Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 66 (1993)

Heft: 2

Artikel: Asymptotique de la largeur de la première bande de l'opérateur de Dirac avec potentiel périodique

Autor: Mohamed, A. / Parisse, B. / Outassourt, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-116568

Helv Phys Acta
Vol. 66 (1993)

0018-0238/93/020192-24\$1.50+0.20/0

Asymptotique de la Largeur de la Première Bande de l'Opérateur de Dirac avec Potentiel Périodique

A. Mohamed [1]   B. Parisse [2]   A. Outassourt [1],[3]

(1) Université de Nantes
Dpt. de Mathématiques
C.N.R.S. U.R.A. 758
2, r. de la Houssinière
44072 NANTES Cedex 03
FRANCE

(2) Université de Paris 11
Dpt. de Mathématiques
C.N.R.S. U.R.A. 760
Bât. 425
91405 ORSAY Cedex
FRANCE

(3) Université Cadi-ayyad
Faculté des Sciences
Marrakech
MAROC

(3. X. 1992)

Abstract The Dirac operator with a periodic potential has a band spectrum. We localize these bands in the semi-classical sense, in particular we obtain a precise asymptotic expansion of the width of the lowest energy band.

I) Introduction et énoncé des résultats

On s'intéresse au spectre de l'opérateur de Dirac sur $\mathbb{R}^n$

(1.1) $\quad H^h := H_0^h + V(x)\mathbb{1},$

avec un potentiel électrique $V(x)$ périodique,

(1.2) $\quad V(x+\gamma) = V(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n$;

$\Gamma = \{\sum_{j=1}^{n} k_j v_j;\ k = (k_1,..,k_n) \in \mathbb{Z}^n\}$, où $\{v_1,...,v_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

L'opérateur non perturbé H_0^h est différentiel, à coefficients constants et de la forme

$H_0^h = \begin{bmatrix} 1 & A^*(hD_x) \\ A(hD_x) & -1 \end{bmatrix}$, où $A(hD_x)$ est un système $m\times m$ différentiel elliptique.

L'opérateur $A(hD_x)$ est homogène d'ordre 1 et vérifie $A^*(hD_x)A(hD_x) = -h^2\Delta 1$,

(Δ est le Laplacien usuel sur $\mathbb{R}^n$, 1 est la matrice identité $m\times m$

et $\mathbb{1}$ celle $2m\times 2m$).

Le paramètre h est réel >0 et censé être très petit.

On s'intéressera plus particulièrement aux cas suivants:

$n=3$ avec $m=2$ et $A(hD_x) = \sigma(hD_x) = h\Sigma_{j=1}^{3} \sigma_j D_{x_j}$,

$n=2$ avec $m=1$ et $A(hD_x) = h\Sigma_{j=1}^{2} \sigma_j D_{x_j}$,

$n=1$ avec $m=1$ et $A(hD_x) = h\sigma_2 D_x$.

Les matrices σ_j sont celles bien connues de Pauli,

$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ et $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

On suppose que $V(x)$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^n$.

Il est alors bien connu que H^h est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^{2m})$ et que le spectre de H^h est constitué de l'union des spectres des opérateurs de Floquet:

$$sp(H^h) = \bigcup_{\theta\in\mathbb{R}^n\setminus\Gamma^*} sp(H^{h,\theta}),$$

où $H^{h,\theta}$ est l'opérateur différentiel défini sur le tore $\mathbb{R}^n/\Gamma$, auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma;\mathbb{C}^{2m})$, et défini comme H^h en remplaçant $A(hD_x)$ par $A(hD_x+h\theta)$.

On a noté Γ^* le réseau dual, $\Gamma^* = \{\omega\in\mathbb{R}^n;\ \omega\gamma\in 2\pi\mathbb{Z},\ \forall\gamma\in\Gamma\}$.

L'opérateur $H^{h,\theta}$ est l'unique réalisation auto-adjointe contenant $C^\infty(\mathbb{R}^n/\Gamma;\mathbb{C}^{2m})$ dans son domaine, il est alors à résolvante compacte, du fait que H^h est elliptique et que le tore est compact. Son spectre est constitué d'une suite de valeurs propres, chacune étant répétée autant de fois que sa multiplicité:

$sp(H^{h,\theta})=\{\lambda_k(h,\theta);\ k\in\mathbb{Z}^*\}$,

avec $\lambda_{-k-1}(h,\theta)\leqslant\lambda_{-k}(h,\theta)<0\leqslant\lambda_k(h,\theta)\leqslant\lambda_{k+1}(h,\theta)$, si $k>0$.

Pour tout $k\in\mathbb{Z}^*$ on considère alors la bande

(1.3) $b_k(h)=\bigcup_\theta \lambda_k(h,\theta)$;

on a donc $sp(H^h)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^*} b_k(h)$.

Il est facile de voir que les bandes $b_k(h)$ sont des intervalles. Si $n=3$, pour tout $\omega\in\Gamma^*$, $H^{h,\theta+\omega}$ est unitairement équivalent (par simple changement de jauge) à $H^{h,\theta}$, et comme nous allons le voir $H^{h,-\theta}$ est aussi unitairement équivalent à $H^{h,\theta}$, $H^{h,\theta}J=JH^{h,-\theta}$, où J est l'opérateur anti-linéaire, unitaire et défini sur $\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2$ par $J(z_+,z_-):=(\sigma_2\overline{z}_+,\sigma_2\overline{z}_-)$. On a donc $\lambda_{2k-1}(h,\theta)=\lambda_{2k}(h,\theta)$ et $\lambda_{-2k+1}(h,\theta)=\lambda_{-2k}(h,\theta)$, si $2\theta\in\Gamma^*$, ceci $\forall k\in\mathbb{N}^*$, et donc les bandes $b_{2k-1}(h)$ et $b_{2k}(h)$ se touchent ainsi que celles-ci: $b_{-2k+1}(h)$ et $b_{-2k}(h)$, si $k>0$.

Nous ferons l'hypothèse suivante,

(1.4) $\sup_x V(x)-\inf_x V(x)<2$,

notons alors

(1.5) $\mu^-:=-1+\sup_x V(x)$ et $\mu^+:=1+\inf_x V(x)$.

Il est facile de voir qu'il y a au moins une lacune, un 'gap', dans le spectre de H^h,

(1.6) $]\mu^-,\mu^+[\cap sp(H^h)=\emptyset$.

Quitte à rajouter à $V(x)$ une constante, on peut toujours supposer que $\mu^-<0<\mu^+$, dans ce cas $b_{-k}(h)\subset]-\infty,\mu^-]$ et $b_k(h)\subset[\mu^+,+\infty[$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$.

Si le minimum de $V(x)$ ainsi que son maximum sont non dégénérés, en utilisant la théorie de Helffer-Sjöstrand $[HE-SJ]_{1,2}$, (voir les adaptations faites à l'opérateur de Dirac dans [WAN] et dans [MO-PA]), on voit aisément que, pour tout entier $k>0$, au voisinage de μ^-, la bande $b_{-k}(h)$ est localisée dans un voisinage de la $k^{\text{ème}}$ valeur propre de l'opérateur $-[-h^2\Delta+W^-(x)]$, et qu'au voisinage de μ^+, la bande $b_k(h)$ est localisée dans un voisinage de la $k^{\text{ème}}$ valeur propre de $-h^2\Delta+W^+(x)$, ces opérateurs étant définis sur $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$ avec

(1.7) $$W^-(x)=1-(V(x)-\mu^-)^2 \quad \text{et } W^+(x)=1-(V(x)-\mu^+)^2.$$

Plus précisement, on a les résultats suivants.

Proposition (1.1)$^-$. *On suppose que* V *est* C^∞ *et que* (1.2) *et* (1.4) *sont vérifiés. On suppose de plus qu'il existe* $x_0^-\in\mathbb{R}^n$, *vérifiant*

(1.8)$^-$ $$V(x_0^-)=\mathbf{Sup}\{V(x);x\in\mathbb{R}^n\} \text{ et } V(x)=V(x_0^-)\Rightarrow x-x_0^-\in\Gamma.$$

Si le maximum de V *est non dégénéré, i.e. s'il existe* $\varepsilon>0$ *et* $\alpha>0$ *tels que l'on ait*

(1.9)$^-$ $$V(x)-V(x_0^-)\leqslant-\alpha|x-x_0^-|^2,\ \text{si } |x-x_0^-|\leqslant\varepsilon;$$

Alors, pour tout $k_0\in\mathbb{N}^*$, *il existe* $h_0>0$ *et* $C>0$, *tels que, pour tout* h, $0<h<h_0$, *et tout* $k\in\mathbb{N}$, $0<k\leqslant k_0$, *on ait*

(1.10)$^-$ $$b_{-k}(h)\subset]-h^{3/2}C-he_k^-+\mu^-,\mu^--he_k^-+h^{3/2}C[,$$

où $(e_j^-)_{j>0}$ *est la suite croissante des valeurs propres de l'oscillateur harmonique* $\frac{1}{2}[-\Delta-xV''(x_0^-)x]$ *sur* $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$,

($V''(y)$ *désigne la matrice du hessien d'ordre deux de* V *au point* y).

Proposion (1.1)$^+$. *On suppose que* V *est* C^∞ *et que l'on a* (1.2) *et* (1.4). *On suppose de plus qu'il existe* $x_0^+\in\mathbb{R}^n$ *tel que l'on ait*

(1.8)$^+$ $$V(x_0^+)=\mathbf{inf}\{V(x);x\in\mathbb{R}^n\} \text{ et } V(x)=V(x_0^+)\Rightarrow x-x_0^+\in\Gamma.$$

S'il existe $\alpha>0$ *et* $\varepsilon>0$ *tels que*

(1.9)$^+$ $$V(x)-V(x_0^+)\geqslant\alpha|x-x_0^+|^2,\ \text{si } |x-x_0^+|\leqslant\varepsilon;$$

Alors, pour tout $k_0\in\mathbb{N}^*$, *il existe* $h_0>0$ *et* $C>0$, *tels que, pour tout* h, $0<h<h_0$, *et tout* $k\in\mathbb{N}$, $0<k\leqslant k_0$, *on ait*

$(1.10)^+ \quad b_k(h) \subset]-h^{3/2}C + he_k^+ + \mu^+, \mu^+ + he_k^+ + h^{3/2}C[,$

où $(e_j^+)_{j>0}$ *est la suite croissante des valeurs propres de l'oscillateur harmonique* $\frac{1}{2}[-\Delta + xV''(x_0^-)x]$ *sur* $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$.

Les hypothèses $(1.9)^{\pm}$ peuvent être affaiblies, mais dans ce cas les localisations (1.10) sont différentes.

Notre résultat principal est de donner, dans l'esprit de ce qui s'est fait pour l'opérateur de Schrödinger par $[\mathrm{SIM}]_2$ et par $[\mathrm{OUT}]_1$, un comportement asymptotique, quand h est très petit, de la taille de la bande du spectre de H^h la plus proche de μ^- et la plus proche de μ^+.

Soient les métriques d'Agmon $W^-(x)dx^2$ et $W^+(x)dx^2$, on désigne $d^-(x,y)$ et $d^+(x,y)$ les distances associées entre deux points x et y de $\mathbb{R}^n$. Suivant que $(1.8)^-$ ou $(1.8)^+$ est vérifié, on considère

$$(1.11) \qquad S_0^{\pm} := \inf_{\gamma \in \Gamma^*} d^{\pm}(x_0^{\pm}; x_0^{\pm} + \gamma).$$

On considère les cellules élémentaires $K^{\pm}$ centrées en $x_0^{\pm}$,

$$(1.12) \qquad K^{\pm} := \{x_0^{\pm} + \sum_{i=1}^{n} t_i v_i;\ \text{avec } t_i \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\}.$$

Théorème (1.2). *On se place sous les hypothèses de la proposition* $(1.1)^{\pm}$. *On suppose en plus que si* $\gamma \in \Gamma$ *est tel que* $d^{\pm}(x_0^{\pm}, x_0^{\pm} + \gamma) = S_0^{\pm}$, *alors il existe un nombre fini de géodésiques, pour la métrique* $W^{\pm}(x)dx^2$, *reliant* $x_0^{\pm}$ *à* $x_0^{\pm} + \gamma$, *et que deux telles géodésiques sont soit confondues soit d'intersection réduite aux deux points* $x_0^{\pm}$ *et* $x_0^{\pm} + \gamma$.

Alors la bande du spectre de H^h *la plus proche de* $\mu^{\pm}$, *qui est* $b_{\pm 1}(h) \cup b_{\pm 2}(h)$ *si* $n = 3$ *et seulement* $b_{\pm 1}(h)$ *si* $n < 3$, *est de la forme* $[r_-^{\pm}(h) + \lambda_D^{\pm}(h), \lambda_D^{\pm}(h) + r_+^{\pm}(h)]$, Certains résultats partiels de ce travail ont été établis auparavant dans la thèse de l'un des auteurs, A. Outassourt $[OUT]_2$.

Nous tenons à remercier vivement B. Helffer pour l'intérêt porté à ce travail.

II) Démonstration des résultats

Dans toute la suite, C désignera toute constante >0 ne dépendant que de $V(x)$. Le produit scalaire sur $\mathbb{C}^k$ sera noté $(\,.\,|\,.\,)$ et la norme associée $|\,.\,|$.
L'opérateur gradient sur $\mathbb{R}^n$ sera noté ∇, $\nabla = iD_x$, $p(\xi)$ désignera le symbole principal de H_0^h, $H_0^{h,\theta}u = p(hD_x+h\theta)u+(u^+,-u^-)$. Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, $<\,.\,|\,.\,>_\Omega$ désignera le produit scalaire sur $L^2(\Omega;\mathbb{C}^{2m})$ et $\|\,.\,\|_\Omega$ la norme associée, $W^k(\Omega;\mathbb{C}^{2m})$ désignera l'espace de Sobolev d'ordre k sur Ω et $\|\,.\,\|_{k,\Omega}$ sa norme, les références à Ω seront omises quand il n'y aura pas confusion.

§2.1 Preuve de (1.6)

Soit $\lambda \in]\mu^-,\mu^+[$, alors $-1 < V(x)-\lambda < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
Par conséquent l'opérateur $C_\lambda^h = A^*(hD_x)[1+\lambda-V(x)]^{-1}A(hD_x)+[1+V(x)-\lambda]$ est un isomorphisme de $W^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$ sur $W^{-1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$ et l'image de $W^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$ est $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$. Pour tout $f=(f^+,f^-)\in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^m)$, on détermine $u=(u^+,u^-)\in\mathcal{H}$ par $u^- = [1+\lambda-V(x)]^{-1}[A(hD_x)u^+-f^-]$ et

$$u^+ = (C_\lambda^h)^{-1}[f^+ + A^*(hD_x)(1+\lambda-V(x))^{-1}f^-].$$

On a $u\in\mathcal{H}$ et $(H^h-\lambda)u=f$ .On vérifie aisément, grâce à l'ellipticité de H^h que u est dans son domaine, $u\in D(H^h) = W^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^m)$, ce qui prouve que $\lambda\notin sp(H^h)$.

§2.2 Preuve de la proposition (1.1)

On a (cf [WAN] ou [MO-PA]) l'égalité d'energie

$$(2.1)\quad \begin{cases} \|h(D_x+\theta)(e^{\phi/h}u)\|^2+\displaystyle\int_{K'} e^{2\phi/h}[1-|\nabla\phi(x)|^2-(V(x)-\lambda)^2]|u(x)|^2dx \\ =\mathrm{Re}(<e^{2\phi/h}[H_0^{h,\theta}+(V-\lambda)]u|[H_0^{h,\theta}-(V-\lambda)]u>)- \\ 2\mathrm{Im}(<e^{2\phi/h}[H_0^{h,\theta}+(V-\lambda)]u|p(\nabla\phi)u>), \end{cases}$$

ceci pour tout réel λ, pour toute cellule K', pour toute fonction réelle et lipschitzienne $\phi(x)$ sur $\mathbb{R}^n$ et vérifiant des conditions sur le bord de K périodiques, et pour tout $u\in W^1(K';\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^m)$ vérifiant des conditions au bord périodique sur K', (on prendra par exemple $K'=K$ ou $K'=K_3:=x_0+3(K-x_0)$).

L'égalité (2.1) est encore valable sur un ouvert Ω en imposant à u de vérifier les conditions au bord de Ω du type de Dirichlet, (on n'impose aucune condition au bord pour ϕ).

L'estimation (2.1) avec $K'=K_3$ et $\phi(x)=(1-\varepsilon_0)d(x)$, $0<\varepsilon_0<1$, permet aisément d'établir la Proposition en suivant par exemple la démonstration du théorème (2.6) de [MO-PA]; la distance d(x) est définie par

$$d(x):=\inf_{\gamma\in\Gamma} d(x_0+\gamma,x);$$

dans (1.10), C est une constante >0 ne dépendant que de K'.

En effet si $\lambda=\mu+\mathcal{O}(\hbar)$ est une valeur propre de $H^{h,\theta}$, et si u(x) est une fonction propre associée, alors u(x) a toute son énergie concentrée dans un petit voisinage de x_0, i.e. il existe C>0 tel que, pour tout h assez petit, on ait

$$\int_{K'}[h^2|(D_x+\theta)e^{\phi/h}u|^2+(|x-x_0|^2|e^{\phi/h}u|^2]dx\leq C\int_{K'}|u|^2dx.$$

Si $\chi_0(x)$ est une fonction de troncature à support dans K et égale à 1 dans un voisinage de x_0, il existe donc $\eta>0$ tel que

$$(2.2)\qquad \|(H^h-\lambda)\chi_0u\|_1=\mathcal{O}(e^{-\eta/h}),\quad \text{si } \int_{K'}|u|^2dx=1.$$

La dilatation $(x-x_0)\rightarrow h^{1/2}(x-x_0)$, puis la formule de Taylor appliquée en x_0

et on a les développements asymptotiques

$$r_+^{\pm}(h)-r_-^{\pm}(h)\sim h^{2-\frac{n}{2}}e^{-S_0^{\pm}/h}\sum_{j\geqslant 0} r_j^{\pm}h^j, \text{ avec } r_0^{\pm}>0, \quad \text{et } \lambda_D^{\pm}(h)\sim\mu^{\pm}+\sum_{j\geqslant 1}\rho_j^{\pm}h^j.$$

(Ici $\pm\lambda_D^{\pm}(h)$ *désigne la plus petite valeur propre* $\geqslant \pm\mu^{\pm}$ *du problème de Dirichlet sur un ouvert* Ω *contenant* $\{x;\ d^{\pm}(x_0^{\pm},x)\leqslant \frac{1}{2}S_0^{\pm}\}$ *et associé à* H^h*).*

Le problème de Dirichlet est l'un des deux suivants définis par l'opérateur $H_\Omega^{h,\pm}$ associé à H^h sur Ω, de domaine

$D(H_\Omega^{h,\pm})=\{u=(u^+,u^-)\in W^1(\Omega;\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^m);\ u^{\pm}/\partial\Omega=0\}$.

L'ouvert Ω doit être choisi connexe, borné, à frontière assez régulière, contenant $\{x;\ d^{\pm}(x_0^{\pm},x)\leqslant\frac{1}{2}S_0^{\pm}\}$ et ne rencontrant pas $x_0^{\pm}+\Gamma\backslash\{0\}$.

Remarquons que l'on passe d'un maximum pour $V(x)$ à un minimun pour $-V(-x)$ par la transformation unitaire $\mathfrak{J}(f)(x)=(f^-(-x),f^+(-x))$, si $f(x)=(f^+(x),f^-(x))\in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)\times L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$.

En effet on a $\mathfrak{J}^*(H_0^h+V(x)\mathbb{1})\mathfrak{J}=-(H_0^h-V(-x)\mathbb{1})$;
par conséquent nous démontrerons seulement le cas du minimum pour $V(x)$, celui relatif au signe $+$, nous omettrons en particulier ce signe $+$ quand il n'y aura pas confusion.

Dans le chapitre II, nous démontrerons les résultats annoncés et dans le chapitre IV, nous traiterons le cas des potentiels à singularité de type Coulombienne qui ont été étudiés, auparavant dans le cadre de l'opérateur de Schrödinger, par [KNA] et [MOH]. Au cours de la démonstration du théorème (1.2), il apparait que les deux prémières valeurs propres positives $\lambda_1(h,\theta)$ et $\lambda_2(h,\theta)$, de l'opérateur de Floquet $H^{h,\theta}$ sont asymptotiquements proches quand $h\to 0$. Une question naturelle se pose, à savoir si génériquement $\lambda_1(h,\theta)$ est une valeur propre simple. Nous repondrons partiellement à cette question dans le chapitre III et nous donnerons un exemple de potentiel $V(x)$ donnant lieu à un $\lambda_1(h,\theta)$ simple pour tout (h,θ) dans un ensemble dense, en utilisant les techniques de [MO-PA]. Un problème semblable se pose pour les états exités de l'opérateur de Schrödinger, c.f. [COL].

dans l'égalité

(2.3) $$C_\lambda^{h,\theta} u^+ = 0,$$

$$C_\lambda^{h,\theta} = [1 - V(x) + \lambda] A^*(h(D_x + \theta))[1 - V(x) + \lambda]^{-1} A(h(D_x + \theta)) + 1 - (V(x) - \lambda)^2,$$

permet de voir que

(2.4) $$\|[\tfrac{1}{2}(-\Delta \pm (x - x_0)V''(x_0)(x - x_0) - h^{-1}(\lambda - \mu)]\chi_0 u\| = \mathcal{O}((h^{1/2}).$$

Mais $u^- = [1 - V + \lambda]^{-1} A(h(D_x + \theta))u^+$,

alors (2.1)- - (2.3) montrent que

$$\|\chi_0 u^-\| \leqslant C_1(h\|D_x \chi_0 u^+\| + e^{-\eta/h}) \leqslant C_2(\|\chi_0 u^+\| + e^{-\eta/h});$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes >0, indépendantes de h.

On peut donc déduire de (2.4) qu'il existe une valeur propre e_k de l'oscillateur harmonique, telle que $|\lambda - \mu - he_k| = \mathcal{O}(h^{3/2})$,

λ est proche d'une valeur propre de l'oscillateur harmonique de la Proposition.
La réciproque est beaucoup plus facile compte tenu de la décroissance exponentielle des fonctions propres de l'oscillateur harmonique.

On vérifie de même l'égalité des dimensions des images des projecteurs spectraux respectifs, sur un intervalle convenablement choisi et de longeur de l'ordre de $h^{3/2}$.

§2.3 Preuve du théorème (1.2)

On supposera que x_0 se trouve à l'origine de $\mathbb{R}^n$.

Dans toute la suite on écrira

$f(h) \approx g(h)$, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(h) = g(h) + \mathcal{O}(e^{-(S_0+\varepsilon)/h})$, quand $h \to 0$.

Soit ε_0, $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{4}$, choisi assez petit. Soit Ω un ouvert vérifiant

$Q_{1-2\varepsilon_0} \subset \Omega \subset Q_{1-\varepsilon_0}$, avec $Q_r := \{x;\ d(x_0, x) < rS_0\}$.

Soit le sous-ensemble borné de Γ,

$$\mathcal{K} := \{\gamma \in \Gamma;\ (\gamma + K) \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset\}.$$

Soit $\chi(x)$ une fonction de troncature qui vaut 1 dans un voisinage de $Q_{1-2\varepsilon_0}$ et à support dans Ω.

Rappelons que J commute avec l'opérateur de Dirichlet H_Ω^h, sur Ω.

Soit $\lambda(h)$ la première valeur propre $\geqslant 0$ de H^h_Ω,

$\lambda(h)$ est telle que $\lambda(h)=\mu+he_1+\mathcal{O}(h^2)$.

La valeur propre $\lambda(h)$ est de multiplicité deux, l'espace propre admet une base orthonormée de la forme $\{u^h, Ju^h\}$. On considère comme dans $[\mathrm{OUT}]_1$ les fonctions $v_1^{h,\theta}(x)=e^{-i\theta x}\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{i\theta\gamma}\chi(x-\gamma)u^h(x-\gamma)$ et $v_2^{h,\theta}(x)=e^{-i\theta x}\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{i\theta\gamma}\chi(x-\gamma)Ju^h(x-\gamma)$;

ce sont deux fonctions périodiques sur K.

Si pour tout $\varepsilon_1\in]0,1[$ fixé, on utilise (2.1) sur Ω avec $\phi(x)=(1-\varepsilon_1)d(x_0,x)$, on trouve qu'il existe $C_{\varepsilon_1}>0$, indépendant de h, tel que l'on ait

$$\|hD_x(e^{\phi/h}u^h)\|^2+\|de^{\phi/h}u^h\|^2\leqslant C_{\varepsilon_1}\text{ ; avec } d(x)=d(x_0,x). \tag{2.5}$$

Comme dans $[\mathrm{OUT}]_1$, en utilisant la théorie de Helffer-Sjöstrand $[\mathrm{HE-SJ}]_{1,2}$ et (2.5), on montre aisément que les valeurs propres $\lambda_1(h,\theta)$ et $\lambda_2(h,\theta)$ de l'opérateur de Floquet $H^{h,\theta}$ sont celles de la matrice 2×2

$$M(\theta)=\lambda(h)1+\begin{pmatrix} a_1(h) & \overline{b}(h)\\ b(h) & a_2(h)\end{pmatrix}+R(h),\text{ avec } R(h)=\mathcal{O}(e^{-(S_0+\eta_0)/h}), \tag{2.6}$$

pour un $\eta_0>0$ indépendant de h, $\eta_0=S_0(1-\varepsilon_1)$, ε_1 étant celui choisi dans (2.5).

Les $a_j(h)$ et $b(h)$ sont donnés par

$a_j(h)=\frac{1}{2}(\alpha_{j,j}(h,\theta)+\overline{\alpha}_{j,j}(h,\theta))$, $b(h)=\frac{1}{2}(\alpha_{2,1}(h,\theta)+\overline{\alpha}_{1,2}(h,\theta))$ et

$\alpha_{j,k}(h,\theta)=-ih\sum_{\gamma,\rho\in\mathcal{K}} e^{i\theta(\gamma-\rho)}<p(\nabla\chi^\gamma)u_j^\gamma|\chi^\rho u_k^\rho>$;

on a noté $u_1(x)$ le spineur $u^h(x)$, $u_2(x)$ celui $Ju^h(x)$ et si f est une fonction et $\gamma\in\Gamma$, f^γ est la fonction $f^\gamma(x)=f(x-\gamma)$.

Remarquons que $\alpha_{2,2}(h,\theta)=\overline{\alpha}_{1,1}(h,-\theta)$.

Etudions d'abord les $a_j(h)$. On a

$$a_j(h)=h\,\mathrm{Im}\{\sum_{\gamma,\rho\in\mathcal{K}} e^{i\theta(\gamma-\rho)}<p(\nabla\chi^\gamma)u_j^\gamma|\chi^\rho u_j^\rho>\}. \tag{2.7}$$

Le fait que $u_2=Ju_1$ et que $p(\xi)J=-Jp(\xi)$ pour tout réel ξ, permet de voir, en utilisant la propriété $(Jx|y)=-(Jy|x)$,

que les $a_j(h)=a_j(h,\theta)$ vérifient $a_2(h,\theta)=a_1(h,-\theta)$.

Remarquons que

$d(x_0,x)+d(x_0,x-\gamma)\geqslant d(x_0,x_0-\gamma)$ et $d(x_0,x-\gamma)+ d(x_0,x-\rho)\geqslant d(x_0-\gamma,x_0-\rho)$.

Comme $p(\nabla\chi^\gamma)$ est hermitienne, les termes relatifs à $\gamma=\rho$ dans (2.7) sont à contribution nulle. Pour estimer (2.7), il suffit donc d'estimer

(2.8) $$a_j(h,\gamma,\rho):=e^{i\theta(\gamma-\rho)}<[H^h;\chi^\gamma]u_j^\gamma\,|\chi^\rho u_j^\rho>+e^{-i\theta(\gamma-\rho)}<\chi^\rho u_j^\rho\,|[H^h;\chi^\gamma]u_j^\gamma>,$$
pour un γ et $\rho\in\mathcal{K}$ tel que $\gamma\neq\rho$.

($2a_j(h)$ est la somme des $a_j(h,\gamma,\rho)$ modulo un $\mathcal{O}(e^{-(S_0+\eta_0)/h})$).

Soit $\mathcal{D}_\gamma$ la partie du support de $\nabla\chi^\gamma$ contenue dans K, alors on a

$d(x_0,x-\gamma)\geqslant(1-2\varepsilon_0)S_0,\quad\forall x\in\mathcal{D}_\gamma;$

par conséquent, si ε_0 est choisi assez petit, on a

$$d(x_0,x-\gamma)+d(x_0,x-\rho)>S_0,\ \forall x\in\mathcal{D}_\gamma,\ \text{si }\rho\text{ et }\gamma\in\Gamma\backslash\{0\}.$$

L'estimation (2.5) montre alors que

(2.9) $$a_j(h,\gamma,\rho)\approx 0,\ \text{si }\gamma\neq 0\text{ et }\rho\neq 0.$$

Comme $d(x_0,x-\gamma)+d(x_0,x-\rho)=S_0$ implique l'existence d'une géodésique, $g_{\gamma,\rho}$, de longueur S_0 reliant γ à ρ et passant par x, s'il n'y a pas de géodésique de longueur S_0 reliant γ à x_0, alors $a_j(h,\gamma,0)\approx 0$.

Dans le cas contraire, on peut trouver un point $y\in g_{\gamma,0}\cap K$, $y\neq x_0$, tel que, dans un voisinage de ce point, l'hyperplan F_γ normal à la géodésique, sépare le support de $\nabla\chi^\gamma$ du point x_0. On peut donc trouver un ouvert Ω_γ, tel que $\overline{\Omega}_\gamma$ soit contenu dans K et dans le demi-espace contenant le support de $\nabla\chi^\gamma$ de frontière F_γ, et tel que $F_\gamma\cap\partial\Omega_\gamma$ soit un ouvert non vide de la frontière de Ω_γ, $\partial\Omega_\gamma$, contenant y. L'ouvert Ω_γ étant choisi de façon à ce que l'on ait

(2.10) $a_j(h,\gamma,0)\approx a_j(h,\gamma,0;\Omega_\gamma)$, avec

$$a_j(h,\gamma,0;\Omega_\gamma):=e^{i\theta\gamma}<[H^h;\chi^\gamma]u_j^\gamma\,|u_j^0>_{\Omega_\gamma}+e^{-i\theta\gamma}<u_j^0\,|[H^h;\chi^\gamma]u_j^\gamma>_{\Omega_\gamma},$$

Soit n^γ la normale à F_γ dirigée vers l'extérieur de Ω_γ. On a alors facilement, compte tenu de (2.5) et (2.10), que

$$a_j(h,\gamma,0)\approx ih[-e^{i\theta\gamma}\int_{F_\gamma}(p(n^\gamma)u_j^\gamma|u_j^0)ds+e^{-i\theta\gamma}\int_{F_\gamma}(u_j^0|p(n^\gamma)u_j^\gamma)ds], \tag{2.11}$$

où ds désigne la mesure de Lebesgue sur F_γ.

On peut donc écrire que

$$a_j(h,\gamma,0)\approx 2h[\beta_j(h,\gamma)\cos(\theta\gamma)-\alpha_j(h,\gamma)\sin(\theta\gamma)], \tag{2.12}$$

avec $\alpha_j(h,\gamma)+i\beta_j(h,\gamma)=\int_{F_\gamma}(p(n^\gamma)u_j^\gamma|u_j^0)ds.$

En utilisant les propriétés $Jp(n^\gamma)J=p(n^\gamma)$ et $u_2^\gamma=Ju_1^\gamma$, on voit que

$$\alpha_2(h,\gamma)=-\alpha_1(h,\gamma) \text{ et } \beta_2(h,\gamma)=\beta_1(h,\gamma).$$

Comme $u_j=(u_j^+,u_j^-)$, avec $u_j^-(x)=[\lambda(h)-V(x)+1]^{-1}A(hD_x)u_j^+(x)$,

on a sur F_γ, $(p(n^\gamma)u_j^\gamma|u_j^0)=[\lambda(h)-V(x)+1]^{-1}\times$

$$\{(A(n^\gamma)u_j^{+\gamma}|A(hD_x)u_j^+)+(A(hD_x)u_j^{+\gamma}|A(n^\gamma)u_j^+)\}.$$

Soit $\mathcal{U}$ l'ouvert, ensemble des points x tels qu'il n'existe qu'une géodésique reliant x_0 à x. Dans [WAN], voir aussi [MO-PA], on montre que la méthode B.K.W. fonctionne sur $\mathcal{U}$, i.e. il existe une suite de spineurs $(u_{j,k}^+(x))_{k\geqslant 0}$, telle que

$$u_j^+(x)\sim c(h)e^{-\varphi(x)/h}\Sigma_{k\geqslant 0}h^k u_{j,k}^+(x),$$

(c(h) étant une constante de normalisation et $\varphi(x)=d(x_0,x)$).

On peut choisir Ω_γ de façon à ce que $\gamma+\overline{\Omega}_\gamma\subset\mathcal{U}$ et $\overline{\Omega}_\gamma\subset\mathcal{U}$. Comme dans le cas du "splitting" étudié dans [MO-PA], on montre, en utilisant des estimations établies dans $[HE-SJ]_{1,2}$, que $a_j(h,\gamma,0)$ admet un développement asymtotique

$$\alpha_j(h,\gamma)+i\beta_j(h,\gamma)\sim c^2(h)\delta(h)e^{-S_0/h}\Sigma_{k\geqslant 0}h^j z_{j,k}^\gamma, \text{ avec} \tag{2.13}$$

$$z_{j,0}^\gamma:=-\frac{i}{2}\{([A(n^\gamma)u_{j,0}^+)]^\gamma|A(\nabla\varphi)u_{j,0}^+)-([A(\nabla\varphi)u_{j,0}^+]^\gamma|A(n^\gamma)u_{j,0}^+)\}_{x=y},$$

et $\delta(h) := \displaystyle\int_{F_\gamma \cap \bar{\Omega}_\gamma} e^{-[d(x_0,x)+d(x_0,x-\gamma)-S_0]/h} ds.$

Soient m^γ et k^γ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $\{n^\gamma, m^\gamma, k^\gamma\}$ soit une base orthonormée et directe. On écrit que

$\nabla\varphi(x) = \nabla d(x_0,x) = \varphi_1(x)n^\gamma + \varphi_2(x)m^\gamma + \varphi_3(x)k^\gamma$.

Comme $d(x_0,x)+d(x_0,x-\gamma) = S_0$, $\forall x \in g_{\gamma,0}$, et $d(x_0,x)+d(x_0,x-\gamma) > S_0$, si $x \notin g_{\gamma,0}$, (x restant dans un petit voisinage de $g_{\gamma,0}$), on a

(2.14) $\qquad \varphi_k(y) + \varphi_k(y-\gamma) = 0$, pour $k = 1,..,3$.

Mais $A(\nabla\varphi(x)) = \nabla\varphi(x)\sigma$ est une matrice hermitienne, on a donc

$z^\gamma_{j,0} = -\frac{i}{2}([(\nabla\varphi(y)\sigma)(n^\gamma\sigma) - (n^\gamma\sigma)(\nabla\varphi(y-\gamma)\sigma)]u^+_{j,0}(y-\gamma)|u^+_{j,0}(y))$.

Par conséquent, en utilisant (2.14), on trouve

(2.15) $\qquad z^\gamma_{j,0} = -i\varphi_1(y)(u^+_{j,0}(y-\gamma)|u^+_{j,0}(y))$.

Mais y appartient à la géodésique $g_{\gamma,0}$ et $y \neq x_0$, comme n^γ est parallèle en y à cette géodésique et de direction, de γ vers x_0, on a donc

(2.16) $\qquad \varphi_1(y) = n^\gamma \nabla d(x_0,x)|_{x=y} = -|\nabla\varphi(y)| = -[1-(V(y)-\mu)^2] < 0$.

On remarque maintenant que $u^+_{1,0}(x)$ est solution, (cf. [MO-PA]), de

$Xv^+(x) + q(x)v^+(x) = 0$, avec (par exemple) $v^+(x_0) = (1,0)$:

X est le champ de vecteur tangent à $g_{\gamma,0}$, $X = 2\nabla\varphi(x)\nabla$, et

$q(x) = \Delta\varphi(x) + 2\rho_1(V(x)-\mu) - 2(\nabla V(x)|\nabla\varphi(x)) - 2i[\nabla V(x) \times \nabla\varphi(x)]\sigma$,

(ρ_1 est celui du théorème (1.2) choisi tel que $q(x_0) = 0$).

Mais on a $\nabla V(x) \times \nabla\varphi(x) = 0$, $\forall x \in g_{\gamma,0}$.

En effet, si on prend par exemple $x = y$, en remarquant que $\nabla\varphi(y) = -|\nabla\varphi(y)|n^\gamma$, on a $\nabla V(y) \times \nabla\varphi(y) = |\nabla\varphi(y)|(\nabla V(y)|m^\gamma)k^\gamma - |\nabla\varphi(y)|(\nabla V(y)|k^\gamma)m^\gamma$.

Comme $|\nabla\varphi(x)|^2 = 1-(V(x)-\mu)^2$;

le terme $|\nabla\varphi(y)|(\nabla V(y)|m^\gamma)$ est un multiple de $m^\gamma\nabla(|\nabla\varphi(x)|^2/x=y$,

et comme le champ de vecteur $m^\gamma\nabla$ est tangent à la 'sphère d'Agmon'

$I_0=\{x;\, d(x_0,x)=d(x_0,y)\}$, on en déduit la nullité du terme considéré.
L'autre terme se traite de la même façon.

Il existe donc une fonction réelle et >0 sur $g_{\gamma,0}$, $u_0^+(x)$ telle que
$u_{1,0}^+(x)=(u_0^+(x),0)$ et $u_{2,0}^+(x)=(0,iu_0^+(x))$, $\forall x\in g_{\gamma,0}$.
On en déduit alors facilement que

(2.17) $\qquad (u_{1,0}^+(x-\gamma)|u_{1,0}^+(x))=(u_{2,0}^+(x-\gamma)|u_{2,0}^+(x))>0,\ \forall x\in g_{\gamma,0}$.

De plus, dans un petit voisinage de y, les ensembles I_0 et $I_\gamma=\{x;\, d(x_0,x-\gamma)=d(x_0,y-\gamma)\}$ sont deux sous-variétés ayant un unique point commun, y, et l'hyperplan F_γ comme tangente commune en y. Dans la formule (2.13) on aurait pu faire le raisonnement en remplaçant F_γ par I_γ, comme $d(x_0,x)+d(x_0,x-\gamma)$ admet sur I_γ en y un minimum non dégénéré, (pour s'en convaincre il suffit de voir que dans le voisinage de x_0, $Q_{\mathfrak{x}_0}$, on peut trouver un système de coordonnées $\{v_1,v_2,v_3\}$ tel que $d(x_0,x)=v_1^2+v_2^2+v_3^2$ et $v(x)=(v_1,v_2,v_3)$ soit normal à I_0, ceci si ε_0 est assez petit). On a donc sur F_γ, $d(x_0,x)+d(x_0,x-\gamma)-S_0$ qui admet un minimum nul et non dégénéré en y, par conséquent, on a dans (2.13),

(2.18) $\qquad \delta(h)\sim h\Sigma_{k\geq 0}h^k\delta_k$, avec $\delta_0>0$,

de plus on a

(2.19) $\qquad c(h)\sim h^{-n/4}\Sigma_{k\geq 0}h^k c_k$, avec $c_0>0$.

Les propriétés (2.12), (2.13), (2.16)--(2.19) montrent aisément que

(2.20) $$a_j(h)=h^{2-\frac{n}{2}}e^{-S_0/h}\sum_{\gamma\in\mathfrak{G}}[\beta(h,\gamma)\cos(\theta\gamma)\mp h\alpha(h,\gamma)\sin(\theta\gamma)],$$

le signe $-$ étant relatif à $j=1$ et le $+$ à $j=2$; $\mathfrak{G}$ désigne l'ensemble des $\gamma\in\Gamma$ tel qu'il existe une géodésique entre γ et 0 de longueur S_0.

Les $\alpha(h,\gamma)$ et $\beta(h,\gamma)$ de (2.20) vérifient les proprietés suivantes:

(2.21) $\qquad \alpha(h,\gamma)\sim\Sigma_{k\geq 0}h^k\alpha_k(\gamma)$ et $\beta(h,\gamma)\sim\Sigma_{k\geq 0}h^k\beta_k(\gamma)$,

avec $\beta_0(\gamma)<0$, pour tout $\gamma\in\mathfrak{G}$.

Le terme b(h) se traite de la même façon. On utilise les propriétés $u_2 = Ju_1$ et $p(\xi)J = -Jp(\xi)\ \forall \xi \in \mathbb{R}^3$, pour établir que

(2.22) $$b(h) = -i \sum_{\gamma,\rho \in \mathcal{F}} \mathcal{sin}(\theta(\gamma-\rho)) < \chi^\rho u_2^\rho | [H^h; \chi^\gamma] u_1^\gamma > .$$

On en déduit alors facilement que

(2.23) $$b(h) \approx h \sum_{\gamma \in \mathfrak{G}} \mathcal{sin}(\theta\gamma) \int_{F_\gamma} (u_2^0 | p(n^\gamma) u_1^\gamma) ds.$$

Quand on écrit que $u_1^+(x) = c(h) e^{-\varphi(x)/h} v^h(x)$, avec $v^h(x) \sim \Sigma_{k \geqslant 0} h^k u_{1,k}^+(x)$, on obtient que, pour un $\gamma \in \mathfrak{G}$ fixé, on a

$(u_2^0(x) | p(n^\gamma) u_1^\gamma(x)) = c^2(h) e^{-(\varphi(x)+\varphi(x-\gamma))/h} w^h(x)$,

avec $w^h = -(\sigma_2 \overline{v}^h | (n^\gamma\sigma)(\nabla\varphi^\gamma\sigma)(v^h)^\gamma) - (\sigma_2(\nabla\varphi\overline{\sigma})\overline{v}^h | (n^\gamma\sigma)(v^h)^\gamma) + \mathcal{O}(h)$.

On utilise alors l'égalité $(n^\gamma\sigma)\sigma_2(\nabla\varphi(x)\overline{\sigma}) = -(n^\gamma\sigma)(\nabla\varphi(x)\sigma)\sigma_2$,

pour voir que $w^h = (\varphi_1 - \varphi_1^\gamma)(\sigma_2 \overline{v}^h | (v^h)^\gamma) +$

$$i(\varphi_2 + \varphi_2^\gamma)((m^\gamma\sigma)\sigma_2\overline{v}^h | (v^h)^\gamma) - i(\varphi_3 + \varphi_3^\gamma)((k^\gamma\sigma)\sigma_2\overline{v}^h | (v^h)^\gamma) + \mathcal{O}(h).$$

En utilisant les proprités sur le premier terme du développement asymptotique de v^h, on trouve facilement que le premier terme de celui de w^h est nul sur la géodésique: $w^h(y) = \mathcal{O}(h)$. On déduit alors facilement de (2.23) que

(2.24) $$b(h) = h^{3-\frac{n}{2}} e^{-S_0/h} \sum_{\gamma \in \mathfrak{G}} \rho(h,\gamma) \mathcal{sin}(\theta\gamma),$$

et que les $\rho(h,\gamma)$ ont un développement asymtotique de la forme

(2.25) $$\rho(h,\gamma) \sim \Sigma_{k \geqslant 0} h^k \rho_k(\gamma).$$

Les propriétés (2.6), (2.20), (2.21), (2.24) et (2.25) montrent que les deux premières valeurs propres $>\mu^+$ de $H^{h,\theta}$ vérifient

(2.26) $$\lambda_j(h,\theta) = \lambda(h) + h^{(4-n)/2} e^{-S_0/h} [\nu(h,\theta) \mp h\delta(h,\theta)] + \mathcal{O}(e^{-(S_0+\eta_0)/h}),$$

avec $\nu(h,\theta) = \sum_{\gamma \in \mathfrak{G}} \beta(h,\gamma) \mathcal{cos}(\theta\gamma)$ et

$$\delta(h,\theta) = [(\sum_{\gamma \in \mathfrak{G}} \alpha(h,\gamma)\mathcal{sin}(\theta\gamma))^2 + (\sum_{\gamma \in \mathfrak{G}} \rho(h,\gamma)\mathcal{sin}(\theta\gamma))^2]^{1/2};$$

(le signe − étant relatif à j=1 et le + à j=2).

Le théorème est donc démontré, quand n=3.

Dans le cas où $n=2$ ou $n=1$, la démonstration est plus simple du fait que la matrice $M(\theta)$ dans (2.5) est d'ordre un, l'indice j ne prend pour valeur que 1, la méthode BK.W. fonctionne aussi dans ce cas et beaucoup plus simplement.

Remarque (2.1): *Si* $n=3$ *et si* $V(x)$ *est paire*, i.e. $V(x)=V(-x)$, $\forall x\in \mathbb{R}^3$, *alors les valeurs propres de* $H^{h,\theta}$ *sont de multiplicité paire.*

Si $V(x)$ *est impaire*, i.e. $V(x)=-V(-x)$, $\forall x\in \mathbb{R}^n$, $(n=1,2$ ou $3)$, *alors le spectre de* H^h *est symetrique par rapport à l'origine*,

$\lambda\in sp(H^h) \Rightarrow -\lambda\in sp(H^h)$.

Pour s'en convaincre il suffit de remarquer que, si V est paire, $H^{h,\theta}\mathcal{A}=\mathcal{A}H^{h,\theta}$, où $\mathcal{A}$ est l'isométrie anti-linéaire $\mathcal{A}u(x)=(\sigma_2\overline{u}^+(-x),-\sigma_2\overline{u}^-(-x))$, $\forall u\in \mathcal{H}$.

Si V est impaire, $(H_0^h+V)\mathcal{A}=\mathcal{A}(H_0^h-V)$, comme on a vu que $-(H_0^h-V)$ et H_0^h+V sont unitairement équivalents, on retrouve la propriété énoncée.

III) Etude de la multiplicité du niveau fondamental

Dans toute la suite $V(x)$ sera un potentiel C^∞ et Γ-périodique,

$$V(x)=\sum_{\omega\in\Gamma^*} v_\omega e^{i\omega x}, \text{ avec } v_{-\omega}=\overline{v}_\omega \text{ et } v_0=0. \tag{3.1}$$

Pour tout $(\theta,\tau)\in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, on notera $(\lambda_k(\theta,\tau))_{k\in Z^*}$ la suite des valeurs propres de l'opérateur $H_\tau^{h\theta}=H_0^{h,\theta}+\tau V\mathbb{1}$ défini sur $L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma;\mathbb{C}^{2m})$.

Théorème (3.1) *S'il existe* ρ *et* γ *dans* $\Gamma^*\backslash\{0\}$ *tels que*

$$\mathrm{Im}(\overline{v}_{\rho+\gamma}v_\rho v_\gamma)\neq 0, \tag{3.2}$$

alors l'ensemble des $(\theta,\tau)\in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, *tel que toutes les valeurs propres de l'opérateur* $H_\tau^{h,\theta}$ *soient simples, est dense dans* $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$.

<u>Preuve.</u> On va faire la démonstration dans le cas $n=3$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}^n$ fixé et vérifiant

(3.3) $$|\omega-\theta| \neq |\delta-\theta|, \ \forall\ \omega \text{ et } \delta \in \Gamma^*,\ \omega \neq \delta.$$

Les valeurs propres de $H_0^{h,\theta}$ sont $(\pm\mu_\omega)_{\omega\in\Gamma^*}$,

(3.4) $$\mu_\omega = (1+h^2|\omega-\theta|^2)^{1/2},$$

chaque valeur propre $\pm\mu_\omega$ est de multiplicité deux,

(3.5) $$\dim(\mathrm{Ker}(H_0^{h,\theta} \pm \mu_\omega 1)) = 2.$$

Pour simplifier les notations, on omettra la référence à h et θ, on écrira H_τ au lieu de $H_\tau^{h\theta}$: $H_\tau = H_\tau^{h\theta}$.

On va considérer H_τ comme une perturbation de H_0. On considère $\omega \in \Gamma^*$ fixé. On a

(3.6) $$\mathrm{Ker}(H_0 - \mu_\omega 1) = \mathrm{Vect}\{e^{i\omega x}\varphi_\omega, e^{i\omega x}J(\varphi_\omega)\},$$

où $\varphi_\omega = \nu_\omega \begin{pmatrix} e \\ h\nu'_\omega(\omega-\theta)\sigma e \end{pmatrix}$, $\nu'_\omega = \dfrac{1}{1+\mu_\omega}$ et $\nu_\omega = \dfrac{\sqrt{1+\mu_\omega}}{\sqrt{2\mu_\omega}}$, on prend $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On remarque que $\mathrm{Ker}(H_0+\mu_\omega 1) = T(\mathrm{Ker}(H_0-\mu_\omega 1))$, si $T\begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^- \\ -x^+ \end{pmatrix}$;

($\{\varphi_\omega, J\varphi_\omega, T\varphi_\omega, TJ\varphi_\omega\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^4$).

Soit Π_ω la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(H_0-\mu_\omega 1)$.

Si on veut appliquer les théorèmes de perturbation établis dans [MO-PA] à la valeur propre double μ_ω, et savoir si elle éclate en deux valeurs propres simples, il suffirait pour cela que $\Pi_\omega V \Pi_\omega$ ou que $\Pi_\omega V(H_0-\mu_\omega 1)^{-1}(1-\Pi_\omega)V\Pi_\omega$ admette deux valeurs propres simples. Un calcul élémentaire montre que

(3.7) $$\Pi_\omega V \Pi_\omega = 0 \ \text{ et } \ \Pi_\omega V(H_0-\mu_\omega 1)^{-1} V\Pi_\omega = \sum_\gamma |v_\gamma|^2 \left(\frac{\delta^-(\omega,\gamma)}{\mu_{\omega+\gamma}-\mu_\omega} + \frac{\delta^+(\omega,\gamma)}{\mu_{\omega+\gamma}+\mu_\omega}\right)\Pi_\omega,$$

avec $\delta^-(\omega,\gamma) = 2(|(J\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\gamma})|^2 + |(\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\gamma})|^2)$ et

$\delta^+(\omega,\gamma) = -2(|(T\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\gamma})|^2 + |(T\varphi_\omega|J\varphi_{\omega+\gamma})|^2)$.

On ne peut donc pas appliquer les théorèmes de [MO-PA]; on poursuit tout de même leur méthode à un cran suplémentaire. On est ramené à chercher à savoir si l'opérateur

(3.8) $$R_\omega = \Pi_\omega V(H_0-\mu_\omega 1)^{-1}(1-\Pi_\omega)V(H_0-\mu_\omega 1)^{-1}V\Pi_\omega$$

admet deux valeurs propres simples.

La matrice de R_ω dans la base orthonormée $\{e^{i\omega x}\varphi_\omega, e^{i\omega x}J(\varphi_\omega)\}$ est hermitienne et a ses éléments diagonaux qui sont égaux,

(3.9) $$a_\omega = a_\omega(\theta) := \langle R_\omega(e^{i\omega x}\varphi_\omega) | e^{i\omega x}\varphi_\omega\rangle = \langle R_\omega(e^{i\omega x}J(\varphi_\omega)) | e^{i\omega x}J(\varphi_\omega)\rangle;$$

pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que H_0 commute avec la transformation unitaire $u(x) \to J(u)(-x)$ et, le fait de remplacer $V(x)$ par $V(-x)$ revient à prendre le conjugué du terme à calculer qui est ici réel.

Notons

(3.9') $$b_\omega = b_\omega(\theta) := \langle R_\omega(e^{i\omega x}\varphi_\omega) | e^{i\omega x}J(\varphi_\omega)\rangle.$$

Si $b_\omega \neq 0$, alors R_ω a deux valeurs propres simples $\mu^-_{\omega,3}$ et $\mu^+_{\omega,3}$ telles que

$$\mu^+_{\omega,3} - \mu^-_{\omega,3} = 2|b_\omega|.$$

Soient $u^\pm_{\omega,0}$ les vecteurs propres associés choisis tels qu'ils forment une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(H_0-\mu_\omega 1)$.

On considère les spineurs $u^{\pm,\tau}_\omega = \sum_{j=0}^{3} \tau^j u^\pm_{\omega,j}$

et le réel $\mu^{\pm,\tau}_\omega = \sum_{j=0}^{3} \tau^j \mu^\pm_{\omega,j}$.

Les réels $\mu^\pm_{\omega,j}$ sont définis par: $\mu^\pm_{\omega,0} = \mu_\omega$, $\mu^\pm_{\omega,1} = 0$, $\mu^\pm_{\omega,2} = \mu_{\omega,2}$ est le réel vérifiant

$$\Pi_\omega V(H_0-\mu_\omega 1)^{-1}V\Pi_\omega = -\mu_{\omega,2}\Pi_\omega,$$

et les $\mu^\pm_{\omega,3}$ sont les deux valeurs propres distinctes de R_ω.

On définit les spineurs $u^\pm_{\omega,j}$ de la façon suivante:

les $u^\pm_{\omega,0}$ sont les vecteurs propres définis ci-dessus,

$$u^\pm_{\omega,1} = -(H_0-\mu_\omega 1)^{-1}Vu^\pm_{\omega,0},$$

$$u^\pm_{\omega,2} = (H_0-\mu_\omega 1)^{-1}[V(H_0-\mu_\omega 1)^{-1}V + \mu_{\omega,2}1](u^\pm_{\omega,0})$$

et, $u^\pm_{\omega,3} = -(H_0-\mu_\omega 1)^{-1}\{V(H_0-\mu_\omega 1)^{-1}[V(H_0-\mu_\omega 1)^{-1}V+\mu_{\omega,2}1] - \mu^\pm_{\omega,3}1\}(u^\pm_{\omega,0})$.

On vérifie facilement que l'on a

$\|u_\omega^{\pm,\tau}\|-1=\mathcal{O}(\tau)$, $\quad <u_\omega^{+,\tau}|u_\omega^{-,\tau}>=\mathcal{O}(\tau)$ $\quad$ et $\quad (H_\tau-\mu_\omega^{\pm,\tau}1)(u_\omega^{\pm,\tau})=\mathcal{O}(\tau^4)$,
ceci quand $\tau\to 0$.

Par conséquent, si $b_\omega(\theta)\neq 0$, il existera $\varepsilon_\omega(\theta)>0$, tel que, pour tout τ, $|\tau|\leq\varepsilon_\omega(\theta)$, $\tau\neq 0$, on ait la valeur valeur propre double, μ_ω, de H_0 qui éclate en deux valeurs propres simples, $\lambda_\omega^{\pm,\tau}$, pour H_τ, telles que $\lambda_\omega^{+,\tau}-\lambda_\omega^{-,\tau}=2\tau^3|b_\omega(\theta)|+\mathcal{O}(\tau^4)$.

Etude de $b_\omega(\theta)$ de (3.9')

Notons π_ω la projection othogonale de $\mathbb{C}^4$ sur Vect$\{\varphi_\omega\}$ et, $\hat\pi_\omega$ celle sur Vect$\{J(\varphi_\omega)\}$. On a $\hat\pi_\omega=-J\pi_\omega J$.

L'opérateur R_ω peut être considéré comme un opérateur $\hat R_\omega$ sur $\mathbb{C}^4$,

$$\hat R_\omega=(\pi_\omega\oplus\hat\pi_\omega)(\sum_{j=1}^{4}R_{\omega,j})((\pi_\omega\oplus\hat\pi_\omega),$$

avec

$$R_{\omega,1}=\sum_{\rho,\gamma}\frac{\overline{v}_{\rho+\gamma}v_\rho v_\gamma}{(\mu_{\omega+\rho+\gamma}-\mu_\omega)(\mu_{\omega+\rho}-\mu_\omega)}(\pi_{\omega+\rho+\gamma}\oplus\hat\pi_{\omega+\rho+\gamma})(\pi_{\omega+\rho}\oplus\hat\pi_{\omega+\rho}),$$

$$R_{\omega,2}=\sum_{\rho,\gamma}\frac{\overline{v}_{\rho+\gamma}v_\rho v_\gamma}{(\mu_{\omega+\rho+\gamma}-\mu_\omega)(\mu_{\omega+\rho}+\mu_\omega)}(\pi_{\omega+\rho+\gamma}\oplus\hat\pi_{\omega+\rho+\gamma})T(\pi_{\omega+\rho}\oplus\hat\pi_{\omega+\rho})T,$$

$$R_{\omega,3}=\sum_{\rho,\gamma}\frac{\overline{v}_{\rho+\gamma}v_\rho v_\gamma}{(\mu_{\omega+\rho+\gamma}+\mu_\omega)(\mu_{\omega+\rho}-\mu_\omega)}\ T(\pi_{\omega+\rho+\gamma}\oplus\hat\pi_{\omega+\rho+\gamma})T(\pi_{\omega+\rho}\oplus\hat\pi_{\omega+\rho})$$

et $$R_{\omega,4}=\sum_{\rho,\gamma}\frac{\overline{v}_{\rho+\gamma}v_\rho v_\gamma}{(\mu_{\omega+\rho+\gamma}+\mu_\omega)(\mu_{\omega+\rho}+\mu_\omega)}\ T(\pi_{\omega+\rho+\gamma}\oplus\hat\pi_{\omega+\rho+\gamma})T^2(\pi_{\omega+\rho}\oplus\hat\pi_{\omega+\rho})T\ ;$$

on a pris la convention de ne considérer dans la somme que les termes donnant lieu à un coefficient de fourier de $V(x)$ non nul, i.e. seuls le ρ et γ tels que $\gamma\neq 0$, $\rho\neq 0$ et $\rho+\gamma\neq 0$ sont à considerer, (remarquer que $v_0=0$ et que $T^2=-1$).

On trouve alors que

$$(3.10)\qquad b_\omega=b_\omega(\theta):=<R_\omega(e^{i\omega x}\varphi_\omega)|e^{i\omega x}J(\varphi_\omega)>=\sum_{\rho,\gamma}\overline{v}_{\rho+\gamma}v_\rho v_\gamma b_\omega(\rho,\rho+\gamma,\theta)\ ,$$

avec $b_\omega(\rho,\rho+\gamma,\theta) = \sum_{j,k\in\{1,2\}} b_{\omega,j,k}(\rho,\rho+\gamma,\theta)[\mu_{\omega+\rho+\gamma}(\theta)+(-1)^j\mu_\omega(\theta)]^{-1}\times$

$$[\mu_{\omega+\rho}(\theta)+(-1)^k\mu_\omega(\theta)]^{-1}.$$

On omettra la référence à θ. On utilise les propriétés suivantes,

$J^2=-1$, $T^2=-1$, $TJ=JT$ et $(x|Jy)=-(y|Jx)$,

et on trouve les expressions ci-dessous des $b_{\omega,j,k}(\rho,\rho+\gamma)$:

$$\begin{aligned} b_{\omega,1,1}(\rho,\rho+\gamma) = {} & (\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\rho})(\varphi_{\omega+\rho}|\varphi_{\omega+\rho+\gamma})(\varphi_{\omega+\rho+\gamma}|J\varphi_\omega) - \\ & (\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\rho})(\varphi_{\omega+\rho+\gamma}|J\varphi_{\omega+\rho})(\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\rho+\gamma}) - \\ & (\varphi_{\omega+\rho}|J\varphi_\omega)(J\varphi_{\omega+\rho}|\varphi_{\omega+\rho+\gamma})(\varphi_{\omega+\rho+\gamma}|J\varphi_\omega) - \\ & (\varphi_{\omega+\rho}|J\varphi_\omega)(\varphi_{\omega+\rho+\gamma}|\varphi_{\omega+\rho})(\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\rho+\gamma}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{\omega,1,2}(\rho,\rho+\gamma) = {} & (T\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\rho})(\varphi_{\omega+\rho+\gamma}|J\varphi_\omega)(T\varphi_{\omega+\rho}|\varphi_{\omega+\rho+\gamma}) - \\ & (\varphi_{\omega+\rho}|TJ\varphi_\omega)(\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\rho+\gamma})(\varphi_{\omega+\rho+\gamma}|T\varphi_{\omega+\rho}) - \\ & (T\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\rho})(\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\rho+\gamma})(\varphi_{\omega+\rho+\gamma}|TJ\varphi_{\omega+\rho}) - \\ & (\varphi_{\omega+\rho}|TJ\varphi_\omega)(\varphi_{\omega+\rho+\gamma}|J\varphi_\omega)(TJ\varphi_{\omega+\rho}|\varphi_{\omega+\rho+\gamma}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{\omega,2,1}(\rho,\rho+\gamma) = {} & -(\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\rho})(\varphi_{\omega+\rho+\gamma}|TJ\varphi_\omega)(T\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\rho+\gamma}) + \\ & (\varphi_{\omega+\rho}|J\varphi_\omega)(T\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\rho+\gamma})(\varphi_{\omega+\rho+\gamma}|T\varphi_{\omega+\rho}) + \\ & (\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\rho})(T\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\rho+\gamma})(\varphi_{\omega+\rho+\gamma}|TJ\varphi_{\omega+\rho}) - \\ & (\varphi_\omega|J\varphi_{\omega+\rho})(\varphi_{\omega+\rho+\gamma}|TJ\varphi_\omega)(TJ\varphi_{\omega+\rho}|\varphi_{\omega+\rho+\gamma}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_{\omega,2,2}(\rho,\rho+\gamma) = {} & (T\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\rho})(\varphi_{\omega+\rho+\gamma}|TJ\varphi_\omega)(\varphi_{\omega+\rho}|\varphi_{\omega+\rho+\gamma}) - \\ & (\varphi_{\omega+\rho}|TJ\varphi_\omega)(T\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\rho+\gamma})(\varphi_{\omega+\rho+\gamma}|\varphi_{\omega+\rho}) + \\ & (T\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\rho})(T\varphi_\omega|\varphi_{\omega+\rho+\gamma})(\varphi_{\omega+\rho}|J\varphi_{\omega+\rho+\gamma}) + \\ & (\varphi_{\omega+\rho}|TJ\varphi_\omega)(\varphi_{\omega+\rho+\gamma}|TJ\varphi_\omega)(J\varphi_{\omega+\rho}|\varphi_{\omega+\rho+\gamma}). \end{aligned}$$

On vérifie facilement que, pour tout ρ, γ, j et k, on a

(3.11) $\qquad b_{\omega,j,k}(\rho,\rho+\gamma) = -b_{\omega,k,j}(\rho+\gamma,\rho).$

Les égalités (3.10) et (3.11) montrent que

(3.12) $\{V(x)=V(-x),\ \forall x\in\mathbb{R}^n\} \Rightarrow \{b_\omega=0,\ \forall\omega\in\Gamma^*\}$,

et que les b_ω sont imaginaires,

(3.13) $\qquad b_\omega = -\overline{b_\omega},\quad \forall\omega\in\Gamma^*.$

Remarquons que, pour tout ρ et $\gamma \in \Gamma^*\backslash\{0\}$ tels que $\rho+\gamma \neq 0$,

(3.14) $\{\theta \to b_\omega(\rho,\rho+\gamma,\theta)$ est analytique et non identiquement nul$\}$.

La dépendance analytique en τ de $H_\tau^{h\theta}$ entraine la dépendance analytique en τ de toute valeur propre simple de $H_\tau^{h\theta}$, le théorème (3.1) se déduit alors aisément du fait que (3.14) et (3.2) entrainent que, pour tout $\omega \in \Gamma^*$ fixé, la fonction $\theta \to b_\omega(\theta)$ est analytique en dehors d'un nombre fini de points et elle est non identiquement nulle ■

<u>Exemple (3.2)</u> Soit la fonction défine sur $\mathbb{R}$,

$v_\nu(t) = -\cos(t) + 3\nu\sin(t) - \cos(2t) - \nu\sin(3t)$,

avec $0 < |\nu| < \frac{1}{4}$. La fonction $v_\nu(t)$ admet un minimum non dégénéré aux points $t \in 2\pi\mathbb{Z}$. Soit le potentiel défini sur $\mathbb{R}^3$,

$V(x) = \varepsilon_1 v_{\nu_1}(x_1) + \varepsilon_2 v_{\nu_2}(x_2) + \varepsilon_2 v_{\nu_3}(x_3)$,

où les ν_j sont des réels donnés vérifiant $0 < |\nu_j| < \frac{1}{4}$, $j = 1,..,3$,

et les ε_j sont des réels, $0 < \varepsilon_j < \frac{1}{8}$, donnés.

Le potentiel $V(x)$ est Γ-périodique, si $\Gamma = 2\pi\mathbb{Z}^3$, et admet un minimum non dégénéré aux points du réseau Γ, si les ε_j sont assez petits, on aura (1.4).

Si on a $\varepsilon_j << \varepsilon_1$, pour $j=2$ et $j=3$, il existe une unique géodésique minimale, pour la métrique d'Agmon $W^+(x)dx^2$.

Si $(\lambda_k(\theta))_k$ est la suite des valeurs propres de $H^{h,\theta} = h\alpha(D-\theta)+\beta+V(x)\mathbb{1}$, alors, pour presque tout $\theta \in (]0,\frac{1}{2}[)^3$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, il existe une suite $(h_j)_j$, $0 < h_j < 1$, $\forall j \in \mathbb{N}$, et $h_j \to 0$, quand $j \to +\infty$, telle que $\lambda_k(h_j,\theta)$ soit une valeur propre simple pour tout j.

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que, pour tout $\omega \in \mathbb{Z}^3$ et pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^3\backslash(\frac{1}{2}\mathbb{Z})^3$, $b_\omega(\theta)$ défini par (3.9') et donné par (3.10), n'est pas nul. En suivant la démonstration du théorème (3.1), on vérifie facilement que, pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^3 \setminus (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^3$, pour tout $h>0$ fixé et pour tout $m>0$ fixé, les valeurs propres, $(\lambda_j(h,\theta,m,\tau))_j$, de $H^{h,\theta}_{\tau,m} = h\alpha(D-\theta)+m\beta+\tau V(x)\mathbb{1}$, $(\tau \in \mathbb{R})$, sont simples, sauf pour un nombre dénombrable de τ. La dépendance analytique en m montre que $\lambda_k(h,\theta,m,\tau)$ est simple sauf pour un ensemble dénombrable de (m,τ). En prenant $m=\tau$, on voit que $\lambda_k(\frac{h}{\tau},\theta)$ est simple sauf pour un ensemble dénombrable de τ ∎

Remarquons que, si $V(x)$ n'est pas paire, une question intéressante reste toujours sans réponse, à savoir si le terme $\delta(h,\theta)$ dans (2.26) n'est pas nul.

IV) <u>Cas d'un potentiel de type Coulombien</u>

On considère ici seulement le cas $n=3$, et on suppose que le potentiel $V(x)$ est toujours périodique mais indéfiniment dérivable, seulement sur $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$, et que

(4.1) $$V(x) = c_0(x) + \frac{c_1(x)}{|x|},$$ pour tout x tel que $|x|$ soit assez petit,

les $c_j(x)$ étant des fonctions C^∞ dans un petit voisinage de l'origine et telles que

(4.2) $$-\tfrac{1}{2} < c_1(0) < 0 \quad \text{et} \quad \nabla c_1(0) = 0.$$

On vérifie alors aisément, comme dans [MO-PA], que l'opérateur

(4.3) $$P^h := H_0^h + hV(x)\mathbb{1},$$

est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ à partir des spineurs indéfiniment dérivables et à support compact.

Si on note toujours P^h la réalisation auto-adjointe, la théorie de Floquet montre que son spectre est constitué de bandes, comme dans le cas C^∞.

<u>Théorème (4.1)</u> *Sous les hypothèses* (4.1)--(4.3) *ci-dessus, il existe* $C>0$ *tel que, si* $h_0>0$ *est choisi assez petit, les propriétés ci-dessous soient satisfaites pour tout* h, $0<h<h_0$.

(4.4) $$sp(P^h) \cap]-1-h\ln(h)C, 0] = \emptyset.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ *assez petit, il existe un entier* N, *et une constante* C, *ne dépendant que de* ε, *tel que*

(4.5) $$sp(P^h) \cap]0,1-\varepsilon[= \bigcup_{k=1}^{N} b_k(h),\ b_k(h) \subset [h\ell n(h)C + e_k, e_k - h\ell n(h)C],$$

où les $b_k(h)$ *sont des intervalles fermés,* $b_k(h) = [b_k^-(h), b_k^+(h)]$, *et* $(e_k)_{k>0}$ *est la suite croissante des valeurs propres dans* $]-1,1[$ *de l'opérateur de Dirac*

$H_0^1 + c_1(0)|x|^{-1}\mathbb{1}$, sur $\mathcal{H}$.

De plus on a

(4.6) $$b_1(h) \cup b_2(h) = [r_-(h) + \lambda_D(h), \lambda_D(h) + r_+(h)],$$

$\lambda_D(h)$ *étant la plus petite valeur propre positive d'un problème de Dirichlet sur un ouvert* Ω *contenant la cellule* $\overline{K}$ *et de fermeture ne rencontrant pas* $\Gamma \backslash \{0\}$.

La longueur de cette double bande admet le comportement asymptotique suivant

(4.7) $$r_+(h) - r_-(h) = \delta h^{1-2\lambda_0} e^{-\tau S_0/h}(1 + \mathcal{O}(h)),$$

avec $\delta > 0$ *indépendant de* h,

$(\lambda_0 = (1-\tau^2)^{1/2},\ \tau = -c_1(0)$ *et* $S_0 = \mathrm{Inf}\{|\gamma|;\ \gamma \in \Gamma \backslash \{0\}\})$.

La démonstration de (4.4) et (4.5) résulte aisément de la localisation des valeurs propres faites dans [MO-PA], et (4.7) se démontre comme le théorème (1.2), (ici $d(x_0,x) = |x - x_0|$ et la phase $\varphi(x) = \tau d(x_0,x)$), et le Lemme (3.6) de [MO-PA] permet de pallier l'absence de développement B.K.W. complet pour les vecteurs propres du problème de Dirichlet.

Références

[COL] Y. Colin de Verdière, "Sur les singularités de Van Hove génériques"
Bulletin S.M.F., Mémoire n°46, tome 119, fascicule 2,1991,p.99-109.

[HE-SJ] B. Helffer, J. Sjöstrand
[1] "Multiple wells in the semi-classical limit I",
Comm. Part. Diff. Equ., 9(4),1984,p.337-408
[2] "Puits multiples en limite semi-classique II. Symétries. Perturbation.",
Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique, 42(2),1985,p.127-212.

[KNA] A. Knauf, "Coulombic periodic potentials. The quantum case"
Annals of Physics, 191,1989,p.205-240.

[MOH] A. Mohamed, "Estimations semi-classiques pour l'opérateur de Schrödinger à potentiel de type Coulombien et avec champ magnétique"
Asymptotic Analysis, 69,1991,p.1-21.

[MO-PA] A. Mohamed, B. Parisse, "Approximation des valeurs propres de certaines perturbations singulières et application à l'opérateur de Dirac",
Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique, 56,(3),1992,p.235-277.

[OUT] A. Outassourt,
[1] "Comportement semi-classique pour l'opérateur de Schrödinger à potentiel périodique", J. Funct. Anal. 72,1987,p.65-93.
[2] "Effet tunnel pour les opérateurs de Schrödinger et Dirac à potentiel périodique", Thèse, Université de Nantes, 1986.

[SIM] B. Simon,
[1] "Semi-classical analysis of low lying eigenvalues I. Non-degenerate minima: Asymptotic expansions",
Ann. Inst. Poincaré, 38(3),1983,p.295-307.
[2] "Semi-classical analysis of low lying eigenvalues III. Width of the ground state band in strongly coupled solids",
Ann. of phys. 158(2),1984,p.415-42

[WAN] X.P. Wang, "Puits multiples pour l'opérateur de Dirac"
Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique, 43(3),1985,p.269-319.