

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 71 (1998)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Statistische und deterministische Vorhersagbarkeit bei der quantenphysikalischen Messung  
**Autor:** Niestegge, Gerd  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-117101>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Statistische und deterministische Vorhersagbarkeit bei der quantenphysikalischen Messung

Gerd Niestegge

Krüner Straße 91, D-81377 München

(31.IV.97)

*Abstract.* When does the result of a quantum measurement render possible a statistical or deterministic prediction of the result of a further measurement? Starting with an analysis of quantum measurement using the Hilbert space formalism, an answer to this question is given by purely algebraic conditions on the two measurements. These algebraic conditions are then used to develop an abstract logico-algebraic approach to quantum measurement that neither needs the Hilbert space formalism nor any kind of state. This approach identifies non-Boolean logic which does not fulfill the distributivity law as the origin of typical quantum phenomena like indeterminateness and interference. The probabilities in quantum physics result from the non-Boolean logic and not from a lack of information, so they strongly differ from those in mathematical probability theory.

## 1 Einführung

Wenn bei zwei aufeinanderfolgenden physikalischen Messungen an demselben physikalischen System das Ergebnis der zweiten Messung immer völlig unabhängig von dem Ergebnis der ersten Messung wäre, würde die gesamte Physik keine Daseinsberechtigung haben und die Physik als Wissenschaft hätte wohl nie entstehen können. Denn das grundlegende Ziel der Physik ist, Zusammenhänge zwischen Beobachtungen an der Natur zu erkennen. Der Physiker will aufgrund der Ergebnisse einer oder mehrerer Messungen die Ergebnisse weiterer Messungen vorhersagen können<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Der operationale Zugang zur Quantenmechanik (siehe z.B. [10]) stützt sich zwar nicht auf sukzessive Messungen, sondern auf Präparier- und Registrierverfahren. Um das Konzept der statistischen Vorhersagbarkeit zu motivieren, wird im folgenden jedoch von dem von Neumann - Lüders'schen Meßprozeß ausgegangen.

In der klassischen Mechanik waren diese Vorhersagen deterministisch. In der Quantenmechanik mußte man erkennen, daß in vielen Fällen nur noch eine statistische Vorhersage möglich ist. Das heißt, daß man statt einen genauen festen Wert für das Ergebnis einer Messung nur noch statistische Kenngrößen (Erwartungswert, Varianz, Wahrscheinlichkeitsverteilung) vorhersagen kann.

Das erschien vielen Physikern zunächst als ein so großer Mangel, daß sie sich nicht damit abfinden wollten. Der berühmteste unter diesen Skeptikern war Albert Einstein mit seinem bekannten Ausspruch "Gott würfelt nicht". Albert Einstein hat bis zu seinem Tod hartnäckig nach Alternativen für die Quantentheorie mit der sich immer mehr durchsetzenden statistischen Deutung geforscht.

Im folgenden wird zunächst - ausgehend von dem Hilbert-Raum-Formalismus der Quantenmechanik - der quantenphysikalische Meßprozeß untersucht. Das Ziel ist, präzise mathematische Bedingungen dafür zu finden, wann die Kenntnis des Ergebnisses einer bereits erfolgten Messung eine statistische, wann eine deterministische und wann keine Vorhersage über das Ergebnis einer anderen zukünftigen Messung erlaubt.

Dabei wird sich herausstellen, daß diese mathematische Bedingungen in einem allgemeinen algebraischen Rahmen ohne Hilbert-Raum-Formalismus formuliert werden können, daß jedoch immer eine Darstellung auf einem (nicht eindeutigen) Hilbert-Raum möglich ist.

Die erforderliche algebraische Struktur weist Ähnlichkeiten mit logischen Strukturen auf, erfüllt aber im allgemeinen nicht das Distributiv-Gesetz eines Boole'schen Verbandes. Die Verletzung dieses Distributiv-Gesetzes ist die Ursache für viele für die Quantenmechanik so typische Erscheinungen wie die Unbestimmtheit oder die Interferenzen. Die Gültigkeit des Distributiv-Gesetzes würde alle diese Erscheinungen ausschließen und nur die deterministische, nicht die statistische Vorhersagbarkeit zulassen.

Die Erkenntnis, daß die Quantenmechanik und das Distributiv-Gesetz der Boole'schen Logik nicht zusammenpassen können, ist fast so alt wie die Quantenmechanik selbst. Schon 1936 haben John von Neumann, der wesentlich an der mathematischen Formulierung der Quantenmechanik beteiligt gewesen war, und G. Birkhoff<sup>[3]</sup> darauf hingewiesen: „*Logicians have usually assumed that properties ... of negation were the ones least able to withstand a critical analysis, the study of mechanics points to the distributive identities ... as the weakest link in the algebra of logic.*“

Das bloße Weglassen des Distributiv-Gesetzes bei den Axiomen, die den Boole'schen Verband definieren, führt jedoch zu einer zu schwachen Struktur. Auch der Ersatz des Distributiv-Gesetzes durch das sogenannte orthomodulare Gesetz (Ausgangspunkt der Theorie der orthomodularen Verbände<sup>[5]</sup> und unterschiedlicher Quantenlogiken<sup>[4,6]</sup>, die sich seit von Neumanns und Birkhoffs Arbeit in den 30er Jahren entwickelt haben) liefert nicht genug Struktur für eine aussagekräftige Theorie und kann nicht wie der im folgenden präsentierte Ansatz die Unbestimmtheit und die Interferenzerscheinungen in der Quantenmechanik mit einer rein logisch-algebraischen Struktur erklären, ohne zusätzlich soetwas wie Zustände annehmen zu müssen.

Mit dem im folgenden vorgestellten Ansatz ist die Ungültigkeit des Distributiv-Gesetzes der Boole'schen Logik nicht nur eine eventuell mit Widerwillen hingenommen Konsequenz aus der Quantentheorie, sondern der tiefliegende Grund für die Quantentheorie und ihre Phänomene.

Außerdem kann der Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Quantenmechanik von demjenigen in der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie abgegrenzt werden. Letzterer ist von subjektiver Natur und beruht auf einer Unkenntnis; theoretisch (nicht unbedingt praktisch) kann durch An-sammeln weiterer Information jede Wahrscheinlichkeit beliebig nahe an 0 oder 1 gebracht wer-

den. In der Quantenmechanik tritt eine objektive Wahrscheinlichkeit auf, die durch das Besorgen zusätzlicher Information nicht mehr verändert werden kann.

## 2 Der quantenphysikalische Meßprozeß in dem Hilbert-Raum-Formalismus

Wir betrachten ein beliebiges quantenphysikalisches System, an dem noch keine Messung vorgenommen worden ist. Wir nehmen an, daß es sich in einem uns unbekannten reinen Zustand befindet, der durch den uns unbekannten, normierten Vektor  $\psi$  aus einem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  dargestellt wird. Außerdem betrachten wir eine Observable  $X$ , d.h. einen selbst-adjungierten linearen Operator  $X$  auf dem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$ . Der Erwartungswert der Observable  $X$  ist dann:

$$\text{Erw}_\psi(X) = \langle \psi | X \psi \rangle.$$

Jetzt nehmen wir an dem System eine erste Messung vor. Wir messen eine andere Observable  $Y_1$  und erhalten das Ergebnis  $\lambda_1$ . Die Zahl  $\lambda_1$  ist ein Wert aus dem Spektrum von  $Y_1$ . Wenn  $\lambda_1$  ein isolierter Punkt im Spektrum von  $Y_1$  ist, so ist  $\lambda_1$  ein Eigenwert mit einem zugehörigen Eigenraum; dann sei  $E_1$  die (orthogonale) Projektion auf diesen Eigenraum. Wenn  $\lambda_1$  zum kontinuierlichen Spektrum gehört, kann die Messung wegen der endlichen Meßgenauigkeit gar nicht genau den Wert  $\lambda_1$  liefern, sondern nur ein Intervall  $[\lambda_1 - \delta, \lambda_1 + \delta]$ , wobei  $\delta$  die Meßgenauigkeit darstellt. In diesem Fall sei  $E_1$  die zu diesem Intervall gehörige Spektralprojektion von  $Y_1$ .

In beiden Fällen ist  $E_1$  eine (orthogonale) Projektion, d.h. ein linearer Operator auf dem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  mit

$$E_1^* = E_1 = E_1^2$$

(für einen Operator  $T$  bezeichnet  $T^*$  den zu  $T$  adjungierten Operator). Nach dem quantenphysikalischen Verständnis des Meßprozesses ändert die Messung den Systemzustand so, daß sich das System nach der Messung in dem Zustand

$$\psi_1 = \frac{E_1 \psi}{\langle E_1 \psi | E_1 \psi \rangle^{1/2}}$$

befindet.

Wir führen jetzt weitere Messungen durch, indem wir nacheinander die Observablen  $Y_2, \dots, Y_n$  messen - zunächst  $Y_2$ , dann  $Y_3$  usw. bis  $Y_n$ . Mit  $E_2, \dots, E_n$  bezeichnen wir wie oben  $E_1$  die die jeweiligen Meßergebnisse darstellenden Projektionen. Dann befindet sich das System nach den  $n$  Messungen in dem Zustand

$$\psi_n = \frac{E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \psi}{\langle E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \psi | E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \psi \rangle^{1/2}}$$

und der Erwartungswert der Observable  $X$  beträgt jetzt:

$$\text{Erw}_{\psi_n}(X) = \langle \psi_n | X \psi_n \rangle = \frac{\langle E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \psi | X E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \psi \rangle}{\langle E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \psi | E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \psi \rangle}$$

Dieser Erwartungswert hängt nicht nur von der Observable  $X$  und den Meßergebnissen  $E_1, \dots, E_n$  ab, sondern auch immer noch von dem uns unbekannten Anfangszustand  $\psi$  des Systems. Die Abhängigkeit von der Observable  $X$  und den Meßergebnissen  $E_1, \dots, E_n$  haben wir selbstverständlich erwartet, die Abhängigkeit von dem unbekannten Anfangszustand  $\psi$  jedoch macht jede Berechnung des Erwartungswertes unmöglich. Daher fragen wir uns, wann denn diese Abhängigkeit verschwindet. Das ist doch genau dann der Fall, wenn der Erwartungswert für jeden beliebigen Anfangszustand  $\psi$  denselben Wert  $\lambda$  annimmt:

$$\begin{aligned} \lambda = \text{Erw}_{\psi_n}(X) &= \frac{\langle E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \psi | X E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \psi \rangle}{\langle E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \psi | E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \psi \rangle} \quad \text{für alle } \psi \in \mathcal{H} \\ \Leftrightarrow \lambda \langle E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \psi | E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \psi \rangle &= \langle E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \psi | X E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \psi \rangle \quad \text{für alle } \psi \in \mathcal{H} \\ \Leftrightarrow \langle \psi | \lambda E_1 E_2 E_{n-1} E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \psi \rangle &= \langle \psi | E_1 E_2 \dots E_{n-1} E_n X E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \psi \rangle \quad \text{für alle } \psi \in \mathcal{H} \\ \Leftrightarrow \lambda E_1 E_2 \dots E_{n-1} E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 &= E_1 E_2 \dots E_{n-1} E_n X E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \quad (*) \end{aligned}$$

Wenn nur eine einzige Messung ( $n=1$ ) vorgenommen wurde, vereinfacht sich Gleichung (\*) zu

$$\lambda E_1 = E_1 X E_1.$$

Genau dann, wenn Gleichung (\*) zutrifft, kann man aus der Kenntnis der Meßergebnisse  $E_1, \dots, E_n$  den Erwartungswert von  $X$  bestimmen, ohne einen Anfangszustand des Systems vor Beginn der Messungen kennen oder irgendwelche willkürliche Annahmen über einen Anfangszustand des Systems treffen zu müssen.

**Definition A:** (i) Wenn eine Observable  $X$  und eine endliche Folge von Projektionen  $E_1, \dots, E_n$  mit  $E_1 E_2 \dots E_n \neq 0$  die Gleichung (\*) erfüllen, so heißt  $X$  statistisch vorhersagbar unter  $E_1, \dots, E_n$ , und die Zahl  $\lambda$  heißt Erwartungswert von  $X$  unter  $E_1, \dots, E_n$ . Dafür schreibt man auch kurz:

$$\mathbb{E}(X | E_1 E_2 \dots E_n) = \lambda.$$

Daß das Produkt  $E_1 E_2 \dots E_n \neq 0$  ist, garantiert die Eindeutigkeit des Erwartungswertes  $\mathbb{E}(X | E_1 E_2 \dots E_n)$ . Dieser hängt auch von der Reihenfolge der  $E_1 E_2 \dots E_n$  ab.

(ii) Wenn  $X$  und  $X^2$  statistisch vorhersagbar sind, so wird die Varianz von  $X$  unter  $E_1, \dots, E_n$  definiert durch:

$$\mathbb{V}(X | E_1 E_2 \dots E_n) := \mathbb{E}(X^2 | E_1 E_2 \dots E_n) - (\mathbb{E}(X | E_1 E_2 \dots E_n))^2$$

(iii)  $X$  heißt deterministisch vorhersagbar unter  $E_1, \dots, E_n$ , wenn  $\mathbb{V}(X | E_1 E_2 \dots E_n) = 0$  ist.

Definition A legt durch Gleichung (\*) formal und mathematisch präzise fest, wann die Kenntnis der Ergebnisse einer Meßreihe die Berechnung des Erwartungswertes einer Observable erlaubt (statistische Vorhersagbarkeit) und wann nicht (keine statistische Vorhersagbarkeit) sowie wann sogar ein fester Wert für die Observable vorhergesagt werden kann (deterministische Vorhersagbarkeit). Die deterministische Vorhersagbarkeit ist ein Spezialfall der statistischen Vorhersagbarkeit, nämlich wenn die Varianz verschwindet.

An Gleichung (\*) fällt auf, daß man für ihre Formulierung viel weniger braucht als den üblichen Hilbert-Raum-Formalismus der Quantenmechanik. Denn Zustände bzw. Vektoren aus dem Hilbert-Raum kommen in dieser Gleichung gar nicht vor. Bevor wir uns einer einfacheren und allgemeineren mathematischen Struktur, die für die Behandlung der statistischen und deterministischen Vorhersagbarkeit ausreicht, zuwenden, wollen wir noch gemischte Zustände betrachten.

Oben wurde als Anfangszustand des Systems vor der ersten Messung ein unbekannter reiner Zustand (Hilbert-Raum-Vektor  $\psi$ ) vorausgesetzt. Würde die Annahme eines unbekannten gemischten Zustands (statistischen Operators  $\rho$ ) stattdessen zu anderen Ergebnissen führen?

Der Erwartungswert der Observablen  $X$  bei Vorliegen des statistischen Operators  $\rho$  ist:

$$Erw_{\rho}(X) = Spur(\rho X).$$

Nach der ersten Messung liegt ein neuer gemischter Zustand mit dem statistischen Operator

$$\rho_1 = \frac{E_1 \rho E_1}{Spur(E_1 \rho E_1)}$$

vor, und nach der letzten Mesung ein Zustand mit dem statistischen Operator

$$\rho_n = \frac{E_n \dots E_2 E_1 \rho E_1 E_2 \dots E_n}{Spur(E_n \dots E_2 E_1 \rho E_1 E_2 \dots E_n)}$$

Der Erwartungswert der Observablen  $X$  beträgt nach der letzten Messung

$$Erw_{\rho_n}(X) = \frac{Spur(X E_n \dots E_2 E_1 \rho E_1 E_2 \dots E_n)}{Spur(E_n \dots E_2 E_1 \rho E_1 E_2 \dots E_n)} = \frac{Spur(E_1 E_2 \dots E_n X E_n \dots E_2 E_1 \rho)}{Spur(E_1 E_2 \dots E_{n-1} E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \rho)}$$

Dabei gilt das zweite Gleichheitszeichen wegen der Invarianz der Spur eines Produkts von Operatoren gegenüber zyklischen Vertauschungen dieser Operatoren. Dieser Erwartungswert liefert für alle statistischen Operatoren  $\rho$  genau dann immer dieselbe Zahl  $\lambda$ , wenn wieder Gleichung (\*) gilt:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{Spur(E_1 E_2 \dots E_n X E_n \dots E_2 E_1 \rho)}{Spur(E_1 E_2 \dots E_{n-1} E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \rho)} \quad \text{für alle statistischen Operatoren } \rho \\ &\Leftrightarrow Spur(\lambda E_1 E_2 \dots E_{n-1} E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \rho) = Spur(E_1 E_2 \dots E_n X E_n \dots E_2 E_1 \rho) \\ &\qquad\qquad\qquad \text{für alle statistischen Operatoren } \rho \\ &\Leftrightarrow E_1 E_2 \dots E_n X E_n \dots E_2 E_1 = \lambda E_1 E_2 \dots E_{n-1} E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 \end{aligned}$$

Die Annahme eines gemischten Zustand als unbekannten Anfangszustand des Systems vor den Messungen führt so zu genau denselben Ergebnissen wie die Annahme eines reinen Zustands.

### 3 Das logisch-algebraische Modell

In der Gleichung (\*), die der Definition der statistischen Vorhersagbarkeit einer Observable zugrunde liegt, tauchen keine Vektoren aus dem Hilbert-Raum mehr auf, sondern nur noch ein Produkt aus den die Meßergebnisse darstellenden orthogonalen Projektionen und der Observable. Es liegt der Verdacht nahe, daß man für die Behandlung der Gleichung (\*) und die Definition der Vorhersagbarkeit einer Observable den ganzen Hilbert-Raum-Formalismus gar nicht braucht, sondern nur eine mathematische Struktur, die die Definition von soetwas wie orthogonalen Projektionen und die Produktbildung erlaubt. Eine solche Struktur sind Algebren (darunter ist im folgenden stets eine assoziative Algebra zu verstehen) über dem Körper der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  mit Eins-Element  $\mathbf{I}$  und einer Involution \* (siehe [2,8]).

Im folgenden sei  $\mathcal{A}$  also eine Algebra über  $\mathbb{C}$  mit Eins-Element  $\mathbf{I}$  und einer Involution \*. Ein Element  $E \in \mathcal{A}$  heißt Projektion, wenn  $E^* = E = E^2$  gilt. Mit  $\mathcal{E}$  wird die Menge aller Projektionen aus  $\mathcal{A}$  bezeichnet. Auf  $\mathcal{E}$  werden durch

$$E \leq F : \Leftrightarrow EF = E \quad \text{und} \quad E' := \mathbf{I} - E$$

für  $E, F \in \mathcal{E}$  eine Ordnungsrelation  $\leq$  und eine Orthokomplementierung ' definiert<sup>[2,5]</sup>. Für  $E, F \in \mathcal{E}$  sind  $E \leq F'$ ,  $F \leq E'$  sowie  $EF = 0$  äquivalent; wenn eine der Bedingungen erfüllt ist, nennt man  $E$  und  $F$  orthogonal.

Wenn  $E, F \in \mathcal{E}$  kommutieren ( $EF = FE$ ), existieren für  $E$  und  $F$  die größte untere Schranke bzgl. der Ordnungsrelation  $\leq$  (Infimum  $E \wedge F$ ) und die kleinste obere Schranke (Supremum  $E \vee F$ ) in  $\mathcal{E}$ , und es gilt  $E \wedge F = EF$  und  $E \vee F = E + F - EF$ . Für ein orthogonales Paar  $E$  und  $F$  folgt  $E \vee F = E + F$ . Wenn  $D, E, F \in \mathcal{E}$  paarweise untereinander kommutieren, so kommutieren auch die aus ihnen gebildeten Produkte untereinander und mit  $D, E, F$ . Es existieren also die paarweise gebildeten Infima und Suprema und erfüllen das Distributiv-Gesetz:

$$(E \wedge D) \vee (F \wedge D) = ED + FD - EDF = (E + F - EF)D = (E \vee F) \wedge D.$$

Für  $E \leq F$  kommutieren  $E$ ,  $F$ ,  $E'$  und  $F'$  paarweise untereinander, so daß  $\mathcal{E}$  das orthomodulare Gesetz<sup>[5]</sup> erfüllt:

$$E \vee (F \wedge E') = (E \wedge F) \vee (E' \wedge F) = (E \vee E') \wedge F = F.$$

Zwei Elemente  $E, F \in \mathcal{E}$  kommutieren ( $EF = FE$ ) genau dann, wenn  $E \wedge F$  und  $E' \wedge F$  existieren und  $(E \wedge F) \vee (E' \wedge F) = F$  erfüllen. Denn aus  $F = (E \wedge F) \vee (E' \wedge F) = (E \wedge F) + (E' \wedge F)$  folgt:

$$EF = E(E \wedge F) + E(E' \wedge F) = E \wedge F \quad \text{und} \quad FE = (EF)^* = (E \wedge F)^* = E \wedge F = EF.$$

Wenn  $\mathcal{A}$  kommutativ ist, bildet  $\mathcal{E}$  also einen Boole'schen Verband. Umgekehrt kann man zu jedem Boole'schen Verband eine kommutative Algebra konstruieren, so daß der Boole'sche Verband mit den Projektionen dieser Algebra zusammenfällt. Denn nach dem Satz von Stone<sup>[7,9]</sup> ist jeder Boole'sche Verband isomorph zu einer Mengenalgebra von Teilmengen einer Menge  $\Omega$ , und die komplexwertigen Funktionen auf  $\Omega$ , die nur endliche viele verschiedene Werte anneh-

men, wobei die Urbilder dieser Werte in der Mengenalgebra liegen, bei den die gewünschte Algebra.

Das System  $\mathcal{L}$  der Projektionen aus  $\mathcal{A}$  mit der Ordnungsrelation  $\leq$  und der Orthokomplementierung ' bildet also offensichtlich eine Verallgemeinerung der Struktur Boole'scher Verband und ist genau dann selbst ein Boole'scher Verband, wenn die Elemente aus  $\mathcal{L}$  paarweise untereinander kommutieren. Daher interpretieren wir jetzt die Projektionen  $E, F \in \mathcal{L}$  als Aussagen (oder Eigenschaften) und die Ordnungsrelation  $\leq$  als logische Implikation;  $E \leq F$  bedeutet: "aus E folgt F". Wenn  $E$  und  $F$  kommutieren, können  $E \wedge F$  sowie  $E \vee F$  gebildet werden, die wir wie üblich als " $E$  und  $F$ " bzw. " $E$  oder  $F$ " deuten.

Eine besondere Rolle spielen diejenigen Aussagen  $E \in \mathcal{L}$ , bei denen  $EXE$  für jedes  $X \in \mathcal{A}$  ein skalares Vielfaches von  $E$  ist. Denn dann wäre jedes  $X \in \mathcal{A}$  unter  $E$  statistisch vorhersagbar (vgl. Abs. 2).

**Definition 1:**  $E \in \mathcal{L}$  heißt (logisches) Atom, wenn  $E \neq 0$  und  $E \wedge E = \mathbb{C}E$  ist.

Ein Atom  $E$  ist ein minimales Element in  $\mathcal{L}$ ; d.h.  $F \in \mathcal{L}, F \leq E \Rightarrow F=0$  oder  $F=E$ . Aber nicht jedes minimale Element muß ein Atom sein. Zum Beispiel die Algebra der stetigen komplexwertigen Funktionen auf dem Intervall  $[0,1]$  besitzt außer  $\mathbf{I}$  und 0 keine weiteren Projektionen (in Funktionenalgebren sind in der Regel diejenigen Funktionen, die nur die beiden Werte 0 und 1 annehmen, die Projektionen);  $\mathbf{I}$  ist also minimal, doch kein Atom. In der Theorie der Boole'schen Verbände<sup>[7]</sup> wird der Begriff "Atom" für minimale Elemente verwandt.

Jetzt können wir das logisch-algebraische Modell, das in Abschnitt 4 für die Behandlung der statistischen Vorhersagbarkeit benötigt wird, definieren.

**Definition 2:** Eine Quanten-Algebra oder kurz Q-Algebra  $\mathcal{A}$  ist eine Algebra über  $\mathbb{C}$  mit Eins-Element  $\mathbf{I}$  und einer Involution \*, die folgende zwei Bedingungen erfüllt:

- (i)  $X \in \mathcal{A}, X^*X=0 \Rightarrow X=0$
- (ii)  $X \in \mathcal{A}, X \neq 0 \Rightarrow$  Es gibt ein Atom  $E$  und ein  $Y \in \mathcal{A}$  mit  $XYE \neq 0$ .

Die Notwendigkeit dieser Bedingungen wird erst an späterer Stelle einsichtig; es wird sich zeigen, daß sie dafür sorgen, daß der Erwartungswert einer Aussage eine vernünftige Wahrscheinlichkeit (d.h. eine Zahl aus dem Einheitsintervall) wird.

Die Bedingung (i) ist eine bekannte, häufig benutzte Forderung an die Involution<sup>[2,8]</sup>. Die Bedingung (ii) stellt sicher, daß genügend Atome und damit auch genügend Projektionen in  $\mathcal{A}$  existieren. Denn ohne sie könnten 0 und  $\mathbf{I}$  die beiden einzigen Projektionen in  $\mathcal{A}$  sein (wie bei der Algebra der stetigen komplexwertigen Funktionen auf dem Intervall  $[0,1]$ ). Man beachte jedoch, daß die Bedingung (ii) im nicht-kommutativen Fall nicht impliziert, daß das System der orthogonalen Projektionen  $\mathcal{L}$  im üblichen Sinn atomistisch ist. Von Orthoverbänden, die atomistisch sind und einige weitere Eigenschaften aufweisen, geht C. Piron in [11] aus.

## Beispiele

- a) die Algebra der meßbaren komplexwertigen Funktionen auf einem meßbaren Raum. Die Involution ist die punktweise komplexe Konjugation.  $\mathcal{L}$  fällt mit der  $\sigma$ -Algebra zusammen.
- b) die Algebra  $L^\infty$  zum Lebesgue-Maß oder einem beliebigen anderen Maß.

- c) die Algebra der komplexen nxn-Matrizen. Für eine Matrix  $X$  ist  $X^*$  die adjungierte Matrix.  $\mathcal{L}$  ist isomorph zu dem Orthoverband der linearen Unterräume des n-dimensionalen unitären Raumes (Hilbert-Raumes).
- d) die Algebra der nxn-Matrizen, deren Komponenten nicht Zahlen, sondern meßbare Funktionen auf einem meßbaren Raum sind. Für eine solche Matrix  $X$  erhält man  $X^*$ , indem man  $X$  an der Diagonale spiegelt (transponiert) und die punktweise komplexe Konjugation der einzelnen Komponenten bildet.
- e) die Algebra der nxn-Matrizen, deren Komponenten Elemente aus  $L^\infty$  sind.
- f) die Algebra der stetigen linearen Operatoren auf einem beliebigen Hilbert-Raum.  $X^*$  ist der adjungierte Operator.  $\mathcal{L}$  ist isomorph zu dem Orthoverband der abgeschlossenen linearen Unterräume des Hilbert-Raumes.

Bei allen Beispielen a) bis f) ist  $\mathcal{L}$  ein Verband (d.h. für alle  $E, F \in \mathcal{L}$  existieren das Infimum  $E \wedge F$  und das Supremum  $E \vee F$ ), doch nur die Beispiele a) und b) erfüllen das Distributiv-Gesetz eines Boole'schen Verbandes.

Bei Beispiel a) sind die Ein-Punkt-Mengen die Atome, sofern die  $\sigma$ -Algebra diese enthält. Denn es gibt auch  $\sigma$ -Algebren ohne Atome (z.B. die Produkt- $\sigma$ -Algebra zu einer überabzählbaren Familie von  $\sigma$ -Algebren). Bei den Beispielen b) und e) gibt es keine Atome, wenn es sich um den  $L^\infty$  zum Lebesgue-Maß handelt. Bei diskreten Maßen können durchaus Atome existieren. Bei den Beispielen c) und f) sind die Projektionen auf die eindimensionalen Teilräume die Atome. Bei Beispiel d) gibt es nur dann Atome, wenn die  $\sigma$ -Algebra welche enthält; falls die Ein-Punkt-Mengen zur  $\sigma$ -Algebra gehören, ist ein Atom eine Matrix aus Funktionen, die alle nur an einem gemeinsam Punkt von 0 verschieden sind, so daß die Zahlen-Matrix, die aus den Werten an diesem Punkt besteht, eine Projektion auf einen eindimensionalen Teilraum ist.

Die Beispiele c) und f) liefern immer eine Q-Algebra, die Beispiele a) und d) dann, wenn die Ein-Punkt-Mengen zur  $\sigma$ -Algebra gehören. Die  $L^\infty$ -Algebra zum Lebesgue-Maß ist selbst keine Q-Algebra (keine Atome), kann jedoch durchaus in eine größere Q-Algebra eingebettet werden (z.B. indem man die Elemente aus dem  $L^\infty$  als stetige Multiplikationsoperatoren auf dem  $L^2$  darstellt). Ähnliches gilt für Beispiel e) und für Beispiele a) und d), wenn bei den Beispielen a) und d) die Ein-Punkt-Mengen nicht zur  $\sigma$ -Algebra gehören.

**Lemma 1:** Sei  $\mathcal{A}$  eine Q-Algebra. Für  $E, F \in \mathcal{L}$ ,  $E \neq 0$  und  $X, Y \in \mathcal{A}$ ,  $Y \neq 0$  gilt:

- (i)  $Y^*XY = \lambda Y^*Y$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow Y^*X^*Y = \bar{\lambda} Y^*Y$
- (ii)  $X = X^*$ ,  $Y^*XY = \lambda Y^*Y$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$
- (iii)  $Y^*X^*XY = \lambda Y^*Y$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda \geq 0$
- (iv)  $Y^*FY = \lambda Y^*Y$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow 0 \leq \lambda \leq 1$
- (v)  $EFE = 0 \Leftrightarrow E \leq F'$
- (vi)  $EFE = E \Leftrightarrow E \leq F$
- (vii)  $EF = FE$  und  $EFE = \lambda E$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda = 0$  und  $F \leq E'$ , oder  $\lambda = 1$  und  $F \leq E$
- (viii)  $XY = YX$ ,  $Y^*XY = \lambda Y^*Y$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow Y^*X^*XY = |\lambda|^2 Y^*Y$
- (ix)  $EXE = \lambda E$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $0 \neq F \leq E \Rightarrow FXF = \lambda F$

**Beweis:** (i)  $Y^*X^*Y = (Y^*XY)^* = (\lambda Y^*Y)^* = \bar{\lambda} Y^*Y$

(ii) Aus (i) folgt:  $\lambda = \bar{\lambda}$ , und daher  $\lambda \in \mathbb{R}$

(iii) Der Beweis wird in zwei Schritten durchgeführt; zunächst wird gezeigt:

$$X \in \mathcal{A}, DX^*XD = \lambda D \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C} \text{ und ein Atom } D \Rightarrow \lambda \geq 0.$$

Wegen (ii) ist  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Wir nehmen an, daß  $\lambda < 0$  ist. Da  $D$  ein Atom ist, existiert zu jedem  $V \in \mathcal{A}$  ein eindeutiges  $\alpha_V \in \mathbb{C}$  mit  $DVD = \alpha_V D$ . Aus (ii) folgt, daß  $\alpha_V$  für  $V = V^*$  eine reelle Zahl ist. Wir betrachten jetzt die Abbildungen

$$\Gamma: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \Gamma(V) = \alpha_V \text{ für } V \in \mathcal{A} \text{ und}$$

$$\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(s) := \Gamma((sX + (1-s)\mathbf{I})^*(sX + (1-s)\mathbf{I})) \text{ für } s \in [0, 1].$$

$\Gamma$  ist linear mit  $\Gamma(\mathbf{I}) = 1$  und  $\Gamma(X^*) = \overline{\Gamma(X)}$ . Es folgt:  $\varphi(s) = s^2 \Gamma(X^*X) + (1-s)^2 + s(1-s) \Gamma(X^*+X)$ .  $\varphi$  ist so ein quadratisches Polynom in  $s$  mit  $\varphi(0) = 1$  und  $\varphi(1) = \Gamma(X^*X) = \lambda < 0$ , hat also eine Nullstelle  $t$  mit  $0 < t < 1$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \varphi(t) = \Gamma((tX + (1-t)\mathbf{I})^*(tX + (1-t)\mathbf{I})) \\ \Rightarrow 0 &= D(tX + (1-t)\mathbf{I})^*(tX + (1-t)\mathbf{I})D = ((tX + (1-t)\mathbf{I})D)^*(tX + (1-t)\mathbf{I})D \\ \Rightarrow 0 &= (tX + (1-t)\mathbf{I})D \Rightarrow 0 = D(tX + (1-t)\mathbf{I})D \\ \Rightarrow 0 &= \Gamma(tX + (1-t)\mathbf{I}) = t \Gamma(X) + 1-t \Rightarrow \Gamma(X) = (t-1)/t = \Gamma(X^*) \\ \Rightarrow 0 &= \varphi(t) = t^2 \Gamma(X^*X) + (1-t)^2 + t(1-t) 2(t-1)/t = t^2 \Gamma(X^*X) - (1-t)^2 \\ \Rightarrow 0 &> \lambda = \Gamma(X^*X) = (1-t)^2/t^2 > 0. \end{aligned}$$

Wir kommen jetzt zu dem zweiten Beweisschritt. Sei  $Y^*X^*XY = \lambda Y^*Y$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Zu  $Y$  existieren ein Atom  $D$  und ein  $Z \in \mathcal{A}$  mit  $YZD \neq 0$ . Da  $D$  ein Atom ist, folgt  $D(YZ)^*YZD = \beta D$  für ein  $\beta \in \mathbb{C}$  und  $D(XYZ)^*XYZD = \gamma D$  für ein  $\gamma \in \mathbb{C}$ . Aus der im ersten Beweisschritt bewiesenen Aussage ergibt sich:  $\beta \geq 0$  und  $\gamma \geq 0$ . Wenn  $\beta = 0$  wäre, so wäre  $0 = D(YZ)^*YZD = (YZD)^*YZD$ , woraus sich  $YZD = 0$  ergeben würde. Also ist  $\beta > 0$ . Dann folgt:

$$\gamma D = D(XYZ)^*XYZD = DZ^*(Y^*X^*XY)ZD = \lambda DZ^*Y^*YZD = \lambda \beta D \Rightarrow \lambda = \gamma/\beta \geq 0.$$

(iv) Man wende (iii) auf  $X=F$  und  $X=F'$  an. Wegen der Projektionseigenschaften ist  $F^*F=F$  und  $(F')^*F'=F'$ .

(v)  $0 = EFE = (FE)^*FE \Leftrightarrow FE = 0 \Leftrightarrow FE' = F \Leftrightarrow F \leq E'$ .

(vi)  $E = EFE \Leftrightarrow 0 = EF'E \Leftrightarrow E \leq F$  mit (v)

(vii)  $\lambda E = EFE = EF = (FE)^2 = (\lambda E)^2 = \lambda^2 E \Rightarrow \lambda = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = 0$  oder  $\lambda = 1$ . Dann wende man (v),(vi) an.

(viii)  $XY = YX, Y^*XY = \lambda Y^*Y \Rightarrow Y^*X^*XY = Y^*X^*YX = \bar{\lambda} Y^*YX = \bar{\lambda} Y^*XY = |\lambda|^2 Y^*Y$

(ix)  $EXE = \lambda E, 0 \neq F \leq E \Rightarrow F = FE = EF \Rightarrow FXF = FEXEF = \lambda FEF = \lambda F. \square$

Für den Beweis von (iii) bis (vii) werden die beiden Bedingungen aus der Definition der Q-Algebra benötigt. Hier wird die Notwendigkeit dieser Bedingungen ersichtlich. Sie stellen sicher, daß die Wahrscheinlichkeit, die im nächsten Abschnitt definiert wird, eine Zahl zwischen 0 und 1 ist.

## 4 Statistische und deterministische Vorhersagbarkeit

Die folgende Definition ist größtenteils eine Wiederholung der früheren Definition A - jedoch jetzt unabhängig von dem Hilbert-Raum-Formalismus in dem allgemeinen Rahmen einer Q-Algebra.

**Definition 3:** Sei  $\mathcal{A}$  eine Q-Algebra,  $X \in \mathcal{A}$ ,  $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{L}$  mit  $E_1 E_2 \dots E_n \neq 0$ .

(i) Falls für  $\lambda \in \mathbb{C}$  die Beziehung

$$E_1 E_2 \dots E_n X E_n E_{n-1} \dots E_1 = \lambda E_1 E_2 \dots E_{n-1} E_n E_{n-1} \dots E_1$$

gilt, sagen wir "X ist unter  $E_1, \dots, E_n$  statistisch vorhersagbar mit Erwartungswert  $\lambda$ " und schreiben

$$\mathbb{E}(X | E_1 E_2 \dots E_n) = \lambda.$$

- (ii) Für eine Aussage F schreiben wir statt  $\mathbb{E}(F | E_1 E_2 \dots E_n)$  auch  $\mathbb{P}(F | E_1 E_2 \dots E_n)$  und interpretieren  $\mathbb{P}(F | E_1 E_2 \dots E_n)$  als die Wahrscheinlichkeit für die Gültigkeit der Aussage F, wenn n Messungen nacheinander die Ergebnisse  $E_1, \dots, E_n$  in genau dieser Reihenfolge erbracht haben.
- (iii) Wenn für  $X=X^*$  sowohl X als auch  $X^2$  unter  $E_1, \dots, E_n$  statistisch vorhersagbar sind, definieren wir die Varianz von X unter  $E_1, \dots, E_n$  durch

$$\mathbb{V}(X | E_1 E_2 \dots E_n) := \mathbb{E}(X^2 | E_1 E_2 \dots E_n) - (\mathbb{E}(X | E_1 E_2 \dots E_n))^2,$$

und wenn die Varianz verschwindet, sprechen wir von deterministischer Vorhersagbarkeit.

Eine Aussage F ist unter  $E_1, \dots, E_n$  genau dann deterministisch vorhersagbar, wenn statistische Vorhersagbarkeit mit  $\mathbb{P}(F | E_1 E_2 \dots E_n) = 1$  oder  $\mathbb{P}(F | E_1 E_2 \dots E_n) = 0$  vorliegt. Denn

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{V}(F | E_1 E_2 \dots E_n) = \mathbb{E}(F^2 | E_1 E_2 \dots E_n) - (\mathbb{E}(F | E_1 E_2 \dots E_n))^2 \\ &= \mathbb{P}(F | E_1 E_2 \dots E_n) - (\mathbb{P}(F | E_1 E_2 \dots E_n))^2 \end{aligned}$$

ist äquivalent zu  $\mathbb{P}(F | E_1 E_2 \dots E_n) = 1$  oder  $\mathbb{P}(F | E_1 E_2 \dots E_n) = 0$ .

Wenn  $X, Y \in \mathcal{A}$  statistisch vorhersagbar und  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  sind, ist auch  $\alpha X + \beta Y$  vorhersagbar, und es gilt

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y | E_1 E_2 \dots E_n) = \alpha \mathbb{E}(X | E_1 E_2 \dots E_n) + \beta \mathbb{E}(Y | E_1 E_2 \dots E_n).$$

$\mathbb{P}(F | E_1 E_2 \dots E_n)$  ist also additiv in F (für paarweise orthogonale Aussagen), liegt in dem Intervall  $[0, 1]$ , und nimmt für  $F = E_n$  den Wert 1 an, verhält sich also wie eine auf  $E_n$  konzentrierte Wahrscheinlichkeit.

Wenn  $X \in \mathcal{A}$  mit  $X=X^*$  statistisch vorhersagbar ist, folgt mit Lemma 1 (ii), daß der Erwartungswert eine reelle Zahl ist. Wenn  $X^*X$  für ein  $X \in \mathcal{A}$  statistisch vorhersagbar ist, so folgt mit Lemma 1 (iii), daß der Erwartungswert eine nicht-negative reelle Zahl ist.

Wenn  $X \in \mathcal{A}$  unter  $E \in \mathcal{E}$ ,  $E \neq 0$ , vorhersagbar und  $0 \neq F \leq E$  ist, so ist  $X$  wegen Lemma 1 (ix) auch unter  $F$  vorhersagbar mit  $\mathbb{E}(X|F) = \mathbb{E}(X|E)$ . Je kleiner die Aussage  $E$  ist, um so mehr  $X$  aus  $\mathcal{A}$  sind unter  $E$  vorhersagbar und um so mehr Information beinhaltet die Aussage  $E$  also. Wenn jedoch  $X$  und  $X^2$  bereits unter einer Aussage  $E$  statistisch vorhersagbar sind (und  $X=X^*$  ist), so ändern Erwartungswert und Varianz von  $X$  sich nicht mehr, wenn man sie bezüglich einer anderen kleineren, also mehr Information beinhaltenden Aussage  $F$  bildet. Wenn statistische und keine deterministische Vorhersagbarkeit ( $\mathbb{W}(X|E) \neq 0$ ) vorliegt, kann das Besorgen weiterer Information nichts daran ändern. Die positive Varianz ist objektiv vorhanden und nicht auf einen Informationsmangel zurückzuführen. Das ist ein großer Unterschied zur mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie. Positive Varianzen und Wahrscheinlichkeiten, die von 0 oder 1 verschieden sind, haben dort immer einen subjektiven Charakter. Ihre Ursache liegt in einem Informationsmangel, und durch das Besorgen zusätzlicher Information können sie immer weiter verbessert werden.

Wenn  $X=X^*$  ist,  $X$  und  $E$  kommutieren und  $X$  unter  $E$  statistisch vorhersagbar ist, so folgt mit Lemma 1 (viii):

$$\mathbb{E}(X^2|E) = (\mathbb{E}(X|E))^2 \text{ und } \mathbb{W}(X|E) = 0,$$

so daß deterministische Vorhersagbarkeit vorliegt, wie man es in der klassischen Physik gewohnt war. Falls zwei Aussagen  $E$  und  $F$  kommutieren und  $F$  unter  $E$  vorhersagbar ist, folgt mit Lemma 1 (vii), daß entweder  $\mathbb{P}(F|E)=1$  und  $E \leq F$  oder  $\mathbb{P}(F|E)=0$  und  $E \leq F'$  ist. Im Boole'schen (kommutativen) Fall gibt es also nur die deterministische Vorhersagbarkeit, die bei Aussagen gleichbedeutend mit der logischen Implikation ist. Positive Varianzen und von 0 oder 1 verschiedenen Wahrscheinlichkeiten bei der statistischen Vorhersagbarkeit können also nur ein Phänomen einer nicht-Boole'schen Logik sein. Auch das ist wieder ein wesentlicher Unterschied zur mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie, die auf Boole'schen Strukturen beruht. Daß dieses Phänomen von der Theorie her auftreten kann, zeigen die folgenden Beispiele. Daß es auch in der Natur tatsächlich auftritt, zeigen viele quantenphysikalische Experimente (vgl. Abs. 5).

Sei  $\mathcal{A}$  die Algebra der stetigen linearen Operatoren auf einem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  (Beispiele c) und f)),  $X \in \mathcal{A}$  und seien  $E, F$  die Projektionen auf die von zwei normierten Vektoren  $\eta$  bzw.  $\xi$  aus  $\mathcal{H}$  aufgespannten eindimensionalen linearen Teilräume. Dann gilt:

$$\begin{aligned} EFE &= |\langle \eta | \eta \rangle \langle \xi | \xi \rangle \langle \eta | \eta \rangle| = |\langle \eta | \xi \rangle|^2 E \text{ und daher } \mathbb{P}(F|E) = |\langle \eta | \xi \rangle|^2 \text{ sowie} \\ EXE &= |\langle \eta | \eta \rangle X \langle \eta | \eta \rangle| = \langle \eta | X \eta \rangle E \text{ und daher } \mathbb{E}(X|E) = \langle \eta | X \eta \rangle. \end{aligned}$$

Das erklärt, warum in der Quantentheorie das Quadrat des Betrages des Skalarproduktes in dem Hilbert-Raum eine Wahrscheinlichkeit ist. Sei nun  $\mathcal{A}$  die Algebra der komplexen  $2 \times 2$ -Matrizen; für

$$\eta = (0, 1) \text{ und } \xi = \sqrt{2} (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

zum Beispiel ist  $\mathbb{P}(F|E) = \frac{1}{2}$ , so daß eine statistische, aber nicht deterministische Vorhersagbarkeit vorliegt.

Nun sind  $E$  und  $F$  in diesem Fall die Projektionen auf 1-dimensionale Räume, d.h. Atome. Daß statistische Vorhersagbarkeit auch bei Aussagen, die keine Atome sind, auftreten kann, zeigt das nächste Beispiel. Sei  $\mathcal{A}$  die Algebra der komplexen  $4 \times 4$ -Matrizen und

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E$  und  $F$  sind orthogonale Projektionen auf 2-dimensionale Räume mit  $EFE = \frac{1}{2} E$ , so daß auch hier  $\mathbb{I}P(F|E) = \frac{1}{2}$  ist.

Die Kenntnis der Gültigkeit einer Aussage, die ein Atom ist, bedeutet maximal mögliche Information zu haben. Denn dann sind alle  $X \in \mathcal{A}$  statistisch vorhersagbar, im kommutativen (Boole'schen) Fall sogar deterministisch vorhersagbar. Im allgemeinen Fall bleibt selbst bei maximal möglicher Information immer noch eine Unbestimmtheit über. Das zeigte das vorletzte Beispiel. Wie grundsätzlich dieser Indeterminismus ist, zeigt die Unschärfe-Relation.

**Satz 1 (Unschärfe-Relation):** Sei  $\mathcal{A}$  eine Q-Algebra, und seien  $X, Y \in \mathcal{A}$ ,  $X=X^*$ ,  $Y=Y^*$ , und  $E \in \mathcal{L}$  ein Atom. Dann gilt:

$$\mathbb{M}(X|E) \mathbb{M}(Y|E) \geq \frac{1}{4} |\mathbb{E}(XY - YX|E)|^2.$$

**Beweis:** Durch  $\rho(V,W) := \mathbb{E}(V^*W|E)$  wird eine positiv semi-definite hermite'sche Form auf  $\mathcal{A}$  definiert ( $V, W \in \mathcal{A}$ ), so daß die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung gilt:

$$|\rho(V,W)|^2 \leq \rho(V,V)\rho(W,W) \text{ für alle } V, W \in \mathcal{A}.$$

Indem man  $V = X - \mathbb{E}(X|E)\mathbf{I}$  und  $W = Y - \mathbb{E}(Y|E)\mathbf{I}$  setzt, folgt

$$\begin{aligned} \rho(V,V) &= \mathbb{M}(X|E) \text{ und } \rho(W,W) = \mathbb{M}(Y|E) \text{ sowie} \\ \mathbb{M}(X|E) \mathbb{M}(Y|E) &\geq |\rho(V,W)|^2 \geq |\text{Im } \rho(V,W)|^2 = \left| \frac{1}{2} \mathbb{E}(XY - YX|E) \right|^2. \quad \square \end{aligned}$$

Wir wollen uns nun noch einmal dem quantenphysikalischen Meßprozeß in dem neuen Licht zuwenden.

## 5 Der quantenphysikalische Meßprozeß in dem Q-Algebra-Formalismus

Im folgenden bezeichnen  $\mathcal{A}$  immer eine Q-Algebra,  $\mathcal{L}$  das System der Projektionen in  $\mathcal{A}$ ,  $X$  ein Element aus  $\mathcal{A}$  mit  $X=X^*$ . Wir nehmen an, daß eine Reihe von  $n$  Messungen nacheinander Resultate geliefert hat, die durch die Elemente  $E_1, \dots, E_n$  aus  $\mathcal{L}$ , deren Produkt nicht verschwindet, repräsentiert werden.

Zunächst nehmen wir an, daß  $X$  unter  $E_n$  allein statistisch vorhersagbar ist mit  $\mathbb{E}(X|E_n)=\alpha$ . Dann folgt  $E_nXE_n=\alpha E_n$  und  $E_1E_2\dots E_n X E_n E_{n-1}\dots E_1 = \alpha E_1 E_2 \dots E_{n-1} E_n E_{n-1} \dots E_1$ , also ist  $X$  unter  $E_1, \dots, E_n$  statistisch vorhersagbar mit demselben Erwartungswert wie unter  $E_n$  allein

$$\mathbb{E}(X|E_1E_2\dots E_n) = \alpha = \mathbb{E}(X|E_n),$$

so daß die Kenntnis der ersten  $n-1$  Messungen keine Rolle spielt.

Indem man  $X = E_n$  setzt, erhält man  $\mathbb{P}(E_n|E_1E_2\dots E_n) = \mathbb{P}(E_n|E_n) = 1$ . Wenn man die gleiche Messung zweimal direkt hintereinander durchführt, reproduziert die zweite deterministisch das Ergebnis der ersten.

Wenn  $E_n$  ein Atom ist, haben alle vorherigen Messungen keine Relevanz mehr - ganz gleich über welches  $X$  in  $\mathcal{A}$  man eine Vorhersage machen möchte. Auch dann, wenn beispielsweise  $X=E_{n-1}$  ist, hat die vorherige Messung mit dem Ergebnis  $E_{n-1}$  keine Relevanz mehr für die erneute Überprüfung von  $E_{n-1}$ , wenn zwischendurch eine weitere Messung mit dem Ergebnis  $E_n$  stattgefunden hat.

Wir betrachten noch einmal das Beispiel von Abschnitt 4, die Algebra der komplexen  $2\times 2$ -Matrizen, und für  $E_n$  und  $E_{n-1}$  wählen wieder die Projektionen auf die von

$$\eta=(0,1) \text{ und } \xi=\sqrt{2}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$$

aufgespannten eindimensionalen Räume. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(E_{n-1}|E_1E_2\dots E_n) = \mathbb{P}(E_{n-1}|E_{n-1}E_n) = \mathbb{P}(E_{n-1}|E_n) = |\langle \eta | \xi \rangle|^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Wenn man zunächst die Gültigkeit von  $E_{n-1}$  feststellt, dann die von  $E_n$ , um danach wieder die von  $E_{n-1}$  zu prüfen, muß die erneute Prüfung von  $E_{n-1}$  nicht zu demselben Ergebnis führen wie die erste, sondern liefert nur mit Wahrscheinlichkeit  $\tfrac{1}{2}$  wieder dasselbe Ergebnis, mit der gleichen Wahrscheinlichkeit aber auch nicht. Eine durch eine erste Messung gewonnene Information kann durch eine weitere Messung vernichtet werden, wenn die Eigenschaft, die bei der ersten Messung interessierte, „nicht verträglich“ ist mit der Eigenschaft, die bei der zweiten Messung geprüft wird, und „Verträglichkeit“ ist nur bei kommutierenden Aussagen gewährleistet. Denn wenn  $E_n$  und  $E_{n-1}$  kommutieren gilt:

$$\mathbb{P}(E_{n-1}|E_1E_2\dots E_{n-1}E_n) = \mathbb{P}(E_{n-1}|E_1E_2\dots E_nE_{n-1}) = 1.$$

So seltsam diese Phänomene auch zunächst erscheinen mögen, sie kommen tatsächlich in der Natur vor und sind seit langem das alltägliche Geschäft des Quantenphysikers. Beispielsweise zeigt ein Teilchen mit Spin  $\tfrac{1}{2}\hbar$  genau das oben beschriebene Verhalten. Die x-Komponente und die y-Komponente des Spins können beide nur die Werte  $+\tfrac{1}{2}\hbar$  und  $-\tfrac{1}{2}\hbar$  annehmen. Wenn man bei einer Messung der x-Komponente  $+\tfrac{1}{2}\hbar$  festgestellt hat und danach wiederum die x-Komponente mißt, stellt man deterministisch wieder  $+\tfrac{1}{2}\hbar$  fest. Wenn man aber zwischendurch die y-Komponente gemessen und  $+\tfrac{1}{2}\hbar$  festgestellt hat, ist der Ausgang bei einer zweiten Messung der x-Komponente nicht deterministisch; vielmehr sind die Ausgänge  $+\tfrac{1}{2}\hbar$  und  $-\tfrac{1}{2}\hbar$  beide mit gleicher Wahrscheinlichkeit möglich. So zeigt es das physikalische Experiment (und so sagt es auch die Quantenmechanik voraus). Dasselbe gilt, wenn man bei der y-Komponente  $-\tfrac{1}{2}\hbar$  gemessen hat.

Wenn man die gleiche Messung zweimal hintereinander durchführt ( $X = E_i$ ), reproduziert die zweite nur dann deterministisch das Ergebnis der ersten, wenn zwischendurch keine weiteren Messungen (s.o.) oder nur Messungen zu Eigenschaften  $(E_{i+1}, \dots, E_n)$  stattgefunden haben, die mit

der bei den beiden gleichen Messungen geprüften Eigenschaft ( $E_i$ ) verträglich sind (kommutieren). Denn es folgt

$$E_1 E_2 \dots E_n E_i E_n E_{n-1} \dots E_1 = E_1 E_2 \dots E_n E_{n-1} \dots E_1$$

durch sukzessives Vertauschen von dem mittleren  $E_i$  mit seinem linken Nachbarn bis zu einem der beiden anderen  $E_i$  und somit

$$\mathbb{P}(E_i | E_1 E_2 \dots E_n) = 1.$$

Nun kehren wir wieder zu der allgemeinen Situation zurück und nehmen an, daß eines der  $E_i$  mit  $i < n$  ein Atom ist. Dann ist  $E_i E_{i+1} \dots E_n X E_n \dots E_i = \beta E_i$  und  $E_i E_{i+1} \dots E_{n-1} E_n E_{n-1} \dots E_i = \gamma E_i$  für reelle Zahlen  $\beta$  und  $\gamma$ . Wegen  $E_1 E_2 \dots E_n \neq 0$  ist  $E_i E_{i+1} \dots E_{n-1} E_n \neq 0$  und  $E_i E_{i+1} \dots E_{n-1} E_n E_{n-1} \dots E_i = E_i E_{i+1} \dots E_{n-1} E_n (E_i E_{i+1} \dots E_{n-1} E_n)^* \neq 0$ , also  $\gamma \neq 0$ . Es folgt:

$$E_1 E_2 \dots E_n X E_n E_{n-1} \dots E_1 = \beta E_1 E_2 \dots E_{i-1} E_i E_{i+1} \dots E_1 = \beta/\gamma E_1 E_2 \dots E_n E_{n-1} \dots E_1, \text{ d.h.}$$

$$\mathbb{E}(X | E_1 E_2 \dots E_n) = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\mathbb{E}(E_{i+1} \dots E_n X E_n \dots E_{i+1} | E_i)}{\mathbb{E}(E_{i+1} \dots E_{n-i} E_n E_{n-1} | E_i)}.$$

Also ist  $X$  unter  $E_1, \dots, E_n$  statistisch vorhersagbar, und der Erwartungswert ist unabhängig von den Ergebnissen der ersten  $i-1$  Messungen.

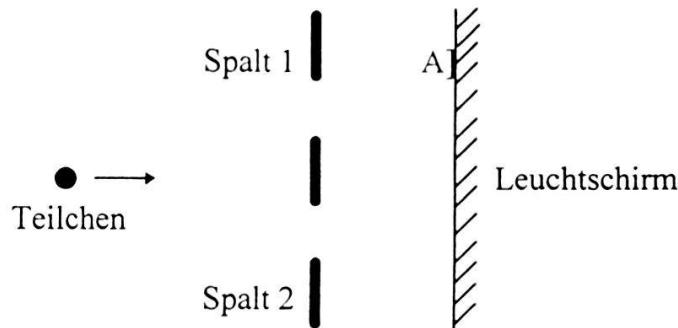
Jetzt betrachten wir den Fall  $n=2$ , wobei  $E_1$  ein Atom und  $E_2$  die Summe zweier orthogonaler Aussagen  $F_1$  und  $F_2$  sein soll ( $E_2 = F_1 + F_2 = F_1 \vee F_2$ ). Dann folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X | E_1 (F_1 \vee F_2)) &= \frac{\mathbb{E}((F_1 + F_2) X (F_1 + F_2) | E_1)}{\mathbb{E}(F_1 + F_2 | E_1)} \\ &= \frac{\mathbb{E}(F_1 X F_1 | E_1)}{\mathbb{E}(F_1 + F_2 | E_1)} + \frac{\mathbb{E}(F_2 X F_2 | E_1)}{\mathbb{E}(F_1 + F_2 | E_1)} + \frac{\mathbb{E}(F_1 X F_2 | E_1)}{\mathbb{E}(F_1 + F_2 | E_1)} + \frac{\mathbb{E}(F_2 X F_1 | E_1)}{\mathbb{E}(F_1 + F_2 | E_1)} \\ &= \frac{\mathbb{E}(F_1 X F_1 | E_1)}{\mathbb{P}(F_1 | E_1)} \frac{\mathbb{P}(F_1 | E_1)}{\mathbb{P}(F_1 + F_2 | E_1)} + \frac{\mathbb{E}(F_2 X F_2 | E_1)}{\mathbb{P}(F_2 | E_1)} \frac{\mathbb{P}(F_2 | E_1)}{\mathbb{P}(F_1 + F_2 | E_1)} \\ &\quad + \frac{\mathbb{E}(F_1 X F_2 | E_1)}{\mathbb{E}(F_1 + F_2 | E_1)} + \frac{\mathbb{E}(F_2 X F_1 | E_1)}{\mathbb{E}(F_1 + F_2 | E_1)} \\ &= \mathbb{E}(X | E_1 F_1) \frac{\mathbb{P}(F_1 | E_1)}{\mathbb{P}(F_1 + F_2 | E_1)} + \mathbb{E}(X | E_1 F_2) \frac{\mathbb{P}(F_2 | E_1)}{\mathbb{P}(F_1 + F_2 | E_1)} + 2 \frac{\operatorname{Re} \mathbb{E}(F_1 X F_2 | E_1)}{\mathbb{E}(F_1 + F_2 | E_1)} \end{aligned}$$

Falls  $X$  mit  $F_1$  oder  $F_2$  kommutiert, ist  $F_1XF_2=0$  wegen der Orthogonalität von  $F_1$  und  $F_2$  ( $F_1F_2=0$ ), so daß der dritte Term verschwindet und die Gleichung genau unserer intuitiven Erwartung entspricht. Die ersten beiden Terme bilden eine konvexe Kombination der beiden Erwartungen  $E(X|E_1F_1)$  und  $E(X|E_1F_2)$ . Das entspricht dem aus der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie bekannten Verhalten.

Im allgemeinen Fall verschwindet der dritte Term jedoch nicht und ist nicht einmal positiv. Er bewirkt eine Interferenzerscheinung, deren Ursprung wieder in der nicht-Boole'schen Logik liegt. Genau diese Interferenz wird bei den quantenphysikalischen Interferometrie-Experimenten beobachtet.

Wir betrachten das Zwei-Spalt-Experiment mit Punkt-Teilchen (Fig. 1). Ein Teilchen, dessen Impuls bekannt ist, bewegt sich auf einen Leuchtschirm zu, der an dem Aufschlagpunkt ein Lichtsignal erzeugt (oder auf andere Art den Aufschlagpunkt erkennbar macht). Vor dem Leuchtschirm befindet sich eine Wand mit zwei Spalten. Das Teilchen prallt entweder gegen die Wand und wird reflektiert oder fliegt durch einen der beiden Spalte, so daß es auf den Leuchtschirm trifft.



**Fig. 1:** Der Zwei-Spalt-Versuch

Sei  $E_1$  die Aussage „Das Teilchen hat zu Beginn den Impuls  $k$ “,  $F_1$  die Aussage „Das Teilchen fliegt durch Spalt 1“ und  $F_2$  die Aussage „Das Teilchen fliegt durch Spalt 2“. Außerdem betrachten wir zu einer kleinen Fläche  $A$  auf dem Leuchtschirm die Aussage „Das Teilchen trifft den Leuchtschirm in dieser Fläche  $A$ “, die wir mit  $D$  bezeichnen und für  $X$  einsetzen. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} P(D|E_1(F_1 \vee F_2)) = & P(D|E_1F_1) \frac{P(F_1|E_1)}{P(F_1 + F_2|E_1)} + P(D|E_1F_2) \frac{P(F_2|E_1)}{P(F_1 + F_2|E_1)} \\ & + 2 \frac{\operatorname{Re} E(F_1XF_2|E_1)}{E(F_1 + F_2|E_1)} \end{aligned}$$

$P(D|E_1F_1)$  ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen den Leuchtschirm in der Fläche  $A$  trifft, wenn nur Spalt 1 offen ist. Entsprechend ist  $P(D|E_1F_2)$  diese Wahrscheinlichkeit, wenn nur Spalt 2 offen ist.  $P(D|E_1(F_1 \vee F_2))$  ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen den Leuchtschirm in der Fläche  $A$  trifft, wenn beide Spalte offen sind und nicht feststellbar ist, durch welchen Spalt das Teilchen fliegt. Der dritte Term in der obigen Gleichung erklärt dann die bei

Zwei-Spalt-Experimenten beobachtete Interferenz daraus, daß die Aussagen  $F_1$  und  $F_2$  beide nicht mit der Aussage D kommutieren.

Wir kehren noch einmal zurück zu dem Beispiel f), bei dem  $\mathcal{A}$  die Algebra der stetigen linearen Operatoren auf einem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  ist. Wir nehmen an, daß  $D, E$  und  $F_1, F_2$  die orthogonalen Projektionen auf die von den normierten Vektoren  $\psi, \xi$  und  $\eta_1, \eta_2$  ( $\eta_1 \perp \eta_2$ ) aufgespannten 1-dimensionalen Räume sind. Dann folgt:

$$\begin{aligned} P(D|E(F_1 \vee F_2)) &= \frac{E((F_1 + F_2)D(F_1 + F_2)|E)}{P(F_1 + F_2|E)} \\ &= \frac{E(F_1 DF_1|E) + E(F_2 DF_2|E) + E(F_1 DF_2|E) + E(F_2 DF_1|E)}{P(F_1|E) + P(F_2|E)} \\ &= \frac{|\langle \xi | \eta_1 \rangle \langle \eta_1 | \psi \rangle|^2 + |\langle \xi | \eta_2 \rangle \langle \eta_2 | \psi \rangle|^2 + \langle \xi | \eta_1 \rangle \langle \eta_1 | \psi \rangle \langle \psi | \eta_2 \rangle \langle \eta_2 | \xi \rangle + \langle \xi | \eta_2 \rangle \langle \eta_2 | \psi \rangle \langle \psi | \eta_1 \rangle \langle \eta_1 | \xi \rangle}{|\langle \xi | \eta_1 \rangle|^2 + |\langle \xi | \eta_2 \rangle|^2} \\ &= \frac{|\langle \xi | \eta_1 \rangle \langle \eta_1 | \psi \rangle + \langle \xi | \eta_2 \rangle \langle \eta_2 | \psi \rangle|^2}{|\langle \xi | \eta_1 \rangle|^2 + |\langle \xi | \eta_2 \rangle|^2} \end{aligned}$$

In dem letzten Term werden zunächst komplexe Zahlen addiert, um dann das Quadrat des Betrages der Summe zu bilden (Zähler des Bruchs), und erhält dann durch ein geeignete Normierung (Division durch Nenner) eine Wahrscheinlichkeit. Das entspricht der Superposition der Wellenfunktionen in der Quantenmechanik und der bekannten Erklärung der Interferenz.

Die Interferenz ist wieder ein Phänomen, das die hier bei der statistischen Vorhersagbarkeit auftretenden Wahrscheinlichkeiten deutlich von denen der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie unterscheidet und das mit einem Boole'schen Aussagenmodell nicht zu erklären ist.

## 6 Das Verhältnis zur Boole'schen Logik

Bezüglich der Boole'schen Logik muß man zweierlei anmerken. Zum einen ist sie ja in der Theorie der Q-Algebren als Spezialfall enthalten (Kommutativität der Q-Algebra), zum anderen gilt sie selbst im nicht-Boole'schen Fall für diejenigen Aussagen, die unter einer vorgegebenen Aussage  $E$  deterministisch vorhersagbar sind, in einem gewissen Sinn weiterhin. Das bedarf der Erläuterung.

Wir wissen, daß  $F$  genau dann deterministisch vorhersagbar unter  $E$  ist, wenn entweder  $E \leq F$  oder  $E \leq F'$  ist. Bei fest vorgegebenem  $E$  heißt  $E \leq F$ , daß  $F$  wahr ist, und  $E \leq F'$  bedeutet, daß  $F'$  wahr bzw.  $F$  falsch ist. Wir zeigen jetzt, daß die Boole'sche Logik für Sätze der Gestalt „ $F$  ist wahr“ für Aussagen  $F$ , die unter  $E$  deterministisch vorhersagbar sind, gilt. Dabei müssen wir im Gegensatz zu den bisherigen Betrachtungen voraussetzen, daß  $\mathcal{E}$  ein Verband ist, d.h. daß Infimum  $E \wedge F$  und Supremum  $E \vee F$  für alle Aussagenpaare  $E, F$  in  $\mathcal{E}$  existieren.

Wenn  $F, F_1, F_2$  deterministisch vorhersagbar unter  $E$  sind, so sind es also auch  $F'$ ,  $F_1 \wedge F_2$  und  $F_1 \vee F_2$ . Denn es folgt:

- i.  $F$  wahr  $\Rightarrow F'$  falsch
- ii.  $F'$  wahr  $\Rightarrow F$  falsch
- iii.  $F_1$  wahr und  $F_2$  wahr  $\Rightarrow E \leq F_1$  und  $E \leq F_2 \Rightarrow E \leq F_1 \wedge F_2 \Rightarrow F_1 \wedge F_2$  wahr
- iv.  $F_1$  falsch oder  $F_2$  falsch  $\Rightarrow E \leq F_1'$  oder  $E \leq F_2' \Rightarrow F_1 \leq E'$  oder  $F_2 \leq E' \Rightarrow F_1 \wedge F_2 \leq E' \Rightarrow E \leq (F_1 \wedge F_2)' \Rightarrow F_1 \wedge F_2$  falsch
- v.  $F_1$  wahr oder  $F_2$  wahr  $\Rightarrow E \leq F_1$  oder  $E \leq F_2 \Rightarrow E \leq F_1 \vee F_2 \Rightarrow F_1 \vee F_2$  wahr
- vi.  $F_1$  falsch und  $F_2$  falsch  $\Rightarrow E \leq F_1'$  und  $E \leq F_2' \Rightarrow F_1 \leq E'$  und  $F_2 \leq E' \Rightarrow F_1 \vee F_2 \leq E' \Rightarrow E \leq (F_1 \vee F_2)' \Rightarrow F_1 \vee F_2$  falsch

Damit sind die üblichen Wahrheitstafeln erfüllt, und es gilt das Distributiv-Gesetz zwar nicht in der Form  $(F_1 \vee F_2) \wedge F = (F_1 \wedge F) \vee (F_2 \wedge F)$ , aber in der Form

$$(F_1 \vee F_2) \wedge F \text{ wahr} \Leftrightarrow (F_1 \wedge F) \vee (F_2 \wedge F) \text{ wahr.}$$

Denn für  $(F_1 \vee F_2) \wedge F$  und  $(F_1 \wedge F) \vee (F_2 \wedge F)$  kann man mit i. - vi. die Wahrheitstafeln aufstellen, und beide sind identisch (Fig. 2 und 3). "w" bedeutet "wahr", und "f" bedeutet "falsch".

$F$	$F_1$	$F_2$	$F_1 \vee F_2$	$(F_1 \vee F_2) \wedge F$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
f	w	w	w	f
w	f	f	f	f
f	f	w	w	f
f	w	f	w	f
f	f	f	f	f

Fig. 2: Wahrheitstafel für  $(F_1 \vee F_2) \wedge F$

$F$	$F_1$	$F_2$	$F_1 \wedge F$	$F_2 \wedge F$	$(F_1 \wedge F) \vee (F_2 \wedge F)$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	w
w	f	w	f	w	w
f	w	w	f	f	f
w	f	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f
f	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f

Fig. 3: Wahrheitstafel für  $(F_1 \wedge F) \vee (F_2 \wedge F)$

Allerdings führen solche Überlegungen zu einer Relativierung des Wahrheitsbegriffes. Eine Aussage ( $F$ ) ist nur dann wahr, wenn man sie entweder direkt beobachtet hat oder wenn man sie durch logisches Schließen aus einer anderen direkt beobachteten Aussagen ( $E$ ) erhält. Die Beobachtung einer anderen, mit  $E$  nicht verträglichen Aussage verändert das gesamte System der dann wahren Aussagen;  $F$  muß dann nicht mehr dazugehören.

## 7 Die Universalität des Hilbert-Raumes

Bevor wir uns dem allgemeinen Fall widmen, betrachten wir vorher noch einmal die kommutativen Q-Algebren.

**Satz 2:** Jede kommutative Q-Algebra  $\mathcal{A}$  ist isomorph zu einer Algebra von komplexwertigen Funktionen auf einer geeigneten Menge.

**Beweis:** Sei  $\Omega$  die Menge aller Atome von  $\mathcal{A}$ . Zu  $X \in \mathcal{A}$  definieren wir die Funktion  $\hat{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ :  $\hat{X}(E) := \mathbb{E}(X|E)$ . Die Abbildung  $X \mapsto \hat{X}$  ist linear und bildet  $X^*$  auf die komplexe-konjugierte Funktion zu  $\hat{X}$  ab. Die Multiplikativität folgt für  $X, Y \in \mathcal{A}$  so:

$$EXYE = EXEEYE = (\mathbb{E}(X|E)E)(\mathbb{E}(Y|E)E) = \mathbb{E}(X|E) \mathbb{E}(Y|E) E.$$

Es bleibt die Injektivität zu zeigen. Sei  $X \neq 0$ . Dann existieren ein Atom  $E$  und ein  $Y \in \mathcal{A}$  mit

$$0 \neq XYE = YXE \Rightarrow 0 \neq XE = EXE \Rightarrow \hat{X}(E) \neq 0. \square$$

Ähnlich wie in [8] (dort im Zusammenhang mit minimalen Idealen) konstruieren wir jetzt zu  $\mathcal{A}$  einen Hilbert-Raum, auf dem wir die Elemente aus  $\mathcal{A}$  als lineare Operatoren darstellen können.

**Satz 3:** (i) Sei  $\mathcal{A}$  eine Q-Algebra. Dann gibt es einen Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$ , einen dichten Teilraum  $\mathcal{H}_o$  von  $\mathcal{H}$  und eine Abbildung  $\Pi$  von  $\mathcal{A}$  in den Raum der linearen Operatoren von  $\mathcal{H}_o$  nach  $\mathcal{H}_o$ , die linear, multiplikativ sowie injektiv ist und mit der Involution vertauscht.  $\Pi$  bildet  $\mathcal{E}$  auf stetige orthogonale Projektionen ab.

- (ii) Zu jedem Atom  $F$  gibt es einen Vektor  $\xi \in \mathcal{H}_o$  mit:  $\mathbb{E}(X|F) = \langle \xi | \Pi(X)\xi \rangle$  für alle  $X \in \mathcal{A}$ .
- (iii) Es gibt einen Gruppenhomomorphismus  $\Phi$  von der Gruppe der Automorphismen  $\Theta$  von  $\mathcal{A}$  auf  $\mathcal{A}$  in die Gruppe derjenigen unitären Operatoren  $U$  auf  $\mathcal{H}$ , unter denen  $\mathcal{H}_o$  invariant ist, so daß für  $U = \Phi(\theta)$  gilt:

$$\Pi(\theta(X)) = U^* \Pi(X) U \text{ für alle } X \in \mathcal{A}.$$

**Beweis:** (i) Sei  $E$  ein Atom. Auf dem Links-Ideal  $\mathcal{A}E$  führen wir folgendes Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle_E$  ein:

$$\langle X | Y \rangle_E := \mathbb{E}(X^*Y|E) \text{ für } X, Y \in \mathcal{A}E.$$

Es ist positiv definit, denn für  $V \in \mathcal{A}$  gilt:  $0 = \mathbb{E}((VE)^*VE|E) \Rightarrow 0 = E(VE)^*VEE = EV^*VE = (VE)^*VE \Rightarrow VE = 0$ . Mit diesem Skalarprodukt ist  $\mathcal{A}E$  ein Prä-Hilbert-Raum, und jedes  $X \in \mathcal{A}$  definiert einen Links-Multiplikations-Operator  $\bar{X}$  auf  $\mathcal{A}E$ :  $\bar{X}(Y) = XY$  für  $Y \in \mathcal{A}E$ . Die Abbildung  $X \rightarrow \bar{X}$  ist linear und multiplikativ. Außerdem vertauscht sie wegen

$$\langle (\bar{X})^*V | Y \rangle_E = \langle V | \bar{X}Y \rangle_E = \mathbb{E}(V^*XY|E) = \mathbb{E}((X^*V)^*Y|E) = \langle (\bar{X}^*)V | Y \rangle_E \text{ für alle } V, Y \in \mathcal{A}E$$

mit der Involution. Im allgemeinen ist der Operator  $\bar{X}$  nicht beschränkt, jedoch ist  $\bar{F}$  für eine Aussage  $F$  stetig, denn aus  $\mathbb{E}(Y^*Y|E) = \mathbb{E}(Y^*FY|E) + \mathbb{E}(Y^*F'Y|E)$  und  $\mathbb{E}(Y^*F'Y|E) = \mathbb{E}((F'Y)^*F'Y|E) \geq 0$  folgt:

$$\langle \bar{F}Y | \bar{F}Y \rangle_E = \mathbb{E}(Y^*FY|E) \leq \mathbb{E}(Y^*Y|E) = \langle Y | Y \rangle_E \Rightarrow \|\bar{F}\|_E \leq 1.$$

Sei  $\Omega$  die Menge aller Atome von  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{H}_o$  die Menge aller Abbildungen  $\xi$  von  $\Omega$  nach  $\mathcal{A}$  mit folgenden zwei Eigenschaften:

- $\xi(E) \in \mathcal{A}E$
- $\xi(E) \neq 0$  nur für endlich viele  $E \in \Omega$ .

$\mathcal{H}_o$  ist ein linearer Raum, auf dem wir folgendes Skalarprodukt definieren ( $\xi, \eta \in \mathcal{H}_o$ ):

$$\langle \xi | \eta \rangle = \sum_{E \in \Omega} \langle \xi(E) | \eta(E) \rangle_E.$$

Zu  $X \in \mathcal{A}$  sei  $\Pi(X)$  der folgendermaßen definierte lineare Operator auf  $\mathcal{H}_o$ :

$$(\Pi(X)\xi)(E) := \overline{X}(\xi(E)).$$

Die Abbildung  $\Pi$  ist linear, multiplikativ und vertauscht mit der Involution. Für eine Aussage  $F$  gilt:

$$\| \Pi(F) \| \leq 1 \quad (\text{wegen } \| \overline{F} \|_E \leq 1 \quad \text{für alle } E \in \Omega).$$

Sei nun  $\mathcal{H}$  die Vervollständigung von  $\mathcal{H}_o$ .  $\mathcal{H}$  ist ein Hilbert-Raum. Für jedes  $X \in \mathcal{A}$  ist  $\Pi(X)$  ein dicht definierter linearer Operator auf  $\mathcal{H}$  (alle  $\Pi(X)$  haben denselben Definitionsbereich  $\mathcal{H}_o$  und bilden wieder in diesen ab), und für jede Aussage  $F$  kann  $\Pi(F)$  stetig auf  $\mathcal{H}$  fortgesetzt werden. Die Fortsetzung wird wieder mit  $\Pi(F)$  bezeichnet. Da die Abbildung  $\Pi$  multiplikativ ist und mit der Involution vertauscht, ist  $\Pi(F)$  selbstadjungiert und idempotent, also eine Projektion auf  $\mathcal{H}$ . Außerdem ist  $\Pi$  injektiv; denn:

$\Pi(X) = 0 \Leftrightarrow \overline{X} = 0$  auf  $\mathcal{A}E$  für alle Atome  $E \Leftrightarrow XYE = 0$  für alle Atome  $E$  und alle  $Y \in \mathcal{A} \Leftrightarrow X = 0$ .

(ii) Für den durch

$$\xi_F(E) = \begin{cases} 0 & \text{für } E \neq F \\ F & \text{für } E = F \end{cases}$$

definierten Vektor  $\xi_F \in \mathcal{H}_o$  folgt für alle  $X \in \mathcal{A}$ :

$$\langle \xi_F | \Pi(X) \xi_F \rangle = \langle F | \overline{X} F \rangle_F = \mathbb{E}(FXF|F) = \mathbb{E}(X|F).$$

(iii) Wegen  $\theta(E)XE\theta(E) = \theta(E\theta^{-1}(X)E) = \mathbb{E}(\theta^{-1}(X)|E)\theta(E)$  für ein Atom  $E$  bildet der Automorphismus  $\theta$  Atome wieder auf Atome ab, und  $X$  liegt genau dann in  $\mathcal{A}E$ , wenn  $\theta(X)$  in  $\mathcal{A}\theta(E)$  liegt mit

$$\mathbb{E}(X|E) = \mathbb{E}(\theta(X)|\theta(E)).$$

Daher kann man einen linearen Operator  $U = \Phi(\theta)$  von  $\mathcal{H}_o$  nach  $\mathcal{H}_o$  definieren, indem man folgendermaßen jedem  $\xi \in \mathcal{H}_o$  ein  $U\xi \in \mathcal{H}_o$  zuordnet:

$$U\xi(E) := \theta^{-1}(\xi(\theta(E))) \quad \text{für } E \in \Omega.$$

Für  $\eta, \xi \in \mathcal{H}_o$  folgt:

$$\begin{aligned}\langle U\eta | U\xi \rangle &= \sum_{E \in \Omega} \langle U\eta(E) | U\xi(E) \rangle_E = \sum_{E \in \Omega} I\!\!E\left(\theta^{-1}(\eta(\theta(E)))^* \theta^{-1}(\xi(\theta(E)))\right|_E \\ &= \sum_{E \in \Omega} I\!\!E\left(\eta(\theta(E))^* \xi(\theta(E))\right| \theta(E)\right) = \sum_{E \in \Omega} I\!\!E\left(\eta(E)^* \xi(E)\right|_E \\ &= \langle \eta | \xi \rangle.\end{aligned}$$

$U$  ist also unitär, kann somit eindeutig von  $\mathcal{H}_o$  nach  $\mathcal{H}$  fortgesetzt werden, und  $\Phi$  ist ein Gruppenhomomorphismus in die multiplikative Gruppe der unitären Operatoren auf  $\mathcal{H}$ . Außerdem gilt bei  $U=\Phi(\theta)$  für  $X \in \mathcal{A}$ ,  $\xi \in \mathcal{H}_o$  und ein Atom  $E$ :

$$\begin{aligned}(U\xi)(E) &= \theta^{-1}(\xi(\theta(E))) \\ \Rightarrow (\Pi(X)U\xi)(E) &= X\theta^{-1}(\xi(\theta(E))) \\ \Rightarrow (U^{-1}\Pi(X)U\xi)(E) &= \theta(X\theta^{-1}(\xi(\theta^{-1}\theta(E)))) = \theta(X)\xi(E) = (\Pi(\theta(X))\xi)(E) \\ \Rightarrow U^{-1}\Pi(X)U &= \Pi(\theta(X)). \quad \square\end{aligned}$$

**Korollar 1:** Ein Orthoverband (oder eine partiell geordnete Menge) kann genau dann als System abgeschlossener linearer Teilräume eines Hilbert-Raumes dargestellt werden, wenn er (sie) in das System der Projektionen einer Q-Algebra eingebettet werden kann.

Korollar 1 ist eine rein algebraische Charakterisierung derjenigen Orthoverbände, die auf einem Hilbert-Raum dargestellt werden können. C. Piron zeigt in [11], daß eine spezielle Klasse von atomistischen Orthoverbänden auf einem Hilbert-Raum dargestellt werden kann, ohne die Einbettung des Verbandes in eine Algebra vorauszusetzen.

Mit Satz 3 wird verständlich, warum sich die Quantentheorie im Hilbert-Raum abspielt. Die logischen Atome werden durch Vektoren aus dem Hilbert-Raum dargestellt, aber nicht zu jedem Vektor aus dem Hilbert-Raum gehört ein Atom aus  $\mathcal{A}$  wie auch nicht zu jedem linearen Operator  $T$  auf dem Hilbert-Raum ein  $X \in \mathcal{A}$  existiert mit  $\Pi(X)=T$  (auch nicht wenn  $T \mathcal{H}_o$  invariant läßt).

Die Hilbert-Raum-Darstellung einer Q-Algebra kann sehr nützlich sein. Jedoch gibt es zu einer Q-Algebra sehr viele unterschiedliche Darstellungen auf ganz verschiedenen Hilbert-Räumen. Daher muß man sich für die darstellungsunabhängigen Eigenschaften einer Q-Algebra interessieren.

## 8 Schlußbemerkungen

Überraschend an der Behandlung der quantenphysikalischen Messung mit dem Q-Algebra-Modell ist, daß man auf den für den Hilbert-Raum-Formalismus der Quantentheorie so zentralen Zustandsbegriff völlig verzichten und trotzdem Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte, Unschärfe-Relation und Interferenzen erschließen kann.

Welche Relevanz kann dann der sogenannte *Kollaps der Wellenfunktion* bei dem Hilbert-Raum-Formalismus der Quantentheorie noch haben? Welche Konsequenzen hat das auf die Frage nach der *Lokalität* der Quantentheorie?

Wenn man den Wellenfunktionen eine physikalische Realität ähnlich einem Feld zuschreibt, wird (bei den sogenannten EPR-Experimenten) das Einstein'sche Lokalitätsprinzip verletzt. Zum einen wird wohl die Mehrzahl der Physiker der Wellenfunktion keine solche Realität zuschreiben; zum anderen ist sie nur eine spezielle Form eines Zustands und kommt bei dem Q-Algebra-Modell gar nicht mehr vor.

Ein besserer Beweis für die Nicht-Lokalität der Quantentheorie führt über die Bell'sche Ungleichung<sup>[1]</sup>. Die Bell'sche Ungleichung sagt bei bestimmten Experimenten andere Ergebnisse vorher als die Quantenmechanik. J.S. Bell konnte damit die Unmöglichkeit, die Quantenmechanik mit einer Theorie der "verborgenen Parameter" zu erklären, aufzeigen. Die mittlerweile durchgeföhrten Experimente scheinen überwiegend die Quantenmechanik zu bestätigen. Aus der Verletzung der Bell'schen Ungleichung im physikalischen Mikrokosmos folgt mehr als die Unmöglichkeit einer Theorie der "verborgenen Parameter". Mindestens eine der Voraussetzungen, auf denen die Herleitung dieser Ungleichung beruht, muß falsch sein. Die "verborgenen Parameter" sind keine explizite Voraussetzung. Als Kandidaten für diese falsche Voraussetzung werden überwiegend das Lokalitätsprinzip oder ein gewisses Realitätsverständnis in Betracht gezogen.

Ein weiterer Kandidat ist jedoch das Distributiv-Gesetz, das bei der Bell'schen Ungleichung eine große Rolle spielt. Wenn die Quantenphysik also das Distributiv-Gesetz verletzt, worauf vieles hindeutet, dann ist der Schluß von der Ungültigkeit der Bell'schen Ungleichung zur Nicht-Lokalität der Natur bzw. zu einem anderen Realitätsverständnis nicht mehr zwingend. Der Verzicht auf das Distributiv-Gesetz bedeutet jedoch den Verzicht auf die Boole'sche Logik, und das dürfte unser physikalisches Realitätsverständnis ganz gewaltig betreffen.

## Literatur

- [1] Bell, J. S., *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*, Physics 1-3 (1964) 195-200
- [2] Berberian, S., *Baer\*-rings*, New York (1972)
- [3] Birkhoff, G., von Neumann, J., *The logic of quantum mechanics*, Ann. of Math. 37 (1936) 823-843
- [4] Hooker, C.A. (ed.), *Physical theory as Logico-Operational structure*, Dordrecht (1979)
- [5] Kalmbach, G., *Orthomodulare Verbände*, Jber. d. Dt. Math.-Verein. 85 (1983) 33-49.
- [6] Mittelstaedt, P., *Quantum logic*, Reidel Dordrecht (1978)
- [7] Monk, J.D. (ed.), *Handbook of Boolean Algebras I - III*, Amsterdam New York Oxford Tokyo (1989)
- [8] Rickart, C.E., *General theory of Banach algebras*, New York (1960)
- [9] Stone, M.H., *The theory of representations for Boolean algebras*, Trans. AMS 40 (1936) 37-111
- [10] Ludwig, G., *An Axiomatic Basis for Quantum Mechanics*, vol. 1, *Derivation of Hilbert Space Structure*, Berlin Heidelberg New York Tokyo (1985)
- [11] Piron, C., *Axiomatique Quantique*, Helv. Phys. Acta 37 (1964) 439-468