline{a}_1\,\gamma_l + m_0\,c\,\overline{a}_1 = i\,\frac{\partial \overline{a}_0}{\partial x_l}\,\gamma_l \tag{15b}$$

....

mit

$$\overline{\pi}_l = -\frac{\partial \overline{S}}{\partial x_l} + \frac{e}{c}\,\Phi_l\,. \tag{16}$$

Als Hamilton-Jacobi-Gleichung folgt aus (15a) (durch rechte Multiplikation mit $i\bar{\pi}_l\gamma_l - m_0 c$):

$$\sum_l \bar{\pi}_l^2 + m_0^2 c^2 = 0\,. \tag{17}$$

Aus dem Vergleich von (12) mit (17) erkennt man, unter Beachtung von (11) und (16), dass

$$S = -\bar{S} \tag{18}$$

bis auf eine unwesentliche additive Konstante und ferner, dass $\pi_l = \bar{\pi}_l$. Die Lösbarkeitsbedingung für die Gleichungen (10b), (15b) läuft jetzt in unserer Schreibweise auf die triviale Behauptung hinaus: Es gilt für irgendwelche Funktionen $\bar{v}, w$ identisch

$$\bar{v}\cdot[(i\pi_l\gamma_l + m_0 c)\,w] \equiv [\bar{v}\,(i\pi_l\gamma_l + m_0 c)]\cdot w\,. \tag{19}$$

Die eckige Klammer deutet an, wie wir uns die Faktoren zusammengefasst denken. Wenden wir (19) auf die Gleichung (10b) an mit $\bar{v} = \bar{a}_0$, $w = a_1$, so kommt:

$$\bar{a}_0\,(i\pi_l\gamma_l + m_0 c)\,a_1 = -\,i\,\bar{a}_0\,\gamma_l\,\frac{\partial a_0}{\partial x_l} = 0\,, \tag{20}$$

(1. Lösbarkeitsbedingung). Analog aus (15b) mit $\bar{v} = \bar{a}_1$, $w = a_0$:

$$\bar{a}_1\,(i\pi_l\gamma_l + m_0 c)\,a_0 = i\,\frac{\partial \bar{a}_0}{\partial x_l}\,\gamma_l\,a_0 = 0\,, \tag{21}$$

(2. Lösbarkeitsbedingung). Subtraktion von Gl. (20) von (21) gibt die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\,(\bar{a}_0\,\gamma_l\,a_0) = 0\,, \tag{22}$$

die man mit $S = -\bar{S}$ natürlich auch direkt aus (4) als erste Näherung erhalten kann. $\bar{a}_0\,\gamma_{1,2,3}\,a_0$ sind die Stromkomponenten, $\bar{a}_0\,\gamma_4\,a_0\cdot ic$ die Dichte[1]).

Den Pauli'schen Satz über das Verhältnis von Strom und Dichte bekommen wir so: Wir multiplizieren (10a) von links mit $\bar{a}_0\,\gamma_k\,\gamma_4$ $(k \neq 4)$ und (15a) von links mit $\gamma_4\gamma_k a_0$, setzen $\pi_l = \bar{\pi}_l$ ein und addieren:

$$i\pi_l\,\bar{a}_0(\gamma_k\,\gamma_4\,\gamma_l + \gamma_l\,\gamma_4\,\gamma_k)\,a_0 + m_0\,c\,\bar{a}_0(\gamma_k\,\gamma_4 + \gamma_4\,\gamma_k)\,a_0 = 0\,.$$

[1]) In den Grössen $\bar{a}_0\gamma_k a_0$, $\bar{a}_0\gamma_4 a_0$ stecken, genauer gesagt, noch die Operatoren γ, doch treten sie auch hier, wie überhaupt bei allen Grössen der Form γ-freier Operator mal $\bar{\psi}$ mal γ-Operator mal γ-freier Operator mal ψ, in einem gemeinsamen Faktor $4\,A$ heraus. Vgl. K. Bechert, l. c.) Man kann also in Gleichung (23) unter den Ausdrücken $\bar{a}_0\gamma_k a_0$, $\bar{a}_0\gamma_4 a_0$ einfach die physikalischen Grössen des Stroms und der Dichte $\cdot ic$ verstehen, weil $4\,A$ aus (23) herausfällt.

Der zweite Ausdruck ist Null nach (2), weil wir $k \neq 4$ voraussetzen. Im ersten geben die Glieder mit $l = 4: 2\,i\,\pi_4\,\bar{a}_0\,\gamma_k\,a_0$, diejenigen mit $l = k: -2\,i\,\pi_k\,\bar{a}_0\,\gamma_4\,a_0$, die andern heben sich auf, wegen (2). Es bleibt:

$$\pi_4\,\bar{a}_0\,\gamma_k\,a_0 = \pi_k\,\bar{a}_0\,\gamma_4\,a_0\,. \tag{23}$$

Dies ist der von PAULI angegebene Satz, aus dem er unter anderem die Bohr'sche Behauptung bestätigt, dass eine Bestimmung des Spinmomentes des Elektrons durch klassisch beschreibbare Ablenkungsversuche nicht möglich ist. Die weiteren Überlegungen verlaufen genau wie in der Pauli'schen Arbeit.

Wir wollen die weitere Behandlung nach der Sauter'schen Methode noch kurz skizzieren, obwohl sie für das folgende *spezielle* Problem keine Vorteile gegenüber der Matrizenrechnung bietet. Wenn man genau die Pauli'schen Differentialgleichungen erhalten will, wird man den Ansatz machen (man könnte natürlich irgendeinen anderen auch machen, würde dann aber nicht gerade Pauli's Differentialgleichungen bekommen):

$$a_0 = \sum_{\nu=1}^{16} \Gamma_\nu\,a_{0\nu}; \tag{24}$$

mit

Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4	Γ_5	Γ_6	Γ_7	Γ_8
1	$\gamma_1\gamma_3$	$-i\,\gamma_3$	$-i\,\gamma_1$	$-i\,\gamma_1\gamma_2$	$-i\,\gamma_2\gamma_3$	$-\gamma_1\gamma_2\gamma_3$	$-\gamma_2$
Γ_9	Γ_{10}	Γ_{11}	Γ_{12}	Γ_{13}	Γ_{14}	Γ_{15}	Γ_{16}
γ_4	$\gamma_1\gamma_3\gamma_4$	$-i\,\gamma_3\gamma_4$	$-i\,\gamma_1\gamma_4$	$-i\gamma_1\gamma_2\gamma_4$	$-i\gamma_2\gamma_3\gamma_4$	$-\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$	$-\gamma_2\gamma_4$

Es gilt, wie man leicht sieht (vgl. K. BECHERT, l. c.)

$$\Gamma_j\,A = \sum_{\nu=0}^{3} \Gamma_{j+4\nu}, \text{ mit } A = (1 - i\,\gamma_1\,\gamma_2)\,(1 + \gamma_4);\; j = 1, \cdots 16. \tag{25}$$

Man darf allgemein setzen (BECHERT, l. c.):

$$a_{0\nu} = a_{0,\,\nu+4} \tag{26}$$

und findet aus (24) und (25):

$$a_0 = \sum_{l=1}^{4} \Gamma_l\,A\,a_{0\,l}\,. \tag{27}$$

Für die adjungierte Funktion $\bar{a}_0$ und die zugehörigen $\bar{\Gamma}_\nu$ soll gelten:

$$\bar{a}_0 = \sum_{\nu=1}^{16} \bar{\Gamma}_\nu \, \bar{a}_{0\nu} \tag{28}$$

mit

$\bar{\Gamma}_1$	$\bar{\Gamma}_2$	$\bar{\Gamma}_3$	$\bar{\Gamma}_4$	$\bar{\Gamma}_5$	$\bar{\Gamma}_6$	$\bar{\Gamma}_7$	$\bar{\Gamma}_8$
1	$-\gamma_1\gamma_3$	$-i\gamma_3$	$-i\gamma_1$	$-i\gamma_1\gamma_2$	$-i\gamma_2\gamma_3$	$-\gamma_1\gamma_2\gamma_3$	γ_2
$\bar{\Gamma}_9$	$\bar{\Gamma}_{10}$	$\bar{\Gamma}_{11}$	$\bar{\Gamma}_{12}$	$\bar{\Gamma}_{13}$	$\bar{\Gamma}_{14}$	$\bar{\Gamma}_{15}$	$\bar{\Gamma}_{16}$
γ_4	$-\gamma_1\gamma_3\gamma_4$	$i\gamma_3\gamma_4$	$i\gamma_1\gamma_4$	$-i\gamma_1\gamma_2\gamma_4$	$-i\gamma_2\gamma_3\gamma_4$	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$	$-\gamma_2\gamma_4$

Dann folgt aus $\bar{a}_{0\nu} = \bar{a}_{0,\nu+4}$, wie man leicht bestätigt:

$$\bar{a}_0 = \sum_{l=1}^{4} A\, \bar{\Gamma}_l \, \bar{a}_{0\,l}\,. \tag{29}$$

Die Berechnung des Viererstroms s_l geschieht nach dem vom Verfasser (l. c.) angegebenen allgemeinen Schema:

$$s_l = \bar{a}_0 \gamma_l a_0 = \sum_{k,n=1}^{4} A\, \bar{\Gamma}_k \gamma_l \Gamma_n A\, \bar{a}_{0k} a_{0n} = 4A\sigma_l\,.$$

Es liefern auch hier nur die Glieder einen Beitrag, für die $\bar{\Gamma}_k \gamma_l \Gamma_n = \Gamma_{1,5,9,13}$ ist. So kommt:

$$s_3 = -i(\bar{a}_{01} a_{03} - \bar{a}_{02} a_{04} + a_{03} a_{01} - a_{04} a_{02})\,; \tag{30}$$

Also hat die Bedingung (20): $\bar{a}_0 \gamma_l \frac{\partial a_0}{\partial x_l} = 0$ die Form ($\frac{\partial}{\partial x_k} = 0$ für $k \neq 3$, wie bei Pauli):

$$\bar{a}_{01} \frac{\partial a_{03}}{\partial x_3} - \bar{a}_{02} \frac{\partial a_{04}}{\partial x_3} + \bar{a}_{03} \frac{\partial a_{01}}{\partial x_3} - \bar{a}_{04} \frac{\partial a_{02}}{\partial x_3} = 0\,; \tag{31}$$

Bedingung (21): $\frac{\partial \bar{a}_0}{\partial x_l} \gamma_l a_0 = 0$ geht (in ihrer ausgeschriebenen Form) aus (31) durch Vertauschung von $\bar{a}_{0i}$ mit a_{0i} hervor.

Die Gleichung (10a) liefert mit dem Ansatz (27) die Pauli'schen Gleichungen, — so war der Ansatz gerade eingerichtet —, wenn man noch beachtet, dass

$$i\pi_4 = \frac{\partial S}{\partial ct} - \frac{e}{c}\Phi_0 = -\pi_0 \quad \text{(Pauli's Bezeichnung):}$$

$$\begin{aligned}
\pi_3 a_{03} + (mc - \pi_0)\, a_{01} &= 0\,;\\
\pi_3 a_{01} + (-mc - \pi_0)\, a_{03} &= 0\,;\\
\pi_3 a_{04} + (-mc + \pi_0)\, a_{02} &= 0\,;\\
\pi_3 a_{02} + (mc + \pi_0)\, a_{04} &= 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

Für die adjungierten Funktionen gelten dieselben Gleichungen. Dabei braucht man sich hier über die Änderungen, die durch das Imaginärwerden von π_3 eintreten könnten, nicht den Kopf zu zerbrechen. Die adjungierten Gleichungen behalten auf jeden Fall ihre Form bei. Als allgemeine Lösung, die den Bedingungen (20), (21) genügt, findet man

$$a_{0\nu} = \bar{a}_{0\nu}; \quad a_{01} = \alpha \sqrt{\frac{\pi_3}{\pi_0 - m c}}; \quad a_{02} = \beta \sqrt{\frac{\pi_3}{\pi_0 - m c}};$$

$$a_{03} = \alpha \sqrt{\frac{\pi_0 - m c}{\pi_3}}; \quad a_{04} = -\beta \sqrt{\frac{\pi_0 - m c}{\pi_3}}. \tag{33}$$

α, β sind willkürliche Konstanten. Die Lösung (33) ist natürlich dieselbe wie bei PAULI.

München, Institut f. theoretische Physik.