

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 57 (1984)

Heft: 6

Artikel: La théorie de la diffusion de Lax et Phillips dans le cas quantique

Autor: Flesia, C. / Piron, C.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-115522>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 20.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

La théorie de la diffusion de Lax et Phillips dans le cas quantique

Par C. Flesia, Institute de Physique Théorique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, PHB-Ecublens, CH-1015 Lausanne, Suisse

C. Piron, Département de Physique Théorique, Université de Genève, CH-1211 Genève 4, Suisse

(15. IX. 1984)

Introduction

Si on considère naïvement l'approche de Lax et Phillips à la théorie de la diffusion on est surpris par le fait que l'opérateur d'évolution a toujours un spectre non borné inférieurement et ainsi on a l'impression que cette approche ne s'applique pas à la mécanique quantique.

Les rares essais d'application, à l'équation de Schrödinger par exemple [1], sont compliqués et artificiels.

Or, comme nous allons le montrer, cette théorie de Lax et Phillips s'applique, bel et bien, directement à la mécanique quantique si on traite le paramètre t correspondant au temps comme une règle de supersélection continue et qu'ainsi on décrit le système dans un espace plus grand que l'espace de Hilbert usuel.

1. L'évolution quantique

A partir des postulats de la mécanique quantique on définit à chaque instant t l'état d'un système physique donné, par un rayon dans un espace de Hilbert H_t , copie d'un espace H fixé une fois pour toute.

L'évolution réversible qui fait passer le système de l'état au temps t à l'état au temps $t + \tau$ est donnée par une famille d'opérateurs unitaires $\{V_t(\tau)\}$ qui agissent sur les H_t

$$\psi_{t+\tau} = V_t(\tau)\psi_t \begin{cases} \psi_t \in H_t \\ \psi_{t+\tau} \in H_{t+\tau} \end{cases} \quad (1.1)$$

la relation suivante étant satisfaite:

$$V_{t+\tau_1}(\tau_2)V_t(\tau_1) = V_t(\tau_1 + \tau_2) \quad (1.2)$$

Dans le cas d'une évolution homogène dans le temps, les opérateurs $V_t(\tau)$ sont indépendants de t et la relation précédente s'écrit

$$V(\tau_2)V(\tau_1) = V(\tau_1 + \tau_2)$$

Et dans ce cas $V(\tau)$ définit une représentation d'un groupe à un paramètre, de générateur

$$\kappa = s - \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{i}{\tau} (V(\tau) - I) \quad (1.3)$$

Si la représentation est continue, le théorème de Stone affirme que le générateur κ est autoadjoint. Dans le cas d'une évolution inhomogène, on peut se ramener au cas précédent en décrivant l'évolution dans un autre espace, un espace plus grand, l'espace de Hilbert \bar{H} défini comme intégrale directe des H_t , intégrale prise par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}

$$\bar{H} = \int_{\oplus} H_t dt$$

Chaque H_t étant une copie de H , l'espace \bar{H} n'est autre que l'espace des fonctions de t de carré sommable à valeur dans H :

$$\bar{H} = L^2(\mathbb{R}, dt, H) \quad (1.4)$$

où par définition la fonction $\|\phi_t\|_H$ est mesurable et le produit scalaire donné par

$$\langle \psi, \phi \rangle_{\bar{H}} = \int_{\mathbb{R}} dt (\psi_t, \phi_t) \quad (1.5)$$

Soit $W(\tau)$ l'opérateur agissant dans \bar{H} et définit à partir de la famille $\{V_t(\tau)\}$ par la relation

$$(W(\tau)\phi)_{t+\tau} = V_t(\tau)\phi_t \quad (1.6)$$

où les $V_t(\tau)$ sont les opérateurs unitaires définis précédemment.

Si la fonction $\|V_t(\tau)\phi_t\|_H$ est mesurable dans les deux variables t et τ , alors $W(\tau)$ définit une représentation unitaire d'un groupe à un paramètre.

En effet, d'une part, les opérateurs $V_t(\tau)$ étant unitaires, le produit scalaire sur \bar{H} est conservé

$$\begin{aligned} \langle W(\tau)\psi, W(\tau)\phi \rangle_{\bar{H}} &= \int_{\mathbb{R}} dt (V_t(\tau)\psi_t, V_t(\tau)\phi_t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dt (\psi_t, \phi_t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

et d'autre part, on a la loi de groupe

$$\begin{aligned} (W(\tau_2)W(\tau_1)\phi)_{t+\tau_1+\tau_2} &= V_{t+\tau_1}(\tau_2)(W(\tau_1)\phi)_{t+\tau_1} \\ &= V_{t+\tau_1}(\tau_2)V_t(\tau_1)\phi_t = V_t(\tau_1 + \tau_2)\phi_t \\ &= (W(\tau_1 + \tau_2)\phi)_{t+\tau_1+\tau_2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Si de plus cette représentation est continue, son générateur:

$$K = s - \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{i}{\tau} (W(\tau) - I) \tag{1.9}$$

est autoadjoint dans \bar{H} et

$$W(\tau) = e^{-iK\tau} \tag{1.10}$$

Rappelons tout d'abord le résultat suivant:

Théorème 1 [2]. *S'il existe un sous-ensemble dense (un coeur) dans \bar{H} pour lequel les opérateurs $K, i\partial_t, K + i\partial_t$ sont essentiellement autoadjoints, alors on a la formule de Trotter [3]*

$$e^{-iK\tau} = s - \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-i\partial_t \tau/n} e^{-i\kappa\tau/n})^n$$

où κ est l'extension autoadjointe de $i\partial_t + K$ et de plus cet opérateur est décomposable

$$(\kappa\phi)_t = \kappa_t\phi_t \quad \text{p.p.} \quad t \in \mathbb{R}$$

Dans ce cas, le générateur K est l'extension autoadjointe de $\kappa_t - i\partial_t$ et p.p.

$$\kappa_t\phi_t = s - \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{i}{\tau} (V_t(\tau) - I)\phi_t$$

De plus on peut montrer que:

Théorème 2. *Toujours dans l'hypothèse que $\|V_t(\tau)\phi_t\|_H$ est mesurable dans les deux variables, si le théorème 1 s'applique, alors l'opérateur K est unitairement équivalent à $-i\partial_t$, et en conséquence, son spectre est absolument continu de $-\infty$ à $+\infty$.*

Démonstration. Comme par hypothèse la fonction $\|V_t(\tau)\phi_t\|_H$ est mesurable, l'opérateur $R(t_0)$ défini par

$$(R(t_0)\phi)_t = V_t(t_0 - t)\phi_t = V_{t_0}^{-1}(t - t_0)\phi_t \tag{1.11}$$

est unitaire

$$\begin{aligned} \langle R(t_0)\psi, R(t_0)\phi \rangle_{\bar{H}} &= \int_{\mathbb{R}} dt (V_t(t_0 - t)\psi_t, V_t(t_0 - t)\phi_t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dt (\psi_t, \phi_t) \end{aligned}$$

Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que

$$R(t_0)KR^{-1}(t_0) = -i\partial_t$$

Or, en effet,

$$\begin{aligned} (R(t_0)e^{-iK\tau}R^{-1}(t_0)\phi)_t &= V_{t_0}^{-1}(t - t_0)(e^{-iK\tau}R^{-1}(t_0)\phi)_t \\ &= V_{t_0}^{-1}(t - t_0)V_{t-\tau}(\tau)(R^{-1}(t_0)\phi)_{t-\tau} \\ &= V_{t_0}^{-1}(t - t_0)V_{t-\tau}(\tau)V_{t_0}(t - \tau - t_0)\phi_{t-\tau} \\ &= V_{t_0}^{-1}(t - t_0)V_{t_0}(t - t_0)\phi_{t-\tau} = \phi_{t-\tau} \quad \text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

L'opérateur $R(t_0)$ défini en cours de démonstration, induit une nouvelle représentation des états et des observables du système qui est caractérisée par la forme triviale du générateur K et qui n'est rien d'autre que la représentation usuelle de Heisenberg. Cette représentation dépend en fait de l'instant choisi t_0 , instant où elle coïncide avec la représentation de Schrödinger.

Il est utile pour la suite de définir une autre représentation, celle dite d'interaction. On l'obtient en considérant l'opérateur

$$(R_0(t_0)\phi)_t = V_{0t_0}^{-1}(t - t_0)\phi_t \quad (1.12)$$

où les $V_{0t_0}(\tau)$ correspondant à un $W_0(\tau)$ sont définis comme précédemment, mais pour une évolution particulière, l'évolution libre.

2. L'évolution selon Lax et Phillips

Rappelons que dans leur approche à la théorie de la diffusion, Lax et Phillips considèrent un espace de Hilbert \tilde{H} , sur lequel agit une représentation unitaire $\tilde{u}(\tau)$ d'un groupe à un paramètre. Ils supposent alors l'existence de deux sous-espaces D_- et D_+ , appelés respectivement sous-espaces entrant et sous-espace sortant, tels que

$$\begin{aligned} \hat{u}(\tau)D_+ &\subset D_+ & \tau \geq 0 \\ \tilde{u}(\tau)D_- &\subset D_- & \tau \leq 0 \\ \bigcap_{\tau} \tilde{u}(\tau)D_+ &= \bigcap_{\tau} \tilde{u}(\tau)D_- = \{0\} \\ \overline{\bigcup_{\tau} \tilde{u}(\tau)D_+} &= \overline{\bigcup_{\tau} \tilde{u}(\tau)D_-} = \tilde{H} \\ D_+ &\perp D_- \end{aligned} \quad (2.1)$$

Une telle représentation $\tilde{u}(\tau)$ satisfaisant ces hypothèses est appelée une 'évolution de Lax et Phillips'.

Ces auteurs démontrent alors le théorème suivant [4], dit des 'représentations de translations'.

Théorème 3. Soit $\tilde{u}(\tau)$ une évolution de Lax et Phillips sur \tilde{H} .

Il existe alors un espace de Hilbert auxiliaire N et deux applications unitaires B_+ et B_- de \tilde{H} sur $L^2(\mathbb{R}, dt, N)$ telle que

$$\begin{aligned} B_+D_+ &= L^2(\mathbb{R}_+, dt, N) \\ B_-D_- &= L^2(\mathbb{R}_-, dt, N) \\ B_{\pm}\tilde{u}(\tau)B_{\pm}^{-1} &= T(\tau) \end{aligned}$$

où $T(\tau)$ est le groupe des translations sur $L^2(\mathbb{R}, dt, N)$, c'est à dire

$$(T(\tau)\phi)_t = \phi_{t-\tau} \quad \phi \in L^2(\mathbb{R}, dt, N)$$

Ces deux représentations de \tilde{H} sont appelées respectivement représentation de translation entrante et représentation de sortante.



Lax et Phillips définissent l'opérateur de diffusion comme l'opérateur qui relie la représentation de translation entrante à la représentation de translation sortante.

Cet opérateur est donc

$$S^{\text{L.P.}} = B_+ B_-^{-1} \quad (2.2)$$

Il vérifie les propriétés suivantes [4]:

- $S^{\text{L.P.}}$ est unitaire sur $L^2(\mathbb{R}, dt, N)$.
- $S^{\text{L.P.}}$ commute avec les translations et est donc décomposable.

3. L'évolution quantique comme évolution de Lax et Phillips

On peut interpréter le système $\{\bar{H}, W(\tau)\}$ défini au paragraphe 1 comme une évolution de Lax et Phillips. En effet, si on définit D_+ comme le sous-espace $L^2([\rho_+, +\infty], dt, H)$ et D_- comme le sous-espace $L^2([-\infty, \rho_-], dt, H)$, où $0 < \rho_+$ et $\rho_- < 0$ sont deux temps données, les conditions (2.1) sont trivialement satisfaites.

Dans ces conditions, notre théorème 2 n'est autre qu'un cas particulier du théorème des représentations de translations.

En effet, l'opérateur unitaire $R(\rho_+)$ qui fait passer de la représentation de Schrödinger à celle de Heisenberg (définie pour $t_0 = \rho_+$) n'est autre que l'opérateur B_+ et de même l'opérateur $R(\rho_-)$ n'est autre que l'opérateur B_- .

L'espace usuel H de la mécanique quantique s'identifie à l'espace auxiliaire N et finalement, en vertu de ce qui précède, $B_{\pm} W(\tau) B_{\pm}^{-1}$ est bien le groupe des translations sur $L^2(\mathbb{R}, dt, H)$ défini précédemment. Ainsi, dans notre cas, l'opérateur de diffusion de Lax et Phillips correspondant au système $\{\bar{H}, W(\tau)\}$ est donné par

$$S^{\text{L.P.}}(\rho_-, \rho_+) = R(\rho_+) R^{-1}(\rho_-) \quad (3.1)$$

Il se réduit donc à un double changement de représentation, plus précisément il fait passer de la représentation de Heisenberg, qui coïncide avec celle de Schrödinger au temps $t_0 = \rho_-$ à la représentation de Heisenberg qui coïncide avec celle de Schrödinger au temps $t_0 = \rho_+$. Explicitement il s'écrit

$$(S^{\text{L.P.}}(\rho_-, \rho_+) \phi)_t = V_{\rho_+}^{-1}(t - \rho_+) V_{\rho_-}(t - \rho_-) \phi_t \quad (3.2)$$

Ainsi $S^{\text{L.P.}}(\rho_-, \rho_+)$ est décomposable et presque pour tout t

$$S_t^{\text{L.P.}}(\rho_-, \rho_+) = V_{\rho_+}^{-1}(t - \rho_+) V_{\rho_-}(t - \rho_-) \quad (3.3)$$

En particulier, cette théorie s'applique au cas d'une évolution homogène

$$V_t(\rho) = V(\tau) = e^{-iH\tau} \quad (3.4)$$

décrite en représentation d'interaction (au temps $t_0 = 0$ avec $V_{0t}(\tau) = V_0(\tau) = \exp(-iH_0\tau)$). Le système $\{\bar{H}, W(\tau)\}$ correspondant où

$$(W(\tau)\phi)_{t+\tau} = e^{iH_0(t+\tau)} e^{-iH\tau} e^{-iH_0 t} \phi_t \quad (3.5)$$

définit un opérateur de diffusion de Lax et Phillips qui est donné, tous calculs faits, par l'expression

$$S_t^{\text{L.P.}}(\rho_-, \rho_+) = S^{\text{L.P.}}(\rho_-, \rho_+) = e^{iH_0\rho_+} e^{-iH\rho_+} e^{iH_0\rho_-} e^{-iH_0\rho_-} \quad (3.6)$$

De plus, pour une telle evolution, chaque fois qu'existent les opérateurs de Møller

$$\Omega_{\pm} = s - \lim_{\rho \rightarrow \pm\infty} e^{iH_0\rho} e^{-iH\rho} \quad (3.7)$$

et la matrice S correspondante

$$S = \Omega_+^* \Omega_- \quad (3.8)$$

l'opérateur de diffusion de Lax et Phillips que nous venons de trouver a une limite pour $\rho \rightarrow \infty$ et

$$S^{L.P.}(\infty) \equiv s - \lim_{\rho \rightarrow \infty} S^{L.P.}(-\rho, \rho) = S \quad (3.9)$$

Ceci nous montre qu'il est naturel d'étendre la définition de la matrice S au cas d'une évolution inhomogène. Il suffit de considérer cette évolution en représentation d'interaction (1.12) et de faire tendre $\rho \rightarrow \infty$ dans $S^{L.P.}(-\rho, \rho)$ (3.1).

Le même formalisme s'applique également tout naturellement au cas d'un potentiel à longue portée (Coulombien par exemple) en partant d'une représentation d'interaction définie pour une évolution libre modifiée [5].

4. Conclusion

En conclusion le formalisme développé ici permet de définir une matrice S dans le cas général d'un potentiel (où d'une perturbation) dépendant explicitement du temps et le resultat s'exprime chaque fois uniquement en terme de l'Hamiltonien en représentation d'interaction. Le même formalisme permet aussi d'exprimer l'effet dû à l'enclenchement (adiabatique où non) d'une interaction extérieure sur l'évolution du système.

Typiquement c'est le cas d'un système évoluant selon un Hamiltonien de la forme

$$H_t = H_0 + H_{I,t} \quad (4.1)$$

où H_0 est l'Hamiltonien libre et H_I est l'interaction extérieure supposé de la forme

$$H_{I,t} = \begin{cases} H_{I,t} = 0 & t < 0 \\ H_{I,t} = H_I & t > \rho \end{cases} \quad (4.2)$$

En représentation d'interaction ce problème correspond à un système de Lax et Phillips $\{\bar{H}, W_I(\tau)\}$ où \bar{H} est le grand espace, integrale directe des H_t , et $W_I(\tau)$ est donné par

$$W_I(\tau) = e^{-i(H'_{I,t} - i\partial_t)\tau} \quad (4.3)$$

avec

$$H'_{I,t} = e^{iH_0 t} H_{I,t} e^{-iH_0 t} \quad (4.4)$$

Et effectivement la matrice de Lax et Phillips que nous avons définie en (3.1) s'écrit

$$S^{L.P.}(0, \rho) = R(\rho)R^{-1}(0) \quad (4.5)$$

ou encore plus explicitement (3.2)

$$(S^{L.P.}(0, \rho)\phi)_t = (R(\rho)R^{-1}(0)\phi)_t = V_{I,t}(\rho - t)V_{I,0}(t)\phi_t \quad (4.6)$$

ce qui nous montre, en particulier, qu'elle applique l'état entrant défini en temps $t = 0$ sur $V_0(\rho)\phi_0$ qui n'est autre que ce même état mais après évolution de 0 à ρ (toujours en représentation d'interaction)

$$(S^{L.P.}(0, \rho)\phi)_0 = (W_I(\rho)\phi)_\rho = (e^{-i(H'_{I,\rho} - i\delta_\rho)\rho}\phi)_\rho \quad (4.7)$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. REED et B. SIMON, *Scattering theory* (New York: Academic, 1979) p. 239–241.
- [2] C. PIRON, *Foundation of quantum physics* (Reeding: Benjamin 1976).
- [3] H. F. TROTTER, *Approximation of Semi-Groups of Operators*, *Pacif. J. Math.*, 8, 887 (1958).
- [4] P. D. LAX et R. S. PHILLIPS, *Scattering theory* (New York: Academic, 1979).
- [5] W. O. AMREIN, J. M. JAUCH et K. B. SINHA, *Scattering theory in quantum mechanics* (Reeding: Benjamin, 1977) p. 528–529.