

Zeitschrift:	Helvetica Physica Acta
Band:	64 (1991)
Heft:	2
Artikel:	Les courbures de Ricci d'une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne ne déterminent pas toujours sa métrique
Autor:	Lor, Jean-Claude / Rozoy, Luc
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-116306

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LES COURBURES DE RICCI D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE OU PSEUDO-RIEMANNIENNE NE DÉTERMINENT PAS TOUJOURS SA MÉTRIQUE

Jean-Claude LOR

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Moulin de la Housse
B.P. 347
51062 Reims Cedex

Luc ROZOY

Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques associé au C.N.R.S.
B.P. 74
F – 38402 St-Martin-d'Hères

(2. VII. 1990, revised 14. II. 1991)

ABSTRACT. — We give, in dimension $n = 3$, all the cases when riemannian spaces with the same sectional curvature are not isometric. We prove, when $n \geq 4$, that the same phenomena occurs for the Ricci curvature. We give in the general case, all possible algebraic reductions of a quadratic form relatively to another quadratic non degenerate form. We prove the existence of relativistic charged perfect fluids with the same Ricci curvature which are not isometric.

I – Introduction – résumé

a) **Naissance de la géométrie riemannienne.** Riemann en définissant le tenseur de courbure d'une variété munie d'une métrique réussissait la généralisation en toute dimension de la courbure de Gauss définie pour la dimension deux.

Si $f : (\mathcal{V}, g) \rightarrow (\mathcal{W}, \bar{g})$ est une isométrie, f fait correspondre toutes les courbures de \mathcal{V} avec celles de \mathcal{W} . Il est naturel de se poser la question inverse.

Question : si un difféomorphisme $f : (\mathcal{V}, g) \rightarrow (\mathcal{W}, \bar{g})$ fait correspondre toutes les courbures de \mathcal{V} avec celles de \mathcal{W} , f est-il une isométrie ?

C'est l'aspect **local** de cette question qui sera traité ici. (Si on connaît les géodésiques des variétés envisagées, une réponse classique à "courbures et métrique" est le théorème de Hopf-Rinov. Ce n'est pas cette direction qui

est choisie ici : rien n'est connu à propos des géodésiques).

b) Courbures et métrique, les réponses de Darboux et de E.Cartan.

En généralisant le résultat de Darboux ([1], vol 4, p219), Cartan montre que le difféomorphisme f sera une isométrie si f^* (l'application linéaire tangente à f) fait correspondre les composantes du tenseur de Riemann de \mathcal{V} dans un repère orthonormé quelconque et les composantes de toutes ses dérivées covariantes avec celles de \mathcal{W} dans le repère orthonormé de \mathcal{W} correspondant. Pour obtenir ce résultat, il a besoin de dériver le tenseur de courbure jusqu'à obtenir le maximum de fonctions indépendantes (et des contre-exemples montrent que ces dérivées peuvent être nécessaires; c'est le cas des parties spatiales des solutions de Weyl des équations d'Einstein du vide conformément multipliées par le carré de la norme de leur vecteur de Killing temporel).

d) Courbures et métrique, la réponse de Kulkarni [3].

Plaçons-nous sur les fibrés $\mathcal{F}\mathcal{V}$ et $\mathcal{F}\mathcal{W}$ des repères orthonormés de \mathcal{V} et \mathcal{W} . Soit f un difféomorphisme entre \mathcal{V} et \mathcal{W} . Alors f^* , l'application linéaire tangente à f , nous définit un difféomorphisme de $\mathcal{F}\mathcal{V}$ sur $\mathcal{F}\mathcal{W}$. Mais réciproquement, il est faux que tout difféomorphisme de $\mathcal{F}\mathcal{V}$ sur $\mathcal{F}\mathcal{W}$ provienne d'une application linéaire tangente à un difféomorphisme entre \mathcal{V} et \mathcal{W} . Les démarches de Cartan, de Eisenhart-Yano-Defrise ne se donnent, au départ, qu'un difféomorphisme entre $\mathcal{F}\mathcal{V}$ et $\mathcal{F}\mathcal{W}$. C'est pour cela que ces démarches les plus générales doivent utiliser les notions intrinsèques obtenues par dérivations covariantes successives. Pour la suite de l'exposé, nous abandonnons avec Kulkarni ces difféomorphismes les plus généraux entre $\mathcal{F}\mathcal{V}$ et $\mathcal{F}\mathcal{W}$ et nous nous restreignons aux difféomorphismes f entre \mathcal{V} et \mathcal{W} qui préservent les courbures sectionnelles ou les courbures de Ricci. L'existence même d'un tel difféomorphisme particulier a des conséquences sans utiliser les dérivées des courbures. C'est en ce sens que le résultat de Kulkarni "innove" par rapport aux précédents.

Ce résultat est un résultat ponctuel résultant de propriétés algébriques liées à la conservation de l'expression de la courbure sectionnelle

$$K_M(V, W) = \frac{\langle R(V, W)V, W \rangle}{\langle V, V \rangle \langle W, W \rangle - \langle V, W \rangle^2}$$

pour tout couple (V, W) , où R est le tenseur de courbure. Kulkarni introduit la notion d'espaces isocourbés : seules interviennent les courbures sans que l'on sache, *a priori*, s'il existe des symétries, sans que l'on ait d'informations sur les dérivées covariantes des courbures.

(\mathcal{V}, g) et (\mathcal{W}, \bar{g}) espaces riemanniens sont isocourbés s'il existe un difféomorphisme $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ qui préserve les courbures sectionnelles :

pour tout point M de \mathcal{V} et tout 2-plan θ de l'espace tangent à \mathcal{V} en M , désignons par $K_M(\theta)$ la courbure sectionnelle de \mathcal{V} dans la direction plane θ ; de même, désignons par $\bar{K}_{f(M)}(f^*(\theta))$ la courbure sectionnelle de \mathcal{W} au point $f(M)$ dans la direction plane $f^*(\theta)$, où f^* désigne l'application linéaire tangente f . Alors pour tout point M et tout 2-plan θ ,

on a, si f préserve les courbures sectionnelles :

$$K_M(\theta) = \overline{K}_{f(M)}(f^*(\theta)).$$

Comme pour un espace de Riemann ([4], pp. 68–70) la donnée des courbures sectionnelles détermine totalement le tenseur de courbure, l’isocourbure de Kulkarni correspond dans le langage de Cartan à la préservation des composantes du tenseur de courbure dans des repères orthonormés quelconques appliqués l’un sur l’autre par difféomorphisme.

Pour $n \geq 3$, Kulkarni démontre que si (\mathcal{V}, g) et (\mathcal{W}, \bar{g}) espaces riemanniens sont isocourbés, alors g et \bar{g} sont conformes ($\bar{g} \circ f = g \cdot e^{2\sigma}$) sur la fermeture des points non isotropiques.

M est isotrope si $K_M(\theta_1) = K_M(\theta_2)$ pour tout couple (θ_1, θ_2) .

Kulkarni démontre que si (\mathcal{V}, g) et (\mathcal{V}, \bar{g}) sont conformes (c'est-à-dire $\bar{g} = g \cdot e^{2\sigma}$) et sont isocourbés alors $\overline{R}_{jkl}^i = e^{2\sigma} R_{jkl}^i$ ce qui implique alors que $\overline{W}_{jkl}^i = e^{2\sigma} W_{jkl}^i$ où les W_{jkl}^i sont les composantes une fois contravariante et trois fois covariantes du tenseur de Weyl.

Mais ces composantes du tenseur de Weyl sont invariantes par transformation conforme : $\overline{W}_{jkl}^i = W_{jkl}^i$ et si au moins une des composantes W_{jkl}^i est non nulle, il en résulte que $\sigma = 0$ et donc $\bar{g} = g$ et ainsi dans le cas non conformément plat l’isocourbure implique l’isométrie sur la fermeture des points non isotropiques.

Reste alors à traiter le cas où \mathcal{V} , et donc aussi \mathcal{W} , sont conformément plats. Pour cela, Kulkarni utilise la forme particulière du tenseur de courbure d’un espace conforme à un espace plat conjointement aux identités de Bianchi pour \mathcal{V} et \mathcal{W} .

Alors pour $n \geq 4$ l’isocourbure implique l’isométrie sur la fermeture des points non isotropiques.

e) Résumé de l’article.

Il reste donc à traiter le cas $n=3$ (le tenseur de Weyl est nul en dimension trois). Pour cette dimension l’isocourbure revient à préserver les courbures de Ricci.

Nous répertorions dans cet article tous les espaces isocourbés non isométriques en dimension trois. La découverte de ces espaces nous conduit alors à montrer pour toute dimension l’existence d’espaces ayant les mêmes courbures de Ricci mais non isométriques.

Ensuite nous étendons ces résultats en signature quelconque en utilisant la réduction simultanée de deux formes symétriques réelles (appliquée au tenseur de Ricci et à la métrique). Nous pouvons alors traiter du problème de l’unicité de la géométrie dans le cadre de la relativité générale.

f) Enoncé des résultats obtenus.

THÉORÈME 1. — *Il existe une infinité de couples d’espaces isocourbés non isométriques de classe C^3 . Ils sont tous “localement à symétrie cylindrique” et pour chaque*

couple il existe une classe de systèmes de coordonnées dépendant d'une fonction arbitraire $\delta = \delta(z)$ telles que les métriques des deux espaces soient données par :

$$ds^2 = V^2(z)dz^2 + e^{\alpha(z)}dx^2 + e^{\beta(z)}dy^2$$

$$d\bar{s}^2 = e^{2\sigma(z)}ds^2$$

où

$$\sigma = 2 \operatorname{Argth} \left\{ h \left[\frac{\sqrt{1+\delta^6} - 1}{\sqrt{1+\delta^6} + 1} \right]^{-\varepsilon/3} \right\}$$

$$\frac{d\alpha}{dz} = 2 \left\{ \frac{d\sigma}{dz} \frac{1+\delta^3 e^\sigma}{e^{2\sigma}-1} - \frac{d\delta}{\delta} \right\},$$

$$\frac{d\beta}{dz} = 2 \left\{ \frac{d\sigma}{dz} \frac{1-\delta^3 e^\sigma}{e^{2\sigma}-1} - \frac{d\delta}{\delta} \right\},$$

$$V^2 = k\delta^2 \frac{\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)^2}{e^{2\sigma}-1},$$

où k et h sont deux constantes arbitraires liées au couple d'espaces isocourbés non isométriques envisagé et $\varepsilon = \pm 1$. Il n'existe pas d'autres couples d'espaces de classe C^3 , isocourbés non isométriques. (Il existe deux triples infinités de tels couples).

THÉORÈME 2. — (métrique définie positive)

Il existe une infinité de couples d'espaces ayant les même courbures de Ricci mais non isométriques.

THÉORÈME 3. — Soient $\langle \cdot | \cdot \rangle_G$ une forme hermitienne non dégénérée sur E espace vectoriel complexe et $\langle \cdot | \cdot \rangle_R$ une autre forme hermitienne (quelconque celle-ci) ou ce qui revient au même, L un endomorphisme symétrique pour $\langle \cdot | \cdot \rangle_G$ de E .

Il existe une décomposition en somme directe orthogonale pour $\langle \cdot | \cdot \rangle_G$ et $\langle \cdot | \cdot \rangle_R$ associée à une décomposition diagonale par blocs, chaque bloc ayant une des formes suivantes :

- Blocs de dimension paire.

$\langle \cdot | \cdot \rangle_G$ est associée à la matrice d'ordre pair $2p$:
$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & . & . & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & . & 0 & 1 & 0 \\ . & . & 0 & 1 & 0 & . \\ . & 0 & 1 & 0 & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & . & . & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
 signature (p, p)

si λ est réelle

$\langle | \rangle_R$ a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & . & . & 0 & \lambda \\ \vdots & \ddots & . & 0 & \lambda & \varepsilon \\ . & . & 0 & \lambda & \varepsilon & 0 \\ . & 0 & \lambda & \varepsilon & 0 & . \\ 0 & \lambda & \varepsilon & 0 & \ddots & \vdots \\ \lambda & \varepsilon & 0 & . & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \varepsilon = \pm 1$$

si λ est complexe $\langle | \rangle_R$ a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & . & . & 0 & \lambda \\ \vdots & \ddots & . & 0 & \lambda & 1 \\ . & . & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ . & 0 & \bar{\lambda} & 0 & 0 & . \\ 0 & \bar{\lambda} & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \bar{\lambda} & 1 & 0 & . & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

- *Blocs de dimension impaire.*

$\langle | \rangle_G$ est associée à la matrice d'ordre impair $(2p+1)$:

$$\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & \dots & . & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & . & 0 & 1 \\ . & 0 & 1 & 0 & . \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} \text{signature} \\ \varepsilon = 1 & (p+1, p) \\ \varepsilon = -1 & (p, p+1) \end{array}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$, λ est obligatoirement réelle

$\langle | \rangle_R$ a pour matrice : $\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & \dots & . & 0 & \lambda \\ \vdots & \ddots & . & 0 & 1 \\ . & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \lambda & 1 & . & \dots & 0 \end{pmatrix}.$

Résultat pour des formes réelles.

Il existe une décomposition en somme directe orthogonale associée à une décomposition en blocs orthogonaux pour les matrices représentant $\langle | \rangle_G$ et $\langle | \rangle_R$ de la forme :

- si la valeur propre $\lambda = a + ib$ est complexe :

$\langle | \rangle_G$ est associée à la matrice d'ordre pair :
(dans cet exemple l'ordre est 6)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle_G$ est associée à la matrice de même ordre :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 1 \\ b & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & 1 & 0 & -b & 0 \\ a & 1 & 0 & -b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– si la valeur propre λ est réelle : les mêmes réductions que dans le cas hermitien sont obtenues pour $\langle \cdot | \cdot \rangle_G$ et $\langle \cdot | \cdot \rangle_R$.

THÉORÈME 4. — (signature quelconque)

Soit $f : (\mathcal{V}, g) \rightarrow (\mathcal{W}, \bar{g})$ un difféomorphisme entre deux espaces pseudo-riemanniens qui préserve en tout point les courbures de Ricci pour des directions contenues dans un ouvert (non vide) qui soit d'intersection vide avec le cône isotrope. Alors f est conforme

*sur la fermeture de l'ensemble des points où au moins deux valeurs propres du tenseur de Ricci relativement à la métrique sont distinctes,

*sur la fermeture des points où le tenseur de Ricci est algébriquement spécial (sa décomposition relativement à la métrique présente alors une ou des files de Jordan de longueur plus grande que un).

(Commentaire : en toute signature et en toute dimension et dans tous les cas algébriquement possibles, des contre-exemples surgissent où f n'est pas une isométrie. Ces contre-exemples ne sont répertoriés facilement que pour les petites dimensions, des formules explicites existent pour $n=3$).

THÉORÈME 5. — Soit $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ un difféomorphisme qui respecte les courbures de Ricci (f est défini localement) entre deux espaces relativistes vérifiant les équations d'Einstein d'un des modèles suivants (avec ou sans constante cosmologique) :

- fluide parfait,
- champ électromagnétique,

alors f est une isométrie.

THÉORÈME 6. — Il existe une infinité de couples de difféomorphismes entre deux modèles relativistes fluide parfait-champ électromagnétique qui préservent les courbures de Ricci (et donc les invariants obtenus à partir du tenseur d'impulsion-énergie sans le dériver) et qui ne soient pas des isométries.

II – Espaces ayant les mêmes courbures de Ricci (cas riemannien)

DÉFINITION. — (\mathcal{V}, g) et (\mathcal{W}, \bar{g}) ont mêmes courbures de Ricci s'il existe un difféomorphisme $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ tel que pour tout point M de \mathcal{V} et tout vecteur Z non nul de l'espace tangent en M à \mathcal{V} on ait :

$$\text{Ricci}_M(Z) = \overline{\text{Ricci}}_{f(M)}(f^*(Z))$$

(si Z^i sont les composantes contravariantes du vecteur Z au point M et R_{ij} les composantes covariantes du tenseur de Ricci, $\text{Ricci}_M(Z)$ est par définition $\frac{R_{ij} Z^i Z^j}{g_{ij} Z^i Z^j}$).

THÉORÈME. — Pour $n \geq 3$, si (\mathcal{V}, g) et (\mathcal{W}, \bar{g}) espaces riemanniens admettent les mêmes courbures de Ricci alors \bar{g} et g sont conformes ($\bar{g} \circ f = g \cdot e^{2\sigma}$) sur la fermeture des points où il existe au moins deux valeurs propres de Ricci distinctes.

Preuve. — Identifions \mathcal{W} et \mathcal{V} par f . (Toutes les considérations de cet article restent locales). Nous obtenons une variété \mathcal{V} munie de deux structures riemanniennes g et \bar{g} .

Commençons par traiter le cas $n = 3$.

Comme nous nous plaçons dans le cas riemannien, la métrique g est définie positive et on peut introduire au point M envisagé un repère principal (orthonormé) pour le tenseur de Ricci que nous appellerons (e_1, e_2, e_3) . En reprenant les conventions de Kulkarni, nous noterons R_{ij} les composantes du tenseur de Ricci dans le repère (e_1, e_2, e_3) . Alors $R_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Nous noterons aussi $\bar{e}_i = f^*(e_i)$ puis $a_{ij} = \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle$ puis \bar{R}_{ij} les composantes du tenseur de Ricci associées à \bar{g} dans le repère $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

Soit $V = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3$ un vecteur quelconque de l'espace tangent à \mathcal{V} en M .

L'égalité $\text{Ricci}_M(V) = \overline{\text{Ricci}}_{f(M)}(f^*(V))$ devient :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2 R_{11} + y^2 R_{22} + z^2 R_{33}}{x^2 + y^2 + z^2} = \\ \frac{x^2 \bar{R}_{11} + y^2 \bar{R}_{22} + z^2 \bar{R}_{33} + 2xy \bar{R}_{12} + 2yz \bar{R}_{23} + 2xz \bar{R}_{13}}{x^2 a_{11} + y^2 a_{22} + z^2 a_{33} + 2xy a_{12} + 2yz a_{23} + 2xz a_{13}} \end{array} \right.$$

Comme cette égalité doit être vérifiée quelles que soient les valeurs de x, y et z , nous pouvons identifier les termes de mêmes puissances en x, y, z dans le produit croisé. Plaçons-nous en un point où il existe au moins deux valeurs propres de Ricci (relativement à g) distinctes. Ainsi, on peut supposer par exemple que $R_{11} \neq R_{22}$.

En identifiant les termes en x^3y et les termes en xy^3 et en faisant la différence nous obtenons :

$$\bar{R}_{12} = a_{12} R_{11} = a_{12} R_{22}, \quad \text{d'où } a_{12} = 0.$$

Comme $R_{11} \neq R_{22}$, R_{33} est forcément différent de R_{11} ou de R_{22} (au moins un des deux). Supposons par exemple que $R_{11} \neq R_{33}$.

Identifions les termes en x^3z et les termes en xz^3 . Alors $\bar{R}_{13} = a_{13}R_{33} = a_{13}R_{11}$, d'où l'on déduit que $a_{13} = 0$.

Identifions les termes en x^4 : $\bar{R}_{11} = a_{11}R_{11}$; puis les termes en y^4 : $R_{22} = a_{22}R_{22}$; puis les termes en x^2y^2 : $\bar{R}_{11} + \bar{R}_{22} = a_{22}R_{11} + a_{11}R_{22}$; d'où l'on déduit que $(a_{22} - a_{11})(R_{11} - R_{22}) = 0$, d'où $a_{22} = a_{11}$.

Identifions les termes en x^2z^2 : $\bar{R}_{11} + \bar{R}_{33} = a_{33}R_{11} + a_{11}R_{33}$. Identifions les termes en y^2z^2 : $\bar{R}_{22} + \bar{R}_{33} = a_{33}R_{22} + a_{22}R_{33}$; d'où l'on déduit en faisant la différence et en tenant compte des résultats précédents que

$$(a_{33} - a_{11})(R_{11} - R_{22}) = 0, \text{ d'où } a_{33} = a_{11}.$$

Identifions les termes en x^2yz : $\bar{R}_{23} = a_{23}R_{11}$. Identifions les termes en yz^3 : $\bar{R}_{23} = a_{23}R_{33}$; d'où l'on déduit $a_{23}(R_{11} - R_{33}) = 0$, d'où $a_{23} = 0$.

En définitive, on a obtenu $a_{ij} = a_{11}\delta_{ij}$ (où $\delta_{ij} = 0$ ou 1 est le symbole de Krönecker).

Donc $(f^*(e_1), f^*(e_2), f^*(e_3))$ est orthogonal et les vecteurs $f^*(e_i)$ ont la même longueur. Donc f est une homothétie au point M considéré et le résultat s'étend par continuité sur la fermeture des points où le tenseur de Ricci admet (relativement à g) au moins deux valeurs propres distinctes; ce qui montre que localement f est une transformation conforme : $\bar{g} = g \cdot e^{2\sigma}$.

Pour $n \geq 4$: introduisons encore (e_1, e_2, \dots, e_n) un repère orthonormé principal pour le tenseur de Ricci (relativement à g) avec $R_{11} \neq R_{22}$.

En répétant le raisonnement précédent avec (e_1, e_2, e_ℓ) où $3 \leq \ell \leq n$, nous obtenons $a_{12} = a_{1\ell} = a_{2\ell} = 0$.

Considérons maintenant un couple (i, j) avec $i \neq j$, $i \geq 3$ et $j \geq 3$; si $R_{ii} \neq R_{jj}$ en identifiant comme précédemment, nous obtenons $a_{ij} = 0$. Si $R_{ii} = R_{jj}$ supposons que $R_{ii} = R_{jj} \neq R_{11}$ par exemple. Considérons alors l'égalité $\text{Ricci}_M(V) = \overline{\text{Ricci}}_{f(M)}(f^*(V))$ où cette fois $V = x \cdot e_1 + y \cdot e_i + z \cdot e_j$. En identifiant les termes en x^2yz , nous obtenons $\bar{R}_{ij} = a_{ij}R_{11}$. De même $\bar{R}_{ij} = a_{ij}R_{ii}$ d'où $a_{ij} = 0$.

Le même procédé conduit maintenant à $a_{ii} = a_{11} = a_{22}$, d'où le résultat.

Commentaires. — Ce résultat est équivalent au résultat de Kulkarni en dimension trois : dire qu'un point est non isotropique en dimension trois et dans le cas riemannien revient à dire qu'au moins deux valeurs propres du tenseur de Ricci (relativement à la métrique) sont différentes. Pour $n \geq 4$, envisageons une variété d'Einstein ($R_{ij} = \lambda g_{ij}$) qui ne soit pas de courbure constante ($R_{ijk\ell}$ n'est pas de la forme $\lambda(g_{i\ell}g_{jk} - g_{ik}g_{j\ell})$), alors toutes les valeurs propres de Ricci sont égales. Ainsi, en dimension plus grande que trois, on peut trouver des exemples où les valeurs propres du tenseur de Ricci relativement à la métrique sont égales, et ceci en des points non isotropiques; et donc le résultat de Kulkarni est plus général : si \mathcal{V} et \mathcal{W} sont isocourbés ils sont conformes sur la fermeture des points non-isotropiques.

Mais pour $n \geq 4$, imposer que $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ préserve les courbures sectionnelles, impose que f soit une isométrie. En reprenant l'argument du décompte des dimensions de Riemann, pour $n \geq 4$ il y a $\frac{n(n-1)}{2} > n$ courbures pour le tenseur de Riemann ce qui est une intuition de ce résultat.

III – L'isocourbure implique l'isométrie sur la fermeture des points non isotropiques à partir de $n = 4$

L'intuition de l'argument de Riemann sur le décompte des dimensions conduit à penser que ce résultat ne doit pas dépendre de la signature de la métrique utilisée. L'invariance par transformation conforme des composantes (trois fois covariantes et une fois contravariantes) du tenseur de Weyl et la caractérisation des espaces conformes à un espace plat par la nullité du tenseur de Weyl ne dépendent pas de la signature (reprendre la démonstration d'Eisenhart par exemple). Par contre, la signature de la métrique intervient dans la démonstration de Kulkarni adaptée au cas conformément plat. En effet, Kulkarni utilise un vecteur D_1 défini par

$$D_1 = \frac{\text{grad}_o \sigma}{\|\text{grad}_o \sigma\|_o}$$

où le symbole o est relatif à l'espace plat commun conforme à \mathcal{V} et \mathcal{W} . Cette difficulté peut être surmontée de la manière suivante : tout d'abord, l'équation (3) de Kulkarni a été obtenue par un calcul vrai quel que soit la signature .

Ensuite, dans le cas où $\|\text{grad}_o \sigma\|_o$ est nul, il faut compléter la donnée de ce vecteur par $n - 1$ autres, de manière à obtenir une base de l'espace tangent. Bien sûr, cette base ne peut plus alors être orthogonale, mais il est possible de la prendre sous une forme standard (telle que la matrice des g_{ij} soit alors composée de blocs diagonaux qui sont, ou bien l'identité, ou bien la matrice dont les seuls éléments non nuls sont des 1 ou des -1 situés sur la deuxième diagonale). Une minutieuse utilisation de l'équation (3) de Kulkarni permet alors de conclure comme précédemment à l'isométrie, sauf dans certains cas très particuliers de dégénérescences algébriques du tenseur de Ricci.

Pour $n = 4$ et une métrique hyperbolique normale, Hall obtient le théorème suivant ([5], p. 86) :

si deux métriques g et \bar{g} sur un espace temps M déterminent les mêmes courbures sectionnelles en tout point P de M et sont telles que ces courbures sectionnelles ne soient constantes en aucun point de M , alors $g = \bar{g}$ partout sur M , sauf peut-être sur un sous-ensemble ouvert de M conformément plat et sur lequel la métrique g peut être mise sous la forme :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2dudv + H(x, y, u)du^2.$$

Nous verrons comment obtenir ce résultat avec des hypothèses plus faibles. (En n'imposant que les courbures de Ricci).

**IV – Espaces riemanniens non isométriques
ayant les mêmes courbures de Ricci pour n supérieur ou égal à trois**

Ainsi, si $f : (\mathcal{V}, g) \rightarrow (\mathcal{W}, \bar{g})$ préserve les courbures sectionnelles, alors, pour $n \geq 4$, f est une isométrie sur la fermeture des points non isotropiques.

Pour $n = 3$, la nullité du tenseur de Weyl ne permet pas d'utiliser la démarche de Kulkarni. En dimension trois, si f préserve les courbures de Ricci, f préserve aussi les courbures sectionnelles. Ainsi, en traitant pour $n \geq 3$ les espaces ayant mêmes courbures de Ricci, nous traiterons aussi pour $n = 3$ les espaces isocourbés, ce qui va nous permettre de voir apparaître d'autres particularités de la dimension 3 et illustrer son comportement. Nous allons donc maintenant étudier la situation suivante :

- métriques **riemanniennes**,
- $n \geq 3$,
- $f : (\mathcal{V}, g) \rightarrow (\mathcal{W}, \bar{g})$ préserve les courbures de Ricci,
- nous nous placerons systématiquement sur la fermeture des points où au moins deux valeurs propres de Ricci relativement à g sont distinctes.

Nous avons obtenu dans cette situation :

$$\bar{g} = e^{2\sigma} g.$$

Pour tout vecteur V la relation $\text{Ricci}_M(V) = \overline{\text{Ricci}}_M(V)$ permet d'obtenir dans un repère principal pour le tenseur de Ricci : $\bar{R}_1^1 = R_1^1$, $\bar{R}_2^2 = R_2^2 \dots \bar{R}_n^n = R_n^n$, d'où nous déduisons que dans tout repère $\bar{R}_j^i = R_j^i$. Comme $\bar{g} = e^{2\sigma} g$, nous en déduisons que $\bar{R}_{ij} = e^{2\sigma} R_{ij}$.

Pour pouvoir faire les raisonnements qui suivent, il est nécessaire de savoir que l'ensemble des espaces non isométriques ayant les mêmes courbures de Ricci est non vide ($n \geq 3$). Pour cela, donnons un exemple. (Mais nous vous déconseillons de vouloir le vérifier par un calcul direct sur ces formules ..., il est là pour la rigueur de l'exposé).

Exemple d'espaces non isométriques ayant mêmes courbures de Ricci :

$$ds^2 = V^2(z) dz^2 + e^{\alpha(z)} dx^2 + e^{\beta(z)} dy^2,$$

$$d\bar{s}^2 = e^{2\sigma(z)} \cdot ds^2$$

où les fonctions (de la seule variable z) α, β et σ sont définies par :

$$\sigma(z) = 2 \cdot \text{Argth} \left[\left(\frac{\sqrt{1+z^6} - 1}{\sqrt{1+z^6} + 1} \right)^{-\varepsilon/3} \right],$$

$$\frac{d\alpha}{dz}(z) = 2 \cdot \left[\frac{d\sigma}{dz} \left(\frac{1+z^3 e^\sigma}{e^{2\sigma} - 1} \right) - \frac{1}{z} \right],$$

$$\frac{d\beta}{dz}(z) = 2 \cdot \left[\frac{d\sigma}{dz} \left(\frac{1 - z^3 e^\sigma}{e^{2\sigma} - 1} \right) - \frac{1}{z} \right],$$

$$V^2(z) = z^2 \frac{\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)^2}{|e^{2\sigma} - 1|}.$$

Remarque amusante. — Si vous fournissez ces formules à un calculateur formel en lui demandant de vérifier qu'elles conduisent bien aux relations $\bar{R}_1^1 = R_1^1$, $\bar{R}_2^2 = R_2^2$, $\bar{R}_3^3 = R_3^3$, vous n'obtiendrez rien (même si vous ne faites pas de dépassements des capacités mémoires, ce qui arrive en premier) : il faudrait rendre le calcul “confluant”... Pour vérifier que ces formules sont exactes, il est plus sage de reprendre le calcul qui y conduit et qui fait intervenir de façon cruciale les identités de Bianchi (voir [6]), ce qui explique le piège tendu au calculateur formel...

Plaçons-nous pour la suite de ce paragraphe dans le cas où le gradient de σ est non nul et par continuité nous pouvons aussi supposer que $\sigma \neq 0$.

Nos hypothèses sont donc maintenant :

$$\bar{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij}, \quad \bar{R}_{ij} = e^{2\sigma} R_{ij}, \quad \text{grad } \sigma \neq 0, \quad \text{cas riemannien.}$$

Nous continuerons de noter $\sigma_i = \partial_i \sigma$, $\sigma_{ij} = \nabla_i \partial_j \sigma - \sigma_i \sigma_j$ et $\sigma^i = g^{ik} \sigma_k$.

Rappelons qu'en prenant comme convention de signe pour le tenseur de Ricci : $R_{ij} = R_{ikj}^k$, un calcul direct conduit aux formules suivantes :

$$\bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + \delta_j^i \sigma_k + \delta_k^i \sigma_j - \sigma^i g_{jk}$$

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} - (n-2)\sigma_{ij} - (\Delta_2 \sigma + (n-2) \Delta_1 \sigma) g_{ij}.$$

Utilisation des identités de Bianchi. — Les identités de Bianchi peuvent être contractées et conduisent à la relation classique $\nabla_i R_j^i = \frac{1}{2} \partial_j R$ où $R = R_i^i$ est la courbure scalaire. Ecrivons que $\bar{\nabla}_i \bar{R}_j^i = \frac{1}{2} \partial_j \bar{R}$. Comme $\bar{R} = R$, il reste :

$$\bar{\nabla}_i \bar{R}_j^i = \frac{1}{2} \partial_j R = \partial_i \bar{R}_j^i + \bar{\Gamma}_{il}^i \bar{R}_j^l - \bar{\Gamma}_{lj}^l \bar{R}_i^l.$$

Utilisons $\bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + \delta_j^i \sigma_k + \delta_k^i \sigma_j - \sigma^i g_{jk}$ et $\bar{R}_j^i = R_j^i$. Il reste :

$$R_j^k \sigma_k = \frac{R}{n} \sigma_j.$$

Nous énonçons :

Le gradient de σ est vecteur propre du tenseur de Ricci associé à la valeur propre $\frac{R}{n}$.

Enfin $\bar{R}_j^i = R_j^i$ devient :

$$(1 - e^{2\sigma})R_j^i = (n - 2)\sigma_j^i + (\Delta_2\sigma + (n - 2)\Delta_1\sigma)\delta_j^i.$$

Coordonnées orthogonales. — Comme le gradient de σ est non nul et que nous sommes dans le cas riemannien, nous pouvons utiliser un système de coordonnées avec $x^n = \sigma$ et utiliser les trajectoires orthogonales aux hypersurfaces $\sigma = \text{Cte.}$

Nous obtenons ainsi :

$$ds^2 = V^2(x^1, x^2, \dots, x^n)(dx^n)^2 + g_{AB}(x^1, \dots, x^n)dx^A dx^B,$$

où les indices latins majuscules $A, B, C\dots$ varient de 1 à $n - 1$. (Dans le cas pseudo-riemannien, ce résultat ne pourra être utilisé que si $\Delta_1\sigma = \sigma_i\sigma^i \neq 0$).

Dans un tel système de coordonnées orthogonales, rappelons comment peuvent être obtenues les composantes du tenseur de Ricci.

Définissons un tenseur de courbure de plongement des hypersurfaces $\sigma = \text{Cte}$ dans la variété ambiante par

$$\Omega_{AB} = \frac{1}{2V}\partial_n g_{AB}.$$

Posons par définition

$$K = \Omega_A^A \text{ et } \Omega^2 = \Omega_B^A \Omega_A^B.$$

Affectons du signe * toutes les grandeurs relatives aux hypersurfaces $\sigma = \text{Cte.}$

En utilisant l'expression des composantes du tenseur de Riemann en fonction des seconds symboles de Christoffel et en contractant le résultat, voici les formules qui en résultent :

$$\begin{aligned} R_{nn} &= -V(\overset{*}{\Delta}_2 K + \partial_n K + V\Omega^2), \\ R_{nA} &= V(\overset{*}{\nabla}_B \Omega_A^B - \partial_A K), \\ R_{AB} &= \overset{*}{R}_{AB} - \frac{\partial_n \Omega_{AB}}{V} - \frac{\overset{*}{\nabla}_A \partial_B V}{V} - K\Omega_{AB} + 2\Omega_A^C \Omega_{CB}. \end{aligned}$$

Sous forme mixte, cette dernière relation devient :

$$R_A^B = \overset{*}{R}_A^B - \frac{\partial_n \Omega_A^B}{V} - \frac{\overset{*}{\nabla}_A \partial^B V}{V} - K\Omega_A^B.$$

Dans un tel système de coordonnées $\sigma_n = 1$ et $\sigma_1 = \dots = \sigma_{n-1} = 0$, alors

$$R_j^k \sigma_k = \frac{R}{n} \sigma_j$$

conduit à $R_n^n = \frac{R}{n}$ (sans sommation sur n), puis à $R_A^n = 0$. Utilisons alors

$$(1 - e^{2\sigma})R_j^i = (n - 2)\sigma_j^i + (\Delta_2\sigma + (n - 2)\Delta_1\sigma)\delta_j^i$$

pour $i = n$ et $j = A$. Il reste $\sigma_A^n = 0$, d'où $\sigma_{nA} = 0$. Mais $\sigma_{nA} = \nabla_n \partial_A \sigma - \sigma_n \sigma_A$. Donc :

$$0 = \partial_n \partial_A \sigma - \Gamma_{nA}^\ell \partial_\ell \sigma = -\Gamma_{nA}^n = \frac{\partial_A V}{V}.$$

Nous avons donc démontré que : $\partial_A V = 0$ pour $A = 1, 2, \dots, n-1$ et obtenu

$$ds^2 = V^2(\sigma)(d\sigma)^2 + g_{AB}(x^1, \dots, \sigma)dx^A dx^B.$$

Utilisons alors $(1 - e^{2\sigma})R_j^i = (n-2)\sigma_j^i + (\Delta_2 \sigma + (n-2)\Delta_1 \sigma)\delta_j^i$ pour $i = n$ et $j = n$, puis pour $i = A$ et $j = A$ (avec sommation sur A de 1 à $n-1$) :

$$\begin{aligned} (1 - e^{2\sigma})R_n^n &= (n-2)\sigma_n^n + (\Delta_2 \sigma + (n-2)\Delta_1 \sigma) \\ (1 - e^{2\sigma})R_A^A &= (n-2)\sigma_A^A + (\Delta_2 \sigma + (n-2)\Delta_1 \sigma)\delta_A^A. \end{aligned}$$

Mais $R_n^n = \frac{R}{n}$ donc $R_A^A = (n-1)R_n^n$ d'où $\sigma_A^A = (n-1)\sigma_n^n$. Comme $\sigma_B^A = \nabla^A \partial_B \sigma = \frac{\Omega_B^A}{V}$, $\sigma_A^A = \frac{K}{V}$. Puis $\sigma_n^n = \nabla_n \partial^n \sigma - \sigma_n \sigma_n = \frac{\partial_n V}{V} - \frac{1}{V^2}$. Alors $\sigma_A^A = (n-1)\sigma_n^n$ devient :

$$K = -\frac{(n-1)\partial_n V}{V^2} - \frac{n-1}{V}.$$

Comme $\partial_A V = 0$, nous en déduisons que $\partial_A K = 0$.

Utilisons alors $(1 - e^{2\sigma})R_j^i = (n-2)\sigma_j^i + (\Delta_2 \sigma + (n-2)\Delta_1 \sigma)\delta_j^i$ pour $i = j$ avec sommation sur i et j de 1 à n . Nous obtenons :

$$(1 - e^{2\sigma})R = \frac{(2n-2)\partial_n V}{V^3} + \frac{(2n-2)K}{V} + \frac{n^2 - n - 2}{V}.$$

Comme $\partial_A V = \partial_A K = 0$, nous en déduisons que $\partial_A R = 0$. Alors, $R_n^n = \frac{R}{n} = -\frac{\partial_n K}{V} - \Omega^2$ montre que $\partial_A \Omega^2 = 0$.

Utilisons alors

$$(1 - e^{2\sigma})R_j^i = (n-2)\sigma_j^i + (\Delta_2 \sigma + (n-2)\Delta_1 \sigma)\delta_j^i$$

pour $i = A$ et $j = B$ et combinons le résultat avec

$$R_A^B = \overset{*}{R}_A^B - \frac{\partial_n \Omega_A^B}{V} - \frac{\overset{*}{\nabla}_A \partial^B V}{V} - K \Omega_A^B.$$

Nous obtenons alors l'équation caractéristique des espaces admettant les mêmes courbures de Ricci sans être isométriques :

$$\partial_n \Omega_B^A + \left(\frac{KV + n - 2}{1 - e^{2\sigma}} \right) \Omega_B^A + \frac{V(\Delta_2 \sigma + (n-2)\Delta_1 \sigma)}{1 - e^{2\sigma}} \delta_B^A = V \cdot \overset{*}{R}_B^A.$$

Dans cette équation les $\overset{*}{R}_B^A$ sont les composantes mixtes du tenseur de Ricci de l'hypersurface $\sigma = C^{\text{te}}$.

Pour $n = 3$ deux particularités permettent de conclure.

En effet, alors les hypersurfaces $\sigma = C^{\text{te}}$ sont de dimension deux et donc $R_B^A = \frac{R}{2} \delta_B^A$.

De plus, pour $\sigma = \sigma_o$, nous pouvons prendre, dans cette hypersurface particulière, un système de coordonnées tel que $g_{12} = \Omega_{12} = 0$. En effet, la diagonalisation du tenseur Ω relativement à g définit dans le cas riemannien au moins un repère mobile principal (M, e_1, e_2) de l'hypersurface.

Mais en dimension deux, il nous est toujours possible de trouver un système de coordonnées tel que les $\frac{\partial}{\partial x^A}$ soient colinéaires aux e_A si (M, e_1, e_2) est un repère mobile quelconque. Se trouvent ainsi définies des coordonnées ("de courbure") pour une hypersurface $\sigma = \sigma_o$ particulière. Ensuite, pour un point M de \mathcal{V}_3 , considérons la courbe constamment tangente au gradient de σ qui passe par M . Elle coupe l'hypersurface $\sigma = \sigma_o$ en un point de coordonnées (x^1, x^2) que nous affectons au point M . Nous avons ainsi construit un système de coordonnées orthogonales (x^1, x^2, σ) pour lequel l'équation précédente est applicable.

Avec $A = 1$ et $B = 2$, nous obtenons : $\partial_3 \Omega_2^1 + (KV + \frac{1}{1-e^{2\sigma}}) \Omega_2^1 = 0$ qui s'intègre en :

$$\Omega_2^1 = \frac{1}{\sqrt{g^*}} e^{-\sigma} \sqrt{1 - e^{2\sigma}} \Pi(x^1, x^2).$$

Mais pour $\sigma = \sigma_o$, $\Omega_2^1 = 0$, donc $\Pi(x^1, x^2) \equiv 0$ et donc $\Omega_2^1 \equiv 0$ pour tout σ . De même pour Ω_1^2 . Mais $\Omega_1^1 \neq \Omega_2^2$ et $\Omega_1^2 = \Omega_2^1 = 0$ implique que $\Omega_{12} = \frac{1}{2V} \partial_3 g_{12} = 0$. Donc $\partial_3 g_{12} = 0$. Comme pour $\sigma = \sigma_o$, nous avons choisi $g_{12} = 0$, nous en déduisons que $g_{12} = 0$ pour tout σ . Il est possible de montrer que $\Omega_1^1 = \Omega_2^2$ conduit forcément à l'isométrie, ce que nous excluons. Il est possible aussi de montrer que nous pouvons choisir g_{11} et g_{22} ne dépendant que de σ sans restreindre la généralité du résultat (voir [6]).

Nous avons alors obtenu :

$$ds^2 = V^2(z) dz^2 + e^{\alpha(z)} dx^2 + e^{\beta(z)} dy^2$$

$$ds^2 = e^{2\sigma(z)} ds^2$$

comme conditions nécessaires pour que l'isocourbure sans isométrie soit possible.

Mais alors l'isocourbure se réduit à $\bar{R}_1^1 = R_1^1$, $\bar{R}_2^2 = R_2^2$, $\bar{R}_3^3 = R_3^3$ (les autres R_j^i étant nuls si $i \neq j$), ce qui constitue un système différentiel de trois équations sur les trois fonctions inconnues $\beta = \beta(z)$, $\alpha = \alpha(z)$, et $\sigma = \sigma(z)$ puisque nous pouvons imposer $V(z) \equiv 1$. En utilisant la liberté sur le choix de V , il est même possible d'intégrer explicitement et complètement ce système. (Voir pour le détail des calculs [6]). Ce qui conduit au théorème 1.

Existence d'espaces ayant les mêmes courbures de Ricci mais non isométriques pour $n \geq 4$.

Les deux particularités qui ont permis de résoudre complètement le cas $n = 3$ disparaissent pour $n \geq 4$ et nous ne savons pas caractériser localement **tous** les espaces ayant mêmes courbures de Ricci sans être isométriques.

Cependant, l'existence de tels espaces peut être mise en évidence en reprenant les particularités de la dimension trois et en les imposant pour $n \geq 4$.

Dans cette direction, si l'on suppose que les hypersurfaces $\sigma = C^{\text{te}}$ sont de courbure constante (nous savons déjà que la courbure scalaire de ces hypersurfaces est constante), alors il est possible de particulariser localement ces couples d'espaces après un certain travail algébrique ponctuel.

Plus simplement, montrons l'existence en toute dimension plus grande que trois d'espaces ayant les mêmes courbures de Ricci mais non isométriques en prenant :

$$ds^2 = dz^2 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{H_k(z)} (dx^k)^2$$

$$d\bar{s}^2 = e^{2\sigma(z)} ds^2 .$$

Dans cette situation, posons $f_A = \frac{dH_A}{dz}$ pour $A = 1 \dots n - 1$, et écrivons les équations caractéristiques des espaces ayant les mêmes courbures de Ricci mais non isométriques :

$$(1 - e^{2\sigma}) R_j^i = (n - 2) \sigma_j^i + (\Delta_2 \sigma + (n - 2) \Delta_1 \sigma) \delta_j^i .$$

Pour $i \neq j$ ces relations sont trivialement vérifiées. Appelons (E_A) et (E_n) les équations obtenues pour $i = j = A = 1 \dots n - 1$ (sans sommation) et pour $i = j = n$.

L'équation (E_A) s'écrit :

$$\frac{df_A}{dz} + \frac{1}{2} f_A (f_1 + \dots + f_{n-1}) = (n - 2) f_A \frac{\frac{d\sigma}{dz}}{-1 + e^{2\sigma}} + 2 \frac{\frac{d^2\sigma}{dz^2}}{-1 + e^{2\sigma}}$$

$$+ (f_1 + \dots + f_{n-1}) \frac{\frac{d\sigma}{dz}}{-1 + e^{2\sigma}} + 2(n - 2) \frac{\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)^2}{-1 + e^{2\sigma}} .$$

L'équation (E_n) s'écrit :

$$\frac{df_1}{dz} + \dots + \frac{df_{n-1}}{dz} + \frac{1}{2} ((f_1)^2 + \dots + (f_{n-1})^2) = 2(n - 1) \frac{\frac{d^2\sigma}{dz^2}}{e^{2\sigma} - 1} + (f_1 + \dots + f_{n-1}) \frac{\frac{d\sigma}{dz}}{e^{2\sigma} - 1} .$$

S'il n'est pas aisés de considérer directement ce système, une rapide manipulation préalable des équations nous ramène à l'étude d'un système différentiel traditionnel. En effet :

$$\frac{1}{2} (f_1 f_2 \dots f_{n-1}) \mathcal{A} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = 2(n - 1)(n - 2) \frac{\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)^2}{e^{2\sigma} - 1} + 2(n - 2)(f_1 + \dots + f_{n-1}) \frac{\frac{d\sigma}{dz}}{e^{2\sigma} - 1}$$

$$\text{où } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dérivons cette dernière équation par rapport à z . Nous obtenons ainsi une équation que nous appellerons (F) , et que nous écrirons de manière simplifiée ($\frac{dH}{dz} = 0$), combinons-la aux $(n - 1)$ équations $(E_1), \dots, (E_{n-1})$ et posons :

$$\theta = \frac{d\sigma}{dz}.$$

Nous obtenons ainsi un système linéaire en les dérivées de $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, \sigma, \theta$ dont le déterminant vaut :

$$\frac{(-1)^n 4(n-2)(n-1)e^{2\sigma}}{(e^{2\sigma} - 1)^2}.$$

La preuve de l'existence d'espaces ayant les mêmes courbures de Ricci, mais non isométriques est alors simple. En effet, considérons des conditions initiales en les $(n + 1)$ fonctions $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, \sigma, \theta$ qui n'annulent pas ce déterminant. (Il suffit de choisir σ non nul). Les théorèmes classiques à propos des systèmes différentiels nous donnent l'existence, localement, d'une solution de ce dernier système envisagé. Par construction, l'équation (F) admet une primitive constante ($H = h$) quand on y remplace θ par la dérivée de σ . Imposons alors à nos conditions initiales d'intégrer (F) dans laquelle nous avons remplacé θ par la dérivée de σ , avec une constante h nulle. Alors, avec de telles conditions initiales, notre solution vérifie $(E_1 + E_2 + \dots + E_{n-1} - E_n)$ quand nous y remplaçons θ par la dérivée de σ . Mais les $(n - 1)$ équations $(E_1), (E_2), \dots, (E_{n-1})$ sont par construction dans le système intégré et nous avons ainsi obtenu l'existence souhaitée (localement).

D'où le théorème 2.

V – Introduction à la généralisation de ces résultats dans le cas d'une signature quelconque

Si nous voulons reprendre la démarche précédente avec une signature quelconque, plusieurs endroits nécessitent des révisions. Elles sont principalement dues à deux ruptures qui se retrouvent en des endroits différents et plus ou moins combinés :

- tout d'abord, il n'existe pas toujours de repère principal pour le tenseur de Ricci;
- ensuite, les équations de Gauss et Codazzi ne sont définies pour les hypersurfaces de \mathcal{V} que si la métrique qui y est induite par celle de \mathcal{V} n'y est pas dégénérée. Nous verrons que génériquement cette dégénérescence géométrique implique, pour les espaces qui nous intéressent, la dégénérescence algébrique du tenseur de Ricci relativement à la métrique.

Réduction simultanée de deux formes hermitiennes.

Il est d'usage en Relativité Générale d'utiliser la réduction du tenseur de Ricci relativement à la métrique lorentzienne suivant des démarches qui sont en fait liées à la dimension quatre et au caractère hyperbolique normal de la métrique. Intrigués par cette situation, nous avons recherché un résultat qui ne dépende ni de la dimension, ni de la signature et qui puisse éliminer tout emploi de vecteurs complexes si nous désirons utiliser des métriques réelles.

Comme l'on doit envisager la possibilité de valeurs propres complexes nous avons entrepris l'étude de la réduction simultanée de formes hermitiennes.

Les méthodes utilisées de même que les résultats se sont révélés être très proches d'une étude faite par W.Klingenberg [7]. Il étudie en effet la classification de paires de formes bilinéaires symétriques (resp. antisymétriques) sur un corps commutatif. Dans le cas des formes bilinéaires symétriques réelles avec des valeurs propres réelles les résultats obtenus sont identiques. Pour retrouver le cas de la réduction réelle avec des valeurs propres complexes, à partir de l'étude de Klingenberg, il suffit de considérer les matrices symétriques réelles comme symétriques complexes (et non hermitiennes) et d'associer à une base complexe pour une valeur propre $(a+ib)$ sa base conjuguée pour $(a-ib)$, puis de séparer les parties réelles et imaginaires de cette base; suivant la valeur complexe d'un coefficient (appelé γ_1^i dans [7]) l'on obtient différentes formes, dont l'une, (pour $\gamma_1^i = 2i$), correspond à celle que nous proposons. Les formes que nous avons choisies sont celles qui nous semblent faire apparaître au mieux le problème du respect des signatures des deux formes sur chaque sous espace correspondant à une valeur propre.

En dehors du résultat de réduction, nous retiendrons sa conséquence suivante qui lie la complexité de la réduction de L à la signature (p, q) de $\langle \cdot | \cdot \rangle_G$:

si les k_i désignent les longueurs des files de Jordan réelles et les c_j les ordres des valeurs propres complexes (si on compte une valeur propre complexe alors on ne compte pas sa complexe conjuguée), alors :

($[h]$ désigne la partie entière du nombre réel h)

$$\sum_i [\frac{k_i}{2}] + \sum_j c_j \leq \inf(p, q) = \begin{cases} \text{dimension du plus grand sous-espace vectoriel} \\ \text{inclus dans le cône d'isotropie de } \langle \cdot | \cdot \rangle_G. \end{cases}$$

Commentaires sur les résultats de réduction. —

- Pour chaque type de réduction possible, est associée une signature donnée et cela explique pourquoi il ne faut pas fixer cette signature au départ, mais une fois la réduction générale connue, pour une signature donnée ne retenir que les formes qui lui sont compatibles.

- Se trouve aussi illustré le fait qu'il ne peut exister de vecteurs propres de pseudo-longueurs nulles qu'associés à des files de longueur plus grande que un.

Application à la dimension quatre et à la relativité.

Enumérons toutes les réductions algébriques possibles d'un tenseur symétrique (le tenseur de Ricci en relativité) relativement à une forme quadratique non dégénérée de signature quelconque (ce sera la métrique en relativité quand le choix de la signature sera fait).

1) S'il n'y a que des files de longueur un et pas de racines complexes, alors les formes réduites pour G et R sont :

$$G = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

Toutes les signatures sont possibles pour G .

2) S'il y a une file de longueur 2 et 2 files de longueur 1, associées à des valeurs propres réelles, les formes réduites pour G et R sont :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

les signatures possibles pour G sont : + + + - + + - - + - - - .

3) S'il y a une file de longueur 3 et une file de longueur 1, associées à des valeurs propres réelles, les formes réduites pour G et R sont :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_1 \lambda_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 \\ \varepsilon_1 \lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

Les signatures possibles pour G sont : + + + - + + - - + - - - .

4) S'il y a une file de longueur 4 associée à une valeur propre réelle, les formes réduites pour R et G sont :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \varepsilon_1 \\ 0 & \lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 \\ \lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La seule signature possible est : + + - - .

5) S'il y a deux fois une file de longueur 2 associée à deux valeurs propres réelles, les formes réduites pour R et G sont :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 1 & \lambda_3 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

La seule signature possible pour G est : + + -- .

6) S'il n'y a que des files de longueur 1 avec λ et $\bar{\lambda}$ valeurs propres complexes conjuguées et les autres valeurs propres réelles :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 \\ a & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \lambda_4 \end{pmatrix} .$$

où $\lambda = a + ib$.

Les signatures possibles sont : + + + - + + -- + --- .

7) S'il n'y a que des files de longueur 1 avec λ et $\bar{\lambda}$ puis μ et $\bar{\mu}$ valeurs propres complexes conjuguées (notées $\lambda = a_1 + ib_1$ et $\mu = a_2 + ib_2$) :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 \\ a_1 & -b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & a_3 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_3 \end{pmatrix} .$$

La seule signature possible est alors : + + -- .

8) S'il y a une file de longueur 2 associée à une valeur propre réelle et deux files de longueur 1 associées à λ et $\bar{\lambda}$ valeurs propres complexes conjuguées :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & a & -b \end{pmatrix} .$$

La seule signature possible est : + + -- .

9) S'il y a λ et $\bar{\lambda}$ valeurs propres complexes conjuguées associées chacune à une file de longueur 2, les formes réduites pour G et R sont :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & a \\ b & 0 & a & 1 \\ 0 & a & 0 & -b \\ a & 1 & -b & 0 \end{pmatrix} .$$

La seule signature possible est alors : + + -- .

Si l'on impose une signature hyperbolique normale pour $n = 4$, il ne reste plus que 4 formes possibles. La forme classique de la relativité (axiomes de Hawking-Ellis) ne retient que les deux premiers types, une file de longueur 2 associée à une valeur propre réelle survenant pour le schéma radiation pure.

En résumé.

Nombre de formes possibles algébriquement en dimension quatre : 9.

Nombre de formes hyperboliques normales : 4.

Nombre de formes retenues par la relativité sous sa forme classique : 2.

En signature quelconque, un difféomorphisme f qui préserve les courbures de Ricci est encore une transformation conforme sur la fermeture des points où deux valeurs propres au moins sont distinctes.

En signature quelconque, les courbures sectionnelles et les courbures de Ricci deviennent infinies quand la direction (plane ou vectorielle) devient tangente au cône isotrope et ceci dans presque tous les cas. Cette simple constatation permet de conclure que f est une transformation conforme dans le cas des métriques hyperboliques normales sans hypothèses supplémentaires sur les valeurs propres du tenseur de Ricci (voir [5], page 81). Si l'on désire une démonstration qui soit valide dans tous les cas, décidons de n'imposer à f que de faire correspondre les courbures de Ricci que pour des directions contenues dans un ouvert qui est d'intersection vide avec le cône isotrope. Il est alors possible de reprendre la démarche qui a conduit à conclure que f est une transformation conforme dans le cas riemannien et de l'appliquer à chaque type de décomposition possible du tenseur de Ricci relativement à la métrique. S'il n'existe que des files de Jordan de longueur un, alors le raisonnement fait dans le cas riemannien se reconduit sans difficulté et conduit à f conforme sur la fermeture des points où au moins deux valeurs propres de Ricci sont distinctes. Dès qu'il existe des (ou une) files de Jordan de longueurs plus grandes que un, alors la présence des termes non diagonaux (il s'agit de la deuxième diagonale maintenant) permet de conclure à f conforme avec le même raisonnement que dans le cas riemannien sans utiliser l'hypothèse qu'il existe au moins deux valeurs propres de Ricci qui soient différentes. En conclusion, ou bien le tenseur de Ricci est d'un type algébriquement spécial et f est conforme sans autre hypothèse que de préserver les courbures de Ricci, ou bien le tenseur de Ricci admet un repère principal et ce qui a été établi pour le cas riemannien s'applique. Nous sommes ainsi parvenus au théorème 4. Nous ne savons pas si l'on peut étendre à toutes les dimensions et pour toutes signatures le raisonnement fait par Hall dans le cadre de la Relativité.

Les espaces admettant les mêmes courbures de Ricci en dimension et signature quelconque. Application à la relativité.

Commençons par étudier le cas où les équations de Gauss et Codazzi ne s'appliquent plus.

Plaçons-nous donc dans les hypothèses suivantes :

- $\bar{g} = e^{2\sigma} g$; $\bar{R}_j^i = R_j^i$
- $\Delta_1 \sigma = \sigma_i \sigma^i = 0$.

L'utilisation des identités de Bianchi et les formules des transformations conformes conduisent comme dans le cas riemannien à :

$$R_j^k \sigma_k = \frac{R}{n} \sigma_j.$$

La théorie algébrique nous apprend que si le tenseur de Ricci n'est pas identiquement nul, il est alors algébriquement spécial : il y a forcément une file de Jordan de longueur plus grande que un puisque le gradient de σ qui est de pseudo-longueur nulle est aussi

vecteur propre dans ce cas. Prenons la dérivée covariante par rapport à la direction ∂_j de $\sigma_i \sigma^i = 0$. Nous obtenons : $(\nabla_j \partial^i \sigma) \sigma_i = 0$. Utilisons un système de coordonnées avec $x^n = \sigma$, alors $\nabla_j \partial^n \sigma = 0$. Mais $\sigma_j^n = \nabla_j \partial^n \sigma - \sigma_j \sigma^n$; $\sigma^n = g^{nA} \partial_A \sigma + g^{nn} \partial_n \sigma = 0$; donc $\sigma_1^n = 0$; $\sigma_2^n = 0 \dots \sigma_n^n = 0$. Comme dans le cas riemannien $R_A^A = (n-1)R_n^n$ conduit à $\sigma_A^A = (n-1)\sigma_n^n$. D'où $\sigma_A^A = 0$; $0 = \sigma_i^i = \Delta_2 \sigma - \Delta_1 \sigma$. Ce qui montre que $\Delta_2 \sigma = 0$. Alors $(1 - e^{2\sigma}) R_j^i = \sigma_j^i$ et pour que σ ne soit pas nul, il faut que $R_A^A = 0$.

$R_j^k \sigma_k = \frac{R}{n} \sigma_j$ conduit maintenant à $\sigma^{ij} \sigma_i = 0$, d'où par dérivation covariante : $\sigma_j^i \sigma_i^j = 0$.

Conclusion quand le gradient de σ est nul :

- le tenseur de Ricci est algébriquement spécial,
- $R_i^i = R_j^i R_i^j = 0$,
- dans un système de coordonnées avec $x^n = \sigma$: $R_1^n = R_2^n = \dots = R_n^n = 0$.

Pour $n = 3$ et $n = 4$ ces dernières relations permettent de conclure que le polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det((R - \lambda g))$ est respectivement proportionnel à λ^3 et à $\lambda(\lambda^3 + C^{\text{te}})$.

Dans le cas où le gradient de σ est non nul, il faut ajouter à la démarche suivie dans le cas riemannien tous les cas de dégénérescence algébrique (en particulier pour $n = 3$, nous devrions refaire tous les calculs pour obtenir un énoncé complet ...).

Dans le cas relativiste, si nous imposons de plus à f de respecter toutes les courbures sectionnelles, nous retrouvons ainsi le résultat de Hall par cette démarche. Comme nous travaillons avec le tenseur de Ricci et non tout le tenseur de Riemann, nous voyons apparaître ainsi de nouvelles situations. Il est intéressant d'envisager jusqu'où dans le cas relativiste les courbures de Ricci déterminent la métrique localement.

THÉORÈME. — Soit $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ un difféomorphisme qui respecte les courbures de Ricci (f est défini localement) entre deux espaces relativistes vérifiant les équations d'Einstein d'un des modèles suivants (avec ou sans constante cosmologique) :

- fluide parfait,
- champ électromagnétique,

alors f est une isométrie.

La démonstration de ce résultat s'obtient cas par cas en utilisant d'abord le type algébrique du tenseur de Ricci et les relations entre ses valeurs propres, et en complétant si nécessaire par les relations caractéristiques des espaces admettant les mêmes courbures de Ricci. (Il n'y a aucune difficulté majeure, dans le cas du fluide parfait les conditions de positivité de la pression et de la densité sont déterminantes, des contre-exemples surgissant avec les relations $\rho + p = 0$ et $\rho + 2p = 0$).

Existe-t-il d'autres cas que celui présenté par Hall (type N de Petrov) qui n'imposent pas à f d'être une isométrie? Une démonstration, très semblable à la démonstration

d'existence des espaces ayant les mêmes courbures de Ricci mais non isométrique, permet, dans le cas d'un fluide parfait-champ-électromagnétique, d'obtenir facilement de tels contre-exemples. Il en découle que la conception naïve : "le tenseur d'impulsion-énergie détermine les courbures et la géométrie de l'espace-temps" ne peut être retenue.

Autrement dit, il existe des situations où la géométrie de l'espace-temps n'est pas complètement déterminée par le tenseur d'impulsion-énergie, où les dérivées successives du tenseur d'impulsion-énergie sont nécessaires à la connaissance complète de cette géométrie (locale).

Bibliographie

- [1] SPIVAK. M. — *A comprehensive introduction to differential Geometry*, Second Edition. Berkekey, 1979.
- [2] CARTAN E. — *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann*, 2ème édition, revue et augmentée. Gauthier-Villar, 1951.
- [3] KULKARNI R.S. — *Curvature and metric*, Ann. of Math. Stud., **91** (1970), 311–331.
- [4] HELGASON. — *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetrics Spaces*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1978.
- [5] HALL G.S. — *Sectional Curvature and the Determination of the Metric in Space-Time*, General Relativity and gravitation, Vol. 16, n° 1, 1984.
- [6] ROZOY L. — *Isocourbure sans isométrie en dimension trois*, Colloquium octobre 1987, Dep. Math. Reims.
- [7] KLINGENBERG W.. — *Paare symmetrischer und alternierender Formen zweiten Grades*, Abh. Matf. Sem. Univ. Hamburg, **19** n°1-2 (78'93), 1954.

—◊—