

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 58 (1985)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Niederenergetische Proton-Proton-Streuung und Paris-Potential  
**Autor:** Piepke, G.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-115637>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Niederenergetische Proton-Proton-Streuung und Paris-Potential

von G. Piepke

Institut für Theoretische Physik der Universität Zürich, Schönberggasse 9, CH-8001 Zürich

14. I. 1985

*Abstract.* We have calculated the  $pp$  scattering phase shifts for the uncoupled  $^1S_0$ ,  $^1D_2$ ,  $^3P_0$ ,  $^3P_1$  and coupled  $^3P_2$ ,  $^3F_2$  states using the Paris potential. It turns out that this potential cannot account for the  $^1S_0$  scattering length which is precisely known from low energy scattering experiments. Our numerical calculations at low energy are controlled by the effective range approximation. For the coupled states an appropriate effective range approach is derived and applied.

## 1. Einleitung

Im niederenergetischen Bereich zwischen 0.4 und 3 MeV Labor-Stossenergie liegen schon seit langem Messungen des differentiellen Proton-Proton-Wirkungsquerschnitts vor. Eines der früheren Experimente ist die Messung [1], die das engere Gebiet um das Interferenzminimum untersucht. Bei dieser Laborenergie von 0.3825 MeV und  $90^\circ$  Schwerpunktswinkel führt eine destruktive Interferenz zwischen Coulomb- und Kernamplitude zur fast vollständigen Auslöschung des Wirkungsquerschnitts. Das erlaubt eine besonders genaue Bestimmung der s-Wellen-Streuphase.– Es folgen die Experimente [2] (1.4 bis 3 MeV), [3] (0.5 bis 1.9 MeV) und [4] (0.35 bis 1 MeV). Mit den älteren Daten haben sich schon mehrere Phasenanalysen befasst, während die jüngeren, sehr präzisen Messungen aus Basel [3] und Zürich [4] erst in neuerer Zeit ausgewertet worden sind [5].

Ein Ziel dieser Arbeit ist es nun, die Ergebnisse der genannten Experimente mit den Vorhersagen des Paris-Potentials [6] zu vergleichen. Dieses semiphänomenologische Potential beschreibt den lang- und mittelreichweitigen Teil der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung durch die Boson-Austauschtheorie, den kurzreichweitigen Teil mit einem phänomenologischen soft core. Die Anpassung der phänomenologischen Parameter des Potentials an Proton-Proton-Streudaten erfolgte im Energiebereich  $E_{\text{LAB}} > 3 \text{ MeV}$ .

Die Streuung unter 3 MeV Laborenergie ist im wesentlichen s-Wellen-Streuung. Für eine genaue Anpassung der s-Welle an das Experiment braucht man jedoch zusätzliche Informationen über die höheren Partialwellen, die das niederenergetische Experiment selbst nicht liefert. Diese Informationen besorgt man sich entweder aus einem Potentialmodell oder man benutzt das bekannte analytische Verhalten der Partialwellenstreuamplitude, wie es in den Effective Range (ER) – Formeln für niedrige Energien zum Ausdruck kommt. Auch zur Kontrolle der Rechnungen mit einem Potentialmodell, die vor allem bei kleiner

Energie numerische Probleme aufwerfen, ist es äusserst zweckmässig, die ER-Näherung heranzuziehen. Im Einkanalfall sind die entsprechenden Formeln schon lange allgemein hergeleitet worden (siehe z.B. [7] und [8]) und werden bei Phasenanalysen auch verwendet. Für die  ${}^3P_2$ -Phase ( ${}^3P_2-{}^3F_2$ ) ist das niedrigste gekoppelte Zustandspaar des Proton-Proton-Systems) ist seit [9] auch eine un gekoppelte, die Ein-Pion-Austausch (OPE)-Wechselwirkung berücksichtigende ER-Näherung üblich, deren Anwendbarkeit aber von [10] bezweifelt wird. In [11] ist jedoch schon am neutralen Fall gezeigt worden, dass bei gekoppelten Kanälen das Inverse der  $\mathfrak{A}$ -Matrix als richtige Verallgemeinerung für den Kotangens der Streuphase in der ER-Funktion verwendet werden muss. [12] erweitert die gekoppelte Theorie auf den geladenen Fall unter der Annahme eines hard core in allen Kanälen (zusätzlich werden in [12] für die diagonalen Matrixelemente von  $\mathfrak{A}^{-1}$  Formeln für den Fall ohne hard core angegeben).-

Im Abschnitt 2 dieser Arbeit werden nun unter allgemeineren Voraussetzungen (ohne hard core), aufbauend auf [13] und [14], ER-Formeln für die gekoppelten Zustände  ${}^3P_2-{}^3F_2$  des Proton-Proton-Systems hergeleitet. Die Verallgemeinerung auf die anderen gekoppelten Drehimpulszustände ist offensichtlich. Die Ergebnisse für die diagonalen Matrixelemente von  $\mathfrak{A}^{-1}$  stimmen mit [12] überein.

Im Abschnitt 3 wird die Bornsche Näherung im Kernpotential (im Falle  $L > 0$  ist das i.a. eine gute Näherung) für die neu definierten verallgemeinerten Streulängen entwickelt. Ausserdem wird der Zusammenhang mit der Parametrisierung der  $\mathfrak{S}$ -Matrix durch Eigenphasen und Mischungsparameter [15] hergestellt. Es zeigt sich, dass eine endliche "nichtdiagonale Streulänge" dazu führt, dass der Mischungsparameter im Grenzfall verschwindender Stossenergie gegen eine Konstante der Grössenordnung  $\alpha^2$  geht. Damit ist im gekoppelten Coulomb-Fall eine eindeutige Zuordnung der Eigenphasen zu Bahndrehimpulsen nach der Vorschrift von [15] nicht möglich.

Im Abschnitt 4 werden schliesslich die mit dem Paris-Potential [6] gerechneten numerischen Resultate diskutiert. Der Vergleich mit den Experimenten zeigt, dass das Paris-Potential den Verlauf der  $s$ -Wellenphase bei kleiner Energie nicht gut wiedergibt. Der Einfluss der Kopplung zwischen den Bahndrehimpulsen  $L = 1$  und  $L' = 3$  unter 5 MeV Laborenergie kann anhand der in Abschn. 2 definierten ER-Funktionen nachgewiesen werden.

## 2. Effective Range-Theorie

### 2.1. Bezeichnungen und Einheiten

$\hbar$	$= c = 1$
$\gamma$	$= 0.577215 \dots$ Eulersche Zahl
$M_p$	$= 4.754797 \text{ fm}^{-1}$ Protonenmasse
$k$	$=$ Wellenzahl der Relativbewegung in $\text{fm}^{-1}$
$\kappa$	$= kM_p^{-1}$
$x$	$=$ Abstand der Protonen voneinander in $\text{fm}$
$r$	$= xM_p$
$v$	$=$ Laborgeschwindigkeit des einfallenden Protons
$\eta$	$= \frac{e^2}{v}$

$\alpha$	$= 2\kappa\eta$ Feinstrukturkonstante
$J$	= Gesamtdrehimpuls-Quantenzahl
$L$	= Bahndrehimpuls-Quantenzahl
$\mathfrak{S}$	= $\mathfrak{S}$ -Matrix zum Gesamtdrehimpuls $J$ , definiert bezüglich Coulombfunktionen
$\mathfrak{S}$	$= \begin{pmatrix} \cos \varepsilon_J^c & -\sin \varepsilon_J^c \\ \sin \varepsilon_J^c & \cos \varepsilon_J^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2i\delta_{LJ}^c} & 0 \\ 0 & e^{2i\delta_{LJ}^c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varepsilon_J^c & \sin \varepsilon_J^c \\ -\sin \varepsilon_J^c & \cos \varepsilon_J^c \end{pmatrix}$ in Blatt-Biedenharn-Parametrisierung [15]
$\mathfrak{S}$	$= \begin{pmatrix} e^{i\tilde{\delta}_{LJ}^c} & 0 \\ 0 & e^{i\tilde{\delta}_{LJ}^c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\tilde{\varepsilon}_J^c & i \sin 2\tilde{\varepsilon}_J^c \\ i \sin 2\tilde{\varepsilon}_J^c & \cos 2\tilde{\varepsilon}_J^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\tilde{\delta}_{LJ}^c} & 0 \\ 0 & e^{i\tilde{\delta}_{LJ}^c} \end{pmatrix}$ in Stapp-Ypsilantis-Metropolis-Parametrisierung [16] (mit $L = J - 1$ , $L' = J + 1$ )
$\delta_{LJ}^c, \varepsilon_J^c$	Kern-Eigenphasen und Mischungsparameter definiert in [15], bezüglich Coulombfunktionen
$\tilde{\delta}_{LJ}^c, \tilde{\varepsilon}_J^c$	Kern-Barphasen und Mischungsparameter def. in [16], bezüglich Coulombfunktionen Im ungekoppelten Fall ( $\tilde{\varepsilon}_J^c = \varepsilon_J^c \equiv 0$ ) sind Eigen- und Barphasen gleich.
$\delta_{LJ}^E, \varepsilon_J^E, \tilde{\delta}_{LJ}^E, \tilde{\varepsilon}_J^E$	Definitionen wie oben, aber bezüglich elektrischer Funktionen [17]; wenn kein oberer Index an den Phasen steht, ist die betreffende Aussage immer für beide Fälle gültig.
$\mathfrak{R}^{-1} = i(\mathfrak{S} + 1) \times (\mathfrak{S} - 1)^{-1}$	reelle, symmetrische Matrix
$(JM \mid LM_L, SM_s)$	Clebsch-Gordan-Koeffizient

Falls nicht ausdrücklich anders bezeichnet, benutzen wir für numerische Angaben folgende Einheiten:

- Winkel im Schwerpunktssystem in Grad
- Energien als Laborenergien in MeV
- ER-Parameter in Potenzen von  $fm$

In unseren numerischen Ergebnissen geben wir nur signifikante Stellen an.

Spezielle Funktionen (def. wie in [18]):

$F_L(\eta, \kappa r)$	reguläre Coulombfunktion
$G_L(\eta, \kappa r)$	irreguläre Coulombfunktion
$I_n(r), K_n(r)$	modifizierte Besselfunktionen

$$\tilde{I}_n(r) := n! \alpha^{-n/2} r^{1/2} I_n(2(\alpha r)^{1/2})$$

$$\tilde{K}_n(r) := \frac{2}{(n-1)!} \alpha^{n/2} r^{1/2} K_n(2(\alpha r)^{1/2})$$

$$C_0^2(\eta) = 2\pi\eta(e^{2\pi\eta} - 1)^{-1}$$

$$C_L(\eta) = \frac{(L^2 + \eta^2)^{1/2}}{L(2L+1)} C_{L-1}(\eta)$$

$\psi(z)$  = logarithmische Ableitung der  $\Gamma$ -Funktion

## 2.2. Herleitung für die $\mathfrak{R}^{-1}$ -Matrixelemente

Im folgenden wird die ER-Entwicklung für gekoppelte Kanäle unter Einschluss des Coulombpotentials in heuristischer Weise hergeleitet. Eine mathematisch befriedigendere Herleitung bestünde z.B. in der Erweiterung der Methoden von [19] auf den Fall gekoppelter Kanäle.

Der Einfachheit halber nehmen wir im folgenden immer an, dass ein lokales kurzreichweitiges Kernpotential  $\tilde{V}(\tilde{x})$  vorliegt (siehe jedoch Anhang A2), welches für  $r > r_0$  verschwindet.

Wir gehen aus von der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung für die Relativbewegung zweier Protonen in der Ortsdarstellung

$$(\Delta + k^2 - M_p(\tilde{V}(\tilde{x}) + V_{\text{COUL}}(x)))\Psi = 0$$

Die Triplet-Wellenfunktion  $S = 1$  entwickeln wir wie üblich in Drehimpulseigenfunktionen  $\mathfrak{Y}_{JMLS}$

$$\begin{aligned} (M_s = M): \Psi^{\text{Tripl}} &= \varphi(x) \chi_1^M \\ &= \frac{1}{k} \sum_J \sum_{L=J-1}^{J+1} (4\pi(2L+1))^{1/2} i^L \frac{\tilde{u}_{JL1}(x)}{x} \mathfrak{Y}_{JML1}(JM \mid L0, 1M) \end{aligned}$$

Gehen wir mit diesem Ansatz in die Schrödinger-Gleichung ein (bzgl. Einzelheiten siehe [20]), erhalten wir unter Ausnutzung der Orthogonalitätsrelationen für die  $\mathfrak{Y}_{JMLS}$  im Falle  $L = J$  die übliche ungekoppelte Radialgleichung für  $\tilde{u}(x)$  (wie auch im Singlett-Fall). Der Tensoroperator im Kernpotential  $\tilde{V}(\tilde{x})$  ist jedoch im Unterraum der Drehimpulseigenfunktionen zu festem  $J$  und  $L = J-1, J, J+1$  nicht diagonal, sondern koppelt die beiden Differentialgleichungen für  $\tilde{u}_{JL1}$  und  $\tilde{u}_{JL'1}$  (wobei  $L = J-1, L' = J+1$ ). Mit den neuen Radialfunktionen

$$u_{JL1}(x) := (2L+1)^{1/2} i^L (JM \mid L0, 1M) \tilde{u}_{JL1}(x)$$

und nach Einführung dimensionsloser Koordinaten ( $u(r) := u(rM_p^{-1})$ ) erhalten wir dann für festes  $J$  und  $S = 1$  (die Indices  $J$  und  $S$  werden im folgenden unterdrückt):

$$D_\kappa \begin{pmatrix} u_L(r) \\ u_{L'}(r) \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

mit:  $D_\kappa := (\partial_r^2 + \kappa^2) \mathbb{1} + P$

$$P := -\frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} L(L+1) & 0 \\ 0 & L'(L'+1) \end{pmatrix} - \frac{\alpha}{r} \mathbb{1} + \begin{pmatrix} V_L(r) & V_{L'L}(r) \\ V_{LL'}(r) & V_{L'}(r) \end{pmatrix}$$

$$P =: P^{(0)} + V(r)$$

$$L = J - 1$$

$$L' = J + 1$$

$V(r)$  ist die Matrix des effektiven Kernpotentials (explizite Form für das Paris-Potential siehe Anhang A2). Je 2 linear unabhängige Spaltenlösungen  $u^{(1)}$  und  $u^{(2)}$  von (1) fassen wir zu einer Lösungsmatrix

$$\mathfrak{U}(r) := \begin{pmatrix} u_L^{(1)}(r) & u_L^{(2)}(r) \\ u_{L'}^{(1)}(r) & u_{L'}^{(2)}(r) \end{pmatrix}$$

zusammen. Solche Lösungsmatrizen haben offensichtlich folgende Eigenschaft: Multipliziert man sie von rechts mit einer beliebigen nichtsingulären Matrix, ergibt sich wieder eine Lösungsmatrix von (1).

Von nun ab sei  $\mathfrak{U}(r)$  diejenige reguläre Lösungsmatrix von (1), für welche gilt:

$$\mathfrak{U}(r) = X(r) \text{ falls } r > r_0 \\ \text{mit } X(r) := (F(r)\mathfrak{A}^{-1} + G(r))\mathfrak{M}$$

Die reelle symmetrische Matrix  $\mathfrak{A}^{-1}$  hängt in der angegebenen Weise (Abschn. 2.1) mit der unitären symmetrischen Matrix  $\mathfrak{S}$  zusammen (beide hängen natürlich von  $\kappa$  ab).

$$\text{Die Wahl } \mathfrak{M} := \begin{pmatrix} (2L+1)C_L(\eta)\kappa^L & 0 \\ 0 & (2L'+1)C_{L'}(\eta)\kappa^{L'} \end{pmatrix}$$

bedeutet eine bequeme Normierung der Lösung.

$$F(r) := \begin{pmatrix} F_L(\eta, \kappa r) & 0 \\ 0 & F_{L'}(\eta, \kappa r) \end{pmatrix}$$

$$G(r) := \begin{pmatrix} G_L(\eta, \kappa r) & 0 \\ 0 & G_{L'}(\eta, \kappa r) \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{V}(r)$  sei diejenige reguläre Lösungsmatrix von (1) für  $\kappa = 0$ , für welche gilt:

$$\mathfrak{V}(r) = Y(r) \text{ falls } r > r_0$$

$$\text{mit } Y(r) := I(r)\mathfrak{A} + K(r)$$

$\mathfrak{A}$  ist eine konstante Matrix; es gilt:

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} X = Y$$

$$I(r) := \begin{pmatrix} \tilde{I}_{2L+1}(r) & 0 \\ 0 & \tilde{I}_{2L'+1}(r) \end{pmatrix}$$

$$K(r) := \begin{pmatrix} \tilde{K}_{2L+1}(r) & 0 \\ 0 & \tilde{K}_{2L'+1}(r) \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \left\{ F(r) \begin{pmatrix} C_L^{-1} \cdot \kappa^{-(L+1)} & 0 \\ 0 & C_{L'}^{-1} \cdot \kappa^{-(L'+1)} \end{pmatrix} \right\} = I(r)$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} (G(r)\mathfrak{M}) = K(r)$$

Wir betrachten nun zwei Lösungen  $\mathfrak{U}(r), \mathfrak{V}(r)$  von (1) zu verschiedenen  $\kappa_1, \kappa_2$  (vorerst nicht notwendig  $\kappa_2 = 0$ ):

$$D_{\kappa_1} \mathfrak{U} = 0$$

$$D_{\kappa_2} \mathfrak{V} = 0$$

$$\Rightarrow \mathfrak{V}^T D_{\kappa_1} \mathfrak{U} - (D_{\kappa_2} \mathfrak{V})^T \mathfrak{U} = 0 \\ = \mathfrak{V}^T (\mathfrak{U}'' + \kappa_1^2 \mathfrak{U} + P \mathfrak{U}) - ((\mathfrak{V}'')^T + \kappa_2^2 \mathfrak{V}^T + \mathfrak{V}^T P^T) \mathfrak{U}$$

oder, weil  $P$  symmetrisch ist:

$$\mathfrak{V}^T \mathfrak{U}'' - (\mathfrak{V}'')^T \mathfrak{U} = (\kappa_2^2 - \kappa_1^2) \mathfrak{V}^T \mathfrak{U}$$

integriert:

$$[\mathfrak{V}^T \mathfrak{U}' - (\mathfrak{V}^T)' \mathfrak{U}]_{r_a}^{r_b} = (\kappa_2^2 - \kappa_1^2) \int_{r_a}^{r_b} \mathfrak{V}^T \mathfrak{U} dr \quad (2)$$

Wir subtrahieren von (2) eine zu (2) analoge Gleichung für  $Y^T$  und  $X$ ; mit:

$$\begin{aligned} r_b \rightarrow \infty & \quad \mathfrak{U} = X \\ r_a \rightarrow 0 & \quad \mathfrak{V} = Y \\ \kappa_2 = 0 & \quad \mathfrak{U}(0) = \mathfrak{V}(0) = 0 \\ \kappa_1 = \kappa & \end{aligned} \quad \text{für } r > r_0$$

folgt dann:

$$\lim_{r \rightarrow 0} ((Y^T X' - (Y^T)' X) - \kappa^2 \int_r^\infty (Y^T X - \mathfrak{V}^T \mathfrak{U}) dr') = 0 \quad (3)$$

Aus (3) kann man direkt die ER-Entwicklung für die  $\mathfrak{A}^{-1}$ -Matrix gewinnen: Auf das Integral lässt sich Bethes Argument [8] anwenden: Innerhalb der Reichweite des Potentials (nur dort ist der Integrand von Null verschieden) hängen die Wellenfunktionen nur schwach von der Stossenergie ab, da hier  $\kappa^2$  viel kleiner als  $V(r)$  ist. Wir können das Integral also als rasch konvergierende Potenzreihe in  $\kappa^2$  mit konstantem erstem Term schreiben. Die Wronski-Determinante  $\lim_{r \rightarrow 0} (Y^T X' - (Y^T)' X)$  haben wir mit  $L = 1$ ,  $L' = 3$  durch Einsetzen der Entwicklungen für Coulomb- und Besselfunktionen [18] explizit ausgerechnet. Die asymptotischen Funktionen  $Y, X$  sind zwar bei  $r = 0$  nicht regulär, aber die divergenten Terme in (3) heben sich in allen Fällen weg. Nach längerer Rechnung erhalten wir dann für (3)

$$3^2 \kappa^3 C_1^2(\eta) (\mathfrak{A}_1^{-1} + 2\eta C_0^{-2}(\eta) \tilde{h}_1(\eta)) - 3\mathfrak{A}_1 + \frac{-\alpha^3}{4} \log \alpha + \alpha \kappa^2 \left( 2\gamma - \frac{3}{4} \right) = \kappa^2 B_1 \quad (3a)$$

$$7^2 \kappa^7 C_3^2(\eta) (\mathfrak{A}_3^{-1} + 2\eta C_0^{-2}(\eta) \tilde{h}_3(\eta)) - 7\mathfrak{A}_3 - \frac{\alpha^7}{(6!)^2} \log \alpha + \alpha^5 \kappa^2 n_1 + \alpha^3 \kappa^4 n_2 + \alpha \kappa^6 n_3 = \kappa^2 B_3 \quad (3b)$$

$$3 \cdot 7 \kappa^5 C_1(\eta) C_3(\eta) \mathfrak{A}_{13}^{-1} - 3\mathfrak{A}_{13} = \kappa^2 B_{31} \quad (3c)$$

$$3 \cdot 7 \kappa^5 C_1(\eta) C_3(\eta) \mathfrak{A}_{13}^{-1} - 7\mathfrak{A}_{31} = \kappa^2 B_{13} \quad (3d)$$

mit den Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^{-1} &= : \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_L^{-1} & \mathfrak{A}_{LL'}^{-1} \\ \mathfrak{A}_{LL'}^{-1} & \mathfrak{A}_{L'}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A} = : \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_L & \mathfrak{A}_{LL'} \\ \mathfrak{A}_{L'L} & \mathfrak{A}_{L'} \end{pmatrix} \\ B &= : \begin{pmatrix} B_L & B_{LL'} \\ B_{L'L} & B_{L'} \end{pmatrix} := \lim_{r \rightarrow 0} \left( \int_r^\infty (Y^T X - \mathfrak{V}^T \mathfrak{U}) dr' - \tilde{B}(r) \right) \\ \tilde{B}(r) &= : \begin{pmatrix} \tilde{B}_L(r) & \tilde{B}_{LL'}(r) \\ \tilde{B}_{L'L}(r) & \tilde{B}_{L'}(r) \end{pmatrix} \\ \tilde{B}_{13}(r) &= \tilde{B}_{31}(r) = 0 \end{aligned}$$

$$\tilde{B}_1(r) = (3C_1(\eta)\kappa)^{-1}(r^{-1} + \alpha \log r)$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}_3(r) = & (7C_3(\eta)\kappa^2)^{-1}(r^{-5}\kappa^{-1}\frac{1}{5} + r^{-4}[-\frac{1}{6}\eta] \\ & + r^{-3}\kappa\frac{1}{15}[\frac{11}{9}\eta^2 + \frac{1}{2}] - r^{-2}\kappa^2\frac{1}{15}[\frac{1}{2}\eta^3 + \frac{7}{12}\eta] \\ & + r^{-1}\kappa^3\frac{1}{30}[\frac{7}{15}\eta^4 + \frac{31}{30}\eta^2 + \frac{1}{4}] \\ & + (\log r)\kappa^4\frac{1}{225}[\frac{7}{9}\eta^5 + \frac{49}{18}\eta^3 + 2\eta])\end{aligned}$$

$$n_1 = \frac{8}{(6!)^2} \left( 7 \left[ 2\gamma - \sum_{s=1}^6 s^{-1} \right] - \frac{433}{5!} \right) \simeq -2.0 \cdot 10^{-4}$$

$$n_2 = \frac{112}{(6!)^2} \left( 7 \left[ 2\gamma - \sum_{s=1}^6 s^{-1} \right] + \frac{1721}{7 \cdot 5!} \right) \simeq -1.5 \cdot 10^{-3}$$

$$n_3 = \frac{128}{(6!)^2} \left( 18 \left[ 2\gamma - \sum_{s=1}^6 s^{-1} \right] + \frac{453}{16} \right) \simeq 1.2 \cdot 10^{-3}$$

$$\tilde{h}_L(\eta) := \operatorname{Re}(\psi(1+i\eta)) + \log(2\kappa) + \frac{\tilde{r}_L(\eta)}{p_L(\eta)}$$

$\tilde{r}_L(\eta), p_L(\eta)$  endliche Polynome in  $\eta$  (siehe unter Kap. Coulombfunktionen in [18];  $\tilde{r}_L(\eta)$  dort  $r_L(\eta)$ )

Mit  $\lim_{\kappa \rightarrow 0} ((2L+1)^2 \kappa^{2L+1} 2\eta C_L^2 C_0^{-2}) = \alpha^{2L+1} ((2L)!)^{-2}$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \tilde{h}_L(\eta) = \log \alpha$$

folgt aus (3a) bis (3d):

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} (3\kappa^3 C_1^2 \mathfrak{A}_1^{-1}) = \mathfrak{A}_1, \lim_{\kappa \rightarrow 0} (3 \cdot 7\kappa^5 C_1 C_3 \mathfrak{A}_{13}^{-1}) = 3\mathfrak{A}_{13} = 7\mathfrak{A}_{31}$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} (7\kappa^7 C_3^2 \mathfrak{A}_3^{-1}) = \mathfrak{A}_3$$

Dieses letzte Ergebnis ist eine Folge der Forderung  $\lim_{\kappa \rightarrow 0} X = Y$ . Die Existenz der Matrix  $\mathfrak{A}$  ist äquivalent zur Existenz der Streulänge in der ungekoppelten Theorie.

Da  $\mathfrak{A}^{-1}$  symmetrisch ist, muss gelten  $\mathfrak{A}_{13} : \mathfrak{A}_{31} = 7 : 3$ , und daher gilt mit (3c), (3d)  $B_{13} = B_{31}$ . Die nichtdiagonalen Elemente von  $\mathfrak{A}$  verschwinden im allgemeinen nicht, wie wir in Abschnitt 3 noch explizit sehen werden.

Schreiben wir  $B$  als Potenzreihe in  $\kappa^2$  und fassen die Terme geeignet zusammen, so ist (3a) bis (3d) schon die gewünschte ER-Entwicklung für  $\mathfrak{A}^{-1}$  mit phänomenologischen Koeffizienten. Die Definition sämtlicher Funktionen und Hilfsfunktionen ist so gewählt, dass der Übergang  $\alpha \rightarrow 0$  direkt gemacht werden kann und die übliche ER-Entwicklung für den neutralen Fall liefert [11]. Für die ER-Funktion im ungekoppelten geladenen Fall ist aber eine etwas andere Definition als die durch (3a), (3b) gegebene ( $\cot \delta_{LJ}^c \leftrightarrow \mathfrak{A}_L^{-1}$ ) üblich. Um daran Anschluss zu gewinnen, ziehen wir in (3a), (3b) zusätzlich alles, was sich als rasch konvergierende Potenzreihe in  $\kappa^2$  entwickeln lässt, auf die rechte Seite. Durch Entwickeln von  $(2L+1)^2 \kappa^{2L+1} 2\eta C_L^2 C_0^{-2} \tilde{r}_L(\eta) p_L^{-1}(\eta)$  verlieren wir allerdings dabei die

Möglichkeit, den Limes  $\alpha \rightarrow 0$  in den diagonalen Gleichungen zu machen. Wir erhalten dann schliesslich (in Potenzen von  $fm$ ), geschrieben für allgemeine  $L$ :

$$\begin{aligned} Q_L(\mathfrak{R}_L^{-1}) &:= ((2L+1)!)^2 k^{2L+1} C_L^2(\eta) (\mathfrak{R}_L^{-1} + 2\eta C_0^{-2}(\eta) h(\eta)) \\ &= -\frac{1}{a_L^c} + \frac{r_L^c}{2} k^2 + \dots \quad (4a) \end{aligned}$$

$Q_{L'}$  analog

$$\begin{aligned} Q_{LL'}(\mathfrak{R}_{LL'}^{-1}) &:= (2L+1)!! (2L'+1)!! k^{L+L'+1} C_L(\eta) C_{L'}(\eta) \mathfrak{R}_{LL'}^{-1} \\ &= -\frac{1}{\beta_{LL'}^c} + \frac{\rho_{LL'}^c}{2} k^2 + \dots \quad (4b) \end{aligned}$$

für festes  $J$  (als Index überall unterdrückt), wobei

$$L = J-1, L' = J+1$$

$$h(\eta) = \operatorname{Re}(\psi(1+i\eta)) - \log \eta, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} h(\eta) = 0,$$

mit phänomenologischen Koeffizienten  $a_L^c, r_L^c, \beta_{LL'}^c, \rho_{LL'}^c$ . (4a) reproduziert das Ergebnis von [12] und gleicht formal der in der Literatur üblichen ungekoppelten Entwicklung ([21], [22]), wenn man  $\mathfrak{R}_L^{-1}$  durch  $\cot \delta_{LJ}^c$  ersetzt. – Für den numerischen Gebrauch im Energiebereich  $< 3 \text{ MeV}$  sind die durch (3a) bis (3d) und (4) gegebenen Entwicklungen gleichwertig; im folgenden beziehen wir uns immer auf (4).

### 3. Bornsche Näherung und Parametrisierungen

#### 3.1. Bornsche Näherung im Kernpotential für die verallgemeinerten Streulängen

Wir gehen aus von dem bekannten Ausdruck für die  $\mathfrak{R}$ -Matrix in Bornscher Näherung (siehe Anhang A1):

$$\mathfrak{R}_L = \kappa^{-1} \int_0^\infty F_L^2(\kappa r) V_L(r) dr =: \kappa^{-1} f_L$$

für die diagonalen Elemente und:

$$\mathfrak{R}_{LL'} = \kappa^{-1} \int_0^\infty F_L(\kappa r) F_{L'}(\kappa r) V_{LL'}(r) dr =: \kappa^{-1} f_{LL'}$$

für die nichtdiagonalen. Es folgt:

$$\mathfrak{R}^{-1} = \frac{\kappa}{f_L f_{L'} - f_{LL'}^2} \begin{pmatrix} f_{L'} & -f_{LL'} \\ -f_{LL'} & f_L \end{pmatrix}$$

Aus (4) lassen sich jetzt im Limes  $\kappa \rightarrow 0$  die “Streulängen” berechnen. Wir erhalten nach einigen trivialen Zwischenschritten:

$$-\frac{1}{a_L^c} = ((2L+1)!)^2 M_p^{(2L+1)} \frac{N_{L'}}{N_L N_{L'} - N_{LL'}^2} \quad (5a)$$

$$-\frac{1}{a_{L'}^c} = ((2L'+1)! !)^2 M_p^{(2L'+1)} \frac{N_L}{N_L N_{L'} - N_{LL'}^2} \quad (5b)$$

$$-\frac{1}{\beta_{LL'}^c} = (2L+1)! ! (2L'+1)! ! M_p^{(L+L'+1)} \cdot \frac{-N_{LL'}}{N_L N_{L'} - N_{LL'}^2} \quad (5c)$$

$$\text{mit: } N_L := \int_0^\infty (\tilde{I}_{2L+1}(r))^2 V_L(r) dr$$

$$N_{LL'} := \int_0^\infty \tilde{I}_{2L+1}(r) \tilde{I}_{2L'+1}(r) V_{LL'}(r) dr$$

$$\tilde{I}_3(r) = r^2(1 + \frac{1}{4}\alpha r + \frac{1}{40}\alpha^2 r^2 + \dots)$$

$$\tilde{I}_7(r) = r^4(1 + O(\alpha))$$

### 3.2 Phasen und Mischungsparameter

Es ist üblich,  $\mathfrak{S}$ - und  $\mathfrak{R}$ -Matrixelemente (und damit Wirkungsquerschnitte) durch die reellen Streuphasen und Mischungsparameter auszudrücken. Eine gebräuchliche Parametrisierung ist die durch Eigenphasen  $\delta_{LJ}^c$  und Mischungsparameter  $\varepsilon_J^c$  [15]. Im folgenden wollen wir einige Bemerkungen über das niederenergetische Verhalten dieser Parameter machen. Die  $\mathfrak{R}^{-1}$ -Matrix wird:

$$\mathfrak{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos^2 \varepsilon_J^c \cot \delta_{LJ}^c + \sin^2 \varepsilon_J^c \cot \delta_{L'J}^c & \frac{1}{2} \sin 2\varepsilon_J^c (\cot \delta_{LJ}^c - \cot \delta_{L'J}^c) \\ \frac{1}{2} \sin 2\varepsilon_J^c (\cot \delta_{LJ}^c - \cot \delta_{L'J}^c) & \cos^2 \varepsilon_J^c \cot \delta_{L'J}^c + \sin^2 \varepsilon_J^c \cot \delta_{LJ}^c \end{pmatrix}$$

$$L = J - 1, \quad L' = J + 1$$

Es folgt mit (4):

$$\begin{aligned} \cot \delta_{L'J}^c &= \sum_L + \sum_{L'} - 2\eta C_0^{-2}(\eta) h(\eta) \\ &\pm \left( \left( \sum_L - \sum_{L'} \right)^2 + \left( \sum_{LL'} \right)^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\sin 2\varepsilon_J^c = \sum_{LL'} \left( \left( \sum_L - \sum_{L'} \right)^2 + \left( \sum_{LL'} \right)^2 \right)^{-1/2}$$

mit den Abkürzungen:

$$\sum_L := \left( -\frac{1}{a_L^c} + \frac{r_L^c}{2} k^2 + \dots \right) (2((2L+1)! !)^2 k^{2L+1} C_L^2(\eta))^{-1}$$

$$\sum_{L'} \text{analog}$$

$$\sum_{LL'} = \left( -\frac{1}{\beta_{LL'}^c} + \frac{\rho_{LL'}^c}{2} k^2 + \dots \right) ((2L+1)! ! (2L'+1)! ! k^{L+L'+1} C_L(\eta) C_{L'}(\eta))^{-1}$$

Im Limes  $k \rightarrow 0$  führt (6) (bis auf höhere Ordnungen in  $\alpha$ ) zu:

$$\lim_{k \rightarrow 0} (C_L^2 k^{2L+1} \cot \delta_{LJ}^c) = ((2L+1)! !)^{-2} \left( -\frac{1}{a_L^c} + \frac{a_{L'}^c}{(\beta_{LL'}^c)^2} \right) \quad (7a)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} (C_{L'}^2 k^{2L'+1} \cot \delta_{L'J}^c) = ((2L'+1)! !)^{-2} \left( -\frac{1}{a_{L'}^c} \right) \quad (7b)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \epsilon_J^c = -\frac{\alpha^2 M_p^2}{24} \frac{a_{L'}^c}{\beta_{LL'}^c} \quad (7c)$$

(Der Index  $J$  ist an den ER-Parametern immer unterdrückt.) Mit den aus dem Paris-Potential [6] berechneten Werten (siehe Abschn. 4):  $a_1^c = 3.35 \text{ fm}^3$ ,  $a_3^c = 19.6 \text{ fm}^7$ ,  $\beta_{13}^c = 2.31 \text{ fm}^5$  ergibt sich

$$\lim_{k \rightarrow 0} \epsilon_2^c = -0.0244^0 \quad (8)$$

Zum Vergleich sei hier erwähnt, dass für  $J=2$  das Ein-Pion-Austausch (OPE)-Potential zu einer denkbar schlechten Bornschen Näherung für die Streulängenführt. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_0^\infty r^4 V_1(r) dr + \frac{\alpha}{2} \int_0^\infty r^5 V_1(r) dr + O(\alpha^2) \\ N_{13} &= \int_0^\infty r^6 V_{13}(r) dr + O(\alpha) \end{aligned}$$

wobei  $\int_0^\infty r^4 V_1^{\text{OPE}}(r) dr \equiv 0$ . Es folgt damit in Bornscher Näherung nach (5) und (7c) z.B. für  $\epsilon_2^c$ :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \epsilon_2^c, \text{OPE} &= \frac{3!}{7!} \alpha^2 \frac{N_{13}^{\text{OPE}}}{N_1^{\text{OPE}}} \\ &= \frac{6^{1/2}}{8} \alpha \frac{M_p}{m_\pi} \text{ in niedrigster Ordnung in } \alpha \\ &\simeq 0.89^0 \text{ mit } m_\pi = 0.684 \text{ fm}^{-1} \end{aligned}$$

Gleichung (7c) zeigt,<sup>1)</sup> dass die Forderung in [15]  $\lim_{k \rightarrow 0} \epsilon_J^c = 0$ , die erst die Zuordnung der Eigenphasen zu Bahndrehimpulsen eindeutig macht, im Coulomb-Fall nicht erfüllt ist. Die Gleichungen (7) sind ein weiteres Argument für die verbreitete Verwendung der Barphasen-Parametrisierung [16] der  $\mathfrak{S}$ -Matrix in der Nukleon-Nukleon-Streuphysik (vgl. auch [16] und [24]): Während die  $\delta_{LJ}^c$  für  $k \rightarrow 0$  exponentiell gegen Null gehen ( $C_L^2$  proportional  $(e^{2\pi n} - 1)^{-1}$ ), geht  $\epsilon_J^c$  gegen eine Konstante, obwohl das nichtdiagonale  $\mathfrak{S}$ -Matrixelement auch exponentiell verschwindet.  $\epsilon_J^c$  ist also ein schlechtes Mass für die Mischung der Zustände. Ausserdem ist die Näherung für das diagonale Matrixelement  $\mathfrak{S}_L \simeq 2i\delta_{LJ}^c + 1$  wegen der Zumischung der anderen Eigenphase auch bei kleiner Energie relativ schlecht. Anders dagegen in der Barphasen-Parametrisierung: Aus den

<sup>1)</sup> Schon der Arbeit [23] kann man entnehmen, dass  $\lim_{k \rightarrow 0} \epsilon_J^c = \text{const.}$  (ohne Angabe der Grössenordnung).

## Umrechnungsformeln

$$\frac{\tan 2\bar{\epsilon}_J^c}{\tan 2\epsilon_J^c} = \sin(\bar{\delta}_{LJ}^c - \bar{\delta}_{L'J}^c)$$

$$\frac{\sin 2\bar{\epsilon}_J^c}{\sin 2\epsilon_J^c} = \sin(\delta_{LJ}^c - \delta_{L'J}^c)$$

$$\delta_{LJ}^c + \delta_{L'J}^c = \bar{\delta}_{LJ}^c + \bar{\delta}_{L'J}^c$$

und (7) sehen wir sofort, dass hier sowohl  $\bar{\delta}_{LJ}^c$  wie  $\bar{\epsilon}_J^c$  exponentiell gegen Null gehen für  $k \rightarrow 0$ . Damit ist  $\mathcal{S}_L \approx 2i\bar{\delta}_{LJ}^c + 1$  eine gute Näherung bei kleiner Energie. Wir geben ein numerisches Beispiel mit dem Paris-Potential:  $E_{\text{LAB}} = 3.037 \text{ MeV}$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \cos^2 \epsilon_2^c e^{2i\delta_{12}^c} + \sin^2 \epsilon_2^c e^{2i\delta_{32}^c} \\ &\approx 0.965 e^{2i\delta_{12}^c} + 0.035 e^{2i\delta_{32}^c} \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_1 = \cos 2\bar{\epsilon}_2^c e^{2i\bar{\delta}_{12}^c} \approx 0.9999 e^{2i\bar{\delta}_{12}^c}$$

## 4. Numerische Ergebnisse mit dem Paris-Potential

### 4.1. Allgemeines

Alle unsere Rechnungen wurden mit dem Isospintriplett-Anteil des Paris-Potentials in der parametrisierten Form [6] durchgeführt. Wir berechneten bezüglich Coulombfunktionen die Streuphasen für die ungekoppelten Zustände  $^1S_0$ ,  $^1D_2$ ,  $^3P_0$ ,  $^3P_1$  und die beiden Phasen und den Mischungsparameter für das erste gekoppelte Zustandspaar  $^3P_2$ - $^3F_2$ . Aus dem Niederenergieverhalten der Phasen bzw. des Mischungsparameters wurden dann die durch (4) definierten ER-Parameter bestimmt (im ungekoppelten Fall ist  $Q_L(\cot \delta_{LJ}^c)$  identisch mit der in der Literatur [22] üblichen Definition der ER-Funktion). Für sämtliche Rechnungen verwendeten wir wie die Paris-Gruppe ([6], [25]) das Coulombpotential für punktförmige Protonen und rechneten ohne relativistische Korrekturen. Wir können deshalb unsere Rechnungen direkt mit den Ergebnissen der Paris-Gruppe vergleichen.

Der zentrale Anteil des Paris-Potentials enthält das Quadrat des Impulsoperators. Durch eine einfache Transformation der radialen Wellenfunktion [26] gelangt man aber zu einem effektiven lokalen Potentialoperator (explizit in Anhang A2 für gekoppelte Radialgleichungen durchgeführt). Als Integrationsroutine für die resultierenden effektiven radialen Schrödinger-Gleichungen kann man dann die Numerov-Methode verwenden, ein spezielles Verfahren für Differentialgleichungen der Form  $U''(r) = w(r)U(r)$  mit einem Fehler der Größenordnung (Schrittänge)<sup>6</sup>. Mit dieser Routine war es möglich, die Streuphasen bis zu sehr kleiner Energie auf mindestens drei signifikante Stellen zu berechnen. So konnten alle in den Tabellen I und II angegebenen Parameter in einem Energiebereich ermittelt werden, in dem höhere als lineare Terme in  $k^2$  numerisch keine Rolle spielen. Als typisches Beispiel für unser Vorgehen und die Zweckmässigkeit der ER-Näherung einige Ergebnisse für das nichtdiagonale

Tabelle I

Mit dem Paris-Potential gerechnete ER-Parameter für die gekoppelten Zustände  ${}^3P_2-{}^3F_2$  des Proton-Proton-Systems (in Potenzen von  $fm$ ). Definitionen siehe Gleichungen (4).

$a_1^c$	$r_1^c$	$a_3^c$	$r_3^c$	$\beta_{13}^c$	$\rho_{13}^c$
3.35	-7.60	19.6	-3.04	2.31	-11.8

Matrixelement  $\mathfrak{R}_{13}^{-1}$ : Im Energieintervall  $0.5 \cdot 10^{-4} \text{ MeV} \leq E_{\text{LAB}} \leq 0.5 \text{ MeV}$  wurde an 10 Stellen mit der Numerov-Methode  $\mathfrak{R}_{13}^{-1}$  bestimmt. Die Phasen und  $\mathfrak{R}_{13}^{-1}$  variieren dabei um mehrere Größenordnungen, die durch (4b) definierte ER-Funktion  $Q_{13}(\mathfrak{R}_{13}^{-1})$  ist aber in sehr guter Näherung (Betrag des Korrelationskoeffizienten  $\approx 0.99998$ ) eine Gerade (Fig. I) mit den in Tabelle I angegebenen Parametern. Dies ist eine wirksame Kontrolle der Integrationsroutine bei niedriger Energie. Einen Test bei hoher Energie liefert der Vergleich mit den Ergebnissen der Paris-Gruppe selber: Hier erhalten wir in allen Fällen für  $25 \leq E_{\text{LAB}} \leq 330 \text{ MeV}$  Uebereinstimmung mit den Phasen aus Table III in [6].

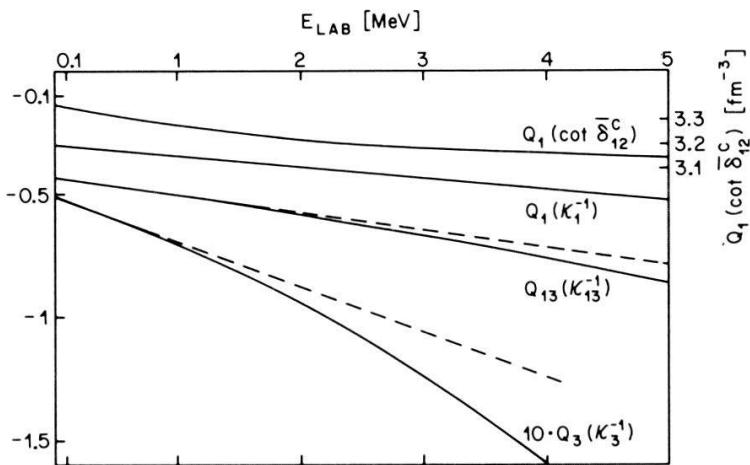
#### 4.2. s-Welle

Aus differentiellen Wirkungsquerschnitten für Proton-Proton-Streuung bei  $E_{\text{LAB}} < 3 \text{ MeV}$  kann man im wesentlichen neben der zentralen Triplettskombination  $\Delta_c = \frac{1}{9}(\delta_{10} + 3\delta_{11} + 5\delta_{12})$  nur die dominierende s-Wellenphase entnehmen. Ueber die s-Welle besitzt man auch schon lange genaue experimentelle Informationen: Die ersten Messungen untersuchen die engere Nachbarschaft des Interferenzminimums (IM) [1] und den Energiebereich  $1.4 \leq E_{\text{LAB}} \leq 3 \text{ MeV}$  [2]. Im IM führt eine destruktive Interferenz bei  $90^\circ$  Schwerpunktswinkel zwischen Coulomb- und Kernamplitude zu einer fast vollständigen Auslöschung des Wirkungsquerschnitts  $\sigma$ . Der grosse Differentialquotient  $\frac{\partial \sigma}{\partial \delta_{00}}$  an dieser Stelle erlaubt eine besonders genaue Festlegung der s-Wellenphase  $\delta_{00}$ . So bestimmen Gursky und Heller [27] aus den Daten [1] die Lage des IM zu  $E_{\text{IM}} = 0.38243 \pm 0.00020 \text{ MeV}$  und geben für diese Energie die elektrische [17] s-Wellenphase  $\delta_{00}^E$  mit  $\delta_{00}^E(0.38243) = 14.611^\circ \pm 0.01^\circ$  an. Noyes et al. ([28] bis [30]) analysieren mit der Wisconsin-Gruppe deren Daten [2] für  $1.4 \leq E_{\text{LAB}} \leq 3 \text{ MeV}$  (die Ergebnisse für  $\delta_{00}^E$  siehe Tabelle III). Gestützt auf diese Daten, die Messung [1] und ein weiteres Experiment bei  $9.918 \text{ MeV}$  werden in [29] für die

Tabelle II

Mit dem Paris-Potential gerechnete ER-Parameter für ungekoppelte Partialwellen des Proton-Proton-Systems (in Potenzen von  $fm$ ). Die Definition der Parameter ist durch (4a) gegeben, wenn man dort  $\mathfrak{R}_L^{-1}$  durch  $\cot \delta_{LJ}^c$  ersetzt.

${}^1S_0$	${}^1D_2$	${}^3P_0$	${}^3P_1$
$a^c$	-7.887	-2.15	-3.32
			2.04
$r^c$	2.805	11.7	3.59
			-7.61



Figur I

Energieabhängigkeit der durch (4) definierten ER-Funktionen (man beachte die verschiedenen Einheiten der linken Ordinate für die gekoppelten Funktionen:  $Q_1$  in  $fm^{-3}$ ,  $Q_{13}$  in  $fm^{-5}$ ,  $Q_3$  in  $fm^{-7}$ ; die rechte Ordinate ist der Massstab für die ungekoppelte ER-Funktion  $Q_1(\cot \delta_{12}^c)$  in  $fm^{-3}$ ). Die durchgezogenen Kurven sind durch Lösen der Schrödinger-Gleichung mit dem Paris-Potential berechnet. Die gestrichelten Geraden sind die ER-Geraden mit den Parametern aus Tabelle I, die durch Anpassung von (4) bei sehr kleiner Energie an die Lösung der Schrödinger-Gleichung gewonnen wurden.  $Q_1(\mathfrak{K}_1^{-1})$  folgt im Gegensatz zu  $Q_1(\cot \delta_{12}^c)$  bis 5 MeV sehr gut der linearen Näherung.

ER-Parameter folgende Werte angegeben:  $a_0^E = -7.8146 \pm 0.0054$ ,  $r_0^E = 2.7950 \pm 0.0080$  (auf Vakuum-Polarisation korrigierte ER-Näherung für  $\delta_{00}^E$  nach [17]; die Fehler sind rein statistisch),  $a_0^c = -7.823 \pm 0.01$ ,  $r_0^c = 2.794 \pm 0.015$  ( $\delta_{00}^c$  ist in [29] durch Anwendung einer modellabhängigen Korrektur [31] aus  $\delta_{00}^E$  berechnet worden; die Fehler schliessen neben den statistischen Fehlern noch die

Tabelle III

Unsere Ergebnisse für die elektrische  $s$ -Wellenphase gerechnet mit dem Paris-Potential im Vergleich mit dem Experiment (Phasenanalysen [29] und [5]). Verwendet sind die experimentellen Daten aus  $\alpha$  - [4],  $\beta$  - [3] und  $\gamma$  - [2]. Wir zitieren aus [5] die multi energy fits der drei Datengruppen; die Fehler, die wir in dieser Spalte angeben, stammen jedoch aus den single energy fits in [5].

$E_{LAB}$ [MeV]	$\delta_{00}^E$ [Grad]		
	Experiment		
$\alpha)$			
0.35009	$13.298 \pm 0.056$	13.42	
0.42006	$16.074 \pm 0.025$	16.22	
0.49923	$18.995 \pm 0.006$	19.17	
0.74996	$26.783 \pm 0.011$	27.00	
0.99183	$32.521 \pm 0.014$	32.76	
$\beta)$			
0.49925	$18.971 \pm 0.025$	19.17	
0.99190	$32.482 \pm 0.014$	32.76	
1.88060	$44.617 \pm 0.016$	44.86	
$\gamma)$			
1.397	$39.3213 \pm 0.028$	$39.307 \pm 0.018$	39.60
1.855	$44.3292 \pm 0.023$	$44.353 \pm 0.017$	44.64
2.425	$48.3553 \pm 0.026$	$48.349 \pm 0.018$	48.61
3.037	$51.0233 \pm 0.040$	$51.029 \pm 0.025$	51.27

Unsicherheiten aus dieser Modellabhängigkeit und zusätzlich die Unsicherheiten in der Pion-Nukleon-Kopplungskonstante (Shape-Korrektur) mit ein).– Naisse [10] benutzt zusätzlich Messungen bis 30 MeV und kommt in Uebereinstimmung mit [29] zu:  $a_0^c = -7.828 \pm 0.008$ ,  $r_0^c = 2.80 \pm 0.02$ . Dabei berücksichtigt er allerdings explizit in seinem Modell die endliche Ausdehnung des Protons ([32], Dipol-Formfaktoren).– Inzwischen haben die sehr präzisen Querschnittsmessungen aus Basel [3] und Zürich [4] zusätzliche Daten unter 2 MeV geliefert. Diese neuen Messungen und die Daten [2] untersucht die Nijmegen-Gruppe in ihrer Phasenanalyse [5] (Tabelle III). Sie kommt zum Schluss, dass insbesondere die Daten [4] eine leichte Änderung der alten, hauptsächlich durch die Daten [2] zustandegekommenen Niederenergieparameter nahelegen. Die Ergebnisse sind:  $a_0^E = -7.8016 \pm 0.0029$ ,  $r_0^E = 2.773 \pm 0.014$ ,  $E_{IM} = 0.38254 \pm 0.00005$ ,  $\delta_{00}^E(0.38254) = 14.608^0 \pm 0.001^0$ . Die Ergebnisse am *IM* stimmen sehr gut mit den älteren Werten aus [27] überein.

Diese experimentellen Werte einerseits und unsere Ergebnisse mit dem Paris-Potential auf der anderen Seite haben wir nun zu vergleichen. Wir erhalten:  $a_0^c = -7.887$  für die Streulänge und  $r_0^c = 2.805$  für den Effective Range. Das Ergebnis für die Streulänge liegt weit ausserhalb der experimentellen Grenzen und ist auch im Widerspruch zu dem von der Paris-Gruppe selbst für ihr Potential angegebenen Wert ( $a_0^c = -7.810$ ,  $r_0^c = 2.797$  [6]). Bei den Phasen  $\delta_{00}^c$  stimmen die Ergebnisse der Paris-Gruppe aber auch bei kleiner Energie bis hinunter zum *IM* mit unseren überein ([25]; unsere Rechnungen und diejenigen der Paris-Gruppe basieren auf der gleichen Fassung des Paris-Potentials [6]). Möglicherweise hat die Paris-Gruppe bei der Bestimmung der ER-Parameter in [6] aus ihrem Potential Phasen bei zu grosser Energie verwendet, wo höhere Terme in  $k^2$  in der ER-Entwicklung nicht mehr vernachlässigt werden können.– Die Diskrepanz zu den experimentellen Werten zeigt sich auch, wenn wir unsere mit dem Paris-Potential errechneten Phasen  $\delta_{00}^c$  mit den Standardmethoden aus [31] und [33] näherungsweise auf die Phasen  $\delta_{00}^E$  umrechnen (Tabelle III, bei  $E_{LAB} = 0.38254$  MeV erhalten wir  $\delta_{00}^E = 14.74^0$ ). Bei der Umrechnung  $\delta_{00}^c \rightarrow \delta_{00}^E$  haben wir allerdings die vom verwendeten Potentialmodell abhängige Foldy-Korrektur [31]  $\Delta_0$  nicht selber mit dem Paris-Potential gerechnet ( $\delta_{00}^E + \tau_0 = \delta_{00}^c + \Delta_0$  mit den Bezeichnungen  $\tau_0$  und  $\Delta_0$  aus [17]).  $\Delta_0$  ist für vier Potentialmodelle schon berechnet worden ( $0.01 \leq E_{LAB} \leq 9.918$  MeV, [31] und [29]). Die vier Werte für  $\Delta_0$  zu einer festen Energie weichen jeweils nur um maximal 6% von ihrem Mittelwert ab. Diese Mittelwerte haben wir (zum Teil musste interpoliert werden) in unserer Umrechnung benutzt. Die 6% Abweichung führen zu einer maximalen Unsicherheit in  $\delta_{00}^E$  von  $\pm 0.01^0$ . Nach Angaben der Paris-Gruppe [25] aber weicht  $\Delta_0$ , mit dem Paris-Potential berechnet, um 60% bis 150% ( $0.38243 \leq E_{LAB} \leq 3.037$  MeV) von den Mittelwerten der schon bekannten Potentialrechnungen ab (die Werte des nicht modellabhängigen  $\tau_0$  sind in keiner Weise strittig). Das führt dazu, dass die Paris-Gruppe mit den  $\delta_{00}^c$ , aus denen sich eine von den experimentellen Zahlen stark verschiedene Streulänge  $a_0^c$  ergibt, durch die Vakuumpolarisations-Korrektur zu Phasen  $\delta_{00}^E$  kommt, die mit dem Experiment ( $E_{LAB} \leq 3$  MeV) ausgezeichnet übereinstimmen [34].– Eine andere Situation bei 9.85 MeV: Hier geben Barker et al. [35] einen neuen experimentellen Wert  $\delta_{00}^E = 55.24^0 \pm 0.15^0$ . Gleichzeitig rechnen sie die Phasen auch mit dem Paris-Potential [6]:  $\delta_{00}^E = 55.19^0$  in völliger Uebereinstimmung mit unserem eigenen Ergebnis. Die Paris-Gruppe selber aber erhält mit ihrem Potential  $\delta_{00}^E = 55.05^0$  [25], und zwar mit genau den gleichen Rechenmethoden wie in [34].

Tabelle IV  
Differentielle Wirkungsquerschnitte für Proton-Proton-Streuung in der Nähe des Interferenzminimums.

$\theta_{\text{LAB}}[\text{Grad}]$	$\sigma[\text{mb}]$ bei $E_{\text{LAB}} = 400.04 \text{ keV}$		
	Paris-Potential	Experiment [4]	Paris-Potential mit korrigierter s-Welle
29.200	228	$228.9 \pm 0.7$	229
42.512	4.76	$4.468 \pm 0.08$	4.56
45.012	1.76	$1.564 \pm 0.01$	1.55
47.512	4.83	$4.655 \pm 0.08$	4.64

Wie schon erwähnt, erscheinen in der Nähe des IM kleine Änderungen der s-Phase vergrössert im Wirkungsquerschnitt. Ein Beispiel dafür gibt Tabelle IV: Hier wird eine differentielle Querschnittsmessung aus [4] bei  $E_{\text{LAB}} = 0.40004 \text{ MeV}$  mit der Vorhersage unserer Rechnung mit dem Paris-Potential verglichen (in den Streuamplituden sind alle oben erwähnten Partialwellen berücksichtigt worden; unsere Formeln für die Amplituden haben wir an [36] kontrolliert; die Korrekturen auf Vakuum-Polarisation wurden wieder nach [31] und [33] vorgenommen). In der letzten Spalte stehen die Querschnitte, die wir erhalten, wenn wir in den Amplituden die s-Phase des Paris-Potentials durch eine der Phasenanalyse [5] angepasste s-Phase ersetzen, die höheren Phasen aber nach wie vor mit dem Paris-Potential berechnen. Wie man sieht, führt die s-Wellenphase des Paris-Potentials zu Abweichungen vom Experiment in der Größenordnung von maximal 10 %.-

Offensichtlich ([6], [25]) rechnet die Paris-Gruppe alle ihre Phasen mit dem gewöhnlichen Coulombpotential für punktförmige Protonen und verfuhr bei der Anpassung der Potential-Parameter ebenso. Die oben erwähnten Phasenanalysen verwenden aber in ihren Modellen von Fall zu Fall unterschiedliche Korrekturen zum gewöhnlichen Coulombpotential. Bei der Reduktion einer relativistischen 1-Photonaustausch-Amplitude mit Proton-Formfaktoren auf ein nichtrelativistisches Potential, das man in einer Schrödinger-Gleichung verwenden kann, ergeben sich neben dem Coulombpotential eine Reihe von Korrekturtermen, welche wir in zwei Gruppen einteilen können: Die erste enthält impulsabhängige Terme. Diese berücksichtigt man näherungsweise [32], indem man in der nichtrelativistischen Schrödinger-Gleichung und in der gewöhnlichen Coulombamplitude das nichtrelativistische  $\eta$  durch das relativistische ( $\eta^{\text{relat.}} = e^2/v$ , wobei  $v$  die relativistisch aus der Laborenergie berechnete Geschwindigkeit des einfallenden Protons im Laborsystem ist) ersetzt. Diese Korrektur wenden alle oben zitierten Phasenanalysen an ([10] und [5] behandeln dieses Problem noch ausführlicher). In [27] wird jedoch anhand der Daten [1] gezeigt, dass der Einfluss auf die Phasen bei kleiner Energie gering bleibt: Der oben zitierte Wert  $\delta_{00}^E(0.38243) = 14.611^\circ \pm 0.01^\circ$  ist mit relativistischem  $\eta$  bestimmt; mit nichtrelativistischem  $\eta$  erhalten die Autoren  $\delta_{00}^E = 14.606^\circ$ . Trotzdem haben wir zur Kontrolle die radiale Schrödinger-Gleichung für die s-Welle mit dem Paris-Potential für einige Energien auch mit relativistischem  $\eta$  gelöst. Bei 1 MeV ergibt sich z.B.  $\delta_{00}^c = 33.04^\circ$  mit relativistischem  $\eta$ , dagegen  $\delta_{00}^c = 33.05^\circ$  mit nichtrelativistischem  $\eta$ . Mit dieser Korrektur lässt sich also die hier diskutierte Diskrepanz zwischen den Experimenten und unserer Rechnung mit dem Paris-

Potential nicht erklären.– Die zweite Gruppe der oben erwähnten Korrekturterme ist lokal. Sie bewirkt (aufgrund der Formfaktoren) die Regularisierung des Coulombpotentials bei  $r=0$  und seine Modifizierung im Bereich sehr kleiner Nukleonenabstände ( $r < 2 \text{ fm}$ ). Wegen dieser Kurzreichweite und wohl um zu vermeiden, modellabhängige Größen wie Formfaktoren in die Rechnungen einführen zu müssen, haben alle oben erwähnten Phasenanalysen (ausser [10]) die endliche Ausdehnung des Protons nicht explizit berücksichtigt. Damit wird quasi der kurzreichweite Teil der elektromagnetischen Wechselwirkung per definitionem in die hadronische  $s$ -Welle gesteckt. Da die Paris-Gruppe bei der Anpassung ihres Potentials (d.h. des soft core) offensichtlich ebenfalls keine Formfaktoren berücksichtigt, “enthalten” die an experimentelle Phasen angepassten Kern-Parameter diesen elektromagnetischen Anteil. Korrektur der Phasenrechnungen mit dem Paris-Potential auf endliche Ausdehnung des Protons hiesse also, diesen Effekt doppelt zu zählen. Es ist aber trotzdem von Interesse zu wissen, wieviel etwa von den ER-Parametern  $a_0^c$ ,  $r_0^c$ , die man aus dem Paris-Potential errechnet, “auf das Konto der elektromagnetischen Formfaktoren geht”. Um dies zu testen, verfuhren wir folgendermassen: In [32] werden für verschiedene experimentell gefundene Formfaktoren explizit die Korrekturterme zum gewöhnlichen Coulombpotential angegeben, genähert durch eine Funktion  $S(r)$ . Das korrigierte elektromagnetische Potential lautet dann  $\frac{e^2}{r}(1 + S(r))$ . Für

zwei der in [32] vorgeschlagenen  $S(r)$ , nämlich derjenigen für Dipol-Formfaktoren und der für Formfaktoren nach Fried und Gaisser (siehe Literaturangaben in [32]) haben wir die Schrödinger-Gleichung für die  $s$ -Welle mit dem Paris-Potential und  $\frac{e^2}{r}(1 + S(r))$  statt mit  $\frac{e^2}{r}$  gelöst. Wir geben aber hier nicht

die Absolutwerte der so errechneten Phasen oder ER-Parameter an, weil diese ja aus oben erläuterten Gründen die Strukturkorrektur zweimal “enthalten”, sondern nur prozentuale Abweichungen von unseren Standard-Ergebnissen mit dem gewöhnlichen Coulombpotential: Die Streulänge  $a_0^c = -7.887$  veränderte sich mit den Dipol-Formfaktoren um 0.27%, mit den Formfaktoren nach Fried/Gaisser um 0.55% (d.h.  $a_0^c$  wurde kleiner);  $r_0^c = 2.805$  änderte sich mit den Dipol-Formfaktoren um -0.1%, mit den Formf. nach Fried/Gaisser um -0.18%. Diese Prozentzahlen sind also (in guter Näherung) die “Anteile” der elektromagnetischen Formfaktoren des Protons an Streulänge und Effective Range des Paris-Potentials (Isospintriplett).–

Zusammenfassend lässt sich folgendes sagen: Es gelingt nicht, mit dem Paris-Potential die Ergebnisse der heute vorliegenden Proton-Proton-Streuexperimente unter 3 MeV befriedigend zu reproduzieren (z.B. ist die Diskrepanz zu den Ergebnissen der Experimente aus Basel [3] und Zürich [4] weit grösser als die kleine Differenz zwischen diesen beiden Messungen). Dieser Mangel des Paris-Potentials zeigt sich am einfachsten im hochsignifikanten Abweichen der Streulänge um ca. 1% von den experimentellen Werten, was zu Abweichungen im differentiellen Wirkungsquerschnitt bis zu 10% führt. Allerdings lassen sich die niederenergetischen Experimente mit dem Paris-Potential gut reproduzieren, wenn man nur die Ein-Pion-Austausch-Kopplungskonstante des Paris-Potentials um einen Faktor 0.9936 verändert. Es ist jedoch klar, dass dieses Vorgehen nicht ohne eine gleichzeitige Anpassung aller Parameter des Paris-

Potentials erlaubt ist. Die vorliegende Fassung des Paris-Potentials ist jedenfalls unverkennbar<sup>†</sup> für den mittelenergetischen Bereich der Proton-Proton-Streuung angepasst worden [6].

#### 4.3. Höhere Partialwellen

Tabelle II zeigt alle ungekoppelten ER-Parameter, die wir mit dem Paris-Potential erhielten (siehe auch Tabelle V). Für die  $p$ -Wellen ist die experimentelle Unsicherheit in den ER-Parametern noch recht gross [22]. Für die  $^1D_2$ -Parameter gibt es bis jetzt noch keine experimentellen Daten. – In [35] werden ebenfalls mit dem Paris-Potential für die  $^3P_J$ -Zustände Phasen (bei 5.05 und 9.85 MeV) und ER-Parameter gerechnet. Diese Ergebnisse unterscheiden sich zum Teil beträchtlich von unseren (im Gegensatz dazu stimmen wir bei allen Streuphasen für  $L > 0$  einschliesslich Mischungsparameter, die wir mit dem Paris-Potential gerechnet haben, mit der Paris-Gruppe selber ([6] und [34];  $6.141 \leq E_{\text{LAB}} \leq 330$ ) überein). Die mit dem Paris-Potential gerechneten Ergebnisse bei 5.05 MeV in [35] scheinen jedoch für die  $p$ -Wellen nicht zuverlässig zu sein. Zum Beispiel liegt die Phasenrechnung für  $^3P_1$  bei 9.85 MeV gut auf der ER-Geraden, die durch die Parameter in [35] definiert wird, bei 5.05 MeV aber nicht. Auch in [37] werden in den Tabellen diese  $p$ -Phasen-Ergebnisse aus [35] bei 5.05 MeV nicht benutzt, wohl aber die bei 9.85 MeV, mit denen wir gut übereinstimmen. –

Der heutige Stand der experimentellen Technik für Proton-Proton-Streuung erlaubt es leider nicht, bei  $E_{\text{LAB}} < 3$  MeV Informationen über die Partialwellen  $L > 1$  aus den Messungen zu entnehmen. Nach unseren Berechnungen mit dem Paris-Potential beträgt der Beitrag von  $^3F_2$ -Phase und  $\varepsilon_2$  Mischungsparameter zum Wirkungsquerschnitt etwa bei  $E_{\text{IM}} \approx 0.383$  MeV und  $90^\circ$  nur ca. 0.01%, bei 3 MeV liegt dieser Beitrag über alle Winkel bei maximal 0.1%. Die experimentellen Fehler im Wirkungsquerschnitt liegen jedoch bei den neueren Messungen in

Tabelle V

Proton-Proton-Streuphasen für die niedrigsten ungekoppelten Zustände. Unter "exakt" stehen die Werte, welche wir durch Lösung der Schrödinger-Gleichung mit dem Paris-Potential erhalten, unter "ER" die Werte, die sich aus Gleichung (4a) ( $\Omega_L^{-1}$  ersetzt durch  $\cot \delta_L^c$ ) mit den ER-Parametern aus Tabelle II ergeben (höhere Terme in  $k^2$  werden vernachlässigt). Diese Parameter sind ihrerseits wieder durch Anpassung von (4a) an die Lösung der Schrödinger-Gleichung bei sehr kleiner Energie gewonnen worden.

$E_{\text{LAB}}$ [MeV]	$\delta_{00}^c$ [Grad]		$\delta_{22}^c$ [Grad]		$\delta_{10}^c$ [Grad]		$\delta_{11}^c$ [Grad]	
	exakt	ER	exakt	ER	exakt	ER	exakt	ER
0.1	2.437	2.437	0.115-5	0.115-5	0.140-2	0.140-2	-0.860-3	-0.860-3
0.5	19.31	19.30	0.156-3	0.157-3	0.0412	0.0412	-0.0250	-0.0250
1	33.05	33.02	0.102-2	0.103-2	0.141	0.141	-0.0846	-0.0846
2	45.94	45.81	0.588-2	0.597-2	0.435	0.436	-0.257	-0.257
5.05	54.95	54.52	0.0477	0.0510	1.68	1.69	-0.945	-0.946
9.85	55.21	54.43	0.173	0.205	3.82	3.95	-2.09	-2.10

<sup>†</sup> Inzwischen ist ein Grossteil der hier vorliegenden numerischen Resultate von einem Gutachter der Zeitschrift Journal of Physics auf unabhaengige Weise nachgerechnet und vollumfaenglich bestaetigt worden.

diesem Bereich ([3], [4]) zwischen 1% und 2%. Deshalb ist es zur Zeit nicht möglich, mit experimentellen Ergebnissen für die in Abschn. 2 definierten gekoppelten ER-Parameter zu vergleichen. Es besteht jedoch die berechtigte Hoffnung, dass Nukleon-Nukleon-Wechselwirkungsmodelle, die den mittel- und langreichweitigen Teil der Wechselwirkung durch die Boson-Austauschtheorie beschreiben (das Paris-Potential berücksichtigt Ein-Pion-, Zwei-Pion- und  $\omega$ -Austausch), eine realistische Vorhersage der höheren Partialwellen liefern. Umgekehrt können die so gewonnenen Ergebnisse dann z.B. als Input-Daten für eine genauere Anpassung der  $s$ -Welle an das Experiment dienen.

In der Literatur ist seit [9] für die  $^3P_2$ -Phase eine ungekoppelte ER-Näherung gebräuchlich. Diese Autoren machen nach dem Muster der üblichen ungekoppelten ER-Näherung für  $Q_1(\cot \bar{\delta}_{12}^c)$  einen linearen Ansatz, zeigen aber anhand numerischer Rechnungen mit mehreren Wechselwirkungsmodellen, dass "... the  $^3P_2$  effective range function exhibits large curvature below 10 MeV." Erst nach Subtraktion der Ein-Pion-Austausch-Phase von  $\bar{\delta}_{12}^c$  konstatieren sie für  $Q_1(\cot \bar{\delta}_{12}^c)$ : "... that by using this difference, the  $^3P_2$  effective range function is well described below 30 MeV by a straight line." Dagegen kommt [10] nach Rechnungen mit seinem Potentialmodell für  $Q_1(\cot \bar{\delta}_{12}^c)$  zum Schluss: "... for the  $^3P_2$  state, none of the choices for  $\delta'_{12}$  (gemeint ist  $\bar{\delta}_{12}^c$  mit oder ohne Subtraktion der Ein-Pion-Austausch-Phase) is compatible with a linear dependence on  $k^2$  in any reasonable range of energies . . ."

Nun ist  $\cot \bar{\delta}_{12}^c \approx \frac{1}{\bar{\delta}_{12}^c} \left( 1 - \frac{(\bar{\delta}_{12}^c)^2}{3} \right) \approx \frac{1}{\bar{\delta}_{12}^c}$  für kleine Phasen. Ebenfalls für kleine Phasen gilt in guter Näherung:

$$\mathfrak{R}_1^{-1} \approx \frac{1}{\bar{\delta}_{12}^c} \left( 1 - \frac{(\bar{\varepsilon}_2^c)^2}{\bar{\delta}_{12}^c \bar{\delta}_{32}^c} \right)^{-1} =: \frac{1}{\bar{\delta}_{12}^c} \lambda, \quad \text{wobei } \frac{(\bar{\varepsilon}_2^c)^2}{\bar{\delta}_{12}^c \bar{\delta}_{32}^c}$$

nicht klein gegen 1 ist. Es besteht daher die Hoffnung, dass der Faktor  $\lambda$ , der die Kopplung zwischen den Zuständen  $L = 1$  und  $L' = 3$  berücksichtigt, das Konvergenzverhalten von  $Q_1(\mathfrak{R}_1^{-1})$  gegenüber dem ungekoppelten  $Q_1(\cot \bar{\delta}_{12}^c)$  entscheidend verbessert. Figur I zeigt auch, dass das tatsächlich der Fall ist: Die schon in [9] und [10] beobachtete Krümmung von  $Q_1(\cot \bar{\delta}_{12}^c)$ , hier mit dem Paris-Potential gerechnet, findet sich unterhalb 5 MeV in  $Q_1(\mathfrak{R}_1^{-1})$  nicht mehr. Oberhalb 5 MeV beginnt auch  $Q_1(\mathfrak{R}_1^{-1})$  von der Geraden abzuweichen. Für die anderen Matrixelemente  $Q_3(\mathfrak{R}_3^{-1})$  und  $Q_{13}(\mathfrak{R}_{13}^{-1})$  wird die lineare Näherung allerdings schon ab ca. 1 MeV schlechter (es sei angefügt, dass wir in allen drei Fällen versucht haben, höhere als lineare Terme in  $k^2$  anzupassen; die entsprechenden Koeffizienten sind aber nicht mehr signifikant). Das beschränkt aber die praktische Anwendbarkeit der gekoppelten ER-Näherung in dieser Form. Im Experiment sind nämlich nur  $\mathfrak{S}$ -Matrixelemente (bzw. Phasen und Mischungsparameter) direkt beobachtbar und jedes  $\mathfrak{S}$ -Matrixelement (bzw. jede Phase und der Mischungsparameter) ist eine Funktion aller drei  $\mathfrak{R}^{-1}$ -Matrixelemente. Dadurch ist für praktische Zwecke die Anwendbarkeit der linearen Näherung durch jenes Matrixelement von  $\mathfrak{R}^{-1}$  bestimmt, welches am stärksten von der linearen Näherung abweicht. Dies zeigt Tabelle VI: Hier werden die aus der gekoppelten ER-Näherung (mit den Parametern aus Tabelle I) gerechneten Barphasen mit den durch Integration der Schrödinger-Gleichung direkt gewonne-

Tabelle VI

Proton-Proton-Barphasen und Mischungsparameter für  $J = 2$ . Unter "exakt" stehen die Werte, welche wir durch Lösung der Schrödinger-Gleichung mit dem Paris-Potential erhalten, unter "ER" die Werte, die sich aus den Gleichungen (6) mit den ER-Parametern aus Tabelle I (nach Umrechnung auf die Bar-Größen) ergeben (höhere Terme in  $k^2$  werden vernachlässigt). Diese Parameter sind ihrerseits wieder durch Anpassung von (4) an die Lösung der Schrödinger-Gleichung bei sehr kleiner Energie gewonnen worden.

$E_{\text{LAB}}$ [MeV]	$\bar{\delta}_{12}^c$ [Grad]		$\bar{\epsilon}_2^c$ [Grad]		$\bar{\delta}_{32}^c$ [Grad]	
	exakt	ER	exakt	ER	exakt	ER
0.1	0.127-3	0.127-3	-0.133-5	-0.133-5	0.115-8	0.115-8
0.5	0.387-2	0.387-2	-0.183-3	-0.183-3	0.761-6	0.763-6
1	0.0138	0.0137	-0.120-2	-0.120-2	0.990-5	0.996-5
2	0.0465	0.0443	-0.694-2	-0.701-2	0.112-3	0.115-3
5.05	0.219	0.179	-0.0567	-0.0602	0.215-2	0.247-2
9.85	0.634	0.417	-0.206	-0.242	0.0137	0.0193

Tabelle VII

Proton-Proton Streuphasen und Mischungsparameter (in Grad), gerechnet mit dem Paris-Potential [6].

$E_{\text{LAB}}$ [MeV]	$\delta_{00}^c$	$\delta_{22}^c$	$\delta_{10}^c$	$\delta_{11}^c$	$\bar{\delta}_{12}^c$	$\bar{\epsilon}_2^c$	$\bar{\delta}_{32}^c$	$\delta_{12}^c$	$\epsilon_2^c$	$\delta_{32}^c$
0.35009	13.51	0.567-4	0.0210	-0.0128	0.194-2	-0.661-4	0.193-6	0.195-2	-1.95	-0.205-5
0.42006	16.32	0.957-4	0.0297	-0.0181	0.277-2	-0.112-3	0.393-6	0.278-2	-2.30	-0.410-5
0.49923	19.28	0.156-3	0.0411	-0.0250	0.386-2	-0.182-3	0.757-6	0.387-2	-2.69	-0.781-5
0.74996	27.13	0.476-3	0.0856	-0.0517	0.823-2	-0.558-3	0.347-5	0.827-2	-3.86	-0.342-4
0.99183	32.88	0.100-2	0.139	-0.0834	0.0136	-0.117-2	0.963-5	0.0137	-4.89	-0.909-4
1.397	39.72	0.242-2	0.246	-0.146	0.0250	-0.285-2	0.328-4	0.0253	-6.43	-0.288-3
1.855	44.74	0.490-2	0.387	-0.229	0.0408	-0.577-2	0.870-4	0.0416	-7.91	-0.715-3
2.425	48.70	0.932-2	0.586	-0.343	0.0645	-0.0110	0.214-3	0.0664	-9.45	-0.162-2
3.037	51.34	0.0157	0.820	-0.475	0.0944	-0.0186	0.444-3	0.0979	-10.8	-0.310-2

nen verglichen. Es zeigt sich, dass  $\bar{\delta}_{12}^c$  bei 5 MeV nur noch mit einem Fehler von ca. 20% durch die lineare ER-Näherung wiedergegeben wird, während  $Q_1(\mathfrak{R}_1^{-1})$  bei dieser Energie (siehe Fig. I) noch sehr gut der linearen Näherung folgt.

Man kann vermuten, dass erst eine Berücksichtigung der Ein-Pion-Austausch-Wechselwirkung in der Definition der ER-Theorie diesen Mangel der gekoppelten Theorie beheben kann. Die numerischen Ergebnisse für  $Q_1(\cot \bar{\delta}_{12}^c)$  bzw.  $Q_1(\mathfrak{R}_1^{-1})$  mit dem Paris-Potential zeigen jedoch, dass die koppelnde Wirkung des Tensorpotentials auch bei sehr kleiner Energie deutlich in der ER-Näherung nachweisbar ist.

## Verdankung

Mein herzlicher Dank gilt vor allem Herrn Prof. Dr. Rasche. Er gab den Anstoß zu dieser Arbeit und stand, wenn immer nötig, hilfreich zur Seite. Herrn Prof. Dr. Jaus danke ich für die Überlassung seiner Numerov-Routine und für manch wertvollen Ratschlag, Herrn Prof. Dr. Scharf für die schnelle und gründliche Durchsicht des Manuskripts, Frau Oeschger schliesslich für ihre grosse Sorgfalt bei der mühevollen Schreibarbeit.

Diese Arbeit wurde finanziell unterstützt durch den Schweizerischen Nationalfonds.

## Anhang

### A1. Bornsche Näherung für die $\mathfrak{A}$ -Matrix

Wir gehen aus von:

$$((\partial_r^2 + \kappa^2 + P^{(0)}) \mathbb{1} + V(r)) \mathfrak{W}(r) = 0$$

Als asymptotische Randbedingung für die reguläre Lösung  $\mathfrak{W}$  geben wir vor<sup>2)</sup> (festes  $J, L = J - 1, L' = J + 1$ ):

$$\mathfrak{W}(r) = F(r) + G(r) \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} F_L & 0 \\ 0 & F_{L'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_L \mathfrak{A}_L & G_L \mathfrak{A}_{LL'} \\ G_{L'} \mathfrak{A}_{LL'} & G_{L'} \mathfrak{A}_{L'} \end{pmatrix}$$

für  $r > r_0$ .

Die ungestörte Lösung mit  $V(r) \equiv 0$  sei

$$\mathfrak{W}^{(0)}(r) := F(r)$$

Die Greensfunktion, passend zu den vorgegebenen Randbedingungen ist:

$$\mathfrak{G}(r, r') = \begin{cases} -\kappa^{-1} \begin{pmatrix} F_L(\kappa r') G_L(\kappa r) & 0 \\ 0 & F_{L'}(\kappa r') G_{L'}(\kappa r) \end{pmatrix} & \text{für } r > r' \\ -\kappa^{-1} \begin{pmatrix} F_L(\kappa r) G_L(\kappa r') & 0 \\ 0 & F_{L'}(\kappa r) G_{L'}(\kappa r') \end{pmatrix} & \text{für } r < r' \end{cases}$$

Sie erfüllt:  $(\partial_r^2 + \kappa^2 + P^{(0)}) \mathbb{1} \mathfrak{G}(r, r') = \delta(r - r')$

Es gilt dann:

$$\mathfrak{W}(r) = \mathfrak{W}^{(0)}(r) + \int_0^\infty \mathfrak{G}(r, r') (-V(r')) \mathfrak{W}(r') dr'$$

und in Bornscher Näherung:

$$\mathfrak{W}^{(1)} = \mathfrak{W}^{(0)} - \int_0^\infty \mathfrak{G} V \mathfrak{W}^{(0)} dr'$$

Durch Vergleich mit der asymptotischen Randbedingung

$$G(r) \mathfrak{A} = - \int_0^\infty \mathfrak{G}(r, r') V(r') \mathfrak{W}^{(0)}(r') dr'$$

für  $r \rightarrow \infty$

---

<sup>2)</sup> Es gilt  $F(r) + G(r) \mathfrak{A} = X(r) \mathfrak{M}^{-1} \mathfrak{A}$ ; mit  $X(r)$  ist also auch  $F(r) + G(r) \mathfrak{A}$  eine Lösung der Schrödinger-Gleichung für  $r > r_0$ , da  $(\mathfrak{M}^{-1} \mathfrak{A})$  eine nichtsinguläre Matrix ist.

erhalten wir

$$\mathfrak{R}_L = \kappa^{-1} \int_0^\infty F_L^2(\kappa r') V_L(r') dr'$$

$\mathfrak{R}_{L'}$  analog

$$\mathfrak{R}_{LL'} = \kappa^{-1} \int_0^\infty F_L(\kappa r') F_{L'}(\kappa r') V_{LL'}(r') dr'$$

## A2. Explizite Form der radialen Schrödinger-Gleichung mit dem Paris-Potential im gekoppelten Fall

Die zeitunabhängige Schrödingergleichung für die Relativbewegung zweier Protonen lautet:

$$(\Delta + k^2 - M_p(\tilde{V}(\tilde{x}) + V_{\text{coul}}(x)))\Psi = 0$$

Das Paris-Potential ist jedoch nichtlokal, es gilt für den Spin- und Isospin-Triplettfall ( $S = 1, T = 1$ ) mit den Bezeichnungen aus [6]:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\tilde{x}, p^2) &= V_1(x, p^2) \left[ \frac{3 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2}{4} \right] + V_{LS}(x) \vec{L} \cdot \vec{S} \\ &\quad + V_T(x) \left[ \frac{3(\vec{\sigma}_1 \cdot \tilde{x})(\vec{\sigma}_2 \cdot \tilde{x})}{x^2} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \right] \\ &\quad + V_{SO2}(x) \frac{1}{2} [(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{L})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{L}) + (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{L})(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{L})] \text{ wobei:} \\ V_1(x, p^2) &= V_1^a(x) - \left[ \frac{1}{x} \partial_x^2 x - \frac{\vec{L}^2}{x^2} \right] \frac{V_1^b(x)}{M_p} - \frac{V_1^b(x)}{M_p} \left[ \frac{1}{x} \partial_x^2 x - \frac{\vec{L}^2}{x^2} \right] \end{aligned}$$

Mit den in Abschnitt 2.2 beschriebenen Standardmethoden führt das für die Radialfunktionen  $u_L(r)$ ,  $u_{L'}(r)$  ( $L = J - 1, L' = J + 1$ ) zum gekoppelten Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \left( \partial_r^2 + \kappa^2 - \frac{L(L+1)}{r^2} - \frac{\alpha}{r} \right) u_L + g_L u_L + g_{LL'} u_{L'} &= 0 \\ \left( \partial_r^2 + \kappa^2 - \frac{L'(L'+1)}{r^2} - \frac{\alpha}{r} \right) u_{L'} + g_{L'} u_{L'} + g_{LL'} u_L &= 0 \\ g_L &:= -L \frac{V_{LS}}{M_p} - L^2 \frac{V_{SO2}}{M_p} + \frac{2L}{2L+3} \cdot \frac{V_T}{M_p} - \frac{V_1^a}{M_p} + \\ &\quad - 2 \frac{L(L+1)}{r^2} V_1^b + V_1^b \partial_r^2 + \partial_r^2 (V_1^b \cdot) \\ g_{LL'} &:= -\frac{6(J(J+1))^{1/2}}{2J+1} \cdot \frac{V_T}{M_p} \\ g_{L'} &:= (L'+1) \frac{V_{LS}}{M_p} - (L'+1)^2 \frac{V_{SO2}}{M_p} + \frac{2(L'+1)}{2L'-1} \cdot \frac{V_T}{M_p} - \frac{V_1^a}{M_p} + \\ &\quad - 2 \frac{L'(L'+1)}{r^2} V_1^b + V_1^b \partial_r^2 + \partial_r^2 (V_1^b \cdot) \end{aligned} \tag{9}$$

Um zu einer effektiven (lokalen) Schrödinger-Gleichung zu kommen, machen wir den Ansatz [26]:

$$\hat{u}_i(r) := u_i(r) \cdot (1 + 2V_1^b(r))^{1/2} \quad i = L, L'$$

und gelangen so durch Einsetzen in (9) zur Gleichung (1) aus Abschnitt 2.2

$$D_\kappa \begin{pmatrix} \hat{u}_L \\ \hat{u}_{L'} \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

für die neuen Radialfunktionen mit dem lokalen Potentialoperator:

$$\begin{aligned} V_L(r) &= \frac{1}{(1+2V_1^b)} \left( -L \frac{V_{LS}}{M_p} - L^2 \frac{V_{SO2}}{M_p} + \frac{2L}{2L+3} \cdot \frac{V_T}{M_p} - \frac{V_1^a}{M_p} + \right. \\ &\quad \left. - \left( \kappa^2 - \frac{\alpha}{r} \right) 2V_1^b + \frac{(\partial_r V_1^b)^2}{(1+2V_1^b)} \right) \\ V_{LL'}(r) &= -\frac{6(J(J+1))^{1/2}}{2J+1} \cdot \frac{V_T}{M_p(1+2V_1^b)} \\ V_{L'}(r) &= \frac{1}{(1+2V_1^b)} \left( (L'+1) \frac{V_{LS}}{M_p} - (L'+1)^2 \frac{V_{SO2}}{M_p} + \frac{2(L'+1)}{2L'-1} \cdot \frac{V_T}{M_p} - \frac{V_1^a}{M_p} + \right. \\ &\quad \left. - \left( \kappa^2 - \frac{\alpha}{r} \right) 2V_1^b + \frac{(\partial_r V_1^b)^2}{(1+2V_1^b)} \right) \end{aligned}$$

Da  $V_1^b(0)$  endlich ist und wir annehmen, dass  $V_1^b = 0$  für  $r > r_0$ , erfüllt mit jeder Lösungsmatrix  $\mathcal{U}(r)$  auch die Matrix  $\hat{\mathcal{U}}(r) := \mathcal{U}(r)(1+2V_1^b)^{1/2}$  die in Abschnitt 2.2 definierten Randbedingungen (analog  $\mathcal{B}(r)$ ). Insbesondere stimmen die Lösungen  $\mathcal{U}(r)$  von (9) und  $\hat{\mathcal{U}}(r)$  von (10) asymptotisch überein. Es macht also keinen Unterschied, ob man die  $\mathfrak{A}$ - (bzw.  $\mathfrak{S}$ -)Matrix bezüglich der asymptotischen Lösungen von (9) oder (10) definiert. In diesem Sinne ist das Paris-Potential einem effektiven lokalen Potentialoperator äquivalent, und alles in den vorhergehenden Abschnitten unter der Voraussetzung eines lokalen Kernpotentials Gesagte bleibt auch für das Paris-Potential gültig.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] J. E. BROLLEY, Jr., J. D. SEAGRAVE and J. G. BEERY, Phys. Rev. 135, B 1119 (1964).
- [2] D. J. KNECHT, P. F. DAHL and S. MESSELT, Phys. Rev. 148, 1031 (1966).
- [3] H. WASSMER and H. MÜHRY, Helv. Phys. Acta 46, 626 (1973).
- [4] CH. THOMANN, J. E. BENN and S. MÜNCH, Nucl. Phys. A303, 457 (1978).
- [5] W. A. VAN DER SANDEN, A. H. EMMEN and J. J. DE SWART, *Very Low Energy Proton-Proton Scattering*, Univ. of Nijmegen THEF-NYM-83.11.
- [6] M. LACOMBE *et al.*, Phys. Rev. C21, 861 (1980).
- [7] G. F. CHEW and M. L. GOLDBERGER, Phys. Rev. 75, 1637 (1949).
- [8] H. A. BETHE, Phys. Rev. 76, 38 (1949).
- [9] M. S. SHER, P. SIGNELL and L. HELLER, Ann. of Phys. 58, 1 (1970).
- [10] J. P. NAISSE, Nucl. Phys. A278, 506 (1977).
- [11] M. H. ROSS and G. L. SHAW, Ann. of Phys. 13, 147 (1961).
- [12] M. W. KERMODE, Nucl. Phys. A99, 605 (1967).
- [13] G. RASCHE, Nucl. Phys. A94, 301 (1967).
- [14] J. J. DE SWART, *Scattering in Coupled Channels*, Voordracht gehouden voor het Landelijk Seminarium op 16 januari 1970.

- [15] J. M. BLATT, L. C. BIEDENHARN, Phys. Rev. 86, 399 (1952).
- [16] H. P. STAPP, T. J. YPSILANTIS, N. METROPOLIS, Phys. Rev. 105, 302 (1957).
- [17] L. HELLER, Phys. Rev. 120, 627 (1960).
- [18] M. ABRAMOVITZ and I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 5. ed.).
- [19] S. ALBEVERIO *et al.*, *Low-Energy Parameters in Nonrelativistic Scattering Theory*, Univ. Leuven KUL-Preprint-TF-82/18.
- [20] N. F. MOTT and H. S. W. MASSEY, *The Theory of Atomic Collisions* (Oxford University Press 1965).
- [21] M. W. KERMODE, Nucl. Phys. A104, 49 (1967).
- [22] D. DUMBRAJS *et al.*, Nucl. Phys. B216, 277 (1983).
- [23] L. M. DELVES, Nucl. Phys. 8, 358 (1958).
- [24] M. SIMONIUS, *Lecture Notes in Physics* 30 (Springer, Berlin, 1974).
- [25] R. VINH MAU, private Mitteilung.
- [26] A. M. GREEN, Nucl. Phys. 33, 218 (1962).
- [27] M. L. GURSKY and L. HELLER, Phys. Rev. 136, B1693 (1964).
- [28] H. P. NOYES, Phys. Rev. Lett. 12, 171 (1964).
- [29] H. P. NOYES, H. M. LIPINSKI, Phys. Rev. C4, 995 (1971).
- [30] H. P. NOYES, Ann. Rev. of Nucl. Sci. 22, 465 (1972).
- [31] L. L. FOLDY, E. ERIKSEN, Phys. Rev. 98, 775 (1955).
- [32] M. EVRARD and J. P. NAISSE, Bull. Cl. Sc. Acad. R. Belg. 63, 290 (1977).
- [33] L. DURAND, Phys. Rev. 108, 1597 (1957).
- [34] J. CÔTÉ *et al.*, Phys. Rev. Lett. 44, 1031 (1980).
- [35] M. D. BARKER, P. C. COLBY, W. HAEBERLI, P. SIGNELL, Phys. Rev. Lett. 48, 918 (1982).
- [36] G. BREIT, J. B. EHRMAN, M. H. HULL, Jr., Phys. Rev. 97, 1051 (1955).
- [37] J. J. DE SWART, W. A. VAN DER SANDEN, W. DERKES, Nucl. Phys. A416, 299c (1984).