

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 59 (1986)
Heft: 3

Artikel: Über Balmer's Spektralformel : Analyse einer wissenschaftlichen Entdeckung
Autor: Grieder, Alfons
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-115698>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über Balmers Spektralformel: Analyse einer wissenschaftlichen Entdeckung

Von Alfons Grieder

Dept. of Social Science and Humanities, The City University, London EC1

(12 X. 1985)

Johann Jakob Balmer ist als Entdecker einer Spektralformel, einer Formel für die Wellenlängen der sogenannten Grundserie des Wasserstoff-Spektrums, in die Annalen der Wissenschaft eingegangen, während dort von seinen Beiträgen zur darstellenden Geometrie, seinen Ausführungen zu architektonischen Fragen und von seinen Gedanken über Stoff, Geist und Gott nicht die Rede ist. Die Formel wird heute etwas anders geschrieben, als er sie schrieb. Doch sie trägt seinen Namen, und dasselbe gilt von der Grundserie des Wasserstoff-Spektrums. In den physikalischen Wissenschaften wird nicht nur von der Balmerserie gesprochen, sondern auch vom Balmerschen Ausdruck (Balmer term), vom Balmersprung und von Balmerabsorption. So ist dem bescheidenen Töchtereschullehrer und Privatdozenten der Universität Basel der eponymische Ruhm, auf den auch bedeutende Physiker verzichten mussten, gleich vielfach zugekommen. Es ist nun hundert Jahre her, seit er seine erste Formel veröffentlichte.¹⁾ Ich möchte die Gelegenheit wahrnehmen und seine Entdeckung etwas eingehender betrachten, als dies meines Wissens bisher geschehen ist.

Vorbemerkung zum Begriff der wissenschaftlichen Entdeckung

Das Wort 'Entdeckung' bezeichnet einerseits den Prozess des Entdeckens, andererseits das dabei Entdeckte. Im folgenden soll es im ersteren Sinne verwendet werden. Doch wird es sowohl um eine Weise, einen Weg des Entdeckens, wie auch um das dabei Entdeckte gehen, ob dieses nun als die Formel selbst oder den der Formel zugrunde liegenden physikalischen Sachverhalt genommen wird.

¹⁾ J. J. Balmer, "Notiz über die Spektrallinien des Wasserstoffs", *Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel*, 7 (1885), pp. 548–60; ebenso (in gekürzter Form) in den *Annalen der Physik und Chemie*, Neue Folge, 25 (1885), pp. 80–7. Im folgenden werde ich für die erstere dieser Publikationen die Abkürzung NSW I verwenden. Ferner erschienen in den *Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel* die folgenden beiden Kurzbeiträge: J. J. Balmer, "Zweite Notiz über die Spectrallinien des Wasserstoffs" (7 (1885), pp. 750–2) und E. Hagenbach, "Balmer'sche Formel für Wasserstofflinien" (8 (1890), p. 242).

Entdeckungen sind nicht dasselbe wie Erfindungen. Etwas entdecken heisst, auf etwas zum ersten Mal aufmerksam werden und es zur Kenntnis nehmen. In diesem Sinne entdeckte Kolumbus Amerika und Galileo Galilei vier Jupitermonde. 'Zum ersten Mal aufmerksam werden' wollen wir nicht zu eng verstehen; es soll nicht bedeuten, dass vorher noch niemand auf die betreffende Sache aufmerksam wurde. Jemand mag für sich neu entdecken, was andere schon vor ihm entdeckten. Hat andererseits jemand etwas erfunden, so hat er es nicht bloss gefunden, sondern zum ersten Mal durch Probieren und Nachdenken hervorgebracht oder jedenfalls gezeigt, wie es hervergebracht werden kann. Das Buchdrucken wurde nicht entdeckt, sondern erfunden; ebenso das Rad, das Schiesspulver, der Kompass, die Glühlampe u.s.w. Bei näherem Zusehen erweist sich allerdings der Sprachgebrauch als verwickelt (z.B. liesse sich vom Erfinder des Schiesspulvers auch sagen, dass er ein Verfahren zu seiner Herstellung entdeckte). Die Verwicklungen beruhen zum Teil darauf, dass bei vielen Erfindungen Entdeckungen und bei manchen Entdeckungen Erfindungen mitspielen. Fraunhofer entdeckte eine Anzahl dunkler Linien im Sonnenspektrum und bestimmte die zugehörigen Wellenlängen, was ihm durch die Erfindung gewisser optischer Vorrichtungen gelang (Anbringen einer konvexen Linse zwischen Spalt und Prisma; Beugungsgitter).²⁾ Es ist ein höchst charakteristischer Zug der neuzeitlichen Naturwissenschaft, dass ihre Entdeckungen weitgehend durch Erfindungen bedingt sind und häufig wieder zu Erfindungen führen. Es ist fraglich, ob unsere Naturwissenschaft überhaupt primär noch auf die Entdeckung der Natur ausgeht, ob es nicht wenigstens ebenso sehr um Entdeckungen im Bereich der Artefakten und mehr oder weniger künstlichen (z.B. künstlich isolierten, künstlich vereinfachten) Systeme geht.

Entdeckungen gibt es nur, wo wenigstens angenähert wahre Auffassungen entstehen. Jemand hat nur dann entdeckt, dass sich zur Zeit t am Orte x ein Komet befindet, wenn dort tatsächlich zur Zeit t ein Komet sich befindet. Ein physikalischer Sachverhalt ist nur dann entdeckt, wenn er tatsächlich der Fall ist oder der Fall war. Es wäre ganz ungereimt zu behaupten, ein Astronom hätte den Kometen X entdeckt, doch diesen Kometen gäbe es nicht; ebenso wie es widersinnig ist zu behaupten, jemand wisse, dass X der Fall ist, doch sei es gar nicht wahr, dass X der Fall ist. Die Wahrheitsbedingung ist freilich eine einschneidende Bedingung. Denn erstens gibt es in den empirischen Wissenschaften keine Beweise im eigentlichen Sinne des Wortes. Zweitens ist wohl vieles, was in diesen Wissenschaften als wahr ausgegeben wird, nur angenähert richtig und einiges mag sogar unrichtig sein. Wir wollen daher von Entdeckungen nicht verlangen, dass sie durch die Entstehung einer im strikten Sinne wahren Auffassung konstituiert sind, sondern uns mit der Bedingung begnügen, dass eine wenigstens angenähert richtige Auffassung entsteht. Beweisen lässt sich jedoch auch dieses letztere nicht. In den empirischen Wissenschaften bleiben alle

²⁾ Die dunklen Linien (heute Absorptionslinien genannt) wurden schon vor ihm entdeckt, nämlich von Wollaston; dennoch gilt auch Fraunhofer zu Recht als ihr Entdecker. Wollaston war zwar der erste (so viel wir wissen), dem diese Linien auffielen, doch Fraunhofer der erste, der sie genauer untersuchte.

Wissens- und Wahrheitsansprüche hypothetisch. Also ergibt sich: wenn immer ein wissenschaftlich-empirisches Tun als ein Entdecken identifiziert wird, ist diese Identifikation eine Vermutung. Sie beruht auf der Annahme, dass in jenem Tun eine wahre oder wenigstens angenähert wahre Auffassung bezüglich dessen, was tatsächlich der Fall ist oder tatsächlich existiert, sich bildete. Doch eben das lässt sich nicht beweisen. In der Tat ist schon manches als wissenschaftliche Entdeckung gepriesen worden, das man nachträglich allgemein als Irrtum betrachtete.

Nicht jede Entdeckung ist auch schon eine wissenschaftliche Entdeckung. Dazu gehört vielmehr, dass das Entdeckte, sei es nun die Existenz eines Dinges oder irgendein Sachverhalt, vorher noch nicht oder nur unzureichend bekannt war, oder dass die Kenntnis, sofern sie vorher einmal da war, sich wieder verloren hatte. Ferner gehört dazu, dass die Existenz der betreffenden Dinge oder die Wahrheit der betreffenden Sachverhalte intersubjektiv überprüfbar ist. Das heisst, sie sollen prinzipiell der Überprüfung durch andere zugänglich sein und so wenigstens als angenähert richtig bestätigbar sein. 'Bestätigen' ist hier nicht gleichbedeutend mit 'beweisen', nicht einmal mit 'als auf einen Einzelfall zutreffend nachweisen', sondern besagt nur, dass die Untersuchungen zum gleichen oder angenähert gleichen Resultat gelangen und dieses bis auf weiteres als wenigstens angenähert richtig angesehen wird. Damit stellt sich eine weitere Frage: Liegt eine wissenschaftliche Entdeckung erst dann vor, wenn das Entdeckte so bestätigt ist? Oder genügt es, dass eine derartige Bestätigung realmöglich ist? Das ist im Grunde jedoch eine Frage der Definition des Wortes 'wissenschaftliche Entdeckung'; die Definition kann im einen oder anderen Sinne gegeben werden, ohne dass eine ernsthafte Kollision mit dem allgemeinen Sprachgebrauch eintritt. Es bieten sich also die folgenden beiden Bestimmungen an:

- (1) Eine wissenschaftliche Entdeckung liegt erst dann vor, wenn das Entdeckte durch die Mehrheit der Wissenschaftler des betreffenden Forschungsbereichs auf Grund ihrer Untersuchungen anerkannt ist, und liegt nur so lange vor, als es so anerkannt ist.
- (2) Ob das Entdeckte tatsächlich in dieser Weise anerkannt ist, ist für eine wissenschaftliche Entdeckung unwesentlich; erforderlich ist jedoch, dass es so bestätigt werden *kann*.

Nach (2) kann eine wissenschaftliche Entdeckung gemacht worden sein, auch wenn sie von den Wissenschaftlern noch gar nicht anerkannt ist. Im Falle (1) jedoch gehört dieses Anerkanntsein mit zum Begriff einer wissenschaftlichen Entdeckung.³⁾ In der Regel lassen sich bei Entdeckungen, die sich als wissenschaftlich bedeutend erweisen, zwei Phasen unterscheiden, deren zweite gesellschaftlicher Natur ist und darin besteht, dass das im Sinne von (2) Entdeckte unter Wissenschaftlern auch zur Anerkennung gelangt. Im folgenden

³⁾ Ein Punkt, der zum Beispiel von A. Brannigan in seinem Buche *The Social Basis of Scientific Discoveries*, Cambridge 1981, hervorgehoben wird.

werde ich mich an (2) halten. Das will nicht heissen, dass ich dem Prozess der wissenschaftlichen Anerkennung keine Bedeutung beimesse. Ganz im Gegenteil: ich halte ihn für äusserst wichtig. Die Balmersche Entdeckung lässt sich offensichtlich in beiderlei Hinsicht betrachten; doch ginge eine Untersuchung darüber, wie seine Spektralformel von der Gemeinschaft der Wissenschaftler (Physiker, Chemiker, Astronomen) aufgenommen wurde, über den Rahmen dieses Artikels hinaus.

Balmers Entdeckung der Spektralformel

Ich möchte hier nicht nur erläutern, was Balmer seiner Meinung nach eigentlich entdeckte – die Spektralformel, wie er sie verstand, sondern zugleich versuchen, die Weise, wie er sie entdeckte, in groben Zügen zu rekonstruieren. Es versteht sich von selbst, dass meine Thesen Vermutungen sind. Seine Veröffentlichungen und was uns sonst überliefert ist, geben nur wenige Anhaltspunkte für eine solche Rekonstruktion her. Im wesentlichen vollzieht sich die Entdeckung in drei Stufen: Balmer wird mit einer physikalischen Grundtatsache bekannt; es gelingt ihm, diese Tatsache mit Hilfe einer arithmetischen Formel auszudrücken; er extrapoliert und stellt eine allgemeine Vermutung über Wasserstoff-Spektrallinien auf.

1. Der Ausgangspunkt: eine wissenschaftliche Tatsache

Nehmen wir an, Balmer habe 1883 oder 1884 eine Vorlesung des Basler Physikprofessors Eduard Hagenbach-Bischoff besucht und sei bei dieser Gelegenheit näher mit dem Linienspektrum des Wasserstoffs bekannt geworden,⁴⁾ genauer: mit einem aus vier sichtbaren Linien bestehenden Teil dieses Spektrums, einer roten, grünen, blauen und violetten Linie, für die auch die Bezeichnungen H_α , H_β , H_γ und H_δ gebräuchlich waren. Er erfuhr, dass die Wellenlänge der roten ungefähr 6562, die der grünen ungefähr 4860, die der blauen etwa 4340 und die der violetten etwa 4101 Einheiten beträgt, wobei sich die Einheit zu 10^{-7} mm (oder 10^{-8} cm, heute 1 Angström genannt) bestimmte. Er nahm an, dass diese Messungen wenigstens gute Näherungen darstellen. Zu diesem Zeitpunkt wusste er noch nicht, dass die vier Linien nur einen Teil des Wasserstoff-Spektrums ausmachen und es neben ihnen noch andere Linien gibt.

Hier also haben wir den Ausgangspunkt der Balmerschen Entdeckung: eine wissenschaftliche Tatsache im eigentlichen Sinn. Versuchen wir, es uns so klar als

⁴⁾ Wie uns Heinz Balmer in seinem sehr lesenswerten Aufsatz "Johann Jakob Balmer" berichtet (*Elemente der Mathematik*, 16 (1961), pp. 49–60.) Merkwürdigerweise erwähnt jedoch A. Hagenbach diesen Umstand nicht, sondern schreibt einfach, dass Balmer eines Tages mit den Anfängen der Spektralformel der Wasserstoffserie zu seinem Vater Ed. Hagenbach kam. (A. Hagenbach, "J. J. Balmer und W. Ritz", *Die Naturwissenschaften*, 23 (1921), pp. 1–4.

möglich zu machen, worin diese Tatsache besteht. Erstens handelt es sich um das Verhalten eines chemischen Elementes, das damals nur im gasförmigen Zustand bekannt war: Wasserstoff, das leichteste der Elemente. Bedingung der relativ unproblematischen Isolierung dieser wissenschaftlichen Tatsache war das Verfügbarsein von Mengen reinen Wasserstoff-Gases. Dieses aber finden wir nicht einfach vor wie Luft, Regenwasser, Kalksteine, Tannenbäume u.s.w. Reines Wasserstoff-Gas mag da und dort im Universum vorkommen, in unserer Umwelt ist es jedoch nur verfügbar, wenn es durch ein technisches Verfahren hergestellt wird. Wäre es nicht gelungen, reines Wasserstoff-Gas herzustellen und im Laboratorium zu untersuchen, so wäre die wissenschaftliche Tatsache, von der wir sprechen, wohl länger unbekannt geblieben. Ihre Entdeckung beruhte auf gewissen chemischen Entdeckungen und Erfindungen, die die Produktion reiner Wasserstoff-Mengen ermöglichten.

Ein weiterer Zug jener wissenschaftlichen Tatsache ist, dass sie überhaupt nicht direkt beobachtbar ist. Erhitztes Wasserstoff-Gas sendet Licht aus. Nehmen wir an, wir wissen, dass es Wasserstoff ist, der das Licht emittiert. Dass da etwas leuchtet, liesse sich noch direkt beobachten. Die wissenschaftliche Tatsache ist jedoch mit diesem Leuchten des Wasserstoffs keineswegs erschöpft. Vielmehr ist hier von vier Linien des Wasserstoff-Spektrums die Rede. Diese Linien werden aber nur durch eine besondere experimentelle Vorrichtung sichtbar, nämlich indem das vom Wasserstoff emittierte Licht mit Hilfe eines Prismas oder eines sogenannten Gitters spektral zerlegt wird. Zu Balmers Zeiten wurde das gewöhnlich mit dem Spektroskop getan. Die direkte Beobachtung zeigt ein Leuchten, die indirekte mittels des Spektroskops die vier engen, voneinander getrennten Spektralbereiche. Dass diese 'Linien' von Lichtstrahlen herrühren, die bereits in dem unmittelbar vom Wasserstoff ausgehenden Licht enthalten sind, das zeigt uns auch die indirekte Beobachtung durchs Spektroskop nicht. Hier machen wir vielmehr von einer auf Newton zurückgehenden theoretischen Hypothese Gebrauch; er führte sie bekanntlich ein, um das Phänomen der Dispersion des Lichts zu erklären, und sie wurde schon im achtzehnten Jahrhundert akzeptiert.⁵⁾ Auch dass die Strahlen aus Wellen bestehen, zeigt weder die direkte noch die indirekte Beobachtung durchs Spektroskop. Wiederrum liegt eine theoretische Hypothese vor, die zu Balmers Zeiten allgemein akzeptiert war: Licht ist eine Wellenbewegung. Es waren besonders die Arbeiten des französischen Physikers Fresnel, die der Wellentheorie des Lichtes in der ersten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts zum Durchbruch verhelfen.⁶⁾

Ein dritter und entscheidender Zug unserer wissenschaftlichen Tatsache ist ihr quantitativer Charakter: es werden vier Wellenlängen angegeben. Diese und

⁵⁾ Newtons Hypothese war, dass die bei der Brechung des Lichts in Erscheinung tretenden 'farbigen' Strahlen schon im einfallenden Licht vorhanden sind, das bei der Brechung einfach zerlegt wird. Auf Newtons philosophisches Verständnis oder Missverständnis seiner eigenen Methode ("hypotheses non fingo") brauchen wir hier nicht einzugehen.

⁶⁾ Zur Kontroverse zwischen Wellen- und Korpuskulartheorie des Lichts in der zweiten Hälfte des achtzehnten und ersten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts siehe z.B. F.A.J.L. James, "The Physical Interpretation of the Wave Theorie of Light", *The British Journal for the History of Science*, 17 (1984), pp. 47–60.

ähnliche Messungen systematisch ausgeführt zu haben, war vor allem das Verdienst des schwedischen Physikers Angström; sie wurden nachher von vielen anderen Wissenschaftlern – Balmer erwähnt auch van d. Willigen, Mendenhall, Mascart, Ditscheiner, Huggins und Vogel – wiederholt und verbessert. Die verschiedenen Messresultate stimmen nicht vollkommen überein; es finden sich Abweichungen von der Grössenordnung eines Promilles. Da die Wellen nicht direkt beobachtet werden, sich auch unter keinem Mikroskop direkt zeigten, konnten die vier Wellenlängen nur mittels indirekter Beobachtung und theoretischer Hypothesen ermittelt werden. Angströms Methode beruhte (wie schon die Fraunhofers, Bunsens und Kirchhoffs) auf der Beugung des Lichtes an einem feinen Gitter. Die Winkel, um die die Lichtmaxima von der Auffallrichtung des Lichts abweichen, werden gemessen. Die Wellentheorie liefert dann den Zusammenhang zwischen Wellenlänge, Beugungswinkel und Gitterkonstanten (d.h. Abstand der Gitterstriche voneinander), der sich ebenfalls experimentell bestimmen lässt.

Ich bin auf diese Umstände eingegangen, um klarzustellen, dass die wissenschaftliche Tatsache, von der Balmer ausging, ein sehr verfeinertes Produkt jahrhundertelanger wissenschaftlicher Forschung darstellte; dass sie weit über das hinausging, was direkte Beobachtung zu enthüllen vermochte; dass sie auf allerlei wissenschaftlichen Entdeckungen und technischen Erfindungen beruhte; dass sie wesentlich mit Hilfe theoretischer Hypothesen zustande kam, die als 'bewährt' galten.

2. Von der Tatsache zur Formel

Die oben beschriebene wissenschaftliche Tatsache hatte sich natürlich ganz unabhängig von Balmer konstituiert; er hatte daran auch nicht den geringsten Anteil. Ueberhaupt war er kein Physiker, im vollen Sinn des Wortes weder theoretischer noch experimenteller Physiker, sondern seit der Studienzeit seiner Neigung und geistigen Beschäftigung nach eher ein Mathematiker. Zwar kündigte er zwischen 1865 und 1888 auch einige Vorlesungen an, die die mathematische Seite physikalischer Sachverhalte betrafen; zum Beispiel über stereographische und perspektivische Darstellung von Kristallformen des regulären Systems, über Cykloiden und Schattenlehre.⁷⁾ Es ist anzunehmen, dass er mit der rasanten physikalischen Entwicklung auf dem Gebiete der Spektroskopie, die zwischen 1860 und 1884 stattfand, nur oberflächlich vertraut war und ihn die Tatsache, auf die Hagenbach in seiner Vorlesung hinwies, überraschte und erstaunte.

Aber wichtiger ist, dass sie seine Gedanken offenbar in Bewegung setzte, und zwar in einer für ihn typischen Richtung. Es war nicht so sehr der Umstand, dass da ein chemisches Element oder ein gasförmiger Körper Licht dieser

⁷⁾ Siehe H. Balmer, *op. cit.*, p. 52 und A. Hagenbach, *op. cit.*, pp. 1–2.

Wellenlängen ausschickt, auch nicht die Fragen, wie diese Wellen zustandekommen oder warum ein diskretes und nicht ein kontinuierliches Spektrum erzeugt wird, die ihn vorerst beschäftigten. Es war kein kausaler Zusammenhang, dem sein erstes Interesse galt, sondern schlicht und einfach diese vier Wellenlängenzahlen 6562, 4860, 4340 und 4101. Es reizte ihn, nach einer verborgenen arithmetischen Beziehung und Gesetzmässigkeit zwischen ihnen zu suchen. Balmer, so scheint mir, war vor allem als Mathematiker angesprochen und nur in zweiter Linie als Physiker. Freilich vergass er den physikalischen Umstand, dass hier Wellen, Wellenlängen und Frequenzen vorliegen, keineswegs. Die Analogie zu den akustischen Wellen und die schon den Pythagoräern bekannte Tatsache, dass sich die harmonischen Intervalle durch einfache Zahlenverhältnisse wie 2:1 (Oktave), 3:2 (Quinte), 4:3 (Quarte), 5:3 (grosse Sexte), 5:4 (grosse Terz) ausdrücken lassen, leiteten seine Gedanken gewiss. Er war ja auch ein Geigenspieler und schon deshalb mit diesen harmonischen Verhältnissen vertraut. In seinem Artikel von 1885 kommt er auf die akustischen Analogien ausdrücklich zu sprechen. So darf man sagen, dass Balmers Untersuchung zu Beginn durch ein mathematisch-pythagoräisches Interesse beherrscht ist.

Man wird vielleicht einwenden, dass sich dieses Interesse bei einem über das Wasserstoff-Spektrum nachdenkenden Physiker ganz natürlich einstelle. Weit gefehlt! Man sehe sich zum Beispiel das 1878, also kurz vor Balmers Entdeckung in England veröffentlichte Buch des namhaften Physikers und Astronomen J. Norman Lockyer an, das den Titel *Studies in Spectrum Analysis* trägt. Lockyer kannte die physikalischen und chemischen Tatsachen der Spektralanalyse viel besser als Balmer. Er hatte bereits wichtige experimentelle und theoretische Beiträge auf diesem Gebiet geliefert, und Balmer bezog sich in seiner Abhandlung auf ihn.⁸⁾ Nun ist auch bei Lockyer von Schwingungen und Wellen und sogar von Grundschrwingungen und (andeutungsweise) ihren 'Obertönen' die Rede.⁹⁾ Die akustischen Analogien zu den Lichtwellen werden auch von Lockyer behandelt. Doch nur an wenigen Stellen klingt von ferne so etwas wie ein pythagoräisch-mathematisches Interesse an, etwa wenn er schreibt:

"Einige der Schwingungen sind eng mit anderen verknüpft, was durch die Wiederholung ähnlicher Liniengruppen in verschiedenen Teilen des Spektrums offensichtlich ist. Hier stehen wir vor einer Enthüllung von Teilchenschwingungen, denen, wenn ich nicht irre, mathematische Physiker in Zukunft viel Bedeutung beimessen werden."¹⁰⁾

Bezeichnenderweise jedoch verfolgt Lockyer diese Beziehungen nicht, sondern will sie dem 'mathematischen' Physiker überlassen. Er, der Experimentalphysiker und Astronom, hat anderes zu tun. Ihn beschäftigen vor allem praktische Fragen der Spektroskopie, einschliesslich der photographischen Spektroskopie: Probleme der Sonnenstrahlung, der in der Sonne vorhandenen chemischen Elemente und

⁸⁾ NSW I, p. 549.

⁹⁾ J. N. Lockyer, *Studies in Spectrum Analysis* (The International Scientific Series, vol. XXIII), London 1878, z.B. pp. 118–9, 17.

¹⁰⁾ J. N. Lockyer, *op. cit.*, p. 143.

Verbindungen, der physikalischen Interpretation der erhaltenen Spektren. So interessiert ihn brennend die Frage, welche Rückschlüsse sich aus den Spektren auf die Dissoziation von Molekülen ziehen lassen. Ich vermute, dass die grosse Mehrheit der zwischen 1865 und 1885 in der Spektroskopie tätigen Forscher sich hauptsächlich mit solch praktischen sowie chemischen und physikalischen Problemen im engeren Sinn beschäftigten, so sehr, dass eine Frage, wie Balmer sie sich stellte, sie kaum ernsthaft von ihren andersartigen Forschungsvorhaben hätte ablenken können. Dass Balmer nur ein Zaungast der spektroskopischen Wissenschaft war, dass ihm die in ihr vorherrschenden wissenschaftlichen Orientierungen fremd waren, das wirkte sich vorerst als Vorteil aus. Er war in dieser Hinsicht unbelastet und hatte Sinn für eine Frage, der nur wenige der zeitgenössischen Naturwissenschaftler nachgingen.

Man unterscheide übrigens: (1) die Wellenlänge (die aus einer Zahl und der zugehörigen Längeneinheit – hier Angström – sich zusammensetzt), (2) die Wellenlängen-Zahl (die reine Zahl, die nebst der Dimension in die Wellenlängen-Angabe eingeht), und (3) die Wellenzahl (ein in der Physik gebräuchlicher Ausdruck für den reziproken Wert der Wellenlänge, also eine Grösse der Dimension $(\text{Länge})^{-1}$). Balmers Problem war nun also, ein arithmetisches Gesetz für die vier Wellenlängen-Zahlen 6562, 4860, 4340 und 4101 zu finden. Ist dieses Problem überhaupt eindeutig lösbar? Offenbar nicht. Angenommen, man suche eine Funktion $f(m)$, die für die ganzzahligen Werte $m = M, M + 1, M + 2$ und $M + 3$ sukzessive die Werte 6562, 4860, 4340 und 4101 annimmt. Für die Funktion f gibt es unendlich viele Lösungen, selbst wenn wir M vorgeben, zum Beispiel gleich 3 setzen. Nach einem Satz der Analysis, den Balmer wohl kannte, existiert nämlich eine und nur eine ganze rationale Funktion k -ten Grades, die an k voneinander verschiedenen Stellen nacheinander die beliebig vorgeschriebenen Werte y_1, y_2, \dots, y_k annimmt. Insbesondere gibt es somit eine und nur eine ganze rationale Funktion vierten Grades, die an den Stellen 3, 4, 5, 6 nacheinander die Werte 6562, 4860, 4340, 4101 annimmt. Doch schon unter den ganzen rationalen Funktionen fünften Grades gibt es unendlich viele, die an den vier Stellen 3, 4, 5, 6 nacheinander jene Werte aufweisen. Denn wir brauchen ja nur eine weitere Stelle, z.B. 7, zu wählen und für diese Stelle irgendeinen Wert y_5 vorzuschreiben. Für jeden solchen Wert gibt es eine und nur eine ganze rationale Funktion fünften Grades, die für 3 gleich 6562, für 4 gleich 4860, für 5 gleich 4340, für 6 gleich 4101 und für 7 gleich y_5 ist. Doch y_5 lässt sich beliebig wählen, und somit gibt es unendlich viele ganze rationale Funktionen (und erst recht unendlich viele Funktionen) f , so dass $f(3) = 6562$, $f(4) = 4860$, $f(5) = 4340$ und $f(6) = 4101$. Das Balmersche Problem hat nicht nur unendlich viele Lösungen, sondern solche Lösungen lassen sich zudem mit Hilfe der sogenannten Lagrangeschen oder der Newtonschen Interpolationsformeln sofort hinschreiben.

Selbstverständlich suchte Balmer nicht irgendeine Lösung, sondern eine möglichst einfache Lösung, die mit seinen Intuitionen in Einklang stand. Diese Intuitionen legten den Gedanken nahe, dass die Wellenlängen-Zahlen ähnlich wie bei harmonischen Tönen in einfachen Verhältnissen stehen. Auch Lockyer

dachte an diese Möglichkeit, und vor ihm schon L. de Boisbaudran, E. E. N. Mascart, J. L. Soret, J. Stoney und A. Schuster.¹¹⁾ Der letztere hielt die Suche nach harmonischen Verhältnissen der Spektrallinien freilich für ziemlich irrelevant. In einem 1881 veröffentlichten Artikel versuchte er zu zeigen, dass bei Annahme einer zufälligen Verteilung der Spektrallinien eines linienreichen Spektrums sich zahlreiche harmonische Verhältnisse finden müssen; die Anzahl harmonischer Verhältnisse, die er berechnete, stimmte einigermassen mit der Anzahl der damals bekannten harmonischen Verhältnisse überein. Diese Betrachtung wird manchen davon abgeschreckt haben, weiter nach Harmoniegesetzen für die Linienspektren zu forschen.

Wir müssen annehmen, so scheint mir, dass Balmer bei seinen Rechnungen von Anfang an eine die Proportionen der Wellenlängen-Zahlen betreffende, wenn auch sonst wohl noch nicht weiter bestimmte Gesetzmässigkeit im Auge hatte. Es ist also wahrscheinlich, dass er vorerst einmal die Verhältnisse der Wellenlängen-Zahlen bildete. (Um die folgende Darstellung zu vereinfachen, schreibe ich $(N_1 + 1)$ für 6562, N_2 für 4860, N_3 für 4340 und N_4 für 4101.) Da stellt sich nun gleich ein überraschendes Resultat ein, N_1 und N_2 lassen sich durch den Faktor 243 kürzen, und man erhält

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{6561}{4860} = \frac{27}{20}.$$

Dieses Ergebnis muss ihn ermutigt haben. Es ist aus drei Gründen merkwürdig. Erstens, weil N_1 und N_2 Vielfache derselben relativ grossen Zahl sind; zweitens, weil diese Zahl gleich der fünften Potenz von 3 ist: $243 = 3^5$; drittens, weil zudem noch der Nenner des gekürzten Bruchs eine Dreierpotenz ist: $27 = 3^3$. Dass er dabei die von Angström angegebene Wellenlängen-Zahl für H_α um 1 (genauer: um 1.1) vermindern musste, das wird ihn kaum sehr gestört haben, wusste er doch, dass die Messungen, auf die er sich stützte, ihre Ungenauigkeiten hatten. (Mascart hatte H_α zu 6560.7 bestimmt, und Mendenhall fand 6561.62). Er konnte sich weiter leicht überzeugen, dass die vier Wellenlängen-Zahlen keine geometrische Folge bilden, weil schon $N_2:N_3$ erheblich von $N_1:N_2$ abweicht.

Balmer muss bald darauf aufs neue gestaunt haben: auch das um 1 verminderte N_1 und das um 1 verminderte N_4 sind beide durch dieselbe relativ grosse Zahl teilbar, nämlich durch 820:

$$\frac{N_1 - 1}{N_4 - 1} = \frac{6560}{4100} = \frac{8}{5}.$$

¹¹⁾ Siehe insbesondere L. de Boisbaudran, *Comptes rendus*, 69 (1869), pp. 445–51, 606–15, 657–64, 694; auch 70 (1870), pp. 974–7; E. E. N. Mascart, *Comptes rendus*, 69, pp. 337–8; J. L. Soret, *Philosophical Magazine*, 42 (1871), pp. 464–5; J. Stoney, *Philosophical Magazine*, 41 (1871), pp. 291–6; J. Stoney und Reynolds, *Philosophical Magazine*, 42 (1871), pp. 41–52; A. Schuster, *Proceedings of the Royal Society*, 31 (1880–81), pp. 337–47; ferner Schusters Ausführungen in der vierten Auflage von H. E. Roscoe, *Spectrum Analysis. Six Lectures*, London 1885, pp. 169–71; und W. Huggins, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 171, Part 2, (1880), pp. 678–81, wo sich eine Mitteilung J. Stoney's findet, auf die sich Balmer bezieht.

Wiederum tritt eine dritte Potenz, nämlich 2^3 auf, diesmal im Zähler des gekürzten Bruchs. Das Verhältnis 8:5 stimmt fast genau mit dem von $N_1:N_4$ zusammen, denn

$$\frac{N_1}{N_4} = 1.59985 \quad \text{und} \quad \frac{8}{5} = 1.60.$$

Ferner ergibt sich, dass

$$\frac{N_2 + 4}{N_4 + 3} = \frac{4864}{4104} = \frac{32}{27},$$

wobei mit 152 gekürzt wird. Wiederum tritt 3^3 auf, nun im Nenner, sowie 2^5 , und (als Faktor in 152) auch 2^3 . $32/27$ stellt eine gute Näherung an $N_2:N_4$ dar, denn

$$\frac{N_2}{N_4} = 1.18507 \quad \text{und} \quad \frac{32}{27} = 1.185185.$$

Balmer erwähnt die drei Verhältnisse $N_1:N_2$, $N_1:N_4$ und $N_2:N_4$ schon zu Beginn seiner Abhandlung, ohne die restlichen drei Verhältnisse $N_1:N_3$, $N_2:N_3$ und $N_3:N_4$ schon anzuführen. In der Tat lassen sich diese letzteren nicht mehr durch kleine ganzzahlige Veränderungen im Zähler und/oder Nenner auf Verhältnisse erheblich kleinerer ganzer Zahlen reduzieren. Durch Ausrechnen findet man:

$$\frac{N_1}{N_3} = 1.511751 \quad \text{und} \quad \frac{N_1 + 1}{N_3} = 1.51198$$

und mit dem von Angström angegebenen Wert $N'_1 = 6562.1$:

$$\frac{N'_1}{N_3} = 1.512004.$$

Setzt man $\frac{N_1}{N_3} \approx 1.5120$, so ergibt sich

$$\frac{N_1}{N_3} \approx \frac{1512}{1000} = \frac{189}{125} = \frac{3^3 \cdot 7}{5^3},$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{N_2}{N_3} &= \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{N_1}{N_3} \approx \frac{20 \cdot 189}{27 \cdot 125} = \frac{28}{25} = \frac{2^2 \cdot 7}{5^2}; \\ \frac{N_3}{N_4} &= \frac{N_3}{N_1} \cdot \frac{N_1}{N_4} \approx \frac{125 \cdot 32}{189 \cdot 20} = \frac{200}{189} = \frac{2^3 \cdot 5^2}{3^3 \cdot 7}. \end{aligned}$$

In der folgenden Tabelle sind die sechs Verhältnisse und ihre Reziproken zusammengestellt.

	N_1	N_2	N_3	N_4
N_1		$\frac{27}{20}$	$\approx \frac{189}{125}$	$\approx \frac{8}{5}$
N_2	$\frac{20}{27}$		$\approx \frac{28}{25}$	$\approx \frac{32}{27}$
N_3	$\approx \frac{125}{189}$	$\approx \frac{25}{28}$		$\approx \frac{200}{189}$
N_4	$\approx \frac{5}{8}$	$\approx \frac{27}{32}$	$\approx \frac{189}{200}$	

Es ist also eine plausible Annahme, dass Balmer vorerst die Verhältnisse der vier Wellenlängen-Zahlen bestimmte und diese Verhältnisse – wenn nötig nach kleiner Abänderung des Zählers oder Nenners – durch Kürzen zu vereinfachen suchte. Wir dürfen auch annehmen, dass ihm dies bald mit den Verhältnissen $N_1:N_2$, $N_1:N_4$ und $N_2:N_4$ gelang und er vorerst mit diesen drei Verhältnissen arbeitete. Falls wir diese Annahmen machen, können wir auch verstehen, was hinter der folgenden Äußerung A. Hagenbachs steckt:

“Mein Vater Ed. Hagenbach erzählte mir gelegentlich, dass Balmer, der ihn zur Besprechung von wissenschaftlichen Problemen oder von Schulfragen häufiger besuchte, eines Tages mit den Anfängen der Spektralformel der Wasserstoffserie zu ihm kam. Er teilte ihm mit, dass er drei Linien des Wasserstoffs H_α , H_β und H_γ durch echte Brüche darstellen könne. Bald gelang es auch mit der vierten Linie H_δ , und er brachte ihm das nächstemal die Formel $\lambda = h \frac{m^2}{m^2 - 2^2}$, in der h eine Konstante, λ die Wellenlänge und m die Zahlen 3,4,5,6 für die vier Linien bedeuten. Damit war die erste spektroskopische Serie entdeckt.”¹²⁾

Erinnerungen pflegen mehr oder weniger getrübt zu sein, besonders wenn sie sich – wie hier – auf Ereignisse beziehen, die Jahrzehnte zurückliegen. Es scheint, dass einer der beiden Hagenbachs sich nicht mehr genau erinnerte. Vor allem die Bemerkung, “dass er drei Linien des Wasserstoffs H_α , H_β und H_γ durch echte Brüche darstellen könne”, gibt zu denken. Meint A. Hagenbach, dass Balmer die drei *Wellenlängen-Zahlen* mittels echter Brüche darstellte, oder dass er die *Verhältnisse* dieser Wellenlängen-Zahlen durch echte Brüche ausdrückte? Im letzteren Fall kann es sich kaum um die Verhältnisse $N_2:N_1$, $N_3:N_1$ und $N_2:N_3$ handeln. Denn dann wäre ganz unverständlich, warum Balmer nicht auch die Verhältnisse $N_4:N_1$ und $N_4:N_2$ bestimmte, die doch ebenfalls echte Brüche bilden und sich, wie gezeigt, leichter vereinfachen lassen. Die Tatsache, dass Balmer zu Beginn seiner Abhandlung die Zahlen N_1 , N_2 und N_4 herausstellt, stimmt mit

¹²⁾ A. Hagenbach, *op. cit.*, p. 2.

Hagenbachs Bemerkung ebenfalls schlecht zusammen.¹³⁾ Es scheint mir also wahrscheinlich, dass Hagenbach hier die H_γ -Linie mit der H_δ -Linie verwechselte.

Es ist nun ein recht triviales Problem, das Verhältnis $N_1:N_2:N_4$ als Verhältnis echter Brüche auszudrücken. Dazu braucht man bloss jede der drei Zahlen durch ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches zu teilen. Andererseits kann man auch direkt von den oben bestimmten Verhältnissen $N_1:N_2$, $N_1:N_4$ und $N_2:N_4$ ausgehen, und es ergibt sich

$$N_1:N_2:N_4 = N_1 : \frac{20N_1}{27} : \frac{5N_1}{8},$$

woraus

$$N_1:N_2:N_4 = \frac{1}{20} : \frac{1}{27} : \frac{1}{32}$$

folgt. Dies scheint mir das Resultat zu sein, von dem Hagenbach spricht, und es ist genau das Resultat, das Stoney schon über ein Jahrzehnt vorher gefunden hatte. Wenn dem so ist, so war wohl auch Balmer am Anfang von der Vorstellung geleitet, die er in seinem Artikel erwähnt und von der er sagt, dass sie sich "nicht als befriedigend erwiesen" habe: nämlich von der Vorstellung, "die Schwingungen der einzelnen Spektrallinien. . . gleichsam als Obertöne eines demselben eigenthümlichen Grundtones auffassen zu dürfen".¹⁴⁾ Vermutlich wird sich nun Balmer die übrigen Verhältnisse $N_1:N_3$, $N_2:N_3$ und $N_4:N_3$ näher angesehen und festgestellt haben, dass sich N_3 nicht so in das abgeleitete Verhältnis $N_1:N_2:N_4$ einfügen lässt, dass

$$N_1:N_2:N_3:N_4 = \frac{1}{20} : \frac{1}{27} : \frac{1}{k} : \frac{1}{32}$$

gilt und k eine ganze Zahl ist. Vielmehr müsste $k = \frac{756}{25}$. Soll sich auf der rechten

Seite wieder ein aus vier Brüchen mit Nenner 1 bestehendes Verhältnis ergeben, so müssten die obigen Brüche mit $\frac{1}{25}$ multipliziert werden. Der Grundton (als das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen $25 \cdot 20$, $25 \cdot 27$, 756 , $25 \cdot 32$) wäre damit 151 200. Wie Balmer mit Recht sagt, kommt man auf diese Weise auf so grosse Zahlen, "dass damit für eine klarere Einsicht nichts gewonnen wäre".¹⁵⁾

Wie Balmer weiterging, nachdem er die Verhältnisse der vier Wellenlängen-Zahlen bestimmt und Stoneys Resultat wiederentdeckt hatte, ist weniger sicher. Doch eines ist klar: dass er die Idee der Oberschwingungen aufgab und statt dessen nach einer Grundschwingung suchte, zu deren Wellenlängen-Zahl die Zahlen N_1 , N_2 , N_3 und N_4 in einem *möglichst einfachen Verhältnis* stehen. Wie fand er die Wellenlängen-Zahl dieser Grundschwingung? Er schlug wohl einen von zwei Wegen ein, die ich A und B nennen will. Der Weg A knüpft unmittelbar

¹³⁾ NSW I, p. 551.

¹⁴⁾ NSW I, p. 550. – Über die von Stoney verfolgte Idee siehe z.B. *Philosophical Magazine*, 41 (1871), pp. 291–6.

¹⁵⁾ NSW I, p. 552.

an die Vereinfachung der Verhältnisse der Zahlen N_1 , N_2 , N_3 und N_4 an. 243 ist zwar siebenundzwanzigmal in N_1 und zwanzigmal in N_2 enthalten, ist jedoch kein gemeinsamer Faktor der vier Wellenlängen-Zahlen; doch wird sich Balmer vielleicht gefragt haben, ob nicht ein Vielfaches dieser Zahl eine Rolle spielt, eben dadurch, dass es in ein relative einfaches Verhältnis zu N_1 , N_2 , N_3 und N_4 tritt. Durch Probieren mag er daraufgekommen sein, dass das in der Tat für das Zwölf- und Fünfzehnfache von 243, also für 2916 und 3645 der Fall ist. Man erkennt schnell, dass 2916 weniger geeignet ist als 3645. Denn

$$\frac{N_3}{2916} = \frac{N_3}{N_1} \cdot \frac{N_1}{2916} \approx \frac{125}{189} \cdot \frac{27 \cdot 243}{12 \cdot 243} = \frac{125}{84},$$

$$\frac{N_4}{2916} = \frac{N_4}{N_1} \cdot \frac{N_1}{2916} \approx \frac{5}{8} \cdot \frac{27 \cdot 243}{12 \cdot 243} = \frac{45}{32},$$

während andererseits 3645 die folgenden überraschend einfachen Proportionen liefert:

$$\frac{N_1}{3645} = \frac{9}{5}, \quad \frac{N_2}{3645} = \frac{4}{3}, \quad \frac{N_3}{3645} \approx \frac{N_3}{N_1} \cdot \frac{N_1}{3645} = \frac{125}{189} \cdot \frac{9}{5} = \frac{25}{21}$$

$$\frac{N_4}{3645} \approx \frac{N_4}{N_1} \cdot \frac{N_1}{3645} = \frac{5}{8} \cdot \frac{9}{5} = \frac{9}{8}.$$

Die vier Verhältnisse sind also 9:5, 4:3, 25:21, 9:8. Indem man das zweite und vierte mit 4 erweitert, ergeben sich die Brüche

$$\frac{9}{5}, \frac{16}{12}, \frac{25}{21}, \frac{36}{32},$$

die dem Gesetz

$$\frac{m^2}{m^2 - 4}, \quad m = 3, 4, 5, 6$$

genügen. Das ist ein erster Weg, auf dem Balmer seinen Ausdruck $\frac{m^2}{m^2 - 4}$ hätte finden können.

Vielleicht jedoch schlug Balmer, nachdem er die Quotienten berechnet hatte, einen anderen Weg ein. Vielleicht versuchte er, eine Regel des Übergangs von N_1/N_2 zu N_2/N_3 und N_3/N_4 zu finden, indem er vorerst Zähler und Nenner dieser Quotienten in Primfaktoren zerlegte:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{5 \cdot 2 \cdot 2}, \quad \frac{N_2}{N_3} \approx \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{5 \cdot 5}, \quad \frac{N_3}{N_4} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}.$$

Wird der zweite Bruch mit 3 erweitert, so lassen sich die drei Quotienten auch

wie folgt schreiben:

$$\frac{3 \cdot 3}{5} \cdot \frac{3}{2 \cdot 2}, \quad \frac{2 \cdot 2}{3} \cdot \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 5}, \quad \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 7} \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3},$$

oder

$$\frac{9}{5} \cdot \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{3} \cdot \frac{21}{25}, \quad \frac{25}{21} \cdot \frac{8}{9}.$$

Erweitern wir die Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{3}$ mit 4, so lassen sich die drei Verhältnisse folgendermassen schreiben:

$$\frac{3^2}{3^2 - 4} \cdot \frac{4^2 - 4}{4^2}, \quad \frac{4^2}{4^2 - 4} \cdot \frac{5^2 - 4}{5^2}, \quad \frac{5^2}{5^2 - 4} \cdot \frac{6^2 - 4}{6^2}. \quad (1)$$

Diese Folge hätte nun Balmer dahin deuten können, dass es eine Grundwellenlängenzahl N_0 gibt, so dass

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{3^2}{3^2 - 4}, \quad \frac{N_2}{N_0} = \frac{4^2}{4^2 - 4}, \quad \frac{N_3}{N_0} = \frac{5^2}{5^2 - 4}, \quad \frac{N_4}{N_0} = \frac{6^2}{6^2 - 4}.$$

Denn so ergibt sich für die aufeinanderfolgenden Verhältnisse

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{N_1}{N_0} \cdot \frac{N_0}{N_2}, \quad \frac{N_2}{N_3} = \frac{N_2}{N_0} \cdot \frac{N_0}{N_3}, \quad \frac{N_3}{N_4} = \frac{N_3}{N_0} \cdot \frac{N_0}{N_4}$$

und also die obige Folge (1). Dieser Weg ist umständlicher, und es ist weniger wahrscheinlich, dass Balmer ihn verfolgte.

3. Induktive Verallgemeinerung

Balmer hatte also den Ausdruck $\frac{m^2}{m^2 - 2^2}$ aufgefunden. Setzt man für m die Zahlen 3, 4, 5 und 6 ein, so ergeben sich vier ganzzahlige Verhältnisse

$$\frac{9}{5}, \quad \frac{16}{12}, \quad \frac{25}{21}, \quad \frac{36}{32},$$

welche er als die Verhältnisse der Wellenlängen H_α , H_β , H_γ und H_δ zu einer Grundwellenlänge h deutete. Diese – er nannte sie die Grundzahl des Wasserstoffs – bestimmte er zu $3645.6 \cdot 10^{-7}$ mm, und zwar einfach so, dass er die Angströmschen Messungen der vier Wellenlängen-Zahlen (6562.10; 4860.74; 4340.10; 4101.2) zugrunde legte, dann aus jeder der vier Gleichungen

$$\frac{6562.10}{h} = \frac{9}{5}, \quad \frac{4860.74}{h} = \frac{4}{3}, \quad \frac{4340.10}{h} = \frac{25}{21}, \quad \frac{4101.2}{h} = \frac{9}{8}$$

h berechnete und schliesslich das arithmetische Mittel der vier h -Werte be-

stimmte. Für die vier Wellenlängen ergibt sich:

$$\lambda_k = 3645.6 \cdot 10^{-7} \frac{k^2}{k^2 - 4} \text{ mm}, \quad k = 3, 4, 5, 6. \quad (2)$$

Damit war ein vorher unbekannter arithmetischer Zusammenhang zwischen den längst bekannten vier Wellenlängen hergestellt. Es wäre irreführend, die obige Formel als deskriptiv zu bezeichnen. Balmer lieferte keine Beschreibung der vier Spektrallinien, sondern zeigte die zwischen den Wellenlängen bestehenden mathematischen Relationen auf.

Die Formel läßt sich in einem ersten Schritt zum folgenden physikalischen Gesetz ergänzen: Erhitztes Wasserstoff-Gas sendet Licht diskreter Wellenlängen λ_k aus, unter denen sich vier befinden, die der Beziehung (2) genügen. Balmers wissenschaftliche Begabung zeigte sich insbesondere auch darin, dass er über die vorliegenden empirischen Daten sogleich hinausging und sich fragte, ob es neben den vier ihm bekannten noch andere seiner Formel genügende Wellenlängen des Wasserstoff-Spektrums gebe. Insbesondere berechnete er die Wellenlänge für $k = 7$: $\lambda_7 = 3969.65 \cdot 10^{-7}$ mm. Er schreibt:

“Von einer solchen fünften Linie, die noch innerhalb des sichtbaren Theils des Spektrums, ganz nahe vor H 1 (welches nach *Angström* die Wellenlänge 3968.1 hat) liegen müsste, war mir nichts bekannt; und ich musste entweder annehmen, dass die Temperaturverhältnisse zur Entwicklung einer solchen Linie nicht günstig genug seien, oder dass dennoch die Formel keine allgemeine Geltung besitze.

Auf meine Erkundigung theilte mir Herr Prof. *Hagenbach* mit, es existierten noch eine größere Anzahl, namentlich von den Herren Dr. *Vogel* und *Huggins* gemessener Wasserstofflinien im violetten und ultravioletten Theile des Wasserstoffspektrums und des Spektrums weisser Sterne; er war so freundlich, selbst eine Vergleichung der betreffenden Wellenlängenbestimmungen mit meiner Formel durchzuführen und mir das Ergebnis mitzutheilen.”¹⁶⁾

Die Abweichungen zwischen gemessenen und berechneten Wertgen waren sehr gering, so klein, meint Balmer, “dass die Übereinstimmung im höchsten Grade überraschen muss”.¹⁷⁾

Balmers Äusserungen über die allgemeine Gültigkeit der Spektralformel sind vorsichtig gehalten. Doch dürfen wir annehmen, er habe wenigstens vermutet, dass die Formel

$$\lambda_k = 3645.6 \cdot 10^{-7} \frac{k^2}{k^2 - 4} \text{ mm}, \quad k = 3, 4, 5, \dots,$$

in dem Sinne allgemein gilt, dass es für jedes $k > 3$ unter geeigneten physikalischen Bedingungen eine mit der Formel übereinstimmende Wellenlänge im

¹⁶⁾ NSW I, pp. 554–5.

¹⁷⁾ NSW. I, p. 555.

Wasserstoff-Spektrum gibt. Balmer ging jedoch noch einen Schritt weiter und schlug den allgemeinen Ausdruck

$$\frac{k^2}{k^2 - n^2}$$

vor, in welchem k und n ganze Zahlen sind (wobei noch die Bedingung $k > n$ hinzuzufügen wäre). Durchläuft n die Werte 1, 2, 3, . . . , und k die Werte 2, 3, 4, . . . , so ergibt sich eine unendliche Folge unendlicher Folgen. Balmer gibt die ersten paar Werte der Folgen für $n = 1$ und $n = 2$ an und bemerkt, dass jedes zweite Glied der zweiten Folge in gekürzter Form schon in der ersten Folge enthalten ist.¹⁸⁾ Sonst geht er nicht weiter auf die Bedeutung dieses allgemeineren Ausdrucks ein. Ziemlich sicher fragte er sich, ob den Werten $n = 1, 2, 3, \dots$ nicht weitere Serien von Wasserstoff-Spektrallinien entsprechen, ob also die Wellenlängen nicht eine zweidimensionale durch

$$\lambda_{kn} = 3645.6 \cdot 10^{-7} \frac{k^2}{k^2 - n^2} \text{ mm} \quad (3)$$

dargestellte Mannigfaltigkeit bilden. Jede zu einem bestimmten n gehörige Folge besitzt den Grenzwert h . Denn es gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{kn} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{hk^2}{k^2 - n^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h}{1 - n^2/k^2} = h,$$

wobei h die Balmersche Grundzahl des Wasserstoffs ist. Entspräche also jedem k in jeder Folge eine Spektrallinie, so entspräche dem h jeweils ein Häufungspunkt der Wellenlängen.

Die induktive Verallgemeinerung und versuchsweise Extrapolation vollzieht sich somit in dreierlei Hinsicht. Erstens haben wir eine triviale Induktion, die darin besteht, dass man von einer Anzahl von Einzelaussagen ("In der Situation S enthält das Spektrum erhitzten Wasserstoffgases vier der Beziehung $\lambda_k = h \frac{k^2}{k^2 - 4}$ genügende Wellenlängen") zum allgemeinen oben erwähnten Gesetz übergeht, wonach sich der Wasserstoff eben in gleichartigen Situationen gleichartig verhält. Induktionen dieser Art sind im Alltag und in den Erfahrungswissenschaften gang und gäbe, und Balmer verliert zu Recht keine Worte darüber. Viel interessanter ist die zweite, anhand der Formel extrapolierende Induktion. Die Formel (für $n = 2$) ist für die Werte $k = 3, 4, 5$ und 6 erfüllt; nun wird angenommen, dass sie für jedes ganze $k \geq 3$ erfüllt ist, sich also für jedes dieser k im Wasserstoff-Spektrum eine Linie findet. Hier handelt es sich nicht einfach um die endlose Wiederholung des schon Beobachteten, sondern die mathematische Formel weist den Weg zu neuartigen Tatsachen, weiteren Wellenlängen, die noch nicht beobachtet sind, und zudem zu qualitativ neuen Sachverhalten, wie der

¹⁸⁾ NSW I, p. 553.

Existenz eines Häufungspunktes (wenn auch nicht unbedingt im exakt mathematischen Sinne). Ich möchte diese Induktion mathematisch-extrapolierende nennen. Sie sind in der Wissenschaft von großer Bedeutung und interessanter als die einfach verallgemeinernden, mit denen sich die Philosophen in ihren Betrachtungen zur Induktion meist begnügen.¹⁹⁾ Kühner ist der dritte induktive Schritt: nämlich das Postulieren einer Vielfalt von Wellenlängen-Serien, die den verschiedenen Werten von n entsprechen. Auch dazu gaben nicht so sehr Beobachtung und Experiment den Anstoss, als die Struktur der aufgefundenen Formel, die den Gedanken nahelegt, nicht nur das k , sondern auch das n als Parameter aufzufassen und eine Folge ganzzahliger Werte durchlaufen zu lassen. Es handelte sich nicht nur um eine extrapolierende, sondern auch um eine 'symmetrisierende' Induktion: die Grössen k und n sollen ähnliche Rollen spielen. Auch das ist ein in den mathematischen Wissenschaften oft vorkommendes, wesentlich durch mathematische Strukturen geleitetes induktives Vorgehen.

Bekanntlich hat Balmer viel später einen weiteren Versuch der Verallgemeinerung unternommen. 1897 erschien in den *Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel* und ebenso wieder in den *Annalen der Physik und Chemie* die Abhandlung "Eine neue Formel für Spektralwellen". In ihr schlug Balmer eine neue Formel vor, die er auch auf die Linienserie I des Lithiums und auf sechs Linienserien des Heliums anwandte. Ihr wissenschaftliches Schicksal ist allerdings ein weniger glückliches gewesen; sie fiel schnell der Vergessenheit anheim. Im Vordergrund der Diskussion standen in den folgenden Jahren (bis 1913) die Formeln von Rydberg, Kayser, Runge und Ritz. Diese Formeln lieferten als Spezialfall die ursprüngliche Balmerformel für Wasserstoff. Rydberg behauptete übrigens, dass er von seiner allgemeinen, die ursprüngliche Balmersche als Spezialfall umfassenden Formel schon vor 1885 Gebrauch gemacht hatte.²⁰⁾

4. Balmers nachträgliche Meditationen über Licht und Materie

Balmers grosse Entdeckung von 1885 hatte noch ein kleines naturphilosophisches Nachspiel. 1891 erschien in Basel seine kleine aphoristische Schrift *Gedanken über Stoff, Geist und Gott*, in der sich auch einige Meditationen über Strahlung und Materie finden. Er hatte sich offenbar Gedanken darüber gemacht, wie das Linienspektrum des Wasserstoffs und anderer Elemente physikalisch zustandekommt. Es ist bezeichnend, dass sich seine Überlegungen auf sehr allgemeiner, naturphilosophischer Ebene bewegen und die physikalisch-dynamischen Verhältnisse nur qualitativ umrissen werden. Immerhin finden sich einige für jene Zeit erstaunliche Gedanken: 1) Die Atome, die kleinsten Teilchen eines Körpers, sind nicht wieder Körperchen derselben Art, sind nicht feste,

¹⁹⁾ Eine Ausnahme war G. Bachelard.

²⁰⁾ Nach E. C. C. Baly, *Spectroscopy* (4th ed.), vol. III, London 1927, p. 5.

harte, einen gewissen kleinen Raum ausfüllende Körperchen.²¹⁾ Balmer wendet sich hier gegen die damals verbreitete Auffassung, die der französische Philosoph Gaston Bachelard treffend 'chosisme' nannte. 2) Einen Äther gibt es nicht.²²⁾ Der Weltäther als elastischer, alle Körper durchdringender, schwereloser und keinen Widerstand bietender Stoff führt auf Widersprüche. Kraftpunkte wirken durch Ausstrahlungen und ohne ein vermittelndes Medium in die Ferne. 3) Alle Fernwirkungen pflanzen sich mit endlicher Geschwindigkeit fort.²³⁾ 4) Die Schwerkraft breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus.²⁴⁾ 5) Die materiellen Körper bestehen aus Kraftpunkten, Kraftmonaden, die sich nach streng mathematischen Gesetzen in kreisenden Schwingungen bewegen und durch die Schwerkraft in die Ferne wirken.²⁵⁾

Eine weitere Hypothese Balmers – ich möchte sie die Überholungshypothese nennen – kommt uns heute und kam wohl schon damals den wissenschaftlich gebildeten Lesern etwas phantastisch vor. Er nimmt nämlich an, die Kraftpunkte bewegten sich schneller als die von ihnen ausgehenden Schwerkraft-Wirkungen, so dass ein Kraftpunkt, der sich auf krummer Bahn fortbewegt, nach einer gewissen Zeit von seinen eigenen, früher ausgeschickten Kraftwirkungen wieder eingeholt und durch sie beschleunigt werden kann.²⁶⁾ Es scheint, dass er sich so die Stabilität der von den Kraftmonaden aufgeführten Bewegungen zu erklären versuchte. Vermutlich stellte er sich vor, dass stabile Kreisbahnen nur für gewisse Radien und Geschwindigkeiten existieren und die kreisenden Schwingungen zu Schwere- und Lichtwellen Anlass geben.²⁷⁾ Gibt es nur diskrete stabile Bahnen, so wäre zu erwarten, dass das Emissionsspektrum diskret ist. Er wusste, dass dieses auch von der Temperatur und vom Aggregatzustand abhängt, und versuchte, die Änderungen des Aggregatzustandes mit der Überholungshypothese in Zusammenhang zu bringen: begegnet der kreisende Kraftpunkt seinen eigenen Kraftwirkungen nur einmal, so liegt ein gasförmiger Zustand vor; begegnet er ihm zweimal, ein flüssiger; begegnet er ihm dreimal, ein fester Zustand.²⁸⁾ Die Überholungshypothese ist eine kühne, originelle Annahme; doch sie warf wohl mehr Probleme auf, als sie löste. Dass ein sich selbst überlassener Massenpunkt eine plötzliche Beschleunigung erfährt, widerspricht der klassischen Mechanik.²⁹⁾ Wie sich die Stabilität der Spektrallinien erklärt, da doch der

²¹⁾ J. J. Balmer, *Gedanken über Stoff, Geist und Gott. Aphorismen*, Basel 1891, pp. 1–2, 9, 15–6. (Im folgenden sei für dieses Buch die Abkürzung *GSGG* benützt.) Man beachte, dass Balmer schon lange vorher zu einigen dieser Überzeugungen gekommen war. Siehe J. J. Balmer-Rinck, *Die Naturforschung und die moderne Weltanschauung. Öffentlicher Vortrag*, Basel 1868, pp. 16–7. (Abkürzung: NW).

²²⁾ *GSGG*, pp. 12–3; NW, pp. 12–3.

²³⁾ *GSGG*, pp. 11, 14

²⁴⁾ *GSGG*, p. 16.

²⁵⁾ *GSGG*, pp. 11, 15–7.

²⁶⁾ *GSGG*, pp. 17–9.

²⁷⁾ Vergleiche *GSGG*, pp. 21–2.

²⁸⁾ *GSGG*, p. 20.

²⁹⁾ Nach der Balmerschen Hypothese ist es möglich, dass ein Massenpunkt zur Zeit t durch einen anderen abgelenkt, dann aber zu einer späteren Zeit, wenn keine Wechselwirkung mit anderen Massenpunkten mehr vorhanden ist, durch seine eigenen, früher ausgeschickten Kraftwirkungen beschleunigt wird. Um mit dem Impulssatz nicht in Widerspruch zu geraten, müsste Balmer den Kraftwirkungen selber einen Impuls zuschreiben.

ständige Energieverlust durch Abstrahlung eine Instabilität der Bahnen der Kraftpunkte verursacht, erläutert Balmer nicht. Auch die Frage, wie die Überholungshypothese mit der Zunahme der Kohäsion beim Übergang vom gasförmigen in den flüssigen und vom flüssigen in den festen Zustand zusammenhängt, bleibt offen.³⁰⁾ Man erkennt, dass Balmer eben kein Physiker im eigentlichen Sinne war: seine physikalischen Hypothesen bleiben qualitativ und vage; es fehlt die theoretische Ausarbeitung und die Ableitung experimentell überprüfbarer Konsequenzen. Insbesondere deutete er kaum an, wie man von seinen Hypothesen zu seiner Spektralformel gelangt.

Eines aber muss anerkannt werden: Balmer ahnte, dass die Ergebnisse der neueren Spektroskopie mit einer neuartigen Atomtheorie verknüpft werden müssen; und er scheute nicht vor kühnen Hypothesen zurück. Seine Gedanken über Licht und Materie klingen teils an Einsteins, teils an Bohrs Ideen an, die der Physik unseres Jahrhunderts ein neues Aussehen gegeben haben.³¹⁾ Aber sie weichen in entscheidenden Punkten auch von diesen neueren Ideen ab. Nach der Einsteinschen Relativitätstheorie bewegen sich Massenpunkte nicht mit der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit oder gar noch schneller. Nach Bohr hat das Atom einen Kern und wird vor allem durch elektrische Kräfte zusammengehalten; Licht wird nicht durch das Kreisen auf stabilen Bahnen erzeugt, sondern gerade durch den Übergang von einem stationären Zustand in einen anderen stationären Zustand. Nicht eine Überholungs-, sondern eine Quantenhypothese sorgt für ein System diskreter Zustände.

Einige Grundzüge der Balmerschen Entdeckung

Wissenschaftliches Entdecken geschieht auf so vielfältige und oft unerwartete Weise, dass die Suche nach einer systematischen Ordnung und vollständigen Typologie wenig Aussicht auf Erfolg hat. Doch ist es nützlich, einige Grundzüge und -typen wissenschaftlichen Entdeckens herauszustellen.

Wissenschaftliche Entdeckungen lassen sich in wenigstens dreierlei Hinsicht

³⁰⁾ Verdoppelt sich die Geschwindigkeit des Kraftpunktes in seiner Kreisbahn, so genügt die verdoppelte Schwerkraft nicht, ihn auf seiner Bahn zu halten und er wird sich vom Zentrum entfernen; man müsste also erwarten, dass der von einem Kraftpunkt beanspruchte Raum bei der Verflüssigung eines Gases und beim Übergang in den festen Zustand vergrößert wird.

³¹⁾ Es wäre interessant zu wissen, ob der junge Einstein diese Balmersche Schrift in Aarau oder in den folgenden Jahren in Zürich unter die Augen bekam. – Übrigens berührt sich Balmers Naturauffassung auch mit der Schellingschen, mit der er vielleicht in Berlin, wo er (nach H. Balmer) 1845/46 Schellings Vorlesungen besuchte, bekannt wurde. Auch für Balmer ist die Natur durch und durch dynamisch und sichtbarer Geist (er spricht von den geistigen oder geistartigen Kräften in der Natur). Letztlich ging es Balmer natürlich darum, den Materialismus zu entkräften und zu zeigen, dass sowohl die Grundkräfte wie die harmonischen Verhältnisse, die die Naturwissenschaften aufweisen, von "einer unerschöpflich weisheitsvollen Einrichtung der Natur" und vom Geiste Gottes zeugen. Vergleiche dazu *GSGG*, Vorwort, Einleitung und Teil III: NW, pp. 15–7, 21–3. "Eine neue Formel für Spektralwellen", *Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel*, 11 (1897), p. 391; ferner der bei H. Balmer, *op. cit.*, p. 57, zitierte Abschnitt aus einem Vortrag J. J. Balmers über Kopernikus.

unterscheiden:³²⁾

- (1) bezüglich des Vorgehens, das vorwiegend theoretisch oder aber vorwiegend experimentell/beobachtend sein kann, oder so, dass weder die eine noch die andere Ausrichtung vorherrscht;
- (2) bezüglich des 'logischen' Verfahrens: vorwiegend deduktiv oder vorwiegend induktiv, oder so, dass weder das eine noch das andere Verfahren vorherrscht;
- (3) bezüglich der Art des Entdeckten: dieses kann ein Ding oder ein Sachverhalt, individueller oder allgemeiner Natur sein. Zu den allgemeinen Sachverhalten gehören die physikalischen Gesetze, zu den individuellen sogenannte Rand- und Anfangsbedingungen. Was entdeckt wird, ist dies, dass ein allgemeiner oder individueller Sachverhalt der Fall ist. Bei Dingen geht es entweder um Einzeldinge oder Typen (Dingverfassungen, die für eine ganze Klasse von Dingen charakteristisch sind). Der Sprachgebrauch deutet auf den entscheidenden Unterschied hin: Wir reden von der Entdeckung des Kometen Halley, der Jupitermonde, des Solenhofener Archaeopteryx-Fossils (die Eigennamen verweisen auf Individuelles), andererseits von der Entdeckung des Wasserstoffs, des Ozons, des Positrons, der Quasars, der Dinosaurier (hier verweisen die Ausdrücke auf Klassen von Dingen).

Diese drei Dimensionen sind zwar nicht ganz, doch weitgehend voneinander unabhängig. Die Wissenschaftsgeschichte zeigt, dass gewisse Kombinationen dieser Grundzüge häufiger auftreten als andere.

Balmers Vorgehen war offensichtlich weder experimentell noch beobachtend. Bekanntlich war er kein Experimentalphysiker, sondern übernahm die experimentellen Ergebnisse, auf die er sich stützte, von anderen. Sein Vorgehen war jedoch auch nicht physikalisch-theoretisch im vollen Sinne des Wortes. Denn das Operieren mit physikalischen Theorien und Prinzipien spielte bei seiner Entdeckung eine untergeordnete Rolle. Das will nicht heissen, dass nicht gewisse allgemeine theoretische Vorstellungen hineinspielten, wie etwa die von Schwingungen in der Akustik und der Analogie zwischen Licht und Schallwellen. Sein Vorgehen war insofern theoretisch, als er die ihm gegebenen Wellenlängenzahlen hinsichtlich ihrer arithmetischen Beziehungen untersuchte, eine Untersuchung, die in erster Linie elementarmathematischen Charakters war und in der Tat "an ein Spiel mit Zahlen grenzte".³³⁾ Dass sein Verfahren teils deduktiv-mathematisch, teils induktiv war, dürfte nach dem bereits gesagten klar sein. Weiter war das

³²⁾ Natürlich gibt es noch andere interessante Dimensionen als die hier genannten. Z.B. liesse sich im Hinblick darauf unterscheiden, ob die Entdeckung durch einen Gedankenblitz, durch Zufall oder Irrtum zustande kam (siehe R. Taton: *Causalités et accidents de la découverte scientifique*, Paris 1955); ob für die Entdeckung eine Kombination schon bekannter Gesetze und Prinzipien hinreichend ist oder dem nicht so ist (vergleiche J. von Liebig, *Induktion und Deduktion*, München 1865, pp. 5–8).

³³⁾ G. Holten, *Thematic Origins of Scientific Thought*, Cambridge (Mass.) und London 1973, p. 389.

von ihm Entdeckte ein allgemeiner Sachverhalt. Er selber fasste seine Formel als allgemeine Hypothese auf, freilich nicht in dem Sinne, dass die Wellenlängen-Zahlen sämtlicher Linien des Wasserstoff-Spektrums unter allen Bedingungen seine Formel erfüllen müssten. Er wusste ja bereits, dass letzteres nicht der Fall war, bemerkte er doch gegen Ende seiner Abhandlung:

“Mit dem aus sehr zahlreichen Linien bestehenden ‘Zweiten Wasserstoffspektrum’, welches Herr Dr. *Hasselberg* in den ‘Mémoires de l’Académie de St-Petersbourg’, Jahrgang 1882, veröffentlichte, steht die Formel in keinem irgendwie nachweisbarem Zusammenhang. Es möchte also der Wasserstoff unter gewissen Verhältnissen des Drucks und der Temperatur sich so verändern, dass das Gesetz der Bildung der Spektrallinien ein vollständig anderes würde”.³⁴⁾

Solche qualitativen Veränderungen des Wasserstoff-Spektrums wurden schon vor *Hasselberg* beobachtet, zum Beispiel von *Plückner* und *Hittorff*, *Frankland* und *Lockyer*.³⁵⁾ *Balmers* Hypothese war also nicht allgemein in dem Sinne, dass er behauptete, zu jeder Linie des Wasserstoff-Spektrums gäbe es ein k , so dass sich die zugehörige Wellenlänge aus der Formel berechnen lässt. Vielmehr besagte sie umgekehrt, wie bereits erwähnt, dass unter gewissen nicht näher spezifizierten Normalbedingungen (Druck und Temperatur) für jedes k ($k = 3, 4, 5, \dots$) eine Linie des Wasserstoffspektrums existiert, deren Wellenlänge sich aus der Formel für dieses k ergibt.

Dürfen wir überhaupt von einer *Balmerschen* Entdeckung sprechen, angesichts des Umstandes, dass schon 1892 *Michelsons* Nachweis vorlag, wonach zwei der ‘Linien’ der *Balmerserie* genauer besehen Dubletts sind, also aus zwei eng beisammenliegenden Linien bestehen? Die in vielen Spektren auftretenden Dubletts wurden bereits von den Fachleuten diskutiert, so zum Beispiel an der Zusammenkunft der *British Association*, die 1891 in *Cardiff* stattfand, wo *J. Stoney* einen Vortrag über ihre mutmasslichen Ursachen hielt.³⁶⁾ Die Messung der Dubletts war zwar mit Schwierigkeiten verbunden (durch die Wärmebewegung der relativ leichten Wasserstoff-Atome werden die Spektrallinien bekanntlich verbreitert, und die Dublettstruktur wird mehr oder weniger ‘verwaschen’); doch zeigten *Michelsons* Messungen an, dass der *Balmerformel* keine strenge Gültigkeit zukommt. An der erwähnten Tagung hielt auch *Huggins* einen Vortrag, und zwar über die Fortschritte der Spektroskopie, zu denen nach

³⁴⁾ NSW I, p. 559.

³⁵⁾ Siehe z.B. *J. N. Lockyer, op. cit.*, pp. 201–3; *J. N. Lockyer, The Meteoric Hypothesis. A Statement of the Results of a Spectroscopic Inquiry into the Origins of Cosmical Systems.* London 1890, pp. 46 f. Ferner hatte *H. W. Vogel* einige schwächere Linien des Wasserstoff-Spektrums gemessen, die der *Balmerschen* Formel nicht entsprechen. (*H. W. Vogel, Berliner Monatsberichte* 1879 und 1880).

³⁶⁾ *Nature*, 44 (1891), p. 454. Siehe auch *O. Lodge, Advancing Science, being Personal Reminiscences of the British Association in the Nineteenth Century*, London 1931, pp. 137–8. *A. A. Michelsons* Bericht “On the Application of Interference-Methods to Spectroscopic Measurements” erschien im *Philosophical Magazine*, 5. Serie, 31 (1891), pp. 280–99.

ihm auch die Balmerformel gehörte.³⁷⁾ Es lag also die paradoxe Situation vor, dass eine Formel, die bereits 'widerlegt' war, allenthalben benützt wurde und als unentbehrlich galt, manche Forscher (z.B. Kayser, Runge und Ritz) zu weiteren Entdeckungen anregte und schliesslich Niels Bohr an einem entscheidenden Punkte weiterhalf, als er an seiner Atomtheorie arbeitete: "Sobald ich Balmers Formel sah, war mir die ganze Sache sofort klar", soll er mehrmals erklärt haben.³⁸⁾ Die physikalische Bedeutung der Balmerformel erschöpfte sich eben nicht darin, dass sie die Wellenlängen einer Serie von Spektrallinien in guter Näherung zu berechnen gestattete. Ebenso wichtig war, dass mit ihr zum ersten Mal der Begriff einer Spektralserie in präziser Form auftauchte. Man erkennt also, dass eine Hypothese zugleich widerlegt und für den Fortgang der Wissenschaften von grösster Bedeutung und positiv wegweisend sein kann; und ebenfalls, wie fruchtlos es wäre, von Entdeckung nur dort zu reden, wo eine im strengen Sinne wahre Erkenntnis vorliegt.

Die Balmersche Spektralformel stellt, jedenfalls im Hinblick auf die damals bekannten physikalischen Gesetze, kein typisches physikalisches Gesetz dar. Als typisch galten etwa das Newtonsche Gravitationsgesetz, das Gesetz des freien Falls, das Gesetz für ideale Gase ($pV = RT$), das Ohmsche Gesetz. In jedem dieser Gesetze werden wenigstens zwei mit verschiedenen Dimensionen behaftete physikalische Grössen durch eine Funktion verknüpft, wobei in den drei ersten noch eine dimensionsbehaftete Konstante vorkommt. Das Reflexionsgesetz "Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel; Lot, einfallender und reflektierter Strahl liegen in derselben Ebene" verknüpft immerhin zwei physikalisch verschiedene variable Quantitäten; dasselbe gilt für das Brechungsgesetz. Nun enthält zwar die Balmersche Formel eine Konstante, nämlich die Grundzahl des Wasserstoffs. Doch verknüpft die Formel weder variable Größen verschiedener Dimension noch variable Grössen, die sich wenigstens ihrer physikalischen Bedeutung nach unterscheiden. Die abhängige Variable ist zwar eine Wellenlänge, doch die unabhängige Variable eine reine, ganze Zahl! Vielleicht ist das der Grund, warum der Ausdruck 'Balmersche Spektralformel' üblicher ist als 'Balmersches Spektralgesetz'. Um etwas Vergleichbares zu haben, könnte man zum Beispiel Bodes Gesetz über die Planetenabstände, oder Gesetze über die Eigenfrequenzen einer Pfeife oder eingespannten Saite bei konstant gehaltener Länge heranziehen. Bei Bodes Gesetz war freilich der Gesetzesanspruch immer etwas fragwürdig; und bei den übrigen Beispielen kommt eine gewisse Analogie zur Balmerschen Formel nur so zustande, dass Grössen, die man sonst auch als Variable betrachten kann, konstant gehalten werden.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Balmers Spektralformel erstens eine Anzahl experimenteller Ergebnisse in einen gesetzmässigen Zusammenhang brachte; zweitens dazu benutzt werden konnte, weitere experimentell und durch Beobachtung überprüfbare Voraussagen zu machen; drittens als Anstoss und

³⁷⁾ *Nature*, 44 (1891), p. 382.

³⁸⁾ N. Bohr, *On the Constitution of Atoms and Molecules*, Kopenhagen 1963, Einleitung L. Rosenfelds, p. XXXIX.

Vorbild für weitere Versuche, Ordnung ins scheinbare Chaos der Spektrallinien zu bringen, von Bedeutung war; viertens Bohr einen entscheidenden Hinweis auf dem Wege zu seiner Atomtheorie gab und zugleich eine wichtige Stütze für diese Theorie und die spätere Quantentheorie lieferte.

Aus der Bohrschen Theorie des Wasserstoff-Atoms liess sich Balmers Spektralformel deduktiv gewinnen, wobei sich die Rydbergsche Konstante R und also auch die Balmersche Grundzahl des Wasserstoffs auf eine Kombination schon bekannter Grössen, einschliesslich der Naturkonstanten e (Elementarladung), m (Elektronenmasse), h (Wirkungsquantum) und c (Lichtgeschwindigkeit im Vakuum) zurückführen: die Grundzahl des Wasserstoffs verknüpfte einige der wichtigsten Naturkonstanten. Es ist wohl richtig, dass man auch ohne Balmers Entdeckung auf die Spektralformel gekommen wäre und sie sich vielleicht am Ende auf rein deduktivem Wege aus der Atomtheorie und Emissionstheorie des Lichtes ergeben hätte.³⁹⁾ Balmers Entdeckung gehört in einen Zwischenbereich zwischen Experiment und eigentlicher physikalischer Theorie, in eine Zone, wo zwischen theoretischen Prinzipien und experimentellen Ergebnissen Brücken geschlagen werden. Die Bedeutung dieses Zwischenbereichs für den Fortgang der Naturwissenschaften – und also auch für das Verständnis der Wissenschaftsgeschichte – wird manchmal zu gering angeschlagen. Freilich ist das Modell der drei Bereiche ('level', 'floors') im wesentlichen ein 'morphologisches', man darf es nicht als allgemeines 'genetisches' ausgeben: die Ansicht, dass die Entdeckung theoretischer Prinzipien immer durch induktive Verallgemeinerungen gewisser im Zwischenbereich gewonnener 'low level theories' geschehen müsste, die ihrerseits stets durch induktive Verallgemeinerung gewisser schon bekannter experimenteller Resultate zustande kämen, ist unhaltbar.

In mancher Hinsicht entspricht die Balmersche Entdeckung der Keplerschen des ersten Planetengesetzes. Auch Kepler ging von wenigen, für seine Zeit ziemlich genauen Messresultaten (geozentrischen Winkelkoordinaten des Planeten Mars) aus; er musste diese dann allerdings erst auf heliozentrische Koordinaten umrechnen. Während Balmer nach einem möglichst einfachen arithmetischen Ausdruck suchte, den die Messresultate erfüllten, hatte es Kepler auf eine möglichst einfache geometrische Form abgesehen, die auf die heliozentrischen Daten passte. Auch seine Nachforschungen waren von gewissen theoretischen Vorstellungen geleitet: von der kopernikanischen These, dass die Planeten sich um die Sonne bewegen und weiter von der Idee, dass die Sonne die Planeten bewege, und zwar mittels eines von ihr ausgehenden Kraftfeldes. Auch Keplers Entdeckung der Planetengesetze gehört jenem Zwischenbereich an. Wie Balmer, so versuchte auch er ohne durchschlagenden Erfolg, die entdeckten Beziehungen auf dynamischer Grundlage zu erklären, eine Erklärung, die Newton erst viel später gelang. Newtons Theorie verhält sich zu den Keplerschen Gesetzen

³⁹⁾ Wie I. Lakatos vermutet, in I. Lakatos und A. Musgrave (Ed.), *Criticism and the Growth of Knowledge*, Cambridge 1970, p. 147; doch vgl. die treffenden Bemerkungen T. S. Kuhns, pp. 247 und 257.

ähnlich wie Bohrs Atomtheorie zur Balmerschen Spektralformel. Vergleicht man endlich Keplers eingehende Beschäftigung mit regulären und Sternpolyedern, und sein unentwegtes Suchen nach mathematischen Beziehungen und 'Harmonien' mit der Genugtuung, mit der Balmer seine symmetrischen Grundrisse konstruierte, numerische Proportionen aufsuchte (nicht nur bei den Spektren, sondern auch an Brücken, Kirchen, Tempeln) und sich ebenfalls mit regulären Polyedern befasste, so erkennt man, wie derselbe pythagoräische Grundzug ihre geistige Ausrichtung durchherrscht.⁴⁰⁾

Zu einigen irrtümlichen Auffassungen der Balmerschen Entdeckung

Es ist merkwürdig, wie viele Irrtümer und Ungenauigkeiten sich in der Literatur über Balmer finden, besonders in Physikbüchern und selbst bei namhaften Autoren. Zum Beispiel wird uns Balmer als deutscher Physiker vorgestellt, der 1885 eine mysteriöse Beobachtung machte.⁴¹⁾ Oder es wird behauptet, dass 1885, als Balmer seine Formel entdeckte, nur Wasserstoff-Spektrallinien im sichtbaren Teil des Spektrums bekannt gewesen seien.⁴²⁾ Dabei konnte doch Balmer seine Formel schon damals an mehrerem im Ultravioletten liegenden Linien nachprüfen. Nach Tatons bereits zitiertem Buch war Balmers Entdeckung eine rein experimentelle.⁴³⁾ J. D. Bernal verlegt die Entdeckung ins Jahr 1880 und schreibt Balmer gleich noch die Bohrsche Einsicht zu, dass nämlich jeder Spektrallinie eine durch zwei Terme bestimmte Energiedifferenz entspricht.⁴⁴⁾

Der Kernphysiker O. R. Frisch schreibt, Balmer hätte geprahlt ('boasted'), er könne zu irgendwelchen vier Zahlen eine sie verbindende Formel finden, und ein Freund habe ihm darauf die vier Wellenlängen-Zahlen des Wasserstoff-Spektrums gegeben. Offenbar weiss Frisch nicht um die natürliche Bescheidenheit des Lausener Bauernsohns und dachte nicht daran, dass das betreffende mathematische Problem schon damals unter Mathematikern als recht triviales galt.⁴⁵⁾

Wichtiger ist es, auf eine Bemerkung einzugehen, die Heinz Balmer in

⁴⁰⁾ Vergleiche dazu J. J. Balmer, *Des Propheten Ezechiel Gesicht vom Tempel, übersichtlich dargestellt und architektonisch erläutert*, Ludwigsburg 1858; ferner die Hinweise bei H. Balmer, *op. cit.*, pp. 52, 55, 60, und bei A. Hagenbach, *op. cit.*, p. 2: "(Balmer) führte aus, wie in diesem historisch und architektonisch interessanten Bau (Barfüsserkirche Basel) geometrische Zahlenverhältnisse die Abmessungen des Gebäudes bestimmen und mit tief durchdachter Symbolik verbunden sind, die bis auf den Salomonischen Tempelbau zurückgehen. . ."

⁴¹⁾ So bei M. A. Rothmann, *The Laws of Physics*, Penguin Books, 1963, p. 193.

⁴²⁾ M. Born, *Atomic Physics*, 5. Aufl., London und Glasgow 1953, p. 103; auch M. von Laue schränkt in seiner *Geschichte der Physik* 4. Aufl., Frankfurt 1959, p. 150, die Balmersche Formel aufs sichtbare Gebiet des Wasserstoff-Spektrums ein.

⁴³⁾ R. Taton, *op. cit.* (Anm. 32), p. 63.

⁴⁴⁾ J. D. Bernal, *The Extension of Man. A History of Physics before 1900*, St. Albans 1972, p. 309.

⁴⁵⁾ O. R. Frisch, *What little I remember*, Cambridge 1979, pp. 22–3.

seinem sonst sehr lehrreichen Artikel "Johann Jakob Balmer" macht. Sie lautet:

"Wie Balmer dazu kam, die Wellenlänge des "Grundtons" zu erhalten, hat er uns nicht verraten. Er nennt sie die *Grundzahl* des Wasserstoffs: 3645.6.

Der Schlusssatz seiner Abhandlung "Notiz über die Spektrallinien des Wasserstoffs" (Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, 1885) scheint uns einen Hinweis zu geben. Er schreibt; "Vielleicht findet sich in einer graphischen Construction des Spektraltableaus das Mittel, auf dem Wege solcher Untersuchungen weiterzukommen."

Vermutlich hat er den Grenzwert durch eine Kurve bestimmt, die in eine Gerade ausklingt."⁴⁶⁾

Dazu ist verschiedenes anzumerken. Erstens lautet der Satz J. J. Balmers nicht ganz wie zitiert, sondern er fängt mit den Worten "Vielleicht findet sich in einer andern graphischen Construction. . ." an. J. J. Balmer spricht hier gerade nicht vom Wasserstoff, sondern von anderen chemischen Elementen (Sauerstoff, Kohlenstoff etc.) und den Schwierigkeiten, eine Grundzahl auch für sie zu finden. Der dem zitierten vorangehende Satz J. J. Balmers lautet:

"Nur die allergenauesten und zuverlässigsten Wellenlängen-Bestimmungen der hervorragendsten Linien eines Stoffes könnten zur Feststellung eines gemeinschaftlichen grössten Maasses dieser Wellenlängen führen und ohne ein solches Maass scheint alle Mühe des Probierens und Suchens umsonst".⁴⁷⁾

Zweitens also legen die Schlusszeilen der Balmerschen "Notiz" eher die folgende Interpretation nahe: Beim Wasserstoff gelang es noch, durch direkten Vergleich der Wellenlängen-Zahlen ein grösstes gemeinschaftliches Mass zu finden, während dies bei Sauerstoff, Kohlenstoff etc. schwierig ist und man daher vielleicht eine andere, graphische Methode zu Hilfe nehmen sollte.⁴⁸⁾ Drittens wäre die von H. Balmer angedeutete graphische Ermittlung der Grundzahl ohnehin viel zu ungenau und willkürlich gewesen. Er denkt sich die Wellenlängen-Zahlen als Funktion eines auf der Abszisse abgetragenen Parameters eingezeichnet. Dieser Parameter scheint jedoch willkürlich zu sein; es ist nicht einzusehen, warum die Abstände zwischen den Abszissen der vier Wellenlängen-Zahlen 6562, 4860, 4340 und 4101 gleich sein sollten. Selbst wenn man das letztere annimmt, lässt sich die Kurve noch auf verschiedene Weise so fortsetzen, dass sie "in eine Gerade ausklingt", wobei such für die Grundzahl erheblich voneinander abweichende Werte ergeben.

⁴⁶⁾ H. Balmer, *op. cit.*, p. 58.

⁴⁷⁾ NSW I, pp. 559–60.

⁴⁸⁾ Balmer drückt sich an der obigen Stelle allerdings nicht sehr genau aus. Unter einem gemeinschaftlichen grössten Mass versteht er kaum einen grössten gemeinsamen Faktor, da es diesen selbst bei den Wellenlängen-Zahlen N_1 , N_2 , N_3 , und N_4 des Wasserstoffs nicht gibt; sondern er meint wohl eine möglichst grosse Zahl Z , zu der die gegebenen Wellenlängen-Zahlen in einfache Verhältnisse treten (ähnlich wie das für seine Grundzahl des Wasserstoffs zutrifft). Ferner scheint mir, dass im Satze "Vielleicht findet sich in einer andern graphischen Konstruktion. . ." nach 'andern' (auf Grund der heute geltenden Regeln) ein Komma zu setzen wäre.

Ein weiterer Punkt betrifft die immer wiederkehrende, schon bei Sommerfeld auftretende Behauptung, Balmer habe bereits die allgemeine, auch auf die Paschen- und Lyman-Serien anwendbare Formel konzipiert. Sommerfeld schreibt:

“Schon Balmer wirft die Frage auf, ob die Zahl n seiner Formel nicht auch den Wert 3 annehmen dürfte, kann sie aber bei dem damaligen Stande der Spektroskopie nicht beantworten. Er vermutet also Linien mit den Wellenzahlen:

$$\nu = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right), \quad \nu = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}\right) \text{ usw.}''$$

Sommerfeld fügt bei, es könne

“kein Zweifel darüber bestehen, dass die Balmersche Formel ganz im Sinne ihres Entdeckers, mit zwei ganzen Zahlen zu schreiben ist:

$$\nu = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) \dots''^{49)} \quad (4)$$

Ähnliche Behauptungen finden sich in manchen anderen Büchern.⁵⁰⁾ Der Irrtum kommt auf typische Weise zustande: erstens nimmt man sich nicht die Mühe, genau zu studieren, was ein Wissenschaftler der Vergangenheit meinte und dachte; zweitens substituiert man sogleich die neueste Auffassung der Sache. Sommerfeld drückt vorerst die Balmersche Formel mit Hilfe der sogenannten Wellenzahlen aus, wie sie sich seit Rydberg in der Spektroskopie eingebürgerten. Damit lässt sich die Balmersche Formel wie folgt umschreiben:

$$\nu_k = \frac{10^7}{3645.6} \frac{k^2 - 2^2}{k^2} \text{ mm}^{-1}, \quad k = 3, 4, 5, \dots$$

oder auch

$$\nu_k = \frac{4 \cdot 10^7}{3645.6} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{k^2}\right) \text{ mm}^{-1}, \quad k = 3, 4, 5, \dots \quad (5)$$

Dagegen hätte Balmer natürlich nichts einzuwenden. Legen wir nun aber Balmers allgemeine Formel zugrunde, so ergibt sich:

$$\nu_{kn} = \frac{10^7}{3645.6} \frac{k^2 - n^2}{k^2} \text{ mm}^{-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

oder auch

$$\nu_{kn} = \frac{n^2 \cdot 10^7}{3645.6} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) \text{ mm}^{-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

⁴⁹⁾ A. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien*, 3. umgearb. Aufl., Braunschweig 1922, pp. 253, 254.

⁵⁰⁾ Z. B. R. C. Johnson, *Spectra*, 3. Auflage, London 1941, p. 12; W. Heitler, *Elementary Wave Mechanics*, 2. Aufl., Oxford 1956, p. 38.

Balmer zog nun tatsächlich in Betracht, dass diese allgemeinere Formel für das Wasserstoff-Spektrum gilt, aber wie man sieht, ist sie keineswegs identisch mit der obigen Formel (4). Denn der Koeffizient in (6) enthält den Faktor n^2 und ist nur für den Fall $n = 2$ (annähernd) gleich der Rydbergschen Konstanten R :

$$\frac{4 \cdot 10^7}{3645.6} \text{ mm}^{-1} = 1097213 \text{ mm}^{-1}.$$

(Rydberg berechnete seine Konstante ursprünglich zu 109721.6 cm^{-1} und sie wurde später auf den von Sommerfeld angegebenen Wert $109677.69 \text{ cm}^{-1}$ berichtigt.⁵¹⁾)

Meines Erachtens besteht kein Grund zur Annahme, Balmer hätte die allgemeine Formel (4) gutgeheissen. Eher scheint es, dass er (6) vorgeschlagen hätte. Doch (6) liefert weder die Paschen- noch die Lyman-Serie. Es ist somit auch kein Grund zur Behauptung vorhanden, Balmer hätte die Formeln für die Wellenzahlen dieser beiden später entdeckten Serien antizipiert. Der Unterschied der Formeln (4) und (6) ist ein wesentlicher. Denn auf Grund von (6) ergibt sich für ganzzahliges p :

$$\nu_{kn} = \nu_{pk, pn}, \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad n < k,$$

eine Beziehung, die mit (4) unverträglich ist. Andererseits folgen aus (4) die additiven Beziehungen

$$\nu_{kn} - \nu_{k'n} = \nu_{kk'},$$

$$\nu_{kn} - \nu_{kn'} = \nu_{n'n},$$

deren allgemeine Gültigkeit wieder mit (6) unverträglich ist. Diese additiven Beziehungen weisen auf das Ritzsche Kombinationsprinzip, während die Formel (6) auf ein Wiederholungsprinzip führt: jede in der n -ten Folge an k -ter Stelle auftretende Wellenzahl kommt auch in der pn -ten Folge vor ($p = 2, 3, 4, \dots$), und zwar an der Stelle pk . So weist Balmer in seiner Arbeit darauf hin, dass jedes zweite Glied der Folge $\frac{m^2}{m^2 - 2^2}$, $m = 1, 2, 3, \dots$, in gekürzter Form schon in der

Folge $\frac{m^2}{m^2 - 1^2}$, $m = 1, 2, 3, \dots$, vorkommt.⁵²⁾

Zum Schluss noch eine kleine persönliche Reminiszenz. In einer seiner D.G.-Stunden ('D.G.' war unsere Abkürzung für 'Darstellende Geometrie') erwähnte vor fast dreissig Jahren ein älterer Basler Mittelschullehrer beiläufig, das Wasserstoff-Spektrum habe Balmer bekanntlich an eine perspektivisch erscheinende Reihe von Stangen erinnert, und das habe ihn auf seine Formel gebracht. Die Anekdote ist insofern interessant, als die Lehre von der Perspektive sowie das perspektivische Zeichnen in der Tat Balmers eigentliches Fachgebiet war. Zudem hatte er eben eine Arbeit zur Perspektive des Kreises

⁵¹⁾ Vgl. E. C. C. Baly, *op. cit.*, p. 10.

⁵²⁾ NSW I, p. 553.

geschrieben und in kurzem sollte bei Vieweg sein Buch *Die Freie Perspektive* erscheinen. Nun besteht bekanntlich eine Grundaufgabe der Freien Perspektive darin, das perspektivische Bild einer geraden Reihe äquidistanter Punkte zu konstruieren.⁵³⁾ So ist es durchaus möglich, dass die vier Spektrallinien, die Hagenbach vielleicht graphisch auf einer Geraden auftrug, Balmer an diese perspektivische Figur und Grundaufgabe erinnerten und eben dadurch sein Interesse weckten. Freilich tritt der (anscheinend) perspektivische Effekt nicht so schön in Erscheinung, wie bei den graphischen Darstellungen der vollständigeren Balmerserie, wie sie sich heutzutage in den Physikbüchern finden. Eine Frage bleibt jedoch noch übrig: Konnte ihm die Analogie mit der perspektivischen Figur bei der Auffindung seiner Spektralformel selbst behilflich sein? Ich glaube es nicht; denn die Rechnung zeigt, dass die Punkte des perspektivischen Bildes nach einem Gesetz dem Augpunkt zustreben, das vom Balmerschen verschieden ist. Wir haben es also hier (wie beim "Heureka!" rufenden Archimedes und bei Thales, der in den Brunnen fiel, während er die Gestirne betrachtete) mit einer jener Anekdoten zu tun, die zwar ein Körnchen, doch eben nur ein Körnchen Wahrheit enthalten.

⁵³⁾ J. J. Balmer, *Die Freie Perspektive. Einfache und leichte Einführung in das Perspektivische Zeichnen für Künstler und Kunstfreunde, Kunst- und Gewerbeschüler, sowie zum Selbstunterricht.*, Braunschweig 1887, pp. 14–5, wo eine derartige Aufgabe behandelt ist.