

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 68 (1995)
Heft: 3

Artikel: Sur la dynamique du Fléau
Autor: Choquard, Ph. / Bonjour, F. / Blanc, J.-C.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-116738>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur la Dynamique du Fléau

By Ph. Choquard, F. Bonjour

Institut de Physique Théorique
École Polytechnique Fédérale de Lausanne - PHB - Écublens
CH-1015 Lausanne, Switzerland

J.-C. Blanc

Physikalisches Institut der Universität Bern
Abteilung für Klima- und Umweltphysik
CH-3012 Bern, Switzerland

Abstract. The purpose of this paper is to present a continuous time, one (small) parameter theory of bifurcations which appear in two periodic orbits, the so called resonances $1/2$ and $1/1$, of an articulated, planar, friction less pendulum driven periodically, as shown in figure 1, a mechanical system called flail. Basically, this model is characterized by two parameters: l_1/l_2 and $g/l_2\omega^2$ and its equation of motion is given by (1.1). Here we consider the symmetric case where $\omega^2 = g/l_1$ and we take (1.2) as our starting one-parameter differential equation.

Our investigations are based on the following ingredients: 1) accurate computer simulations of interesting orbits and construction of their Poincaré sections, 2) analytical determination of relevant periodic orbits, 3) band theory approach, commented below, to the stability analysis of periodic orbits and 4) bifurcation theory based on Fredholm's alternative (Appendix A). The band theory approach is based on the study of the Hill equations which can be associated to any linearized equations of motion around periodic orbits. This study amounts to analyse particularly how the bands change their shapes and move across the zero eigenvalue level in fonction of the parameter which appears explicitly and implicitly in the periodic coefficients of the Hill equations. A fundamental monotony theorem of band theory (Appendix B) is systematically invoked to tell us why and when a certain bifurcation will occur. The way how the bifurcating orbit develops afterwards is treated according to the fourth point of our procedure. An important result of the

band theory approach is to indicate how the Floquet multipliers of the linearized equations move on the unit circle of the complex plane in function of the parameter.

In the second chapter we show and explain why the resonance $1/2$ (figure 10 (a)) experiences first a period doubling bifurcation (figure 10 (b)), then a symmetry breaking bifurcation of the mean angular position of the pendulum (figure 10 (c)) and last a period doubling bifurcation again. We find that the Floquet multiplier ρ executes 1° half a circle in the trigonometric sense, 2° the reverse path and 3° a quarter of a circle in the trigonometric sense again.

In the third chapter we present an analytical method to determine accurately the resonance $1/1$, we study in detail the onset of the strong resonances $1/4$ and $1/3$ and we offer a detailed theory of the squeeze effect which accompanies the $1/3$ resonance. We investigate lastly the stability limit of the $1/1$ resonance and the period doubling which follows (figure 21). Within the parameter range investigated, the Floquet multiplier of the resonance $1/1$ execute half a circle.

We conclude with the suggestion that a “complex band” approach can be proposed to deal with dissipative systems.

1 Introduction et Résumé

Le modèle mécanique considéré ici est un pendule double plan dont le premier entraîne le second dans un mouvement tournant avec une vitesse angulaire constante ω et dont le second est porteur, à son extrémité libre, d'une masse m sujette à l'action de la pesanteur mg (figure 1). Le système est supposé exempt de frottement. La description de ce modèle évoquant un fléau, c'est ainsi qu'on l'a baptisé. Ce pendule articulé fait partie des systèmes hamiltoniens non-autonomes à un degré de liberté qui exhibent une dynamique complète comportant des régimes ordonnés, chaotiques et mixtes comme nous l'illustrerons plus bas.

Un intérêt supplémentaire de ce modèle est qu'il est isomorphe à deux autres modèles célèbres soit 1° celui de V. Croquette [1], qui consiste en une aiguille aimantée soumise à l'action de deux champs magnétiques dont l'un est fixe et l'autre tournant et 2° celui de D.F. Escande [2], qui consiste en un électron soumis à l'action de deux champs électriques longitudinaux dont l'un est périodique dans l'espace et l'autre est périodique dans l'espace et le temps, le fléau correspondant au cas particulier où les deux périodes spatiales coïncident. C'est dire la somme de connaissances qualitatives et quantitatives acquises sur les propriétés dynamiques de ce système et, comme corollaire, la nécessité de situer notre contribution. Celle-ci est de fournir une explication complète concernant les quand, comment et pourquoi de l'apparition de certaines bifurcations dans l'évolution en fonction des paramètres de couplage d'orbites périodiques du fléau choisies à propos, notamment celles qui sont illustrées dans la figure 7 de la référence [1].

Le modèle mathématique associé au fléau a été élaboré en détail dans la référence [3, paragraphe 5.2]. Soient $\theta = \omega t$ et ϕ les angles que font respectivement le bras, de longueur l_1 , et le pendule, de longueur l_2 , du fléau par rapport à l'axe vertical. Soient $ml_2^2\omega^2$ l'unité d'énergie, $\gamma = g/l_2\omega^2$ et $\lambda = l_1/l_2$ les paramètres gravitationnel et d'entraînement du fléau.

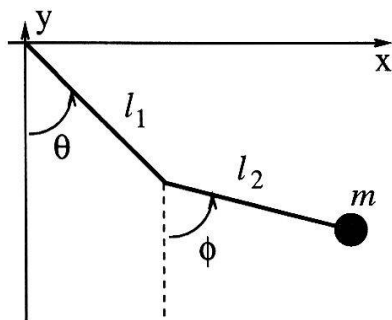


Figure 1: Le modèle du fléau.

On montre alors que l'équation du mouvement est donnée par

$$\frac{d^2 \phi}{d\theta^2} = -\gamma \sin(\phi) - \lambda \sin(\phi - \theta) \quad (1.1)$$

On a affaire à une théorie à deux paramètres, γ et λ . En principe plusieurs stratégies s'offrent pour couvrir le plan des paramètres, par exemple faire varier λ à γ fixe ou inversement, ou encore les varier ensemble. Dans nos travaux initiés dans la référence [4] nous avons choisi le cas symétrique $\gamma = \lambda$ et considérons donc dans ce qui suit l'équation différentielle du fléau symétrique

$$\frac{d^2 \phi}{d\theta^2} = -\lambda \{ \sin(\phi) + \sin(\phi - \theta) \} \quad (1.2)$$

Quatre ingrédients constitueront le support de notre démarche:

- la construction par simulation numérique des orbites intéressantes et de leurs coupes de Poincaré;
- la détermination analytique des orbites périodiques relevantes;
- les conséquences de la théorie des bandes appliquée aux équations linéarisées de l'équation (1.2) autour de solutions périodiques et plongées dans les équations aux valeurs propres de type Hill qu'on peut leur associer;
- la théorie des bifurcations [5, chapitre 9] basée sur l'alternative de Fredholm, appliquée à l'évolution d'orbites périodiques précises en fonction du paramètre de couplage λ ou du paramètre $\mu = 8\lambda$.

Disons d'emblée que c'est dans l'idée du plongement que résidera la clef des explications évoquées plus haut, les autres ingrédients étant plus ou moins standards.

Afin de déterminer le cadre de ce travail, il importe d'illustrer les comportements du fléau symétrique dans les trois régimes de couplage faible, moyen et fort évoqués au début de cette introduction. C'est l'occasion de rappeler ce que sont les coupes de Poincaré: l'espace des phases étendu nécessaire à la description des trajectoires du modèle est à trois dimensions

(P_ϕ, ϕ, θ) ; les coupes de Poincaré sont alors les projections stroboscopiques de période 2π sur le plan (P_ϕ, ϕ) . Le moment conjugué P_ϕ étant dans notre cas égal à $d\phi/d\theta = \dot{\phi}$, l'usage courant dans la théorie des EDO du couple de variables $(\dot{\phi}, \phi)$ sera aussi admis.

La figure 2, avec $\lambda = 0.01$, illustre le régime essentiellement fait d'orbites périodiques, quasi-périodiques et de tores invariants. La figure 3, en $\lambda = 0.108$, illustre le régime mixte avec coexistence de zones régulières et chaotiques et la figure 4, avec $\lambda = 1.0$, le régime essentiellement désordonné: l'illustration comprend les coupes de Poincaré d'une centaine d'orbites chaotiques.

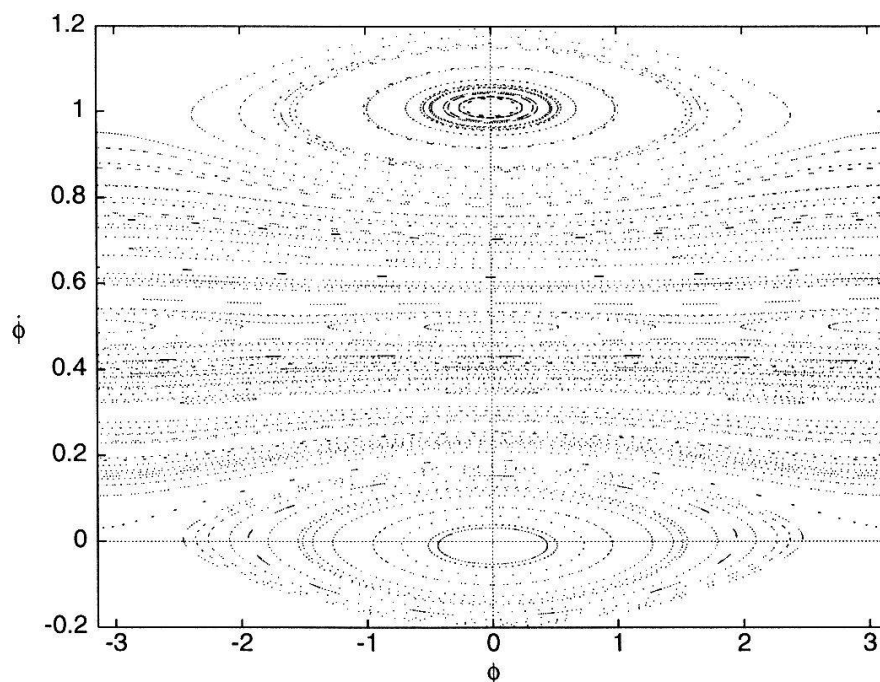


Figure 2: Coupe de Poincaré du fléau symétrique pour $\lambda = 0.01$.

Revenons à la première figure qui nous permettra de préciser le choix des orbites périodiques dont nous voulons étudier l'évolution en fonction de λ . On observe une symétrie autour de l'axe $P_\phi = 1/2$ qui résulte évidemment du fait que $\gamma = \lambda$. On remarque notamment l'orbite de période 4π représentée par les centres de deux ellipses (représentant elles-mêmes des orbites quasi-périodiques) de coordonnées $P_\phi = 1/2, \phi = 0 \bmod 2\pi$ et $\phi = \pi$. Cette orbite 4π -périodique est appelée résonance $1/2$ dans le sens où le bras fait un tour alors que le pendule en fait deux (cf. figure 10 (a)). On remarque aussi l'orbite de période 2π au centre de l'ellipse supérieure et dont les coordonnées sont $P_\phi \approx 1, \phi = 0$ et symétriquement l'orbite piégée par la gravité avec $P_\phi \approx 0, \phi = 0$. Ces deux orbites portent le nom de résonances principales. On remarque leur robustesse puisqu'elles persistent dans la zone régulière de la figure 3 où l'on devine notamment deux orbites 6π -périodiques dont nous reparlerons au chapitre 3. Dans la figure 4, en revanche, toute zone régulière paraît avoir disparu.

Nous pouvons maintenant préciser notre programme: il s'agira d'examiner ce qu'il advient de l'orbite 4π -périodique (résonance $1/2$) dans le domaine $0 \leq \lambda \lesssim 0.0702$ et de l'orbite 2π -périodique (résonance principale) dans le domaine $0 \leq \lambda \lesssim 0.19$.

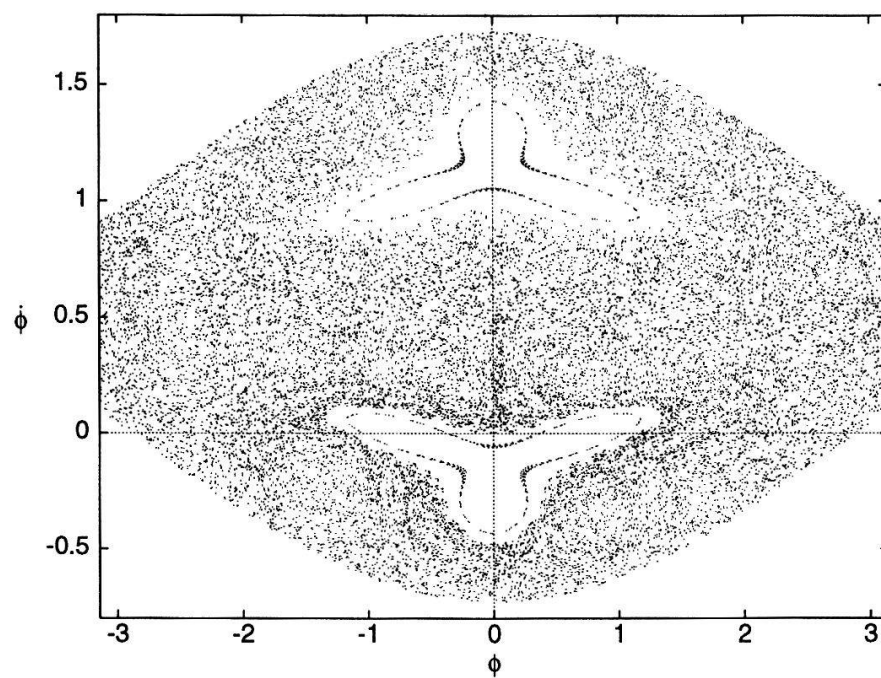


Figure 3: Coupe de Poincaré du fléau symétrique pour $\lambda = 0.108$.

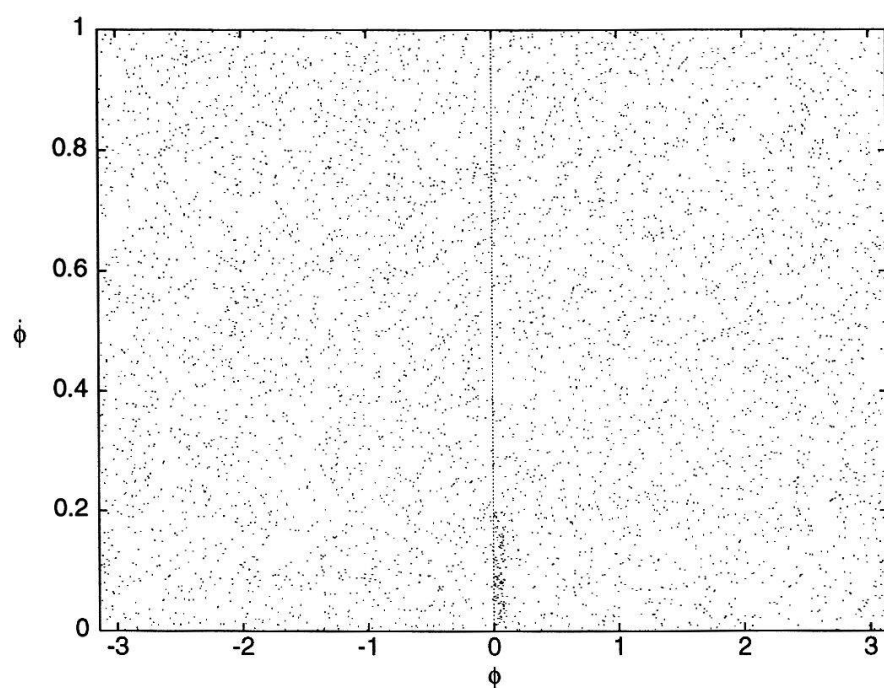


Figure 4: Coupe de Poincaré du fléau symétrique pour $\lambda = 1.0$.

Dans le deuxième chapitre, nous présenterons l'histoire de la résonance $1/2$ dans le domaine précité: nous montrerons pourquoi elle subit un doublement de période en $\lambda = 0.05675$ puis, découverte inattendue, pourquoi cette nouvelle orbite double subit une brisure de symétrie sans changement de période en $\lambda = 0.0689$ et enfin un doublement de période en $\lambda = 0.07051$. La limite de la précision numérique ne permettra pas de conclure si la cascade sous-harmonique se poursuit ou non jusqu'à l'apparition de la première fenêtre de comportement chaotique en $\lambda \approx 0.0703$. C'est une analyse théorique qui devrait trancher.

Dans le troisième chapitre nous présenterons quelques aspects de l'histoire de la résonance principale $1/1$, notamment un quadruplement de période intervenant en $\lambda = 0.0621$, puis, par l'effet de pincement décrit en détail, un triplement de période intervenant en $\lambda = 0.1077$ et enfin sa limite de stabilité par doublement de période en $\lambda = 0.1780$. Les schémas de bifurcation correspondants seront établis et commentés.

Deux appendices sont consacrées, l'une au rappel d'un théorème important de la théorie des bandes et l'autre à la façon d'utiliser l'alternative de Fredholm.

Quelques remarques finales serviront de conclusion à ce travail.

2 L'Histoire de la Résonance $1/2$

2.1 Son Domaine de Stabilité

On peut réécrire l'équation (1.2) sous la forme

$$\frac{d^2\phi}{d\theta^2} = -2\lambda \cos(\phi/2) \sin(\phi - \theta/2) \quad (2.1)$$

et remarquer que $\phi = \theta/2$ est solution exacte de cette équation $\forall \lambda$. C'est la résonance $1/2$ évoquée plus haut. Il s'agit alors de connaître le domaine de stabilité de cette solution et les bifurcations qu'elle subira. Par commodité on ramène la périodicité du mouvement à 2π en posant $x = \theta/2$. On pose en outre $\frac{d^2\phi}{d\theta^2} = \frac{1}{4}\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{1}{4}\phi''$, $8\lambda = \mu$ et l'on introduit dans l'équation (2.1):

$$\phi(\mu, x) = x + \chi(\mu, x) \quad (2.2)$$

Cette substitution donne l'équation de base

$$-\chi'' - \mu \cos(x) \sin(\chi) = 0 \quad (2.3)$$

On commence par étudier la stabilité de $\phi = x$, en linéarisant (2.3) pour obtenir au premier ordre

$$-\chi_1'' - \mu \cos(x) \chi_1 = 0 \quad (2.4)$$

C'est ici que nous introduisons l'équation de Mathieu associée à (2.4), soit

$$-y'' - \mu \cos(x) y = e y \quad (2.5)$$

et que l'on évoque ce que l'on sait de la théorie des bandes du problème de Schrödinger équivalent, mais plus général, de celui d'une particule se mouvant sur la droite \mathbb{R}^1 dans un potentiel périodique de période 2π (cf. appendice A.) Soit n l'indice de la bande, ν le nombre d'onde avec $|\nu| \leq 1/2$ et $\{e_n(\nu, \mu)\}$ le spectre des valeurs propres. Un théorème important nous dit que $e_n(\nu, \mu)$ est paire en ν , **monotone croissante (décroissante)** en ν pour n pair (impair) et que $e_{n+1} > e_n$, avec des intervalles interdits entre les bandes.

Ce qui nous intéresse, ce sont les zéros des valeurs propres et la façon dont ils se déplacent sur l'axe des ν quand le paramètre μ augmente. Pour μ petit la bande $n = 0$ exhibe une portion négative car le potentiel $v(x) = -\mu \cos(x)$ est attractif (cf. figure 5.) Il y a deux zéros symétriques $\pm\nu_0(\mu)$ qui permettent de donner naissance à une perturbation de nombre d'onde ν bornée autour de $\phi = x$. Il est alors manifeste que, la première bande continuant à descendre avec μ croissant, la limite de stabilité de la résonance $1/2$ est atteinte en $\nu = 1/2$ et ceci pour une valeur μ_{c_1} de μ (cf. figure 6) au-delà de laquelle le zéro de l'énergie se trouve dans le premier intervalle interdit qui impliquerait un ν complexe, donc une perturbation exponentiellement croissante. Notons ici qu'avec μ croissant on retrouverait de nouveaux domaines de stabilité correspondant aux bandes permises qui traverseraient l'axe des ν . Mais revenons à la première bande. Si, en $\mu = \mu_{c_1}$ il y a émergence d'une nouvelle orbite, celle-ci doit être de période double en vertu du théorème de monotonie évoqué ci-dessus.

A ce stade il est instructif de considérer les multiplicateurs de Floquet de l'équation (2.4) soit $\rho_+ = \rho = e^{2i\pi\nu}$ et $\rho_- = \rho^* = e^{-2i\pi\nu}$ pour $\nu = \nu_0(\mu)$. On constate que chaque multiplicateur parcourt un demi-cercle unité dans \mathbb{C} quand μ varie de 0 à $\mu_{c_1} = 0.454$. Alternativement et d'utilité équivalente, on peut s'intéresser au résidu

$$R(\nu) = \frac{2 - (\rho + \rho^*)}{4} = \sin^2(\pi\nu)$$

avec $\nu = \nu_0(\mu)$: R varie de 0 à 1 quand μ varie de 0 à μ_{c_1} .

On peut conclure ce paragraphe en affirmant que le quand ($\mu_{c_1} = 0.454$) et le pourquoi (théorème de monotonie) du doublement de période sont expliqués. Reste le comment, sujet du prochain paragraphe.

2.2 Son Premier Doublement de Période

Pour $\mu > \mu_{c_1}$ on fait l'Ansatz

$$\phi = x + \chi(\mu, x/2) \quad (2.6)$$

On repart de l'équation (2.3) et on y applique la théorie des bifurcations [5, chapitre 9]. La dépendance algébrique de l'amplitude de la nouvelle orbite de période 4π en x en fonction de $\mu - \mu_{c_1}$ n'étant pas connue, on introduit un paramètre de développement auxiliaire ε et, en posant $\mu_{c_1} = \mu_0$ on écrit

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon\mu_1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\mu_2 + \dots \quad (2.7)$$

$$\chi(\varepsilon, x/2) = 0 + \varepsilon\chi_1(x/2) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\chi_2(x/2) + \frac{1}{3}\varepsilon^3\chi_3(x/2) + \dots \quad (2.8)$$

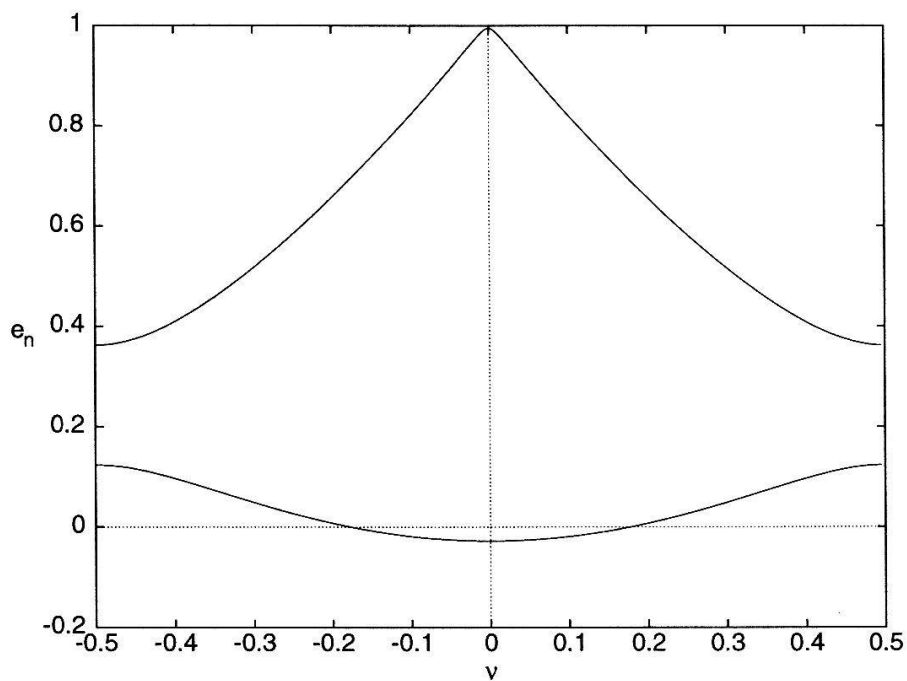


Figure 5: Diagramme de bandes de l'équation (2.5) pour $\mu = 0.24$.

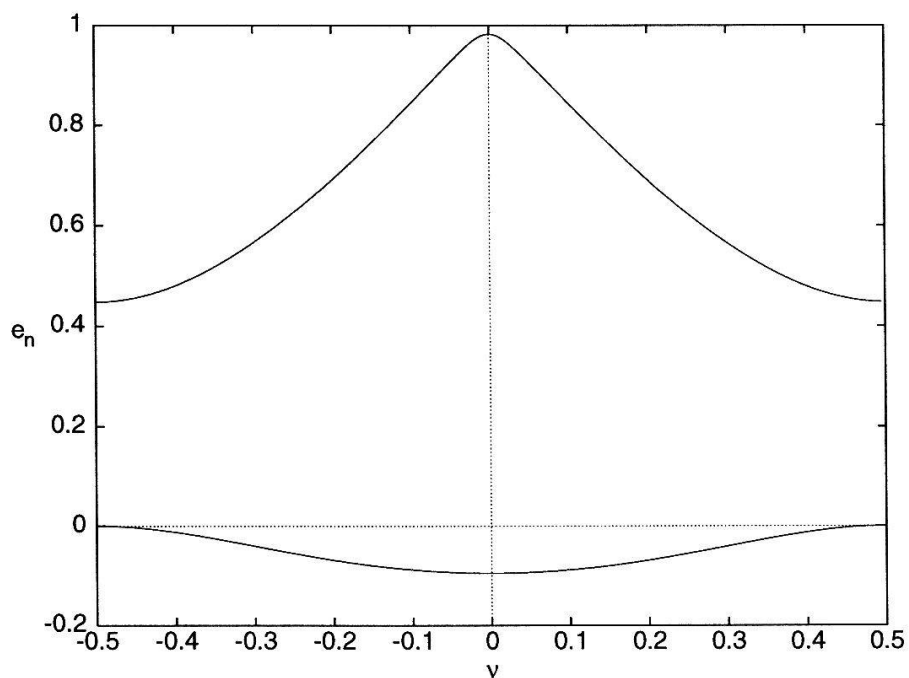


Figure 6: Diagramme de bandes de l'équation (2.5) pour $\mu = \mu_{c1} = 0.454$.

On développe ensuite

$$\begin{aligned}\sin(\chi) &= \chi - \frac{1}{6}\chi^3 + O(\chi^5) \\ &= \varepsilon \chi_1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \chi_2 + \frac{1}{6}\varepsilon^3 (\chi_3 - \chi_1^3) + \dots\end{aligned}\quad (2.9)$$

En insérant les développements (2.7) et (2.9) dans (2.3), en posant $C(x) = \cos(x)$, en annulant les termes de même puissance en ε et en définissant l'opérateur

$$\mathbb{H} = -\frac{d^2}{dx^2} - \mu_0 C(x) = -\frac{d^2}{dx^2} + v(\mu, x)$$

on trouve les équations des trois premières amplitudes

$$\mathbb{H} \chi_1 = 0 \quad (2.10)$$

$$\mathbb{H} \chi_2 = 2\mu_1 C(x) \chi_1 \quad (2.11)$$

$$\mathbb{H} \chi_3 = C(x) \{3\mu_2 \chi_1 + 3\mu_1 \chi_2 - \mu_0 \chi_1^3\} \quad (2.12)$$

La solution cherchée pour χ_1 est conditionnée par le fait que la vitesse initiale $d\phi/d\theta = 1/2$ en $\theta = 0 \forall \mu$, ce qui implique le choix d'une solution paire de l'équation (2.10).

Il est toutefois intéressant de considérer au préalable la résolution de (2.5) pour un potentiel plus général 2π -périodique. Cette dernière se résout en développant l'onde de Bloch

$$y = y_\nu(\mu, x) = e^{i\nu x} p(\mu, x), \quad p(\mu, x) = p(\mu, x + 2\pi)$$

et le potentiel $v(\mu, x)$ en séries de Fourier:

$$\begin{aligned}y_\nu(\mu, x) &= \sum_n y_n(\mu) e^{i(n+\nu)x} \\ v(\mu, x) &= \sum_m v_m(\mu) e^{imx}\end{aligned}$$

pour obtenir une équation matricielle $(-\infty < n < \infty)$

$$[(n + \nu) - e] y_n(\mu) + \sum_m v_m(\mu) y_{n-m}(\mu) = 0$$

que l'on peut écrire $Ay = ey$. Le problème est alors ramené à la recherche des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice réelle et symétrique A . Pour l'équation (2.10) on a besoin du cas particulier $\nu = 1/2$ et $e = 0$. L'analyse numérique fournit

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \mu_{c_1} = 0.454 \\ \chi_1 &= 1.248 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 0.126 \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + 0.005 \cos\left(\frac{5}{2}x\right)\end{aligned}$$

L'accord de μ_{c_1} calculé avec le résultat de la simulation numérique est excellent.

Remarquons ici que dans le domaine de stabilité de l'orbite $1/2$ on peut étudier l'émergence d'orbites-satellites sous-harmoniques périodiques et quasi-périodiques. A titre d'illustration, la table 1 donne la liste des valeurs critiques $\mu_{s,0}$ de μ en fonction de $\nu_s = 1/n$

Période en θ	Multiplicité n	$\mu_{s,0}$	$\lambda_{s,0}$
40π	10	0.1392	0.01740
36π	9	0.1541	0.01926
32π	8	0.1725	0.02156
28π	7	0.1956	0.02445
24π	6	0.2255	0.02819
20π	5	0.2654	0.03317
16π	4	0.3197	0.03996
12π	3	0.3923	0.04904
8π	2	0.4540	0.05675

Table 1: Valeurs critiques de μ correspondant à des bifurcations sous-harmoniques de la résonance $1/2$.

telles que $e_0[\nu_s, \mu_{s,0}] = 0$ et ceci pour $n = 10, \dots, 2$, cette dernière coïncidant avec la limite de stabilité. Le calcul de ces bifurcations se fait par la même méthode que celle que nous appliquons maintenant au cas $n = 2$.

Il nous faut déterminer maintenant les autres coefficients des développements (2.7, 2.8), μ_1 et χ_2 notamment, les deux inconnues de l'équation (2.11). L'alternative de Fredholm (cf. appendice B) nous livre la valeur de μ_1 en exigeant la condition:

$$(g_2, \chi_1) = \frac{2\mu_1}{4\pi} \int_0^{4\pi} dx \cos(x) \chi_1^2(x) = 0$$

Or, l'intégrale n'étant pas nulle, la condition n'est satisfaite que pour $\mu_1 = 0$. On doit alors calculer χ_2 en la développant, ainsi que g_2 , dans la base des vecteurs propres de \mathbb{H} pour $\nu = 1/2$, sauf celui correspondant à la valeur propre nulle. Cette dernière condition $(\chi_2, \chi_1) = 0$, qui ne découle pas de l'alternative de Fredholm, est nécessaire. En fait, si χ_2 contenait des termes non-orthogonaux à χ_1 , il faudrait les inclure dans χ_1 lui-même. Dans le cas présent, lorsque l'on pose $\mu_1 = 0$ dans (2.11), on constate que χ_2 doit satisfaire la même équation que χ_1 et que la condition $(\chi_2, \chi_1) = 0$ n'est vérifiée que pour $\chi_2 \equiv 0$. Pour déterminer μ_2 on exige

$$(g_3, \chi_1) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} dx \cos(x) \{3\mu_2 \chi_1^2(x) - \mu_0 \chi_1^4(x)\} = 0$$

Les deux intégrales étant non-nulles, on trouve après quelques calculs $\mu_2 = 0.243$.

Au plus bas ordre on n'a pas besoin de connaître χ_3 . Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \chi(\varepsilon, x/2) &= \varepsilon \chi_1(x/2) + O(\varepsilon^3) \\ \mu - \mu_0 &= \frac{1}{2} \mu_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

Ainsi, pour $\mu - \mu_0$ petit, on trouve

$$\chi_{\pm}(x/2) = \pm \sqrt{\frac{2(\mu - \mu_0)}{\mu_2}} \chi_1(x/2) \quad (2.13)$$

Il existe donc localement autour de μ_0 deux solutions 4π -périodiques en x (8π en θ) qui sont proportionnelles à $\pm\chi_1$. Le diagramme de cette bifurcation-fourche est donné sur la figure 7.

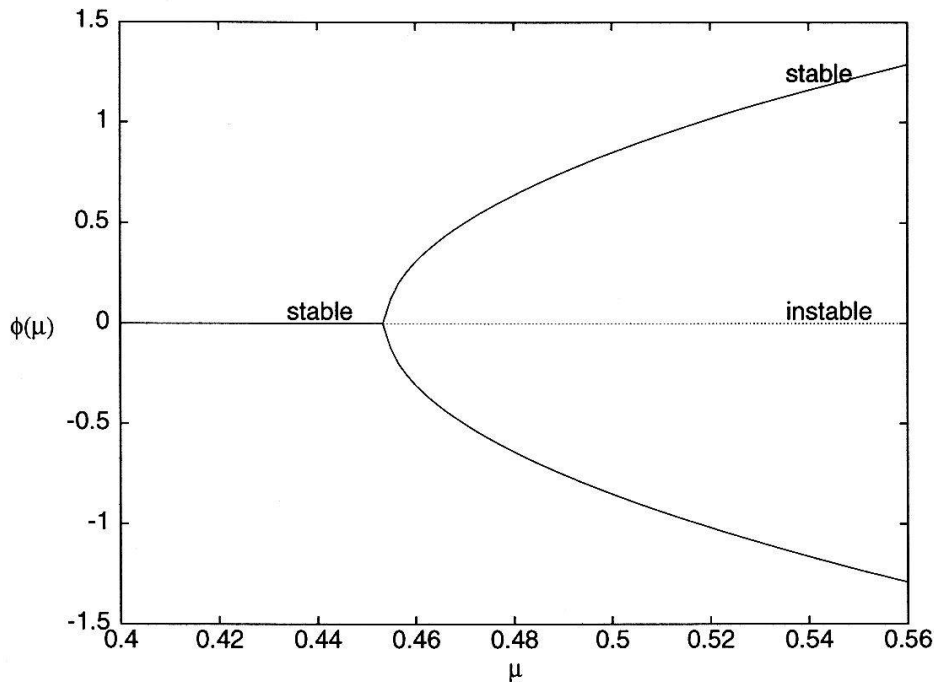


Figure 7: Diagramme de bifurcation correspondant au premier doublement de période de la résonance $1/2$. La fonction $\phi(\mu)$ est évaluée en $x = 0$.

La solution $\phi = x$ est donc instable dans le voisinage positif de μ_{c_1} . Toutefois, et s'il ne se passait rien d'autre, les solutions de l'équation de Mathieu (2.5) nous apprendraient que, quand μ augmente, une seconde puis une troisième bande d'énergie permises traverseraient le niveau $e = 0$ et ainsi de suite, stabilisant de nouveau par bifurcation inverse la solution $\phi = x$! Que se passe-t-il donc au-delà de μ_{c_1} ? C'est ce que le paragraphe 2.3 nous apprendra en partie.

2.3 Sa Première Brisure de Symétrie

Pour $\mu > \mu_{c_1}$, on repart de l'Ansatz (2.6) et on cherche à déterminer $\chi(\mu, x/2)$ solution paire de (2.3). Une méthode analytique sera présentée à cette fin au chapitre 3. Ici, nous nous contenterons des résultats de simulations numériques et nous donnerons les raisons qui font que la bifurcation discutée s'est révélée être une brisure de symétrie avec maintien du caractère 4π -périodique en x de l'orbite. La démarche est encore un fois basée sur l'examen de l'équation de Hill associée à ce problème. Le résultat sera aisément transposé sur l'évolution des multiplicateurs de Floquet $\rho[\nu(\mu)]$.

On suppose $\chi(\mu, x/2)$ solution paire de (2.3) connue pour $\mu_{c_1} < \mu < \mu_{c_2}$ et, en posant $\phi = x + \chi(\mu, x/2) + \kappa(\mu, x/2)$ on examine la question de sa stabilité via l'équivalent de (2.4),

soit

$$-\kappa_1'' - \mu \cos(x) \cos[\chi(\mu, x/2)] \kappa_1 = 0 \quad (2.14)$$

A ce stade on introduit l'équation de Hill associée à (2.14) sous la forme

$$-y'' - \mu \cos(x) \cos[\chi(\mu, x/2)] y = e y \quad (2.15)$$

On remarque que le potentiel de l'équation de Mathieu (2.5) est remplacé ici par l'expression

$$v(\mu, x) = -\mu \cos(x) \cos[\chi(\mu, x/2)] \quad (2.16)$$

Deux faits importants sont alors à signaler:

1. On sait que $\chi(\mu, x/2)$ est 4π -périodique en x , **mais** $\cos[\chi(\mu, x/2)]$ **redevient** 2π -**périodique** ! Donc, $v(\mu, x)$ est 2π -périodique en x .
2. L'inspection superficielle de (2.16) suggère que, quand μ augmente, le potentiel s'approfondit. Or, **cet effet est plus que compensé** par l'action de $\cos[\chi(\mu, x/2)]$. Le résultat net est que **le minimum du potentiel remonte avec** $\mu > \mu_{c_1}$ alors que son maximum demeure inchangé. Cela veut dire que la bande $n = 0$ remonte et que les zéros qui étaient en $\nu = \pm 1/2$ pour $\mu = \mu_{c_1}$ se rapprochent de l'origine.

En vertu du fameux théorème de monotonie, la limite de stabilité sera atteinte quand le minimum de la bande $n = 0$ repassera par zéro. Cela signifie que, s'il y a bifurcation, c'est en $\nu = 0$ qu'elle aura lieu. Mais on sait que l'onde de Bloch $y_0(\mu_{c_2}, x)$, qui est 2π -périodique en x , peut avoir une composante constante non-nulle ! Cela implique qu'après la bifurcation la position moyenne du pendule, qui était nulle jusqu'ici pourra devenir non-nulle, positive ou négative par symétrie. Cette situation rappelle celle du paramètre d'ordre dans la théorie de Landau. Pour rendre cette explication convaincante nous représentons sur la figure 8 l'allure du potentiel $v(\mu, x)$ pour $\mu = 0.548$ ainsi que la bande $n = 0$ de son équation de Hill et dans la figure 9 la situation en $\mu = 0.551$. En outre la figure 10 montre clairement la succession des bifurcations que subit la résonance $1/2$ du fléau. La transposition de ce résultat sur l'évolution des paramètres de Floquet est que ceux-ci exécutent un demi-cercle dans le sens inverse quand $\mu_{c_1} = 0.454 \leq \mu \leq \mu_{c_2} = 0.551$. Il reste à déterminer la nature de la bifurcation.

On part de l'Ansatz

$$\phi(\mu, x) = x + \chi(\mu, x/2) + \kappa(\mu, x/2) \quad (2.17)$$

et l'on suppose connue $\chi(\mu, x/2)$, solution paire de (2.3) pour $\mu > \mu_{c_1}$. l'équation pour κ devient

$$-\kappa'' - \mu \cos(x) \{\sin(\chi + \kappa) - \sin(\chi)\} = 0 \quad (2.18)$$

ou encore

$$-\kappa'' - \mu \cos(x) \cos(\chi) \sin(\kappa) - \mu \cos(x) \sin(\chi) \cos(\kappa - 1) = 0 \quad (2.19)$$

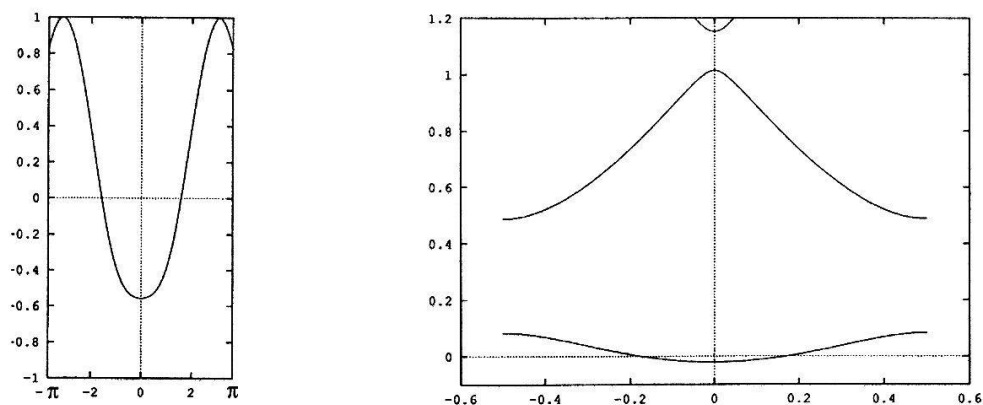


Figure 8: Situation entre les deux bifurcations, en $\mu = 0.548$. La figure de gauche montre le potentiel et celle de droite le spectre de bandes qui en résulte.

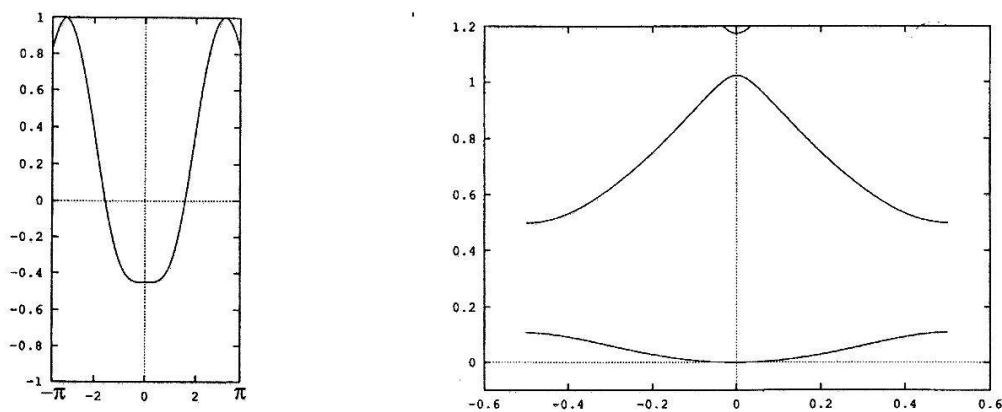


Figure 9: Situation à la nouvelle bifurcation, en $\mu = 0.551$. La figure de gauche montre le potentiel et celle de droite le spectre de bandes qui en résulte.

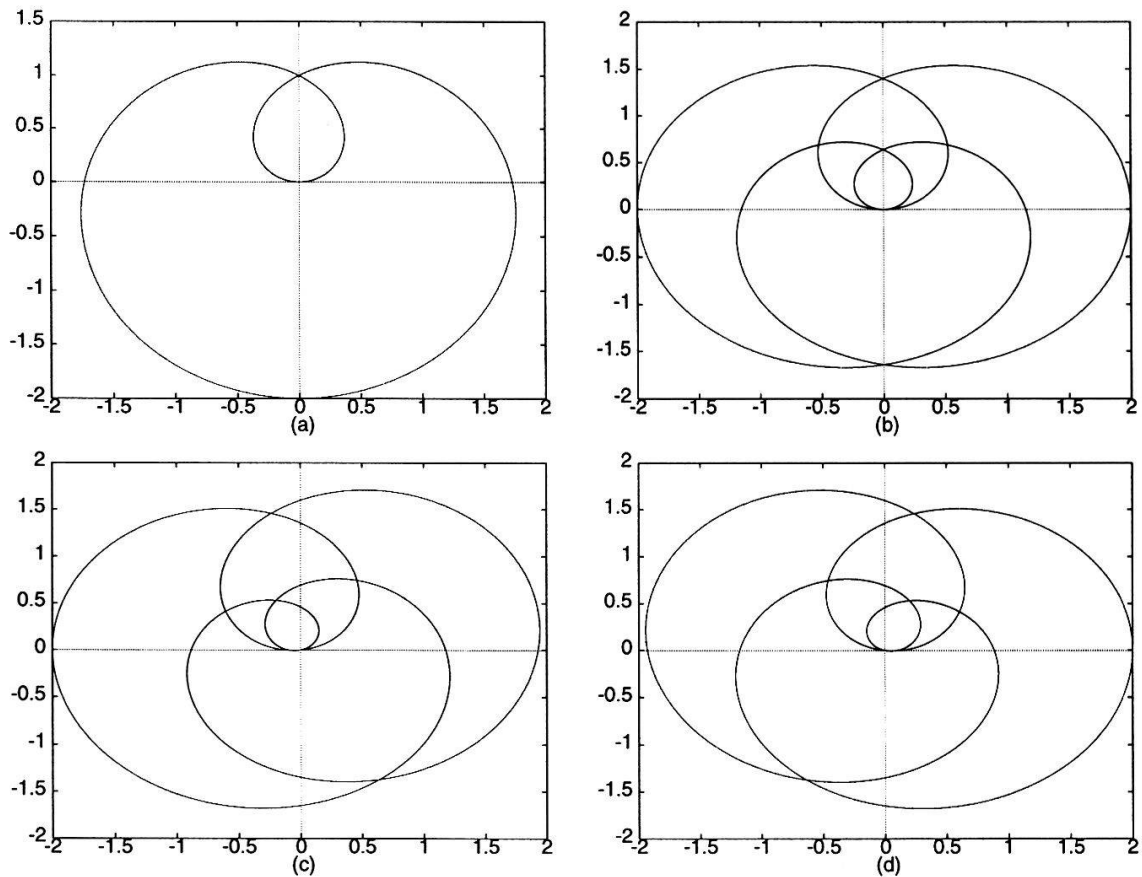


Figure 10: Trajectoires (x, y) de la masse du second pendule pour μ valant respectivement (a) 0.08, (b) 0.52 et (c)-(d) 0.5736, montrant le doublement de période en $\mu = 0.454$ puis la brisure de symétrie en $\mu = 0.551$, conduisant à deux orbites de positions moyennes négative et positive. Les longueurs des pendules ont été ramenées à 1 pour faciliter la visualisation de la figure.

A ce stade on développe $\mu, \kappa, \cos(\chi)$ et $\sin(\chi)$ autour de $\mu_{c_2} = \bar{\mu}_0$ soit

$$\mu = \mu_{c_2} + \Delta\mu = \bar{\mu}_0 + \varepsilon\bar{\mu}_1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\bar{\mu}_2 + \dots \quad (2.20)$$

$$\kappa = 0 + \varepsilon\kappa_1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\kappa_2 + \dots \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x, \mu) &= \cos(x) \cos[\chi(\mu, x/2)] = \mathcal{C}(x, \mu_{c_2} + \Delta\mu) \\ &= \mathcal{C}_0 + \varepsilon\bar{\mu}_1\mathcal{C}'_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(\bar{\mu}_2\mathcal{C}'_0 + \bar{\mu}_1^2\mathcal{C}''_0) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(x, \mu) &= \cos(x) \sin[\chi(\mu, x/2)] = \mathcal{S}(x, \mu_{c_2} + \Delta\mu) \\ &= \mathcal{S}_0 + \varepsilon\bar{\mu}_1\mathcal{S}'_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(\bar{\mu}_2\mathcal{S}'_0 + \bar{\mu}_1^2\mathcal{S}''_0) \end{aligned} \quad (2.23)$$

où

$$\mathcal{C}'_0 = -\mathcal{S}_0\chi'_0, \quad \mathcal{C}''_0 = -\mathcal{C}_0\chi_0'^2 - \mathcal{S}_0\chi_0'' \quad (2.24)$$

$$\mathcal{S}'_0 = \mathcal{C}_0\chi'_0, \quad \mathcal{S}''_0 = -\mathcal{S}_0\chi_0'^2 + \mathcal{C}_0\chi_0'' \quad (2.25)$$

Les indices “'” désignent les dérivées par rapport à μ , évaluées en $\mu = \bar{\mu}_0 = \mu_{c_2}$. En insérant les développements dans (2.18), en regroupant les termes de même puissance en ε et en définissant l'opérateur

$$\mathbb{H} = -\frac{d^2}{dx^2} - \bar{\mu}_0 \cos(x) \cos[\chi(\bar{\mu}_0)] = -\frac{d^2}{dx^2} + v(\bar{\mu}_0, x)$$

on trouve les équations pour les trois premiers termes de κ :

$$\mathbb{H} \kappa_1 = 0 \quad (2.26)$$

$$\mathbb{H} \kappa_2 = 2\bar{\mu}_1(\mathcal{C}_0 + \bar{\mu}_0\mathcal{C}'_0)\kappa_1 - \bar{\mu}_0\mathcal{S}_0\kappa_1^2 = g_2 \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{H} \kappa_3 &= 3\bar{\mu}_2(\mathcal{C}_0 + \bar{\mu}_0\mathcal{C}'_0)\kappa_1 + \\ &\quad 3\bar{\mu}_1[(\mathcal{C}_0 + \bar{\mu}_0\mathcal{C}'_0)\kappa_2 - (\mathcal{S}_0 + \bar{\mu}_0\mathcal{S}'_0)\kappa_1^2] \\ &\quad 3\bar{\mu}_1^2(2\mathcal{C}'_0 + \bar{\mu}_0\mathcal{C}''_0)\kappa_1 - \bar{\mu}_0(\mathcal{C}_0\kappa_1^3 + 3\mathcal{S}_0\kappa_1\kappa_2) = g_3 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Il nous reste à trouver κ_1 , à calculer $\bar{\mu}_1$ en exigeant que $(g_2, \kappa_1) = 0$, puis à déterminer κ_2 comme solution de l'équation inhomogène. Pour cela on développe κ_2 dans les fonctions propres de \mathbb{H} pour $\nu = 0$ et l'on projette g_2 sur cette base. Puis on cherche à déterminer $\bar{\mu}_2$ via $(g_3, \kappa_1) = 0$. Cette analyse numérique fournit les résultats suivants:

$$\mu_{c_2} = 0.551$$

$$\bar{\mu}_1 = 0$$

$$\kappa_1 = 0.93815 + 0.346 \cos(x) - 0.00064 \cos(2x) - 0.0026 \cos(3x)$$

$$\kappa_2 = -1.95 \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 0.207 \cos\left(\frac{3}{2}x\right) - 0.00053 \cos\left(\frac{5}{2}x\right) + 0.00126 \cos\left(\frac{7}{2}x\right)$$

Le résultat est

$$\kappa_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{2(\mu - \mu_{c_2})}{\mu_2}} \kappa_1 + \frac{2(\mu - \mu_{c_2})}{\mu_2} \kappa_2 \quad (2.29)$$

en accord avec les simulations numériques. (2.29) fait intervenir μ_2 , dont la détermination numérique est ardue. Remarquons que κ_1 est de période 2π , à cause de la périodicité du potentiel, mais κ_2 a la période désirée 4π en x (figure 11), ce qui est dû à la périodicité 4π du terme de source.

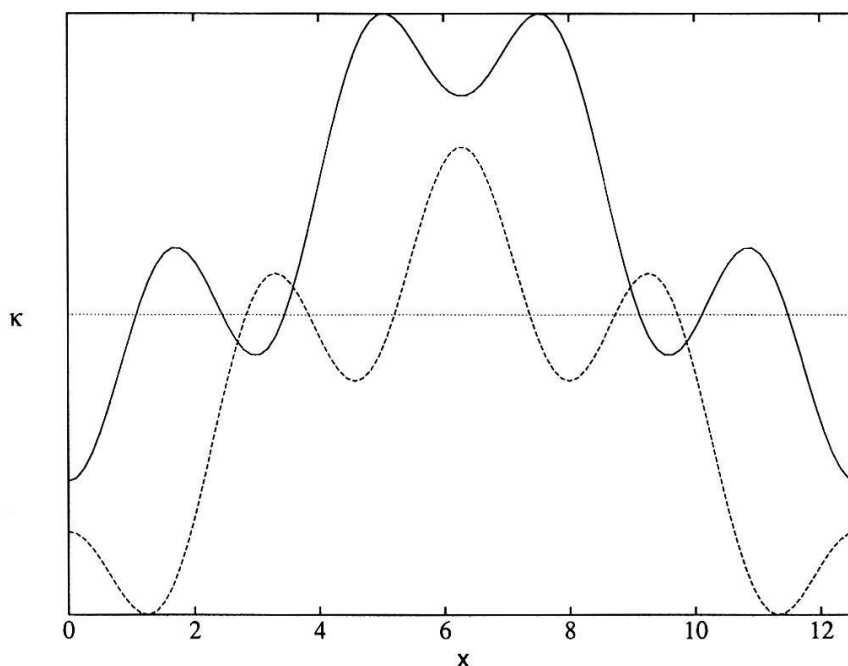


Figure 11: Fonctions κ_{\pm} pour la brisure de symétrie. κ_+ est en trait plein et κ_- en traitsillés. Leurs moyennes ne sont visiblement pas nulles.

2.4 Son Deuxième Doublement de Période

En principe, la méthode que nous avons utilisée par deux fois jusqu'ici peut être employée pour déterminer n'importe quelle bifurcation. En pratique il en va tout autrement, en raison des imprécisions inhérentes à tout calcul numérique. Lors de la bifurcation précédente, le calcul $\bar{\mu}_2$ avait déjà été ardu, mais maintenant il n'est même plus possible de trouver la valeur critique à laquelle la bifurcation a lieu.

Il est cependant possible d'appliquer d'autres méthodes, notamment celle de Newton, permettant de trouver $\mu_{c_3} = 0.7015$, mais au prix de l'abandon de la théorie des bandes qui nous était utile car elle nous donnait une vision plus large des bifurcations. Une simulation numérique montre alors que cette bifurcation est un nouveau doublement de période; ceci s'accorde bien avec le fait qu'immédiatement après la brisure la première bande se trouve au-dessus de l'axe des ν , et ne peut que redescendre jusqu'à toucher l'axe en bord de zone. Celle-ci se trouve en $\nu = \pm 1/4$ car la période du "potentiel" de l'équation de Hill aura doublé lors de la brisure de symétrie.

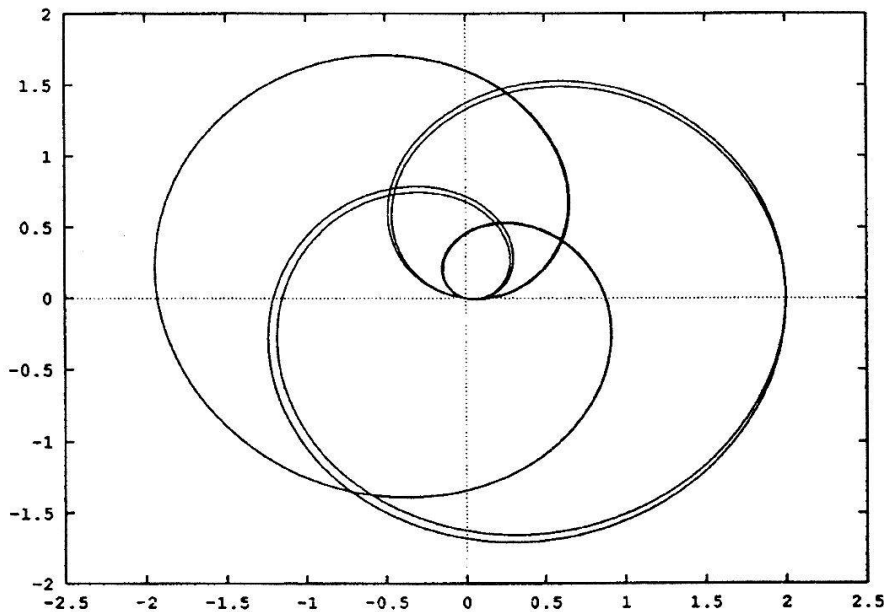


Figure 12: Trajectoire (x, y) de la masse du second pendule pour $\mu = 0.56248$, après le deuxième doublement de période.

3 L'Histoire de la Résonance 1/1

3.1 La Résonance 1/1

Pour réaliser le programme de ce chapitre nous avons besoin de la solution impaire de (1.2) qui, pour $\lambda = 0$ vaut $\phi(0, \theta) = \theta$. Nous posons cette fois

$$\phi(\lambda, \theta) = \theta + \psi(\lambda, \theta) \quad (3.1)$$

$$\psi(\lambda, \theta) = \sum_{n>0} \zeta_n(\lambda) \sin(n\theta) \quad (3.2)$$

En insérant ce développement dans (1.2) on obtient à gauche

$$-\sum_{n>0} n^2 \zeta_n \sin(n\theta)$$

et à droite

$$-\frac{\lambda}{2i} \left\{ [e^{i\theta} + 1] \prod_{n>0} (e^{i\zeta_n \sin(n\theta)}) - [e^{-i\theta} + 1] \prod_{n>0} (e^{-i\zeta_n \sin(n\theta)}) \right\}$$

Posons maintenant: $e^{\pm i\zeta_n \sin(n\theta)} = \sum_{m_n \in \mathbb{Z}} K_{n,m_n}^{\pm}(\zeta_n) e^{im_n \theta}$ avec K^{\pm} des coefficients de Fourier. On obtient alors:

$$-\frac{\lambda}{2i} \left\{ [e^{i\theta} + 1] \sum_{m_0} \sum_{m_1} \cdots K_{0,m_0}^+ K_{1,m_1}^+ \cdots \exp(i \sum m_n \theta) - \right.$$

$$\left[e^{-i\theta} + 1 \right] \sum_{m_0} \sum_{m_1} \cdots K_{0,m_0}^- K_{1,m_1}^- \cdots \exp(i \sum m_n \theta) \Big\} \quad (3.3)$$

Les K_{n,m_n}^\pm sont donnés par:

$$\begin{aligned} K_{n,m_n}^+(\zeta_n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-im_n\theta + i\zeta_n \sin(n\theta)} = J_{\frac{m_n}{n}}(\zeta_n), & n \neq 0 \\ K_{n,m_n}^-(\zeta_n) &= (-1)^{\frac{m_n}{n}} J_{\frac{m_n}{n}}(\zeta_n), & n \neq 0 \\ K_{0,m_0}^\pm(\zeta_0) &= e^{\mp i\zeta_0} \delta_{m_0,0} \end{aligned}$$

où $J_n(z)$ désigne la fonction de Bessel de première espèce et où les seuls coefficients non nuls sont ceux pour lesquels $m_n = p_n n$, $p_n \in \mathbb{Z}$. En introduisant ces coefficients dans (3.3) et en remplaçant la m_n par $p_n n$ on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{n>0} n^2 \zeta_n \sin(n\theta) &= \frac{\lambda}{2i} \sum_{p_1} \sum_{p_2} \cdots \exp \left[i \sum (n\theta) \right] J_{p_1}(\zeta_1) J_{p_2}(\zeta_2) \cdots \\ &\quad \left\{ \left[e^{i\theta} + 1 \right] e^{-i\zeta_0} - (-1)^{\sum p_n} \left[e^{-i\theta} + 1 \right] e^{i\zeta_0} \right\} \end{aligned}$$

Finalement, pour pouvoir exploiter cette dernière il nous reste à la projeter sur $e^{-i\ell\theta}$, obtenant ainsi:

$$\begin{aligned} \sum_{n>0} n^2 \zeta_n \left(\delta_n^\ell - \delta_n^{-\ell} \right) &= \lambda \sum_{p_1} \sum_{p_2} \cdots J_{p_1}(\zeta_1) J_{p_2}(\zeta_2) \cdots \\ &\quad \left\{ e^{-i\zeta_0} \left[\delta_{1+\sum np_n}^\ell + \delta_{\sum np_n}^\ell \right] - (-1)^{\sum p_n} e^{i\zeta_0} \left[\delta_{-1+\sum np_n}^\ell + \delta_{\sum np_n}^\ell \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dans la formule ci-dessus, valable $\forall \ell$, p_n parcourt les entiers positifs et négatifs et les sommes dans les Kroneckers portent sur $n > 0$.

Maintenant il s'agit de résoudre (3.4). Pour ce faire, on commence par le cas où il n'y a qu'une amplitude: $\zeta_n = 0 \forall n \geq 2$. Puis on passe au cas à deux amplitudes, puis à trois, etc... Nous donnons ici explicitement le cas à trois amplitudes, les cas plus simples pouvant être obtenus en imposant la nullité d'une ou plusieurs amplitudes.

Si on convient de noter $\mathcal{J}(q, r, s) = J_q(\zeta_1) J_r(\zeta_2) J_s(\zeta_3)$, on trouve:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_1}{\lambda} &\cong \mathcal{J}(0, 0, 0) + 2\mathcal{J}(1, 0, 0) + \mathcal{J}(0, 1, 0) + \mathcal{J}(1, 0, 1) - \mathcal{J}(2, 0, 0) \\ \frac{\zeta_2}{4\lambda} &\cong \mathcal{J}(1, 0, 0) + 2\mathcal{J}(0, 1, 0) + \mathcal{J}(0, 0, 1) - 2\mathcal{J}(1, 1, 0) - \mathcal{J}(0, 1, 1) - 2\mathcal{J}(1, 1, 1) + \\ &\quad \mathcal{J}(2, 0, 1) - \mathcal{J}(0, 2, 1) - \mathcal{J}(1, 2, 0) + \mathcal{J}(3, 0, 0) \\ \frac{\zeta_3}{9\lambda} &\cong \mathcal{J}(1, 1, 0) + 2\mathcal{J}(0, 0, 1) - 2\mathcal{J}(1, 0, 1) - 2\mathcal{J}(1, 1, 1) + \mathcal{J}(2, 0, 0) - \mathcal{J}(0, 2, 0) - \\ &\quad 2\mathcal{J}(1, 2, 0) - \mathcal{J}(0, 1, 2) - \mathcal{J}(1, 2, 1) + \mathcal{J}(2, 1, 0) - \mathcal{J}(0, 2, 2) - \mathcal{J}(2, 2, 0) + \\ &\quad \mathcal{J}(2, 0, 2) + 2\mathcal{J}(3, 0, 0) - \mathcal{J}(4, 0, 0) \end{aligned}$$

Finalement ces dernières équations peuvent être résolues facilement par itération. On obtient alors $\zeta_n(\lambda)$, qui sont les coefficients de la série. En l'occurrence les calculs montrent que pour

λ petit $\zeta_1 \sim \lambda$, $\zeta_2 \sim \lambda^2$ et $\zeta_3 \sim \lambda^3$. Toutefois, l'intérêt de la méthode développée ci-dessus est qu'elle est aussi valable pour de grandes valeurs de λ . Ceci résulte directement des propriétés des fonctions de Bessel.

3.2 Les Orbites-Satellites

Ayant construit une bonne représentation de la résonance principale on peut s'intéresser à l'émergence d'orbites satellites de nombre d'onde donné ν_s . On part de nouveau de

$$\phi(\lambda, \theta) = \theta + \psi(\lambda, \theta) + \chi_s(\lambda, \theta)$$

et l'on répète la méthode utilisée au chapitre 2. En définissant par λ_0 la valeur critique de λ pour laquelle la valeur propre $e_0(\nu_s, \lambda_0)$ de la bande $n = 0$ de l'équation de Hill associée à l'orbite $\theta + \psi(\lambda, \theta)$ est nulle et en posant

$$\begin{aligned} C &= C(\lambda, \theta) = \cos[\psi(\lambda, \theta) + \theta] + \cos[\psi(\lambda, \theta)] \\ S &= S(\lambda, \theta) = \sin[\psi(\lambda, \theta) + \theta] + \sin[\psi(\lambda, \theta)] \\ \lambda &= \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots \\ \chi_s &= \varepsilon \chi_{s,1} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \chi_{s,2} + \dots \end{aligned}$$

on obtient, *mutatis mutandis*, le même jeu d'équations (2.26-2.28). A titre indicatif, on donne dans la table 2 la valeur de λ_0 pour $\nu_s = 1/n, n = 10, \dots, 2$. Les valeurs pour le doublement (limite de stabilité), le triplement et le quadruplement (résonances fortes) ont été calculées avec plus de précision que les autres étant donné leur intérêt pour la suite de l'analyse.

Période	Multiplicité n	λ_0
20π	10	0.01000
18π	9	0.01234
16π	8	0.01562
14π	7	0.02030
12π	6	0.02775
10π	5	0.03990
8π	4	0.0620571168
6π	3	0.1077472608
4π	2	0.1779885337

Table 2: Valeurs de λ_0 correspondant aux bifurcations sous-harmoniques de la résonance principale.

3.3 Son Quadruplement de Période

La simulation montre qu'en $\lambda = 0.06206$ la résonance $\phi = \theta + \psi(\lambda, \theta)$ subit une bifurcation conduisant à la création de deux orbites de période quadruple, l'une stable et l'autre instable; de plus, ces orbites contiennent des composantes paires et impaires, comme le montre la figure 13.

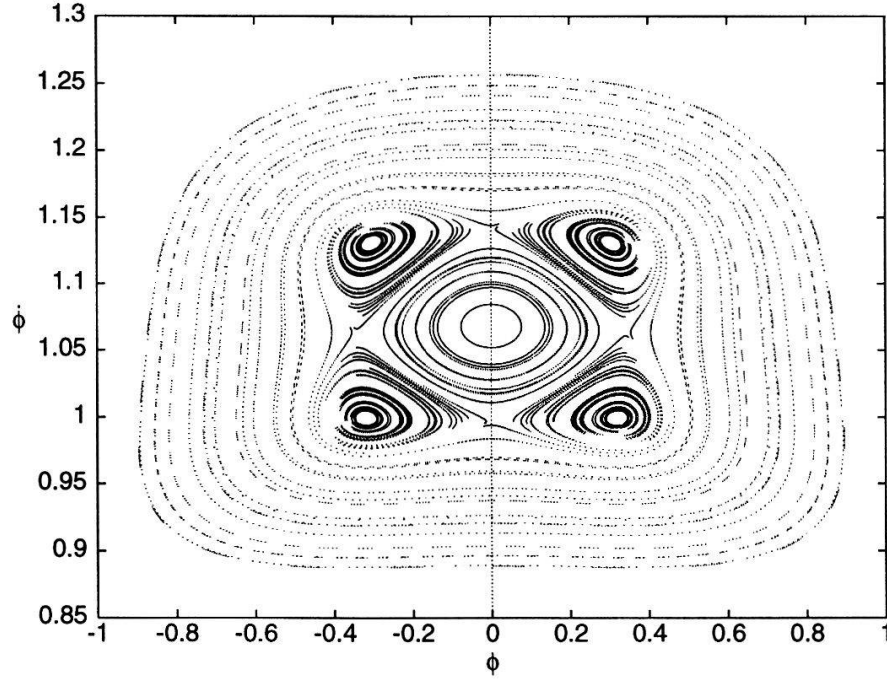


Figure 13: Coupe de Poincaré pour le fléau symétrique en $\lambda = 0.063$.

En procédant selon le schéma maintenant rodé, on résout le système matriciel évoqué plus haut pour $\nu_s = \pm 1/4$. Cette fois, les fonctions propres sont complexes et il faut combiner linéairement les solutions en $\nu_s = \pm 1/4$ pour obtenir les deux solutions réelles, l'une paire χ_1^p et l'autre impaire χ_1^i , suivantes:

$$\frac{\chi_{s,1}^p}{\sqrt{2}} = y_0 \cos\left(\frac{\theta}{4}\right) + \sum_{n>0} \left\{ y_n \cos\left[\left(n + \frac{1}{4}\right)\theta\right] + y_{-n} \cos\left[\left(n - \frac{1}{4}\right)\theta\right] \right\} \quad (3.5)$$

$$\frac{\chi_{s,1}^i}{\sqrt{2}} = y_0 \sin\left(\frac{\theta}{4}\right) + \sum_{n>0} \left\{ y_n \sin\left[\left(n + \frac{1}{4}\right)\theta\right] - y_{-n} \sin\left[\left(n - \frac{1}{4}\right)\theta\right] \right\} \quad (3.6)$$

où $y_{\pm n}$ sont les éléments du vecteur solution pour $\nu_s = 1/4$. Nous posons finalement

$$\chi_{s,1}(\theta) = \sin(\alpha) \chi_{s,1}^i(\theta) + \cos(\alpha) \chi_{s,1}^p(\theta)$$

L'analyse numérique fournit alors les résultats suivants:

- Quelque soit l'angle "de mélange pair-impair" $\alpha \Rightarrow \lambda_1 = 0$ et $\chi_{s,2}(\theta) \equiv 0$;

- La valeur de λ_2 est périodique de période $\pi/2$ en α et est symétrique autour de $\pi/4$. Cela signifie en particulier qu'à l'ordre $O(\varepsilon^3)$ les cas totalement pair et totalement impair sont identiques, ce qui correspond à ce que l'on peut observer sur la coupe 13.

Utilisant ce que nous venons de voir, nous choisissons pour décrire l'orbite instable $\alpha = \pi/2$ et pour décrire l'orbite stable $\alpha = \pi/4$. Ces valeurs sont bien entendu choisies modulo $\pi/2$. Nous obtenons finalement pour le cas instable $\lambda_2 = 0.0429$ et pour le cas stable $\lambda_2 = 0.0274$; le diagramme de cette bifurcation est donné sur la figure 14.

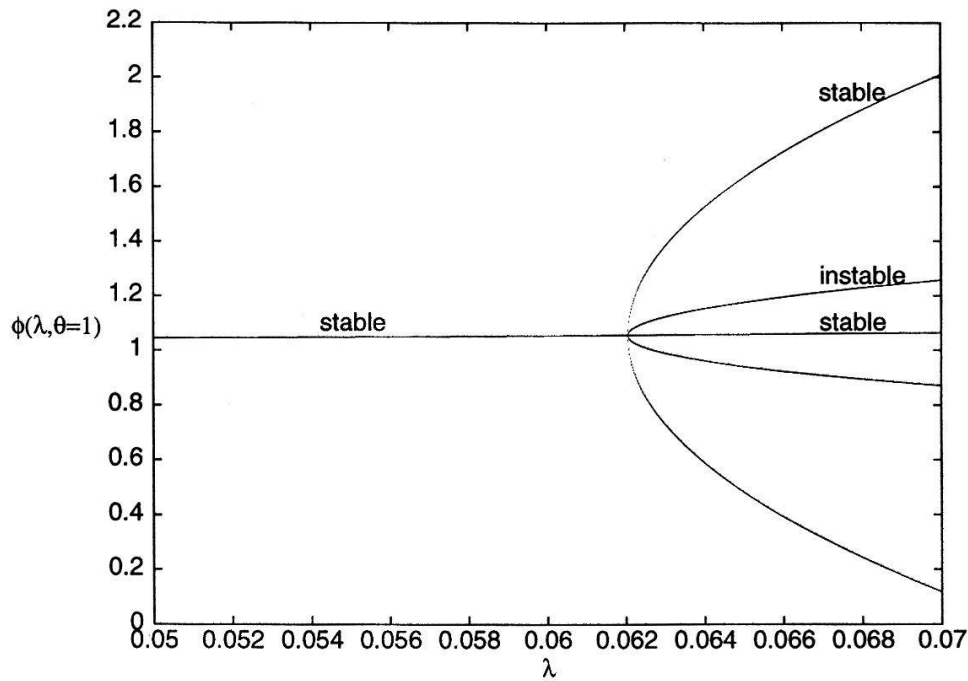


Figure 14: Diagramme de bifurcation pour le quadruplement de période de la résonance 1/1.

3.4 Son Triplement de Période. L'effet de Pincement

Puisque l'on considère la même orbite $\phi = \theta + \psi$, les équations (2.26-2.28) sont toujours valables. La différence par rapport au paragraphe précédant est la périodicité des solutions recherchées, c'est-à-dire que l'on considère maintenant $\nu_s = \pm 1/3$ et qu'il faut changer de produit scalaire, suivant la définition donnée dans l'appendice B.

Considérant que la simulation nous impose de trouver $\chi(\theta)$ impaire, nous aboutissons alors concrètement aux résultats suivants:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= 0.10775 \\ \lambda_1 &= -0.01850 \\ \lambda_2 &= 0.07114\end{aligned}$$

qui impliquent

$$\begin{aligned}\chi_{s,\pm} &= \chi_{s,1}^i \varepsilon_{\pm} + \frac{\chi_{s,2}}{2} \varepsilon_{\pm}^2 \\ \varepsilon_{\pm} &= -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \pm \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} + \frac{2(\lambda - \lambda_0)}{\lambda_2}}\end{aligned}$$

avec $\chi_{s,1}$ donné par (3.6) où l'on remplace $\theta/4$ par $\theta/3$.

Arrêtons-nous un moment sur la série de $\lambda(\varepsilon)$:

$$\lambda = 0.10775 - 0.01850 \varepsilon + 0.03557 \varepsilon^2$$

Elle explique l'effet dit "de pincement" que nous avons déjà mentionné dans l'introduction et dont voici une brève description basée sur les coupes de Poincaré 15-18, auxquelles on peut se référer. Dans la plupart des cas, lorsqu'une orbite génère des orbites sous-harmoniques, celles-ci naissent en λ_0 sur l'orbite-mère, puis s'en éloignent. Dans le cas particulier de cette bifurcation, la simulation montre que les deux orbites naissent *avant* la bifurcation (figures 15-16) et *loin* de l'orbite-mère, en $\lambda \approx 0.1051$. L'orbite stable s'éloigne alors de la résonance 1/1, tandis que l'orbite instable au contraire s'en approche et la croise à la bifurcation (figure 17). Tout ceci trouve une explication dans le graphe 19, qui représente $[\lambda - \lambda_0](\varepsilon)$. La bifurcation est donnée par le croisement, à l'origine, de la branche de parabole représentant l'orbite instable avec l'axe $\varepsilon = 0$ représentant quant à lui la résonance 1/1. Remarquons que sur la figure 16 l'orbite instable se trouve entre l'orbite stable et la résonance 1/1, alors qu'après le pincement les orbites stable et instable s'alternent autour de cette résonance, comme c'était par exemple le cas lors du quadruplement de période (figure 13).

Il devient clair qu'à l'ordre $O(\varepsilon^3)$ une condition nécessaire pour que l'orbite soit pincée est la non-nullité du paramètre λ_1 , puisque si $\lambda_1 = 0$ — comme c'était le cas pour toutes les autres bifurcations que nous avons rencontrées jusqu'à maintenant — il n'apparaît de solution réelle $\varepsilon_{\pm}(\lambda - \lambda_0)$ qu'à l'origine, c'est-à-dire à la bifurcation. Ici en revanche il existe deux solutions dès $\lambda \cong 0.1053 < \lambda_0$, en assez bon accord avec la valeur mentionnée plus haut. Ces deux nouvelles orbites naissent en outre loin de la résonance 1/1, comme on peut le voir sur un diagramme de bifurcation, par exemple à la figure 20. Il est intéressant de remarquer que le cas général $\lambda_1 \neq 0$ est moins commun que le cas a priori particulier $\lambda_1 = 0$.

Signalons enfin que Van der Weele *et al.* ont publié [6] une théorie de l'effet de pincement décrit plus haut. Ces auteurs partent d'une application qui préserve les aires et qui produit bien cet effet dans des conditions appropriées. Comme exemple physique susceptible de manifester ce type de pincement ils citent le modèle de Croquette sans pour autant faire aucun lien entre les équations du mouvement du modèle et les équations de leur application.

3.5 Son Domaine de Stabilité

Pour $\lambda = 0.1780$ les zéros de la première bande atteignent le bord de la zone et la résonance 1/1 devient instable par dédoublement de période selon le schéma habituel. Contrairement

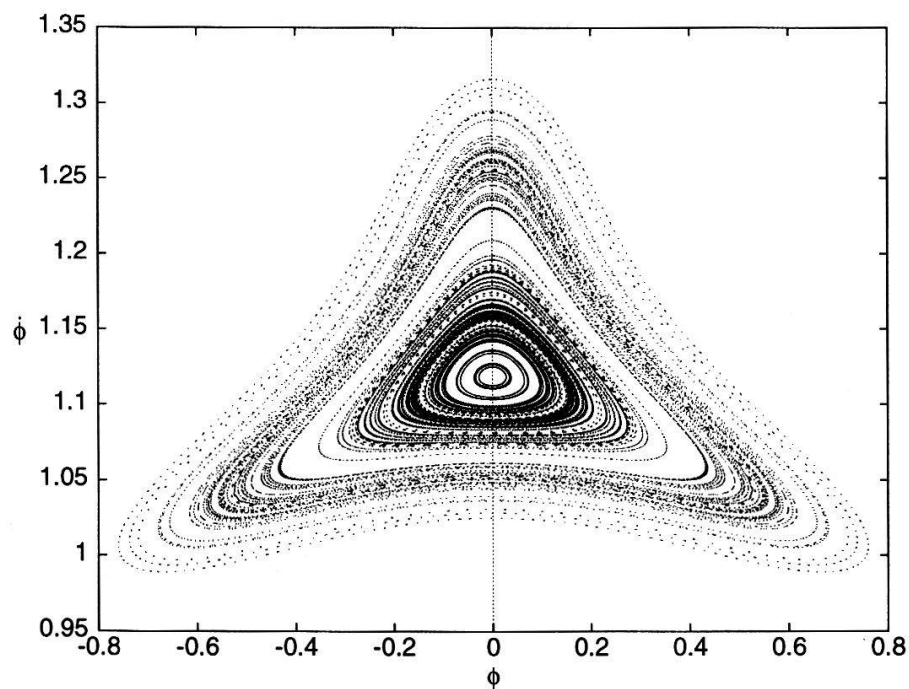


Figure 15: Coupe de Poincaré pour $\lambda = 0.104$, sur laquelle on ne distingue encore que la résonance 1/1.

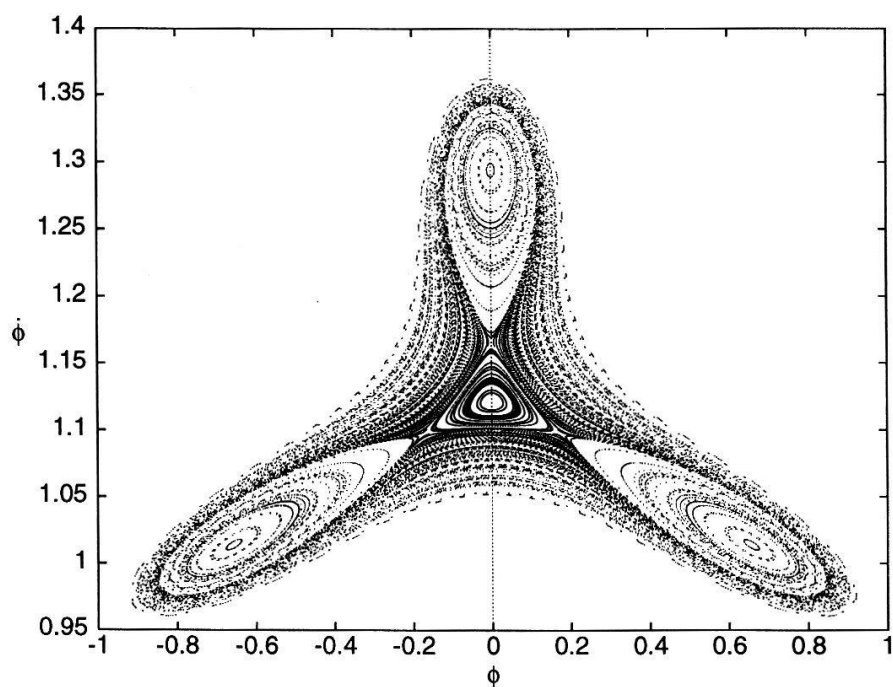


Figure 16: Coupe de Poincaré pour $\lambda = 0.106$, lorsque les orbites triples ont été créées. L'orbite instable se dirige vers la résonance.

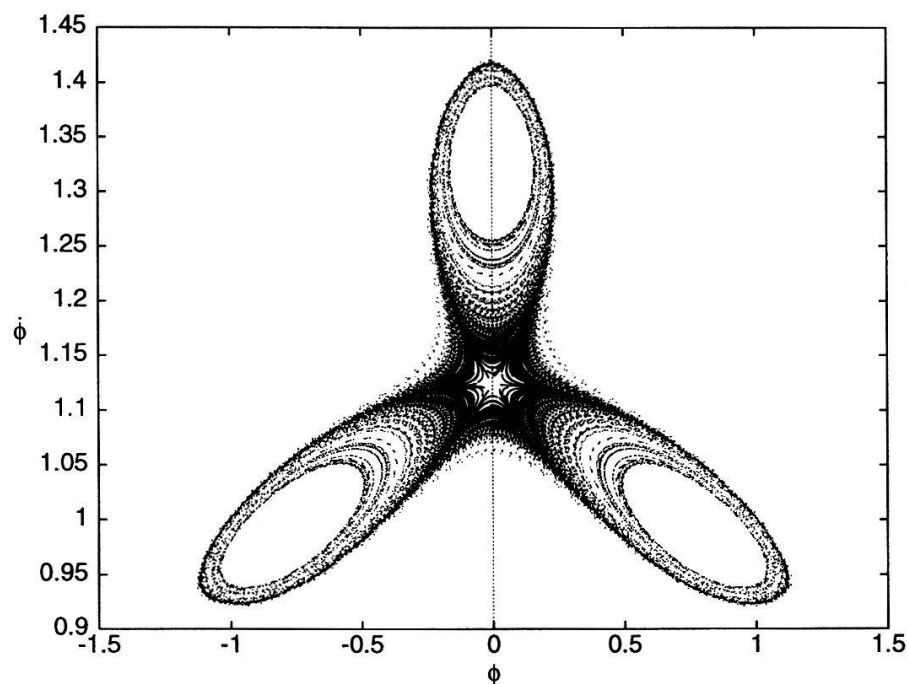


Figure 17: Coupe de Poincaré pour $\lambda = \lambda_0 = 0.1077$. Il s'agit de la bifurcation, lorsque l'orbite instable croise la résonance $1/1$.

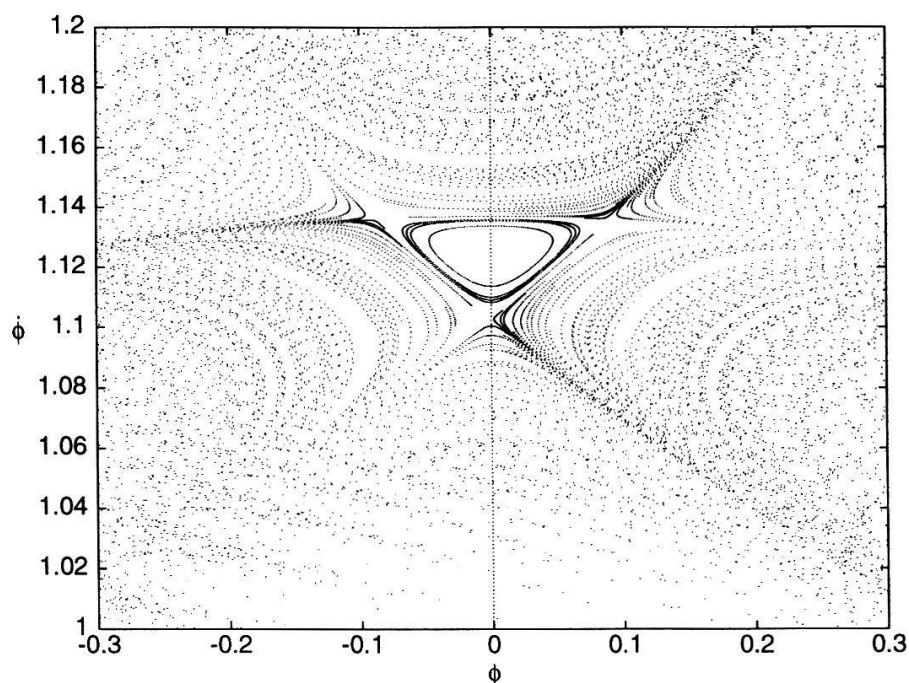


Figure 18: Coupe de Poincaré pour $\lambda = 0.109$ (détail). Par comparaison avec la coupe 16, on remarque que l'orbite instable semble avoir traversé la résonance principale.

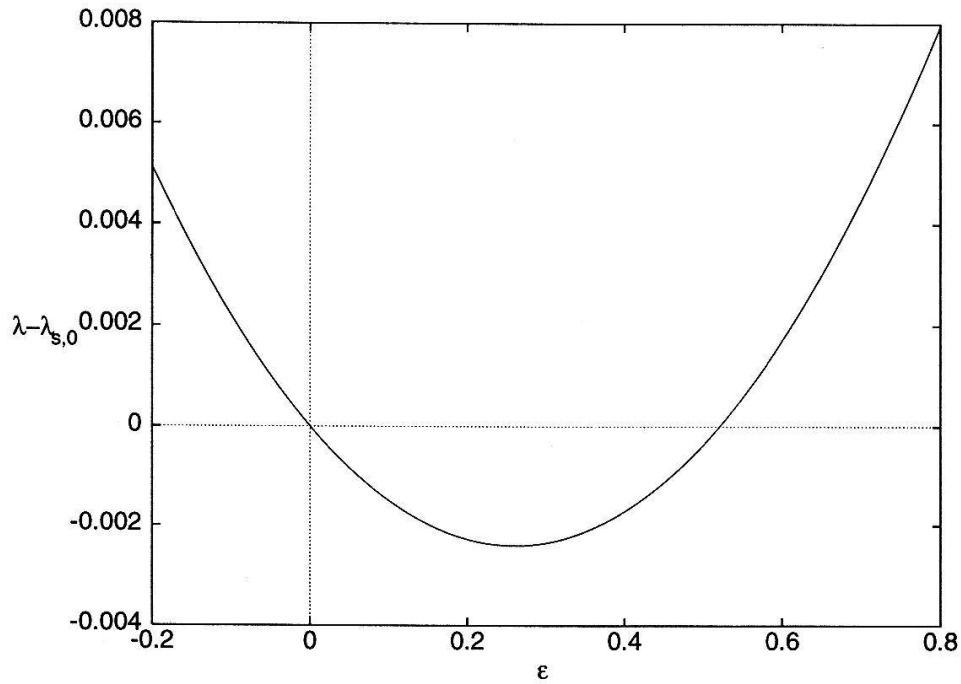


Figure 19: Fonction $[\lambda - \lambda_0](\varepsilon)$ pour l'effet de pincement.

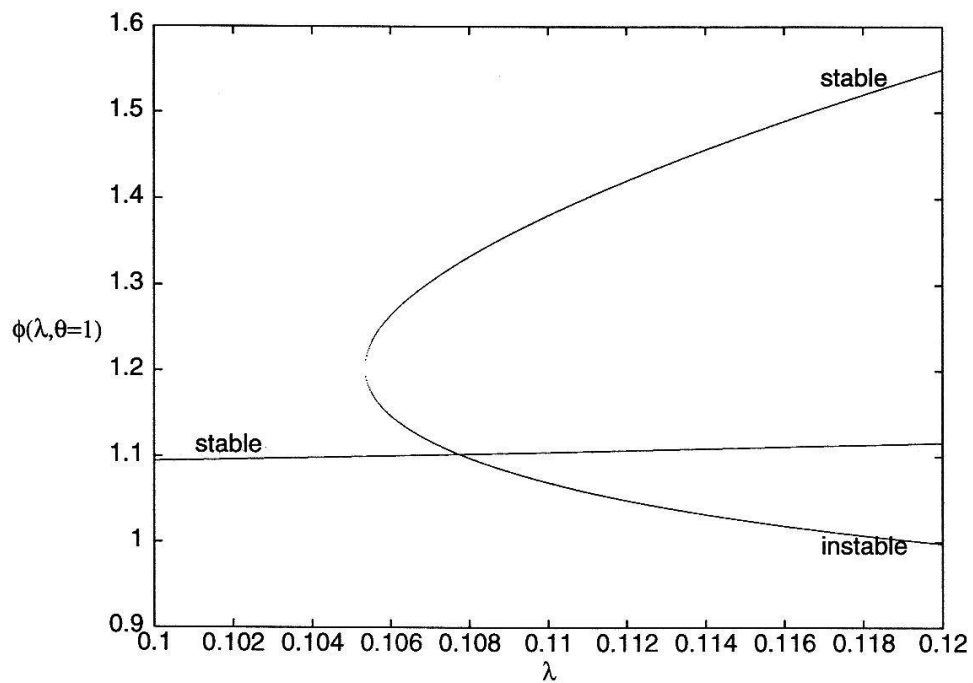


Figure 20: Diagramme de bifurcation pour le triplement de période de la résonance $1/1$. L'orbite instable est celle croisant la résonance.

au cas de la résonance $1/2$, cependant, la nouvelle orbite double possède des composantes paires et impaires, comme le montre la figure 21. Remarquons ici de nouveau que pour $0 < \lambda < 0.1780$ les multiplicateurs de Floquet exécutent un demi-cercle.

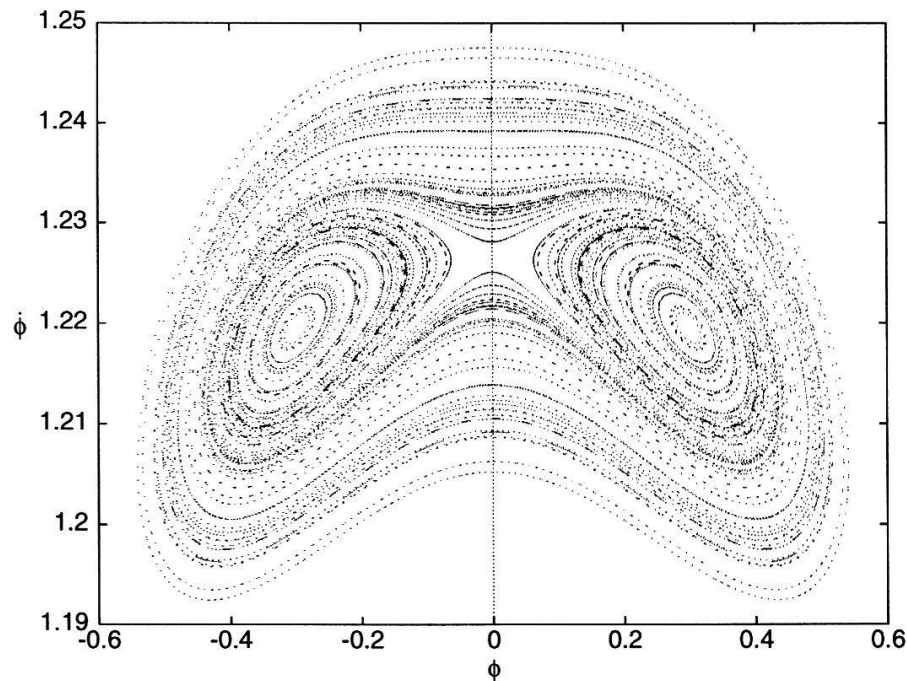


Figure 21: Coupe de Poincaré pour $\lambda = 0.18$, après le doublement de période de la résonance $1/1$.

4 Conclusion

La compréhension des mécanismes sous-jacents aux phénomènes de bifurcations dans un système sans friction a été enrichi par le point de vue de la théorie des bandes. Ceci suggère qu'il en soit de même pour les systèmes dissipatifs. Cela implique une généralisation de l'équation de Hill où les valeurs propres deviennent complexes. Des travaux préliminaires effectués sur le fléau et le pendule forcé dissipatifs [7] paraissent encourageants dans ce sens.

Remerciements

Nous tenons à remercier ici M. Michel Cibils pour l'aide précieuse qu'il nous a accordée tout au long de ce travail et M. R.S. MacKay pour l'entretien fructueux que nous avons eu avec lui récemment.

A Équations Différentielles Linéaires à Coefficients Périodiques. Théorie des Bandes

Soit l'équation de Hill (de Mathieu si $v(x) \sim \cos(x)$):

$$\begin{aligned} -y''(\lambda, x) + v(\lambda, x) y(\lambda, x) &= e y(\lambda, x) \\ v(\lambda, x) &= v(\lambda, x + 2\pi) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

dont les solutions sont, d'après le théorème de Bloch, de la forme

$$\begin{aligned} y(\lambda, x) &= y_\nu(\lambda, x) = e^{i\nu x} p(\lambda, x) \\ p(\lambda, x) &= p(\lambda, x + 2\pi) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Le théorème suivant ([8], [9]) considère cette équation et en détermine les propriétés des valeurs propres, dites propriétés de bandes.

Théorème 1 (de Monotonie) *A chaque équation (A.1) on peut associer deux suites monotones, croissantes et infinies de réels $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ et $\sigma'_0, \sigma'_1, \sigma'_2, \dots$ telles que (A.1) a une solution 2π -périodique $\Leftrightarrow \sigma = \sigma_n \forall n$ et une solution $m\pi$ -périodique $\Leftrightarrow \sigma = \sigma'_n \forall n$. Les σ_n et σ'_n satisfont les inégalités suivantes:*

$$\sigma_0 < \sigma'_0 \leq \sigma'_1 < \sigma_1 \leq \sigma_2 < \sigma'_2 \leq \sigma'_3 < \sigma_3 \leq \dots$$

avec

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^{-1} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n'^{-1} &= 0 \end{aligned}$$

Les solutions sont stables dans les intervalles

$$(\sigma_0, \sigma'_0), (\sigma'_1, \sigma_1), (\sigma_2, \sigma'_2), (\sigma'_3, \sigma_3), \dots$$

et instables ailleurs, ainsi que sur les bords de ces intervalles.

Pour n pair (impair), le spectre est monotone strictement croissant (décroissant) lorsque ν va de 0 à $1/m$, c'est-à-dire que les σ_n sont les valeurs propres pour $\nu = 0$ et les σ'_n pour $\nu = 1/m$.

B Alternative de Fredholm

En développant la solution χ de l'équation du mouvement et le paramètre de couplage μ en séries d'un paramètre arbitraire ε , nous obtenons le jeu suivant d'équations:

$$\mathbb{H} \chi_1 = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{H} \chi_2 &= g_2(\chi_1, \mu_0, \mu_1) \\
\mathbb{H} \chi_3 &= g_3(\chi_1, \chi_2, \mu_0, \mu_1, \mu_2) \\
&\vdots \\
\mathbb{H} \chi_n &= g_n(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}, \mu_0, \dots, \mu_{n-1}) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

L'équation pour χ_1 est du type Schrödinger avec valeur propre nulle et nous avons vu comment en déterminer les solutions. Pour les autres équations du jeu: il nous faut déterminer en premier lieu le paramètre μ_n pour lequel chaque équation admet une solution et ensuite la rechercher. Cela se fait à l'aide du théorème suivant.

Théorème 2 (Alternative de Fredholm) *Soit $\mathbb{H} : C^s(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \mapsto C^s(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ un opérateur et (\cdot, \cdot) un produit scalaire. Alors l'équation $\mathbb{H} \chi = g$ admet une solution $\chi \Leftrightarrow (g, v) = 0 \forall v$ tel que $\mathbb{H}^+ v = 0$. La croix dénote la conjugaison hermitienne.*

Ce théorème, appliqué à la $n^{\text{ème}}$ l'équation du set permet de déterminer la valeur de la constante μ_{n-1} telle que la solution χ_n existe.

Si la solution recherchée est de période mT , nous choisissons pour produit scalaire:

$$(f, g) = [f, g]_{mT} = \frac{1}{mT} \int_0^{mT} dt f(t) g(t)$$

avec lequel la condition exigée par l'alternative se ramène à $(g_n, \chi_1) = 0 \forall n$, soit

$$\int_0^{mT} dt \chi_1(t) g_n(t) = 0 \quad (\text{B.1})$$

Références

- [1] V. Croquette. Déterminisme et chaos. *Pour la Science*, 62:62–77, 1982.
- [2] D.F. Escande. Stochasticity in classical hamiltonian systems: Universal aspects. *Physics Reports*, 121(3-4):166–261, 1985.
- [3] Philippe Choquard. *Mécanique Analytique*, volume 1. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1992.
- [4] Philippe Zysset. *Contribution à l'Étude des Propriétés du "Fléau"*. Travail de Diplôme, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Institut de Physique Théorique, 1986.
- [5] Gérard Ioos and Daniel D. Joseph. *Elementary Stability and Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, 1990.

- [6] Van der Weele, Valkering, Capel, and Post. The squeeze effect in non-integrable hamiltonian systems. *Physica*, 147A:499–532, 1988.
- [7] Joachim Laukenmann. *Beitrag zum Deterministischen Chaos: die Dynamik des Einzelpendels*. Travail de Diplôme, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Institut de Physique Théorique, 1993.
- [8] S. Winkler W. Magnus. *Hill's Equation*. Interscience Publishers, 1966.
- [9] B. Simon M. Reed. *Methods of Modern Mathematical Physics, IV. Analysis of Operators*. Academic Press, 1966.