

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 57 (1984)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Progrès récents dans la physique des systèmes désordonnés  
**Autor:** Toulouse, Gérard  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-115516>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Progrès récents dans la physique des systèmes désordonnés\*)

Par Gérard Toulouse, Laboratoire de Physique de l'E.N.S.,  
24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05

(6. IV. 1984)

*Résumé.* Des progrès récents dans la compréhension physique de la théorie de champ moyen des verres de spin permettent de dégager des concepts de portée très générale: brisure d'ergodicité, répartition des états stables dans l'espace des phases, fluctuations sur le désordre. Ces outils théoriques se prêtent bien à l'analyse des simulations numériques.

## Introduction

Le lecteur soucieux de trouver des informations générales sur la physique des verres de spin (historiques, revues expérimentales et théoriques) est invité à consulter les références [1, 2, 3].

## La théorie de champ moyen

Il a fallu quelque quinze ans (de 1960 à 1975 environ) pour établir sur des bases solides et non ambiguës une théorie de champ moyen des verres de spin. La définition, qui sert de référence de nos jours, est fondée sur le modèle de D. Sherrington et S. Kirkpatrick (SK), qui est la version à longue portée du modèle initialement introduit par S. F. Edwards et P. W. Anderson [4]. Ce modèle repose sur l'hamiltonien très simple suivant:

$$\mathcal{H} = - \sum_{(ij)} J_{ij} S_i S_j. \quad (1)$$

On a  $N$  sites ( $1 \leq i \leq N$ ), sur chaque site  $i$  un spin  $S_i$  (pour simplifier, on se restreindra ici à des spins d'Ising, pouvant prendre les valeurs  $\pm 1$ ), des interactions d'échange  $J_{ij}$  sur chaque liaison  $(ij)$ . Par hypothèse, les interactions  $J_{ij}$  sont considérées comme des variables aléatoires indépendantes. Chaque site interagissant avec tout autre, on a un modèle à portée infinie. Cet hamiltonien simplissime contient bien les deux ingrédients essentiels: frustration et désordre.

Le programme consiste à faire d'abord la moyenne thermodynamique sur les spins (à distribution  $\{J_{ij}\}$  donnée) puis à effectuer la moyenne sur le désordre des interactions. En bref, il faut calculer  $\overline{\text{Log } Z}$ , où  $Z\{J_{ij}\} = \text{Tr}_{\{S_i\}} e^{-\beta \mathcal{H}}$ ; la barre signifie une moyenne sur la distribution des  $J_{ij}$ .

\*) Conférence prononcée le 6 avril 1984 lors de la réunion de la Société Suisse de Physique à Berne.

## L'astuce des répliques

Mais ce qu'on arrive à calculer, c'est  $\overline{Z^n}$ , c'est-à-dire la valeur moyenne de la fonction de partition pour  $n$  répliques, non couplées, du système. On emploie donc l'astuce, dite des répliques,

$$\overline{\text{Log } Z} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\overline{Z^n} - 1}{n}, \quad (2)$$

où l'on fait tendre, en fin de calcul, le nombre  $n$  vers zéro.

Sous cette forme, la moyenne sur le désordre s'effectue aisément et le problème se ramène à la recherche de l'extremum d'une certaine fonction  $G\{q_{\alpha\beta}\}$ , où  $1 \leq \alpha, \beta \leq n$ , avec  $q_{\alpha\alpha} = 0$ ,  $q_{\beta\alpha} = q_{\alpha\beta}$ . Autrement dit,  $G$  est une fonction de  $n(n-1)/2$  variables. Evidemment, à la limite  $n \rightarrow 0$ , ce nombre passe par des valeurs négatives...

Dans la solution SK originelle, la recherche du col dans l'espace des  $\{q_{\alpha\beta}\}$  était restreinte à la première diagonale, ce qui présupposait que les répliques étaient indiscernables:  $q_{\alpha\beta} = q$ , pour tout couple  $(\alpha\beta)$ . Hélas, la solution ainsi obtenue exhibait, à basse température, une entropie négative, ce qui est inacceptable pour des spins d'Ising.

## La brisure de symétrie des répliques

Ainsi s'imposait la nécessité de la brisure de symétrie des répliques (symétrie de permutation), c'est-à-dire la recherche de cols en dehors de la première diagonale, dans l'espace des variables  $\{q_{\alpha\beta}\}$ .

Il est commode de représenter un point dans cet espace par une matrice (symétrique, à éléments diagonaux nuls). Après diverses tentatives intéressantes (A. Blandin, M. Gabay, T. Garel; A. Bray, M. Moore) mais non couronnées de succès parce que l'espace variationnel choisi était trop petit, c'est G. Parisi qui a eu l'idée de considérer l'ensemble des matrices hiérarchiques, illustrées sur la Fig. 1 par un exemple simplifié. Nous appelons une telle matrice hiérarchique, parce

$$\{q_{\alpha\beta}\} = \begin{array}{c|cccc|cccc} 0 & q_0 & q_1 & q_1 & q_2 & q_2 & q_2 & q_2 \\ q_0 & 0 & q_1 & q_1 & q_2 & q_2 & q_2 & q_2 \\ \hline q_1 & q_1 & 0 & q_0 & q_2 & q_2 & q_2 & q_2 \\ q_1 & q_1 & q_0 & 0 & q_2 & q_2 & q_2 & q_2 \\ \hline q_2 & q_2 & q_2 & q_2 & 0 & q_0 & q_0 & q_1 \\ q_2 & q_2 & q_2 & q_2 & q_0 & 0 & q_1 & q_1 \\ \hline q_2 & q_2 & q_2 & q_2 & q_1 & q_1 & 0 & q_0 \\ q_2 & q_2 & q_2 & q_2 & q_1 & q_1 & q_0 & 0 \end{array}$$

Figure 1

Représentation d'une matrice hiérarchique, pour  $n = 8$ . De telles matrices hiérarchiques constituent l'espace variationnel, au sein duquel G. Parisi a trouvé la solution au problème de brisure de symétrie des répliques.

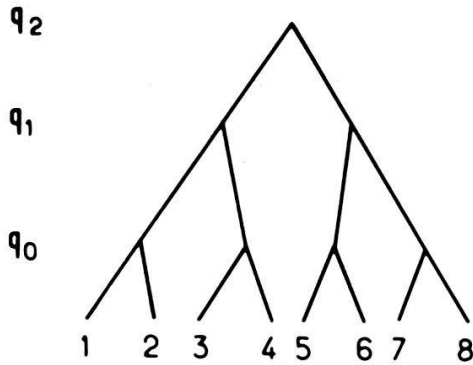


Figure 2

La matrice de la Fig. 1 peut être considérée comme engendrée par un arbre. La valeur de l'élément de matrice  $q_{\alpha\beta}$  est donnée par le premier ancêtre commun de  $\alpha$  et  $\beta$ . Ainsi, par exemple:  $q_{34} = q_0$ ,  $q_{58} = q_1$ ,  $q_{26} = q_2$ ;  $q_0 > q_1 > q_2$ .

que les répliques peuvent être placées aux extrémités d'une structure en arbre, la valeur de l'élément de matrice  $q_{\alpha\beta}$  étant alors déterminée par le premier ancêtre commun à  $\alpha$  et  $\beta$  (en utilisant une analogie évidente avec un arbre généalogique). Voir Fig. 2.

Puis on laisse le nombre de branchements croître indéfiniment, avant de faire tendre  $n \rightarrow 0$ , et on appelle  $x(q)$  la fraction des paires de répliques  $(\alpha\beta)$  telles que  $q_{\alpha\beta} < q$ . Les calculs variationnels indiquent alors que l'extremum de la fonction  $G$  est obtenu pour une matrice  $\{q_{\alpha\beta}\}$  paramétrée par une fonction  $x(q)$  ou, de manière équivalente et consacrée par l'usage, par une fonction  $q(x)$ .

### Une fonction d'ordre

L'allure de la fonction  $q(x)$  ainsi obtenue est esquissée sur la Fig. 3, pour deux valeurs de la température, en-dessous de la température de gel  $T_g$ . Dans la

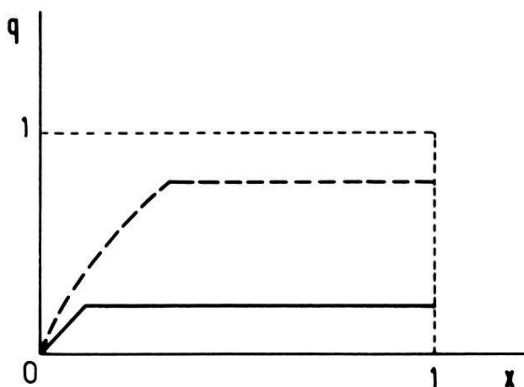


Figure 3

Allure schématique de la 'fonction d'ordre'  $q(x)$  pour deux valeurs de la température  $T$ . En trait plein:  $T \leq T_g$ ; en tirets:  $T = 0$ .  $T_g$  est la température de gel. Par définition,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq q \leq 1$ .

phase paramagnétique ( $T > T_g$ ), la fonction  $q(x)$  est constante (et identiquement nulle, en l'absence de champ magnétique).

Se pose alors la question de la signification physique de cette 'fonction d'ordre'  $q(x)$ . On peut montrer que la valeur maximale de  $q(x)$ , celle qui est atteinte sur le plateau:  $q_M$ , est précisément égale au paramètre d'Edwards-Anderson:

$$q_M = q_{EA} = \frac{1}{N} \sum_i \overline{\langle S_i \rangle^2}, \quad (3)$$

qui mesure le 'gel' des spins. Mais quel est le sens physique de la variable  $x$ ?

Comme la solution de Parisi passait avec succès les tests de stabilité et les confrontations avec l'expérimentation numérique, la question a été posée avec de plus en plus d'insistance, au fil des ans.

### Une fonction de probabilité $P(q)$

Une première idée, assez naturelle, consiste à esquiver la question, en essayant de se débarrasser de  $x$ . On définit:

$$P(q) = \frac{dx}{dq}. \quad (4)$$

Parce que  $q(x)$  est monotone non décroissante,  $P(q)$  est positive. De plus  $P(q)$  est automatiquement normalisée,  $\int_0^1 P(q) dq = \int_0^1 dx = 1$ , puisque  $x$  varie entre 0 et 1. Et comme les quantités physiques font intervenir  $q(x)$  sous la forme d'intégrales, celles-ci s'expriment en terme des moments de la fonction  $P(q)$ , qui a toutes les bonnes propriétés d'une fonction de probabilité.

On a ainsi déplacé la question qui devient: quel est le sens physique de cette fonction de probabilité  $P(q)$ ?

La réponse est venue au cours de l'an passé [5, 6]: la fonction  $P(q)$  est la probabilité pour que deux vallées, prises au hasard, aient un recouvrement (overlap) égal à  $q$ . Plus précisément, on a:

$$P(q) = \sum_{s,s'} W_s W_{s'} \delta(q - q^{ss'}), \quad (5)$$

où  $s$  (et  $s'$ ) est un indice repérant les différentes vallées (états stables ergodiquement séparés),  $W_s = e^{-f^s/T}/Z$  est le poids statistique (de Boltzmann) de la vallée  $s$  (par définition  $\sum_s W_s = 1$ ) et  $q^{ss'}$  est le recouvrement des vallées  $s$  et  $s'$  défini par:

$$q^{ss'} = \frac{1}{N} \sum_i \langle S_i \rangle_s \langle S_i \rangle_{s'}. \quad (6)$$

### Géométrie dans l'espace des phases

Les notions précédentes prennent un sens remarquablement simple et naturel, en terme de géométrie dans l'espace des phases. L'espace des phases, pour un ensemble de  $N$  spins d'Ising, est un espace à  $N$  dimensions: une

configuration des spins est représentée dans cet espace par un point de coordonnées  $\langle S_i \rangle$ ,  $i = 1$  à  $N$ . Plaçons-nous maintenant dans le cas d'un verre de spin à  $T < T_g$ . Il existe, dans l'espace des phases, un ensemble de vallées  $s$  séparées par des barrières infinies. La distance entre deux vallées  $s$  et  $s'$  (c'est-à-dire le nombre de spins qu'il faut renverser pour passer de l'une à l'autre) est naturellement reliée au recouvrement  $q^{ss'}$  (plus petite la distance, plus grand le recouvrement), qui n'est rien d'autre qu'un produit scalaire dans l'espace des phases. Enfin, chaque vallée est pondérée par un poids statistique  $W_s$ : à basse température, ce poids est essentiellement le volume du bassin attracteur de la vallée  $s$ .

On voit donc que la fonction  $P(q)$  est un concept très général pour les systèmes multi-états (hydrodynamique, automates, mémoires, structures amorphes, problèmes d'optimisation, configurations de macromolécules, espèces biologiques, etc. . .). Ces systèmes sont caractérisés par un ensemble de configurations possibles (espace des phases) et un sous-ensemble de configurations stables. Dès qu'on a défini des poids et des distances (ou recouvrements), on peut définir une fonction  $P(q)$ , qui décrit la répartition des configurations stables dans l'espace des phases.

### Un critère général de transition

Dans le cadre de la physique statistique, la notion de fonction  $P(q)$  est évidemment utilisable pour toute transition de phase. De manière générale, pour un système magnétique homogène ou inhomogène, on montre qu'on peut définir une fonction  $\phi(u)$  telle que:

$$\phi(u) = \left\langle \exp \left( u \sum_{i=1}^N S_i \sigma_i \right) \right\rangle_2 = \int_0^1 P(q) e^{N u q} dq, \quad (7)$$

où la moyenne thermodynamique  $\langle \cdots \rangle_2$  est prise pour deux répliques réelles et non couplées du même système, l'une avec spins  $S$  et l'autre avec spins  $\sigma$ , dans les notations ci-dessus. Par cette formule, la fonction  $P(q)$  peut être obtenue sans connaissance préalable de la décomposition en vallées.

On obtient ainsi un critère très général pour l'existence d'une transition de phase, qui se traduit par une non-analyticité de

$$\psi(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Log } \phi(u) \quad \text{en } u = 0.$$

Lorsque  $\psi(u)$  est analytique, elle peut se développer en puissance de  $u$ , de la manière suivante:

$$\psi(u) = u \langle q \rangle + \frac{u^2}{2} N \langle q^2 \rangle_c + \cdots, \quad (8)$$

où  $\langle q \rangle$  et  $\langle q^2 \rangle_c$  sont les deux premiers cumulants de la distribution  $P(q)$ . Ceci implique que  $\langle q^2 \rangle_c$  est d'ordre  $N^{-1}$ , c'est-à-dire que la fonction  $P(q)$  se réduit à une fonction delta (une seule vallée). Une transition de phase se produit lorsque  $\langle q^2 \rangle_c$  n'est plus infinitésimal: alors  $\psi(u)$  n'est plus analytique en  $u = 0$ , et la fonction  $P(q)$  ne se réduit plus à une seule fonction delta (multiplicité de vallées).



Dans le cas de transitions ordinaires (par exemple, ferromagnétiques), la fonction  $P(q)$  est constituée de plusieurs fonctions delta. Dans le cas des transitions verre de spin, la fonction  $P(q)$  comporte une composante continue, qui apparaît bien comme une signature de la brisure de symétrie des répliques, si on se reporte à la formule (4) et à la Fig. 3.

Le grand avantage de cette formulation est qu'il n'est pas nécessaire de connaître à l'avance l'ordre pour décrire la transition, au contraire d'une approche à la Landau. On a remplacé la connaissance préalable de la brisure de symétrie par la considération de deux répliques réelles, voir la formule (7). D'où un critère très général qui permet d'englober à la fois les transitions ordinaires à la Landau, avec brisure de symétrie simple, et les transitions du type verre de spin, sans brisure de symétrie simple.

## Deux surprises

Pour revenir au modèle SK, telle était donc la situation au début de l'été 1983: par une procédure (l'astuce des répliques), qui n'était au départ ni mathématiquement orthodoxe ni physiquement sensée, on avait abouti à une solution en terme d'une fonction  $P(q)$  dont la signification physique était enfin comprise mais qui ne levait qu'un coin du voile.

Depuis lors, deux surprises de taille sont apparues, qui ont permis d'accéder à une réelle compréhension physique d'ensemble du modèle.

## La hiérarchie des vallées

La première surprise est la découverte de la propriété d'ultramétrie [7]. Malgré ce nom un peu intimidant (en provenance de la topologie et de l'arithmétique), il s'agit en fait d'une notion très simple. Si on choisit trois points au hasard dans un espace ordinaire, on construit ainsi un triangle quelconque. Or si on choisit trois vallées au hasard dans l'espace des phases du modèle SK, on obtient toujours soit un triangle isocèle aigu (avec deux côtés égaux et un troisième plus petit), soit un triangle équilatéral. Un espace qui possède cette propriété est dit ultramétrique. Plus précisément ici, si les recouvrements deux à deux des trois vallées sont appelés  $(q_1, q_2, q_3)$ , on démontre que:

$$P(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{2}\{P(q_1)P(q_2)\theta(q_1 - q_2) \delta(q_2 - q_3) + \text{permutations}\} \\ + \frac{1}{2}P(q_1)x(q_1) \delta(q_1 - q_2) \delta(q_2 - q_3). \quad (9)$$

Le mystère de cette topologie de l'ensemble des vallées s'éclaircit si l'on admet que ces vallées sont engendrés par un processus continu de bifurcations (multifurcations même) lorsqu'on abaisse la température, et si l'on fait l'hypothèse que le recouvrement de deux vallées est déterminé par le premier ancêtre commun. On peut se représenter l'arbre des bifurcations, pour un échantillon donné, de la manière schématique esquissée sur la Fig. 4. Il saute aux yeux qu'un tel arbre ressemble beaucoup à l'arbre de la Fig. 2 (pourvu qu'on remplace les  $n$  répliques,  $n \rightarrow 0$ , par l'ensemble infini des vallées): on commence à discerner ainsi ce qui se cachait sous l'arbre de Parisi (cet arbre est régulier parce qu'il

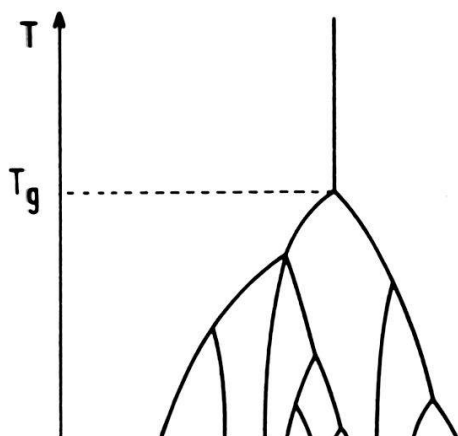


Figure 4

Allure très schématique de la cascade continue de bifurcations qui engendre l'ensemble des vallées lorsque la température diminue. Pour  $T > T_g$ , dans la phase paramagnétique, il n'y a qu'une vallée. Pour  $T < T_g$ , dans la phase verre de spin, il y a ergodicité brisée et une multiplicité de vallées.

correspond à une moyenne sur tous les échantillons). En vérité, il est facile de se convaincre qu'un ensemble, engendré par un arbre de cette manière, possède la propriété ultramétrique.

La meilleure façon de visualiser cette ultramétrie consiste à se placer de nouveau dans l'espace des phases et à regrouper en amas de voisinage toutes les vallées dont les recouvrements deux à deux sont supérieurs à une valeur  $q$  donnée. Quel que soit  $q$ , on obtient toujours des amas disjoints (alors que, dans un espace ordinaire, on obtiendrait des sphères qui se chevauchent). En effet, pour un ensemble engendré par un arbre, la procédure revient à couper l'arbre à une certaine hauteur, ce qui détache des branches disjointes. La structure hiérarchique des amas ainsi obtenus est schématisée sur la Fig. 5.

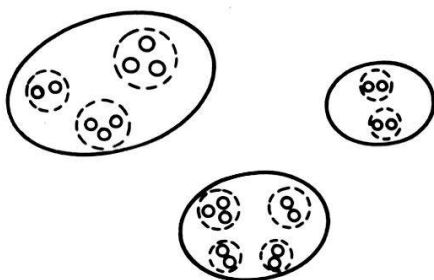


Figure 5

Structure hiérarchique (ultramétrique) des amas de voisinage dans l'espace des phases. Les plus petits amas (en trait plein) contiennent des vallées dont les recouvrements deux à deux sont supérieurs à  $q_1$ ; Les amas en tirets correspondent à des recouvrements  $> q_2$ ; les grands amas en trait plein à des recouvrements  $> q_3$  ( $q_1 > q_2 > q_3$ ). Ceci est très schématique: l'important est que les amas ne se chevauchent pas.

### Fluctuations d'échantillon à échantillon

La deuxième surprise est apparue lorsqu'on a considéré quatre vallées prises au hasard (et non plus deux ou trois, comme envisagé ci-dessus). Si on sépare



arbitrairement ces quatre vallées en deux paires, dont on dénote  $q_1$  et  $q_2$  les recouvrements, on obtient:

$$P(q_1, q_2) = \frac{1}{3}P(q_1) \delta(q_1 - q_2) + \frac{2}{3}P(q_1)P(q_2), \quad (10)$$

alors qu'on se serait attendu à un produit simple, puisque les paires de vallées sont choisies indépendamment.

La solution du paradoxe est la suivante: la fonction  $P(q)$  dépend en fait de l'échantillon, c'est-à-dire de la configuration des  $J_{ij}$ , même pour un système infini. Il n'y a pas de limite thermodynamique ( $N \rightarrow \infty$ ) unique et bien définie, pas d'auto-moyennage sur le désordre (lack of self-averaging) [7, 8].

Autrement dit, pour un échantillon donné, il convient d'écrire  $P_J(q)$  pour bien marquer la dépendance en la distribution des  $J_{ij}$ . On réservera désormais la notation  $P(q)$  à la valeur moyenne de  $P_J(q)$  sur tous les échantillons:

$$P(q) = \overline{P_J(q)}. \quad (11)$$

La formule (10) se comprend alors comme suit. Si l'on a bien factorisation pour un échantillon donné:

$$P_J(q_1, q_2) = P_J(q_1)P_J(q_2), \quad (12)$$

on a par contre

$$P(q_1, q_2) = \overline{P_J(q_1, q_2)} = \overline{P_J(q_1)P_J(q_2)} \neq \overline{P_J(q_1)}\overline{P_J(q_2)} = P(q_1)P(q_2), \quad (13)$$

la valeur moyenne du produit n'est pas égale au produit des valeurs moyennes.

Quelles sont les quantités qui fluctuent sur le désordre, en dehors de  $P_J(q)$ ? On peut montrer que la susceptibilité magnétique  $\chi$  est aussi une quantité fluctuante, avec:

$$\overline{\chi^2} - (\bar{\chi})^2 = \langle q^2 \rangle_c \neq 0, \quad T < T_g, \quad (14)$$

mais l'énergie interne et l'énergie libre [9] ont de bonnes limites thermodynamiques.

La fluctuation de  $P_J(q)$  sur le désordre signifie que, à température et champ magnétique donnés, chaque échantillon  $\{J\}$  possède sa fonction d'ordre  $q_J(x)$  ou, si l'on veut, sa fonction  $x_J(q)$ . La fonction d'ordre  $q(x)$ , de la Fig. 3, qui intervient dans les grandeurs physiques moyennes, est en quelque sorte la moyenne des fonctions  $q_J(x)$ , au sens suivant:

$$x(q) = \int_0^q P(q') dq' = \int_0^q \overline{P_J(q')} dq' = \overline{x_J(q)}. \quad (15)$$

Il est évidemment très tentant d'essayer de reconstituer la loi de distribution de la fonction  $q_J(x)$ . Une collaboration Paris-Rome (M. Mézard, G. Parisi, N. Sourlas, M. Virasoro) y est parvenue par un véritable tour de force.

Pour des raisons techniques, les résultats se présentent de la manière suivante. Plaçons-nous à une valeur de  $q$ , arbitraire mais fixe, et cherchons la loi de distribution  $P(x_J)$ . On rappelle que  $x_J(q)$  est la probabilité pour que deux vallées prises au hasard dans l'échantillon  $\{J\}$  aient un recouvrement inférieur à  $q$ .

Résultat remarquable: la loi de distribution  $P(x_J)$  ne dépend que de la valeur moyenne  $x$  ( $x(q) = \overline{x_J(q)}$ ), et non pas des paramètres extérieurs (température, champ magnétique).

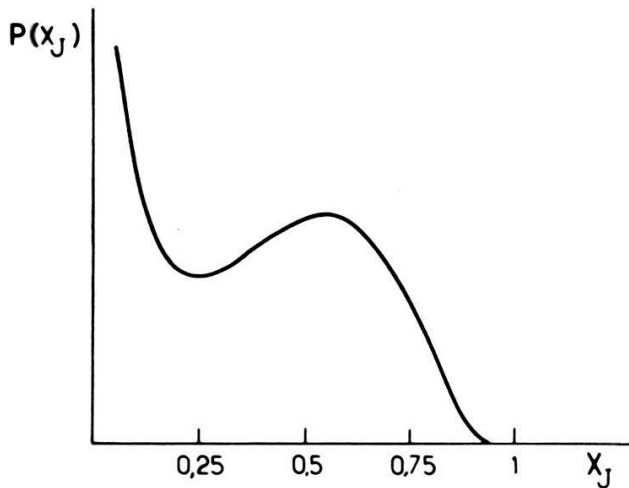


Figure 6

Allure de la loi de distribution  $P(x_J)$ , définie dans le texte, pour une valeur de  $q$  telle que  $x(q) = 0,3$ . Sachant que  $x_J = x$ , on remarque que la valeur moyenne tombe dans un creux de la loi de probabilité. La distribution reflète les fluctuations qui existent, d'un échantillon à l'autre, dans la répartition des vallées dans l'espace des phases.

Cette loi de distribution a été reconstituée à partir de ses sept premiers moments [7] et son allure est esquissée sur la Fig. 6. On note que la valeur la plus probable est  $x_J = 0$  et que la valeur moyenne  $x = \bar{x}_J$  tombe dans un creux de probabilité.

### Fluctuations de vallée à vallée

Evidemment, ces fluctuations d'un échantillon à un autre sont liées au phénomène d'ergodicité brisée, c'est-à-dire à l'existence d'une multiplicité de vallées diverses. Ce sont les fluctuations de vallée à vallée qui sont la source des fluctuations d'échantillon à échantillon. Il est donc intéressant de rechercher une grandeur qui soit plus directement couplée aux effets de non-reproductibilité (fluctuations de vallée à vallée, pour un échantillon donné).

On considère la fonction  $P_J^s(q)$ , qui décrit l'environnement de la vallée  $s$  dans l'espace des phases,

$$P_J^s(q) = \sum_{s'} W_{s'} \delta(q - q^{ss'}), \quad (16)$$

ou son intégrale

$$x_J^s(q) = \sum_{s'} W_{s'} \theta(q - q^{ss'}), \quad (17)$$

et on s'intéresse maintenant aux fluctuations de  $x_J^s$  sur la variable  $s$ . Le calcul fournit en fait une moyenne (pondérée sur  $\{W_s\}$  et sur  $\{J\}$ )  $P(X) = \sum_s W_s \delta(X - x^s)$ , sous forme exacte:

$$P(X) = \frac{(X)^{x-1}(1-X)^{-x}}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}, \quad (18)$$

où  $\Gamma$  est la fonction gamma. On vérifie bien que  $\int_0^1 X P(X) dX = x$ ,  $x = x(q)$ .

Cette fonction  $P(X)$  diverge pour  $X = 0$  et  $1$ , qui sont donc les deux valeurs les plus probables. Physiquement, cela exprime le fait que, dans l'espace des phases, il y a beaucoup de vallées de très petits poids et un nombre fini de vallées de très grands poids. (Le contenu physique de  $P(X)$  est clarifié par l'introduction de la variable  $Y = 1 - X$ , ce qui revient à raisonner en terme d'amas de voisinage [7]; nous ne l'avons pas fait ici pour éviter de multiplier les notations). On voit facilement que le minimum de  $P(X)$  est obtenu pour  $X = 1 - x$ , si bien que, dans le cas  $x = \frac{1}{2}$ , la valeur moyenne  $x$  correspond à un minimum absolu de probabilité!

## Conclusions

Résumons les conclusions auxquelles nous sommes parvenus dans l'étude de la théorie de champ moyen des verres de spin.

La brisure de symétrie des répliques décrit un phénomène de brisure d'ergodicité (multiplicité de vallées, séparées par des barrières infinies).

La 'fonction d'ordre'  $q(x)$  décrit la distribution de ces vallées dans l'espace des phases.

L'ensemble des vallées a une distribution hiérarchique (ultramétrique) et il y a des fluctuations de vallée à vallée, et d'échantillon à échantillon, dont on a pu déterminer les lois de probabilité.

Ces propriétés sont particulièrement adaptées à une analyse par simulation numérique, ce qui permet un test crucial et direct de la validité de la théorie, et un moyen d'analyse des systèmes plus réalistes, avec forces à courte portée.

Toute cette description est purement statique mais elle a des conséquences dynamiques évidentes: probabilité de sauter d'une vallée à l'autre, diffusion dans l'espace des phases, temps de relaxation, rémanence.

Il est maintenant hors de doute raisonnable que la solution de Parisi du modèle SK possède un sens physique bien précis: il reste aux mathématiciens à donner un label d'orthodoxie à l'astuce des répliques.

Les concepts topologiques et géométriques, dégagés ci-dessus, paraissent utiles et prometteurs pour tous les systèmes multi-états (systèmes frustrés en général), présentant les propriétés de 'diversité' et 'stabilité', selon les termes de P. W. Anderson [10]. Signalons, à cet égard, les développements récents dans le problème du voyageur de commerce (tours de longueur minimale passant par  $N$  points) qui est un problème classique d'optimisation [11].

Il semble aussi qu'une telle répartition hiérarchique d'états, et la plasticité liée aux fluctuations sur le désordre, puissent présenter un intérêt physiologique ou informatique, dans la conception de mémoires distribuées (rappelons que, dans le cortex, chaque neurone agit sur dix mille autres, en moyenne).

Mentionnons enfin que la notion d'ultramétrie a déjà été évoquée en taxonomie (reconstitution de l'arbre de l'évolution, à partir des distances entre séquences de protéines ou d'acides nucléiques) [12] [13].

## Remerciements

J'ai plaisir à exprimer ma gratitude à mes collaborateurs Marc Mézard et Nicolas Sourlas, ainsi qu'à nos amis de Rome, qui sont les vrais auteurs des

résultats originaux décrits dans ce rapport. Ce texte reprend de larges extraits d'une conférence prononcée à l'occasion du 60ème anniversaire de P. W. Anderson (à paraître dans le Bulletin de la Société Française de Physique).

## REFERENCES

- [1] J. P. RENARD, *Transition de phase dans les verres de spin: les expériences sont-elles concluantes?*, Congrès de la Société Française de Physique (Grenoble, 1983), à paraître.
- [2] G. TOULOUSE, *Frustrations et désordres: problèmes nouveaux en mécanique statistique*, Congrès de la Société Française de Physique 1981 (Les Editions de Physique).
- [3] Heidelberg Colloquium on Spin Glasses, ed. by J. L. van Hemmen and I. Morgenstern, Lecture Notes in Physics, Vol. 192 (Springer, 1983).
- [4] S. F. EDWARDS et P. W. ANDERSON, *Theory of Spin Glasses*, J. Phys. F 5 (1975) 965.
- [5] G. PARISI, *Order Parameter for Spin Glasses*, Phys. Rev. Letters 50 (1983) 1946.
- [6] C. DE DOMINICIS et A. P. YOUNG, *Weighted Averages and Order Parameters for the infinite range Ising Spin Glass*, J. Phys. A 16 (1983) 2063.
- [7] M. MÉZARD, G. PARISI, N. SOURLAS, G. TOULOUSE et M. VIRASORO, *On the Nature of the Spin Glass Phase*, Phys. Rev. Letters 52 (1984) 1156. *Replica Symmetry Breaking and the Nature of the Spin Glass Phase*, J. Physique, 45 (1984) 843.
- [8] A. P. YOUNG, A. J. BRAY et M. A. MOORE, *Lack of Self-Averaging in Spin Glasses*, J. Phys. C 17 (1984) L 149.
- [9] G. TOULOUSE et B. DERRIDA, *Free Energy Probability Distribution in the SK Spin Glass Model*, Proc. VI Brazilian Symposium on Theoretical Physics (Editions du CNPq, 1981).
- [10] P. W. ANDERSON, *Suggested Model for prebiotic Evolution: the use of Chaos*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 80 (1983) 3386.
- [11] S. KIRKPATRICK, C. D. GELATT JR et M. P. VECCHI, *Optimization by Simulated Annealing*, Science 220 (1983) 671; et communication privée après cette conférence.
- [12] J. NINIO, *Molecular Approaches to Evolution* (Princeton University Press, 1983).
- [13] Voir aussi J. P. BENZECRI, *L'Analyse des Données*, Tome I, La Taxonomie (Dunod, 1984).