

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 57 (1984)

Heft: 1

Artikel: Calcul numérique de la masse physique dans le modèle ϕ^4_2 pour de petites valeurs de

Autor: Hirsbrunner, Béat

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-115495>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>



Calcul numérique de la masse physique dans le modèle $\lambda:\phi^4_2$ pour de petites valeurs de $\lambda^1)$

Par B  at Hirsbrunner, Département de Mathématiques, Ecole Polytechnique Fédérale, CH-1015 Lausanne, Suisse

(28. VII. 1983)

Abstract. It is known that the perturbation series in powers of λ for the physical mass in the $\lambda:\phi^4_2$ quantum field model is Borel summable. In this paper, we take advantage of this fact to compute numerically this physical mass for small values of the coupling constant λ . To do this, we evaluate accurately the coefficients of the perturbation series up to the fourth order, and we compute Lipatov estimates for higher orders. These results are then used to compute low order Borel approximants for the physical mass, and to get plausible estimates on their accuracy. For definiteness, we focuss our attention on the critical value of λ for which the physical mass vanishes. We give numerical results for this critical value. Our numbers depend on the value of a certain critical exponent. We argue that our computations give the critical λ with an error between 5 and 10%, as soon as the critical exponent is known.

TABLE DES MATIERES

Introduction	2
1. La sommabilité selon Borel de m_{ph}^2	3
1.A. Les fonctions de Schwinger	4
1.B. Quelques propriétés des fonctions de Schwinger	4
1.C. La masse m_{ph}^2	6
2. La série perturbative de m_{ph}^2	7
2.A. Changement d'échelle	7
2.B. La n -ème dérivée par rapport à $z = \lambda/m_0^2$	8
2.C. La n -ème dérivée par rapport à z en $z = 0$	8
2.D. La n -ème dérivée par rapport à z en $z = 0$, $n \leq 4$	10
3. La construction des approximants de Borel de m_{ph}^2	13
Introduction	13
3.A. Les approximants de Borel $\bar{B}_N(z)$ et les zéros z_N	14
3.B. Les paramètres optimaux	16
3.C. Les trois hypothèses A , α , R	16
3.D. Le choix optimal des paramètres ϕ , B' , λ' , ν'	18
4. Résultats	18
4.A. Le comportement numérique des $B_N(z)$	19

¹⁾ Ce travail, réalisé    l'Institut de Physique Théorique de l'Université de Lausanne, est une version abrégée de la deuxième partie de la thèse de doctorat Hirsbrunner (1981a).

4.B. Discussion	20
4.C. Peut-on améliorer ces résultats?	24
Conclusion	25
Remerciements	27
Annexe 1. La fonction d'essai f_ν	27
A. Définition de f_ν	27
B. Quelques propriétés de f_ν	27
C. Les approximants de Borel de f_ν	27
D. Sur la dépendance en z_{cr} et ν	30
Annexe 2. Sur le calcul de a_5, a_6	31
A. Une estimation de a_5, a_6	31
B. La répercussion des erreurs $\{\delta a_n\}_{n=0}$ sur le zéro z_N	32
C. La précision souhaitable de a_5, a_6	32
D. Conclusion	32
Références bibliographiques	33

Introduction

Dans cet article, notre propos est de donner une idée sur l'information quantitative qu'on peut tirer des séries perturbatives de la théorie quantique des champs en combinant:

- 1°) le fait que ces séries sont parfois sommables selon Borel,
- 2°) la connaissance précise de leurs quelques premiers coefficients,
- 3°) les estimations à la Lipatov qu'on utilise actuellement pour les coefficients d'ordre élevé.

Pour atteindre ce but, nous avons choisi de resommer la série de puissances de λ qui donne le carré de la *masse physique* m_{ph}^2 dans le modèle $\lambda:\phi^4:_{2,2}$. Dans cette resommation, nous ferons un large usage des méthodes variées que nous avons exposées et illustrées dans un article précédent, Hirsbrunner (1982).

Justifions ce choix en quelques mots. Tout d'abord, Eckmann–Epstein (1979) ont démontré que la série perturbative associée à $\lambda \mapsto m_{ph}^2(m_0^2, \lambda)$ est sommable selon Borel, à masse «libre» m_0 positive fixée, pour λ dans un certain intervalle $[0, \lambda_0]$, avec λ_0 positif. Il est donc possible en principe de reconstruire quantitativement m_{ph}^2 pour $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ à partir de la série perturbative. Ensuite, la manière dont m_{ph}^2 dépend de λ a des aspects intéressants. L'«image de Goldstone» suggère le comportement qualitatif de la figure 1 (voir par exemple Glimm–Jaffe–Spencer (1973), p. 142); dans cette figure, λ_{cr} est le point où m_{ph}^2 s'annule; λ_{cr} est appelé le point critique. Ce comportement a été confirmé dans des modèles voisins, voir par exemple Glimm–Jaffe (1974) et Fröhlich (1976, pp. 39–44); voir aussi les références de Fröhlich (1976) et Summers (1979). On peut espérer que $\lambda_0 \geq \lambda_{cr}$, et que la resommation de la série perturbative pour m_{ph}^2 permettra d'évaluer λ_{cr} . En troisième lieu, le calcul des coefficients de la série associée à m_{ph}^2 est relativement simple, puisqu'il peut se ramener à l'étude de la «fonction à deux points» dans le voisinage immédiat de la couche de masse $p^2 = m_0^2$.

Cette simplicité est toute relative, cependant. Comme il est de règle en théorie quantique des champs, il est pratiquement impossible de calculer avec

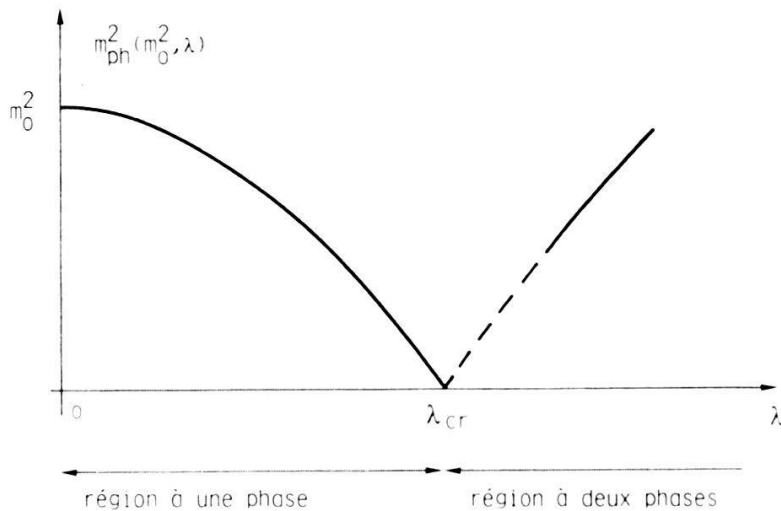


Figure 1

Le comportement de la masse selon l'image de Goldstone.

précision autre chose que les quelques premiers coefficients de la série. Ainsi, nous nous contenterons dans ce travail des cinq premiers coefficients. Dans cette situation, les méthodes exposées dans Hirsbrunner (1982) nous seront très utiles pour tirer un maximum d'informations quantitatives sur m_{ph}^2 pour des λ pas trop minuscules. Combinées avec des estimations heuristiques sur le comportement asymptotique des coefficients aux grands ordres, elles vont nous permettre de donner avec une certaine confiance des valeurs numériques pour m_{ph}^2 jusqu'à des λ de l'ordre de $1.5m_0^2$ à $2m_0^2$, et même de risquer des estimations pour λ_{cr} .

Dans le Chapitre 1, nous rassemblons quelques résultats de la théorie constructive des champs concernant le modèle $\lambda:\phi^4_2$; nous nous bornons dans notre choix à ceux qui nous ont paru indispensables pour notre propos, en fixant tout particulièrement notre attention sur la sommabilité selon Borel de la série perturbative en puissances de λ du carré de la masse $\lambda \mapsto m_{ph}^2(m_0^2, \lambda)$, $m_0 > 0$ fixé. Le Chapitre 2 présente notre calcul précis des cinq premiers coefficients de la série perturbative pour m_{ph}^2 . Nos chiffres sont rassemblés dans l'équation (2.12). Dans le Chapitre 3, nous exposons comment nous avons combiné ces chiffres avec ce qu'une méthode heuristique nous donne concernant le comportement des coefficients aux grands ordres pour construire les approximants de Borel de $m_{ph}^2(m_0^2, \lambda)$. Les approximants présentés sont ceux qui nous ont paru les mieux adaptés à une estimation de λ_{cr} . Le Chapitre 4 rassemble nos résultats sur λ_{cr} et plus généralement sur $m_{ph}^2(m_0^2, \lambda)$ pour $0 \leq \lambda \leq \lambda_{cr}$. Notre travail se termine par nos conclusions, suivies par quelques points particuliers discutés dans les annexes.

1. La sommabilité selon Borel de m_{ph}^2

Dans ce chapitre nous rappelons quelques résultats bien connus du modèle $\lambda\phi^4_2$ dans la théorie constructive des champs relativistes quantifiés. En particulier nous portons notre attention sur la sommabilité selon Borel de la série perturbative en puissances de λ de la masse $\lambda \mapsto m_{ph}^2(m_0^2, \lambda)$, $m_0 > 0$ fixé.

1.A. Les fonctions de Schwinger

Le modèle $\lambda\phi^4$ à deux dimensions d'espace-temps est caractérisé par sa *densité lagrangienne*. Celle-ci est donnée formellement par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x^0, \vec{x}) &= \mathcal{L}_0(x^0, \vec{x}) - \lambda\phi^4(x^0, \vec{x}) \\ \mathcal{L}_0(x^0, \vec{x}) &= \frac{1}{2}((\partial_{x^0}\phi)^2 - (\partial_{\vec{x}}\phi)^2 - m_0^2\phi^2)(x^0, \vec{x})\end{aligned}\quad (1.1)$$

où $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$ est un champ scalaire réel (boson massif, neutre et de spin 0), m_0 est la masse libre et λ est la constante de couplage.

L'existence des fonctions de Schwinger S_n associées à la lagrangienne (1.1) est assurée par le résultat fondamental suivant.

Théorème 1 (Glimm–Jaffe–Spencer (1973), page 161). *Soit $m_0 > 0$ fixé et soit un n -tuple (M_1, \dots, M_n) d'entier positifs. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $0 \leq \lambda < \varepsilon \cdot m_0^2$ les limites*

$$\lim_{g \nearrow 1} \int_Q \prod_{j=1}^n : \phi^{M_j} : (x_j) d\nu_g(\phi)$$

existent au sens des distributions de $Q = \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{2n})$.

Dans cet énoncé ϕ est un champ scalaire euclidien et $d\nu_g(\phi)$ est la «mesure en interaction» sur $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$ définie par

$$d\nu_g(\phi) = \frac{\exp[-\lambda \cdot \int_{\mathbf{R}^2} : \phi^4 : (x) \cdot g(x) d^2x] d\mu_{m_0^2}(\phi)}{\int_Q \exp[-\lambda \cdot \int_{\mathbf{R}^2} : \phi^4 : (x) \cdot g(x) d^2x] d\mu_{m_0^2}(\phi)}$$

où $d\mu_{m_0^2}(\phi)$ est la mesure gaussienne sur $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$ de moyenne 0 et de covariance $(-\Delta + m_0^2)^{-1}$; $:$: sont les points de Wick relatifs à la mesure $d\mu_{m_0^2}(\phi)$; $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ est à support compact

Remarques. 1. Pour $M_1 = \dots = M_n = 1$ les limites du Théorème 1 sont désignées par

$$S_n(x; m_0^2, \lambda)$$

et sont appelées les *fonctions de Schwinger*. x désigne le n -tuple $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_j \in \mathbf{R}^2$.

2. Par linéarité le Théorème 1 se généralise à

$$S_n(Q, x; m_0^2, \lambda) \equiv \lim_{g \rightarrow 1} \int \prod_{j=1}^n : Q_j(\phi) : (x_j) d\nu_g(\phi)$$

où $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$ est un n -tuple de polynômes à une variable. Par abus de langage ces S_n sont également appelées fonctions de Schwinger.

1.B. Quelques propriétés des fonctions de Schwinger

1. Pour $0 \leq \lambda < \varepsilon \cdot m_0^2$ les $S_n(x; m_0^2, \lambda)$ sont les fonctions de Schwinger d'une théorie de Wightman dont le spectre de masse est de la forme, voir Figure 2:

$$\{0\} \cup \{m_{ph}(m_0^2, \lambda)\} \cup \{p \geq 2m_{ph}(m_0^2, \lambda)\},$$

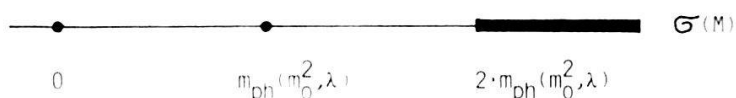


Figure 2

Le spectre de masse.

où 0 est une valeur propre de multiplicité 1 (unicité du vide); $m_{ph}(m_0^2, \lambda)$ est une valeur propre isolée (le sous-espace propre correspondant porte une représentation irréductible du groupe de Poincaré: ce sont les états à «une particule de masse m_{ph} »); m_{ph} est appelée la *masse physique*. Pour $\lambda \rightarrow 0$ on a $m_{ph}(m_0^2, \lambda) \rightarrow m_0$. (Glimm–Jaffe–Spencer (1973 et 1974)).

2. Les fonctions de Schwinger $(m_0^2, \lambda) \mapsto S_n(Q, x; m_0^2, \lambda)$ sont C^∞ dans $0 \leq \lambda/m_0^2 < \varepsilon$ et leurs développements en puissances de λ (m_0^2 fixé) sont donnés par la théorie des perturbations usuelle. (Il en est de même pour les éléments de la «matrice S »; d'où la «non trivialité» de la «matrice S »). (Dimock (1974), Eckmann–Magen–Sénéor (1975), Eckmann–Epstein–Fröhlich (1976)).

3. Les fonctions de Schwinger $\lambda \mapsto S_n(Q, x; m_0^2, \lambda)$ peuvent être prolongées analytiquement dans un domaine du type

$$\{\lambda/|\lambda| < \varepsilon \cdot m_0^2 \text{ et } |\arg \lambda| < \pi/2 + \varepsilon'\} \text{ avec } \varepsilon' > 0.$$

De plus ces fonctions et leurs développements perturbatifs satisfont le théorème de Watson–Nevanlinna. Les fonctions de Schwinger sont donc *sommables selon Borel* par rapport à λ et elles peuvent être entièrement reconstruites à partir de leurs développements en puissances de λ . (Eckmann–Magen–Sénéor (1975)).

4. Soit \tilde{H}_n la fonction définie par la transformée de Fourier de S_n^T :

$$\begin{aligned} i^n \cdot \delta^{(2)}\left(\sum_{j=1}^n k_j\right) \cdot \tilde{H}_n(Q_1, (ik_1^0, \vec{k}_1); \dots; Q_n, (ik_n^0, \vec{k}_n); m_0^2, \lambda) \\ = (2\pi)^{-n} \cdot \int \exp\left[i \cdot \sum_{j=1}^n k_j \cdot x_j\right] \cdot S_n^T(Q_1, x_1; \dots; Q_n, x_n; m_0^2, \lambda) \prod_{j=1}^n d^2x_j \quad (1.2) \end{aligned}$$

où les k_j sont réels, $k_j \cdot x_j = k_j^0 \cdot x_j^0 + \vec{k}_j \cdot \vec{x}_j$ et S_n^T désigne la fonction de Schwinger tronquée à n points, voir Dimock (1974).

Théorème 2 (Eckmann–Epstein–Fröhlich (1976)). $\exists \varepsilon > 0$ telle que pour $0 \leq \lambda < \varepsilon \cdot m_0^2$ la fonction \tilde{H}_n est la *restriction aux points euclidiens* d'une fonction H_n holomorphe dans le «domaine axiomatique», avec des «*pôles isolés*» d'ordre 1 sur les hypersurfaces $\{p/p_j^2 = m_{ph}^2\}$ et des «*coupures*» sur $\{p/p_j^2 \geq a\}$, $a \geq 2m_{ph}^2$.

Le «*domaine axiomatique*» est un ouvert de

$$M^{(n)} = \{p/p \in M^n \text{ et } p_1 + p_2 + \dots + p_n = 0\},$$

où M^n est l'espace minkowskien $\{p/p \in \mathbb{C}^{2n}\}$ muni de la métrique $p_j^2 = (p_j^0)^2 - (\vec{p}_j)^2$.

Le «*domaine axiomatique*» possède entre autres les quatre propriétés suivantes:

- i) c'est un ouvert connexe de $M^{(n)}$,
- ii) il contient les *points euclidiens* de $M^{(n)}$, c'est à dire les $p = (p_1, \dots, p_n)$ où p_j est de la forme $(i \cdot p_j^0, \vec{p}_j)$ avec p_j^0, \vec{p}_j réels,
- iii) il contient $V \setminus V_p$ où V est un voisinage ouvert de $V_p = \{p/p_j^2 = m_{ph}^2\}$,
- iv) $\{p/p_j^2 \geq a\}$, $a \geq 2m_{ph}^2$, est dans le bord du domaine axiomatique.

Remarque. Pour éviter toute confusion nous utiliserons dans la suite la notation suivante:

- i) p pour les points du «domaine axiomatique»,
- ii) k pour les points réels de la forme

$$(k^0, \vec{k}) = (\text{Im } p^0, \text{Re } \vec{p}) \quad \text{et avec} \quad k^2 = (k^0)^2 + (\vec{k})^2,$$

- iii) $\overset{\circ}{f}$ pour la restriction aux points euclidiens d'une fonction f définie dans le «domaine axiomatique». En particulier on a

$$f(p^2)|_{\text{euclidien}} = \overset{\circ}{f}(-k^2).$$

1.C. La masse m_{ph}^2

1. Le Théorème 2 nous enseigne que les singularités des fonctions H_n sont reliées au spectre d'énergie – impulsion de la théorie. En particulier pour $0 \leq \lambda < \varepsilon \cdot m_0^2$ la fonction à deux points

$$H_2(p_1, p_2; m_0^2, \lambda) \equiv H_2(Q_1, p_1; Q_2, p_2; m_0^2, \lambda), \quad \text{où} \quad Q_1(y) = Q_2(y) = y,$$

est holomorphe dans le «domaine axiomatique» (rappel: $p_1 + p_2 = 0$) avec des “pôles isolés” d'ordre 1 selon $\{p \mid p_j^2 = m_{\text{ph}}^2(m_0^2, \lambda)\}$ et des “coupures” selon $\{p \mid p_j^2 \geq a\}$, $a \geq 2 \cdot m_{\text{ph}}^2(m_0^2, \lambda)$. Plus précisément (avec $p_1 = -p_2 = p$) la fonction

$$p^2 \mapsto (p^2 - m_{\text{ph}}^2(m_0^2, \lambda)) \cdot F(p^2, m_0^2, \lambda), \quad \text{où} \quad F(p^2, m_0^2, \lambda) \equiv H_2(p, -p; m_0^2, \lambda), \quad (1.3)$$

est holomorphe dans le plan coupé

$$\{p^2 \mid p^2 \in \mathbf{C} \text{ et } p^2 \notin a + \mathbf{R}^+\} \quad \text{avec} \quad a \geq 2 \cdot m_{\text{ph}}^2(m_0^2, \lambda),$$

et la masse $m_{\text{ph}}^2(m_0^2, \lambda)$ est la position du pôle isolé de la fonction $p^2 \mapsto F(p^2, m_0^2, \lambda)$.

2. Du point précédent et du théorème des résidus pour les fonctions analytiques il suit immédiatement:

Corollaire 3. $\exists \varepsilon > 0$ telle que pour $0 \leq \lambda < \varepsilon \cdot m_0^2$

$$m_{\text{ph}}^2(m_0^2, \lambda) = X(m_0^2, \lambda) / Z(m_0^2, \lambda)$$

où

$$X(m_0^2, \lambda) = (2\pi i)^{-1} \cdot \int_{\Gamma} p^2 \cdot F(p^2, m_0^2, \lambda) dp^2,$$

$$Z(m_0^2, \lambda) = (2\pi i)^{-1} \cdot \int_{\Gamma} F(p^2, m_0^2, \lambda) dp^2,$$

Γ est un petit cercle centré en $p^2 = m_0^2$ et contenant le point $p^2 = m_{\text{ph}}^2(m_0^2, \lambda)$.

La fonction Z est la «constante de renormalisation de la fonction d'onde».

3. De manière analogue aux fonctions de Schwinger S_n les trois fonctions

$$(m_0^2, \lambda) \mapsto F(p^2, m_0^2, \lambda),$$

$$(m_0^2, \lambda) \mapsto Z(m_0^2, \lambda),$$

$$(m_0^2, \lambda) \mapsto m_{\text{ph}}^2(m_0^2, \lambda),$$

sont C^∞ dans $0 \leq \lambda/m_0^2 < \varepsilon$ (pour p appartenant au «domaine axiomatique»), et

peuvent être prolongées analytiquement dans un ouvert U du type

$$U_{\varepsilon, \varepsilon'} = \{\lambda \mid 0 < |\lambda| < \varepsilon \cdot m_0^2 \text{ et } |\arg \lambda| \leq \pi/2 + \varepsilon'\}.$$

Théorème 4 (Eckmann–Epstein (1979)). *Les séries de perturbation des fonctions*

$$\lambda \rightarrow F(p^2, m_0^2, \lambda), \quad \lambda \rightarrow Z(m_0^2, \lambda) \quad \text{et} \quad \lambda \rightarrow m_{ph}^2(m_0^2, \lambda)$$

sont sommables selon Borel, plus précisément: pour $m_0 > 0$ fixé, il existe $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ tels que la fonction $\lambda \rightarrow F(p^2, m_0^2, \lambda)$ et son développement perturbatif $\sum F_n(p^2, m_0^2) \cdot \lambda^n$ satisfont le théorème de Watson–Nevanlinna pour $\lambda \in U_{\varepsilon, \varepsilon'}$ (et analogue pour les deux autres fonctions).

Ce théorème est également vérifié dans les modèles $\lambda P(\phi)_2$ et il peut être étendu au modèle $\lambda \phi_3^4$ à l'aide du développement en essais (cluster expansion) de Magnen–Sénéor (1977); voir Eckmann–Epstein (1979).

2. La série perturbative de m_{ph}^2

Dans ce chapitre nous calculons les coefficients, jusqu'à l'ordre quatre, de la série perturbative en puissances de λ de la masse $\lambda \mapsto m_{ph}^2(m_0^2, \lambda)$, pour $m_0 > 0$ fixé. Nous commençons ces calculs par un changement d'échelle qui nous permettra "d'éliminer" la variable m_0 .

2. A. Changement d'échelle

A deux dimensions d'espace-temps les fonctions de Schwinger satisfont à la relation (changement d'échelle):

$$S_n(\rho x_1, \dots, \rho x_n; \rho^{-2} m_0^2, \rho^{-2} \lambda) = S_n(x_1, \dots, x_n; m_0^2, \lambda)$$

(au sens des distributions tempérées), $\forall \rho > 0$. Pour $\rho = m_0$ nous pouvons ainsi éliminer m_0^2 :

$$F(p^2, m_0^2, \lambda) = m_0^{-2} \cdot F(p^2/m_0^2, 1, \lambda/m_0^2)$$

$$Z(m_0^2, \lambda) = Z(1, \lambda/m_0^2)$$

$$m_{ph}^2(m_0^2, \lambda) = m_0^2 \cdot m_{ph}^2(1, \lambda/m_0^2).$$

Attention. Pour simplifier la notation nous supprimons dans la suite l'argument "1" qui apparaît après le changement d'échelle. De plus " $m_0 \cdot x$ ", " k/m_0 " et " p/m_0 " seront respectivement désignées par " x ", " k " et " p ". Et nous posons $z = \lambda/m_0^2$, avec $m_0 > 0$ fixé.

La masse m_{ph}^2 , s'écrit alors (voir Corollaire 3):

$$m_{ph}^2(m_0^2, \lambda) = m_0^2 \cdot m_{ph}^2(z) = m_0^2 \cdot X(z)/Z(z) \quad (2.1)$$

où

$$X(z) = (2\pi i)^{-1} \cdot \int_{\Gamma} p^2 \cdot F(p^2, z) dp^2, \quad (2.2)$$

$$Z(z) = (2\pi i)^{-1} \cdot \int_{\Gamma} F(p^2, z) dp^2, \quad (2.3)$$

Γ est un petit cercle centré en $p^2 = m_{ph}^2(0) = 1$ et contenant le point $p^2 = m_{ph}^2(z)$.

2.B. La n -ème dérivée par rapport à $z = \lambda/m_0^2$

De (2.1) à (2.3) il suit que la n -ème dérivée de $z \mapsto m_{ph}^2(z)$ est déterminée par les j -èmes dérivées de $z \rightarrow F(p^2, z) = H_2(p, -p; z)$, $0 \leq j \leq n$. Ces dernières sont reliées, par l'intermédiaire de (1.2) et du Théorème 2, aux j -èmes dérivées de $S_2^T(x, y; z)$. Plus précisément le résultat général suivant nous permet d'évaluer la n -ème dérivée de la masse $z \mapsto m_{ph}^2(z)$ à l'aide des fonctions de Schwinger tronquées $S_{2+j}^T(\cdot; z)$, $0 \leq j \leq n$:

Théorème 5 (Dimock (1974)). *Pour tout $m_0 > 0$ fixé et pour tout m -tuple de polynômes à une variable $Q = (Q_1, \dots, Q_m)$ il existe $\varepsilon > 0$ telles que pour tout n et pour tout $z \equiv \lambda/m_0^2$ avec $0 \leq z < \varepsilon$:*

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n S_m^T(Q, x; z) = (-1)^n \cdot \int_{R^{2n}} S_{m+n}^T(Q, x; P, y; z) dy$$

où $P = (P_1, \dots, P_n)$ est un n -tuple de monômes à une variable définis par $P_j(y) = y^4$ pour tout j .

De ce théorème il suit:

Corollaire 6 (Eckmann–Epstein–Fröhlich (1976)). *Pour z , Q et P comme au théorème précédent on a:*

- 1) $\left(\frac{d}{dz}\right)^n H_m(Q, p; z) = (-1)^n \cdot H_{m+n}(Q, p; P, q=0; z)$
- 2) $\left(\frac{d}{dz}\right)^n X(z) = \operatorname{Res}_{p^2=m_{ph}^2(z)} p^2 \left(\frac{d}{dz}\right)^n F(p^2, z)$
- 3) $\left(\frac{d}{dz}\right)^n Z(z) = \operatorname{Res}_{p^2=m_{ph}^2(z)} \left(\frac{d}{dz}\right)^n F(p^2, z)$

Remarque. Le Théorème 5 et le Corollaire 6 se généralisent immédiatement aux modèles $\lambda P(\phi)_2$. Et ces résultats restent valables pour $\lambda \in U_{\varepsilon, \varepsilon'}$ avec $U_{\varepsilon, \varepsilon'}$ comme au Théorème 4; voir Eckmann–Magnen–Sénéor (1975) et Eckmann–Epstein (1979).

2.C. La n -ième dérivée par rapport à z en $z = 0$.

1. Avec

$$m_{ph}^2(z) = \sum a_n z^n, \quad X(z) = \sum X_n z^n, \quad Z(z) = \sum Z_n z^n$$

il suit de (2.1)

$$\left(\sum a_n \cdot z^n\right) \left(\sum Z_n \cdot z^n\right) = \sum X_n \cdot z^n,$$

c'est à dire

$$a_n = (1/Z_0) \left(X_n - a_0 \cdot Z_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j} \cdot Z_j \right) \quad (2.4)$$

pour tout $n \geq 1$, et $a_0 = X_0/Z_0$.

2. Les coefficients Z_j et X_j se calculent à l'aide des ingrédients suivants:

- α) le *Corollaire 6* qui relie les Z_j , X_j aux $H_{2+j}(\cdot; z=0)$, (rappel: $F = H_2$),
- β) le *Théorème 2* qui relie $H_{2+j}(\cdot; z=0)$ à $S_{2+j}^T(\cdot; z=0)$,
- γ) le *Théorème de Wick* qui permet d'exprimer $S_{2+j}^T(\cdot; z=0)$ comme la «somme d'un produit de fonctions de Schwinger libres à deux points $S_2(\cdot; z=0)$ », voir Dimock–Glimm (1974),
- δ) la *fonction de Schwinger libre* S_2 qui est donnée par

$$S_2(x, y; z=0) \equiv S(x-y) = (2\pi)^{-1} \cdot \int \exp[-i \cdot k \cdot (x-y)] \cdot \tilde{S}(k) d^2k$$

où

$$\tilde{S}(k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{k^2 + 1},$$

voir Simon (1974) page 76.

Rappel: au point réel $k = (k^0, \vec{k}) \in \mathbf{R}^2$ correspond le point euclidien $p = (i \cdot \text{Im } p^0, \text{Re } \vec{p}) \equiv (ik^0, \vec{k})$.

3. A l'ordre $n=0$ on a:

$$\begin{aligned} i^2 \cdot \delta^{(2)}(k_1 + k_2) \cdot \tilde{H}_2((ik_1^0, \vec{k}_1), (ik_2^0, \vec{k}_2); z=0) \\ = (2\pi)^{-2} \cdot \int \exp[ik_1 x_1 + ik_2 x_2] \cdot S^T(x_1, x_2; z=0) d^2x_1 d^2x_2 \\ = \left[\int \exp[ik_1 y] \cdot S(y) d^2y \right] \cdot \left[(2\pi)^{-2} \cdot \int \exp[i(k_1 + k_2) \cdot x_2] d^2x_2 \right] \\ = [2\pi \cdot \tilde{S}(k_1)] \cdot \delta^{(2)}(k_1 + k_2) \\ = \frac{1}{k_1^2 + 1} \cdot \delta^{(2)}(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

d'où $\tilde{F}_0(-k^2) = -1/(k^2 + 1)$ et par prolongement analytique aux points du «domaine axiomatique»: $F_0(p^2) = 1/(p^2 - 1)$. D'où finalement:

$$Z_0 = 1, \quad X_0 = 1 \quad \text{et} \quad a_0 = 1 \quad (2.5)$$

c'est à dire $m_{ph}^2(z=0) = 1$.

4. Aux ordres $n \geq 1$ on obtient par un calcul analogue au cas $n=0$ et à l'aide du théorème de Wick (appliqué ici à la fonction $\tilde{H}_{2+n}(\cdot; z=0)$):

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n(-k^2) &\equiv (1/n!) \cdot (d/dz)^n \tilde{F}(-k^2; z)|_{z=0} \\ &= [(-1)^n/n!] \cdot \tilde{H}_{2+n}((ik^0, \vec{k}), -(ik^0, \vec{k}); q_1=0, \dots, q_n=0; z)|_{z=0} \\ &= [(-1)^n/n!] \cdot i^{-2} \cdot \text{«somme sur tous les graphes de Feynman connexes avec } n \\ &\quad \text{vertex à 4 pattes et 2 lignes externes d'impulsion } k\text{»} \\ &= \sum_m C'_{n,m} \cdot \tilde{I}_{n,m}(-k^2), \end{aligned}$$

où m indexe les graphes différents du même ordre,

$$C'_{n,m} = ((-1)^{n+1} \cdot (2\pi)^{-2n}/n!) \cdot C_{n,m},$$

$C_{n,m}$ est le facteur combinatoire du graphe $\mathring{I}_{n,m}(-k^2)$,

$$\mathring{I}_{n,m}(-k^2) = \frac{1}{(k^2 + 1)^2} \int \prod_{l \in L} \frac{1}{(k_l^2 + 1)^2} \prod_{b \in B} d^2 k_b,$$

avec L l'ensemble des lignes internes et B l'ensemble des boucles du graphe de Feynman; k_l est une combinaison linéaire des k et k_b .

Du Corollaire 6 il suit (avec $m_{ph}^2(z=0) = 1$):

$$X_n = \text{Res}_{p^2=1} p^2 \cdot \sum_m C'_{n,m} \cdot I_{n,m}(p^2),$$

$$Z_n = \text{Res}_{p^2=1} \sum_m C'_{n,m} \cdot I_{n,m}(p^2),$$

où les $I_{n,m}$ sont les prolongements analytiques des $\mathring{I}_{n,m}$ dans le «domaine axiomatique». Or les $I_{n,m}$ apparaissent sous la forme

$$I_{n,m}(p^2) = (-1)^r \cdot (p^2 - 1)^{-r} \cdot J_{n,m}(p^2),$$

où $J_{n,m}$ est holomorphe en $p^2 = 1$, $J_{n,m}(p^2 = 1) \neq 0$ et r est un entier qui dépend de la structure du graphe.

En posant

$$X_{n,m} - Z_{n,m} = \frac{(-1)^r}{(r-2)!} \cdot \left(\frac{d}{dp^2} \right)^{r-2} J_{n,m}(p^2 = 1), \quad (2.6)$$

$$Z_{n,m} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \cdot \left(\frac{d}{dp^2} \right)^{r-1} J_{n,m}(p^2 = 1), \quad (2.7)$$

($X_{n,m} - Z_{n,m} = 0$ si $r < 2$ et $Z_{n,m} = 0$ si $r < 1$) il vient

$$X_n - Z_n = \sum_m C'_{n,m} \cdot (X_{n,m} - Z_{n,m}) \quad (2.8)$$

$$Z_n = \sum_m C'_{n,m} \cdot Z_{n,m} \quad (2.9)$$

Remarque. En général plus r est petit plus le calcul de $(d/dp^2)^r J_{n,m}(p^2 = 1)$ est «facile» (pour un graphe donné). Il est donc plus facile de calculer $X_n - Z_n$ que Z_n . Ceci est intéressant puisque (2.4) s'écrit avec (2.5) et $a_1 = Z_1 = 0$ (voir ci-dessous):

$$a_n = X_n - Z_n - \sum_{j=2}^{n-2} a_{n-j} \cdot Z_j \quad \text{pour } n \geq 2 \quad (2.10)$$

En conséquence à l'ordre n nous n'avons pas besoin de calculer Z_n et Z_{n-1} .

2.D. La n -ème dérivée par rapport à z en $z = 0$, $n \leq 4$.

A l'ordre $n = 1$ il n'y a aucun graphe, d'où $Z_1 = X_1 = a_1 = 0$. A l'ordre $n = 2$ il

il y a exactement un graphe, voir tableau 1. On obtient

$$\tilde{F}_2(-k^2) = C'_{2,1} \cdot \frac{1}{(k^2+1)^2} \cdot \tilde{J}_{2,1}(-k^2),$$

avec

$$C'_{2,1} = \frac{(-1)^3}{(2\pi)^4 \cdot 2!} \cdot \frac{2! (4!)^2}{3!}$$

$$\tilde{J}_{2,1}(-k^2) = \int d^2k_1 d^2k_2 [(k-k_1)^2+1]^{-1} \cdot [(k_1-k_2)^2+1]^{-1} \cdot [k_2^2+1]^{-1}.$$

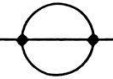
L'intégrale de Feynman $\tilde{J}_{2,1}(-k^2)$ peut être calculée à l'aide des «paramètres de Feynman», voir Annexe 1 de Hirsbrunner (1981a). De (2.10) avec (2.8) et (2.6) il suit

$$a_2 = X_2 - Z_2 = C'_{2,1} \cdot J_{2,1}(p^2=1) = -\frac{3}{2}.$$

Aux ordres $n=3$ et $n=4$ les calculs sont analogues; les contributions des différents graphes sont résumées dans les tableaux 2 et 3²⁾.

Tableau 1

Les contributions des graphes à l'ordre $n=2$.

m	graphe	$C_{2,m}$	$X_{2,m} - Z_{2,m}$	$Z_{2,m}$
1		$\frac{2! (4!)^2}{3!}$	$\frac{1}{4} \cdot \pi^4$	$-\frac{1}{16} \pi^4 + \frac{3}{4} \pi^2$
$a_2 = X_2 - Z_2$ $= (- (2\pi)^{-4} / 2!) \cdot C_{2,1} \cdot (X_{2,1} - Z_{2,1}) = -3/2$ $Z_2 = 3/8 - 9/(2 \cdot \pi^2) = -0.08...$				

Remarque. A l'ordre $n=5$ il y a exactement 21 graphes. Tous peuvent être calculés à l'aide des techniques développées dans l'Annexe 1 de Hirsbrunner (1981a), sauf le graphe non planaire de la Fig. 3 (graphe que nous n'avons pas réussi à calculer).³⁾

En résumé nous avons pour $m_0 > 0$ fixé, $z = \lambda/m_0^2$:

$$m_{ph}^2(m_0^2, \lambda) = m_0^2 \cdot m_{ph}^2(z) \sim m_0^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n \quad (2.11)$$

²⁾ Les méthodes qui nous ont permis d'évaluer les intégrales de Feynman intervenant aux ordres $n \leq 4$ sont décrites dans l'Annexe 1 de Hirsbrunner (1981a). Les graphes $m=4, 5$ et 6 du tableau 3 ont été évalués à l'aide d'une méthode peu connue mais très efficace. Il s'agit de ce que nous appelons "l'intégration numérique sur une grille à n dimensions". Nous nous contentons ici d'indiquer que cette méthode nous a permis de calculer, sur un mini-ordinateur NORD-10, deux intégrales "non-triviales" à $n=6$ dimensions (à savoir les graphes $m=4$ et 6 du tableau 3), avec une précision que nous estimons de l'ordre de 0.02% (!).

³⁾ On peut trouver une liste de références sur les graphes de Feynman (théorie et techniques d'évaluations analytique/symbolique/numérique) dans Hirsbrunner (1981a) pages 93-95.

Tableau 2

Les contributions des graphes à l'ordre $n = 3$. ζ est la fonction zéta de Riemann et on a $\zeta(3) = 1.20\ 205\ 690\ 316\dots$

m	graphes	$C_{3,m}$	$X_{3,m} - Z_{3,m}$
1		$\frac{1}{2} \cdot \frac{3! \cdot (4!)^3}{3!}$	$\frac{7}{4} \cdot \pi^3 \cdot \zeta(3)$
2		$\frac{3! \cdot (4!)^3}{(2!)^2}$	$\pi^5/6$
$a_3 = X_3 - Z_3 = 63 \cdot \zeta(3) / (2 \cdot \pi^3) + 9/\pi$ $= 4.08\ 598\ 663\dots$			

Tableau 3

Les contributions des graphes à l'ordre $n = 4$. $R_m = (-(2\pi)^{-8}/4!) \cdot C_{4,m} \cdot (X_{4,m} - Z_{4,m})$ est la contribution du graphe "m" au coefficient a_4 . Notons que les deux graphes qui livrent les plus grandes contributions ($m = 4, 6$) sont les graphes les plus difficiles à calculer!

m	graphes	$C_{4,m}$	$X_{4,m} - Z_{4,m}$	R_m
1		$\frac{1}{2} \cdot \frac{4! \cdot (4!)^4}{3! \cdot 2!}$	$\frac{7}{4} \cdot \pi^4 \cdot \zeta(3)$	- 1.17
2		$\frac{1}{2} \cdot \frac{4! \cdot (4!)^4}{(2!)^2}$	$\pi^4 \cdot \zeta(3)$	- 2.00
3		$\frac{4! \cdot (4!)^4}{(2!)^3}$	$\pi^4 \cdot (\frac{3}{4} \pi^2 - \frac{1}{16} \pi^4)$	- 2.19
4		$\frac{1}{2} \cdot \frac{4! \cdot (4!)^4}{2!}$	$4 \cdot \pi^4 \cdot (0.244\ 595 \pm 0.000\ 040)$	- 3.25
5		$\frac{4! \cdot (4!)^4}{2! \cdot 3!}$	$4 \cdot \pi^4 \cdot (0.478\ 027 \pm 0.000\ 003)$	- 2.12
6		$\frac{4! \cdot (4!)^4}{(2!)^2}$	$8 \cdot \pi^4 \cdot (0.152\ 283 \pm 0.000\ 024)$	- 4.05
7		$\frac{4! \cdot (4!)^4}{(3!)^2}$	$\frac{1}{2} \cdot \pi^4 \cdot (\frac{1}{16} \pi^4 - \frac{3}{4} \pi^2)$	+ 0.24
$a_4 = X_4 - Z_4 - a_2 Z_2 = (\sum R_m) - a_2 Z_2 = - 14.6558 \pm 0.0012$				



Figure 3
Le seul graphe non planaire à l'ordre $n = 5$.

avec

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -1.5 \\ a_3 = 4.08598663 \dots \\ a_4 = -14.656 \dots \end{array} \right\} \quad (2.12)$$

3. La construction des approximants de Borel de m_{ph}^2

Introduction

Dans ce chapitre, nous construisons diverses suites d'approximants de Borel $\{\bar{B}_N(z)\}_N$ pour le carré de la masse $m_{ph}^2(z)$, $z \geq 0$ (voir équations (2.1) et (2.11)). Ces constructions combinent

- 1°) la sommabilité selon Borel de la série perturbative de m_{ph}^2 (voir Chapitre 1, Théorème 4);
- 2°) la connaissance des coefficients perturbatifs a_n de $m_{ph}^2(z)$ (équations (2.4), (2.11)) pour $n \leq 4$ (équation (2.12));
- 3°) les estimations actuellement pratiquées sur les a_n lorsque $n \rightarrow \infty$ (méthode de Lipatov; voir notre hypothèse A, section 3.C).

Pour orienter ces diverses suites d'approximants vers un but précis, nous avons décidé de les utiliser pour tenter d'évaluer le plus petit zéro positif z_{cr} de $m_{ph}^2(z)$, voir la Fig. 1 ($\lambda_{cr} = z_{cr} m_0^2$, cf. Chap. 2.A). Pour une suite $\{\bar{B}_N(z)\}_N$ donnée, soit

$$z_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} z_N$$

z_N étant le plus petit zéro positif de $\bar{B}_N(z)$. Supposant qu'elle existe, nous identifierons z_{cr} à cette limite

$$z_{cr} = z_\infty \quad (3.1)$$

Dans l'état actuel des connaissances, cette identification est *conjecturale*. Nous l'adoptons faute de mieux.

Les suites d'approximants $\{\bar{B}_N(z)\}_N$ que nous utiliserons seront adaptées au problème d'évaluer z_{cr} . Nous les ferons dépendre d'un quadruple de paramètres désignés par ϕ , B' , λ' , ν' . Si l'on veut que les $\bar{B}_N(z)$ convergent vers $m_{ph}^2(z)$ pour les z d'un certain intervalle réel, il faudra restreindre le choix du paramètre ϕ . La rapidité et le mode de convergence (monotone, oscillant, etc.) sera ensuite influencé par tous les quatre paramètres. Si notre conjecture (3.1) est valable, z_∞

devrait, lui, en être indépendant. Tous ces aspects seront discutés abondamment dans le présent chapitre.

La *section A* commence par un énoncé précis du résultat d'Eckmann–Epstein sur la sommabilité de Borel de m_{ph}^2 (voir Théorème 4); cet énoncé contient entre autres la définition des trois paramètres ϕ , B' , λ' . Viennent ensuite l'introduction de l'exposant critique ν et du quatrième paramètre, ν' , ainsi que la définition de la suite $\{\bar{B}_N(z)\}_N$ correspondant à ϕ , B' , λ' , ν' . Dans la *section B*, nous expliquons ce que nous entendrons par «paramètres optimaux». La *section C* introduit des conjectures quantitatives sur des aspects mal connus du résultat d'Eckmann–Epstein. En particulier, c'est ici que la méthode de Lipatov joue son rôle. Dans la *section D*, nous donnons notre choix «optimal» des paramètres ϕ , B' et λ' , et nous avouons notre embarras concernant le choix «optimal» du paramètre ν' . Le comportement numérique des $\bar{B}_N(z)$ que nous avons effectivement calculés pour $N \leq 4$ et $0 \leq z \leq z_N$ sera analysé dans le chapitre suivant.

3.A. Les approximants de Borel $\bar{B}_N(z)$ et les zéros z_N

1. Du Théorème 4 il suit dans la formulation (4.1) à (4.5) de Hirsbrunner (1982), les ouverts $D_{\alpha,R}$, $T_{\alpha,A}$ et T_ϕ étant définis par les figures 1 à 5 de Hirsbrunner (1982):

Il existe $R > 0$, $\alpha > 0$, $1/A > 0$ et $C > 0$, $N_0 > 0$ telles que pour tout $z \in D_{\alpha,R}$ et pour tout $N > N_0$:

$$\left| m_{ph}^2(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot z^n \right| \leq C \cdot N! \cdot A^N \cdot |z|^N; \quad (3.2)$$

$$|a_n| \leq C \cdot N! \cdot A^N; \quad (3.3)$$

la transformée de Borel $t \mapsto g(t)$ de $\{a_n\}_n$ est holomorphe dans l'ouvert $T_{\alpha,A}$, où g est définie, pour $B' > -1^4$) fixée et pour tout $|t| < 1/A$, par:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n / \Gamma(n + B' + 1)) \cdot t^n. \quad (3.4)$$

Pour $z \in D_{0,R}$ nous avons en plus:

$$m_{ph}^2(z) = (1/z) \cdot \int_0^{\infty} \exp(-t/z) \cdot (t/z)^{B'} \cdot g(t) dt; \quad (3.5)$$

nous pouvons évaluer (numériquement) le membre de droite de (3.5) par l'intermédiaire d'une transformation conforme ϕ (fixée) qui applique $T_\phi \subset T_{\alpha,A}$ dans le disque unité $\{\omega \mid |\omega| < 1\}$:

$$m_{ph}^2(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} B_N(z) \quad (3.6)$$

où

$$B_N(z) = \sum_{m=0}^N b_m M_m(z) \quad (3.7)$$

avec

$$M_m(z) = (1/z) \cdot \int_0^{\infty} \exp(-t/z) \cdot (t/z)^{B'} \cdot (t/\phi(t))^{\lambda'} \cdot \phi(t)^m dt; \quad (3.8)$$

⁴⁾ La constante B' est due à Le Guillou–Zinn–Justin (1977)

les coefficients b_m sont définis par

$$(\phi^{-1}(\omega)/\omega)^{-\lambda'} \cdot g(\phi^{-1}(\omega)) = \sum b_m \cdot \omega^m; \quad (3.9)$$

λ' est une constante réelle fixée.⁶⁾

2. Ainsi, à chaque choix des trois paramètres ϕ , B' et λ' correspond une suite d'approximants de Borel $\{B_N(z)\}_N$, qui converge dans le disque $D_{0,R}$ vers $m_{ph}^2(z)$. Nous introduisons maintenant un quatrième paramètre, ν' , qui nous permettra de tenir compte de la manière dont $m_{ph}^2(z)$ approche 0 lorsque z tend en croissant vers z_{cr} . Nous le faisons dans le cadre de l'hypothèse R , qui est l'une des conjectures que nous avançons dans la section 3.C; cette hypothèse consiste à admettre que z_{cr} est soit dans $D_{0,R}$ soit sur son bord.

L'idée est la suivante. On s'attend à ce que

$$m_{ph}^2(z) \sim (z_{cr} - z)^\nu \quad (3.10)$$

lorsque z tend en croissant vers z_{cr} . L'exposant critique ν est un nombre dont nous imaginerons qu'il satisfait $1 \leq \nu \leq 2$.⁷⁾ D'autre part, on a pour tout approximant de Borel $B_N(z)$ qui s'annule en $z = z_N$:

$$B_N(z) \sim (z - z_N)^\mu \quad (3.11)$$

pour z dans le voisinage de z_N , μ étant un entier positif (génériquement égal à 1); en effet, $B_N(z)$ est holomorphe dans le demi-plan $\text{Re } z > 0$, comme on le voit sur les équations (3.7) et (3.8). Comme notre but est d'évaluer z_{cr} moyennant la conjecture (3.1)

$$z_{cr} = z_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} z_N$$

z_N : le plus petit zéro positif de $B_N(z)$, nous pensons qu'il vaut mieux, pour des raisons de convergence, étudier plutôt les approximants de Borel non pas de m_{ph}^2 mais de $m_{ph}^{2/\nu}$; en effet, $m_{ph}^{2/\nu}$ aura alors en z_{cr} un zéro d'ordre entier, qui ressemblera davantage aux zéros éventuels des $B_N(z)$ correspondants. Cette opinion est confirmée par l'étude de la fonction $f_\nu(z)$ présentée dans l'Annexe 1.

Malheureusement, nous ne connaissons pas à ce jour la valeur exacte de ν . Nous tenterons de procéder par tâtonnement, en jouant sur le paramètre ν' que nous allons maintenant introduire.

Définition de $\bar{B}_N(z)$. Soit ν' une constante réelle non nulle.

$$\bar{B}_N(z) \equiv \begin{cases} (B_N(z))^{\nu'} & \text{pour } 0 \leq z \leq z_N \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.12)$$

où z_N est le plus petit zéro positif du N^e approximant de Borel $B_N(z)$ de $(m_{ph}^2(z))^{1/\nu'}$. La fonction $(m_{ph}^2(z))^{1/\nu'}$ est bien définie sur l'intervalle $0 \leq z \leq z_{cr}$. Si

⁵⁾ On a donc $b_m = \sum c_{m,n} \cdot a_n$ où les $c_{m,n}$ dépendent de ϕ , B' et λ' .

⁶⁾ La constante λ' a été introduite pour la première fois par Parisi (1977).

⁷⁾ Dans un modèle voisin Glimm-Jaffe (1974) ont établi que $\nu \geq 1$ (résultat rigoureux) et ont énoncé la conjecture $\nu = 2$. La valeur $\nu = 1$ est la valeur classique prédite par «l'image de Goldstone» (Fig. 1) et $\nu = 2$ est la valeur exacte de l'exposant critique ν dans le modèle d'Ising à deux dimensions, voir Stanley (1971) page 47. Notons que dans la littérature le symbole ν est en général réservé à l'exposant critique de m_{ph} (et non comme ici m_{ph}^2 !).

$1/\nu'$ est un entier non négatif, elle a les mêmes propriétés d'holomorphic et de sommabilité selon Borel que $m_{ph}^2(z)$ lui-même (en effet, $m_{ph}^2(0) = 1, \neq 0$), et l'on aura pour $0 \leq z \leq z_{cr} \leq R$ (hypothèse R de la section 3.C)

$$m_{ph}^2(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{B}_N(z).$$

Si $1/\nu'$ n'est pas un entier non négatif, ces propriétés subsisteront à condition que m_{ph}^2 n'ait pas de zéro dans $D_{0,z_{cr}}$. Nous ne savons pas si cette condition est satisfaite. Nous ferons comme si elle l'était.

Par abus de langage nous dirons que

- $\bar{B}_N(z)$ est le N^e approximant de Borel de $m_{ph}^2(z)$
- z_N est le zéro de $\bar{B}_N(z)$.

3.B. Les paramètres optimaux

Le N -ème approximant de Borel $\bar{B}_N(z)$ dépend des quatre paramètres (fixés) ϕ, B', λ', ν' . La limite $\bar{B}_N(z)$ lorsque $N \rightarrow \infty$ ne dépend bien sûr pas de ces quatre paramètres! Le choix de l'application conforme ϕ est limité par la condition $T_\phi \subset T_{\alpha,A}$ où $T_{\alpha,A}$ est le domaine d'holomorphic de la transformée de Borel g . Le choix des constantes réelles B', λ', ν' n'est limité que par la condition $B' > -1$.

La rapidité de convergence de la suite $\{\bar{B}_N(z)\}_N$ dépend très sensiblement du choix des quatre paramètres ϕ, B', λ', ν . Dans notre pratique ces paramètres sont déterminés par tâtonnement «numérique». Nous dirons que *le choix des paramètres est optimal* si ces paramètres sont tels qu'une variation de ceux-ci n'améliore pas sensiblement la rapidité de convergence de la suite $\{\bar{B}_N(z)\}_N$. Notons que cette notion de «choix optimal» ne permet pas de déterminer ces paramètres de manière unique: *ce choix dépend non seulement du nombre k de coefficients perturbatifs a_n connu,⁸⁾ mais également de manière non négligeable d'une appréciation subjective.*

Afin de limiter le tâtonnement numérique, il est utile de rappeler ici brièvement le «rôle» joué par les quatre paramètres ϕ, B', λ', ν' . Ces paramètres permettent respectivement de tenir compte, voir Chap. 4.B de Hirsbrunner (1982):

- « ϕ »: du domaine d'holomorphic $T_{\alpha,A}$ de la transformée de Borel $g(t)$; en particulier plus l'ouvert T_ϕ est grand (en d'autres termes plus α et $1/A$ sont grands, puisque $T_\phi \subset T_{\alpha,A}$) plus la convergence de la suite $\{\bar{B}_N(z)\}_N$ est rapide.
- « B' »: du comportement de $g(t)$ lorsque $t \searrow -1/A$.
- « λ' »: du comportement de $g(t)$ lorsque $t \nearrow \infty$.
- « ν' »: du comportement de $m_{ph}^2(z)$ lorsque $z \nearrow z_{cr}$, voir (3.10) à (3.12) ci-dessus.

3.C. Les trois hypothèses A, α, R

Le Théorème 4 nous assure que la série perturbative de $z \mapsto m_{ph}^2(z)$ est sommable selon Borel, plus précisément que $m_{ph}^2(z)$ satisfait les relations (3.2) à

⁸⁾ On peut essentiellement distinguer trois cas: k petit ($k \leq 5$), k moyen ($k \sim 10$) et k grand ($k \geq 20$); voir annexe 1.C. Rappelons que dans le cas de la masse m_{ph}^2 on a $k = 4$.

(3.9). Malheureusement les constantes A , α et R sont très mal connues.⁹⁾ Une connaissance, aussi précise que possible, des valeurs de A et α permet d'optimiser la rapidité de convergence de la suite $\{\bar{B}_N(z)\}_N$. La connaissance de la valeur de R est nécessaire puisque les relations (3.5) et (3.6) ne sont valables que pour $z \in D_{0,R}$. Pour pouvoir déterminer le point critique z_{cr} de $m_{ph}^2(z)$ par l'intermédiaire des approximants de Borel $\bar{B}_N(z)$ nous sommes ainsi amenés à admettre les hypothèses suivantes:

Hypothèse A: la singularité la plus proche de l'origine de la transformée de Borel $t \mapsto g(t)$ se trouve en $t = -1/A$ avec $1/A = 1.4626$.

Hypothèse α : $\alpha \geq \pi/4$.

Hypothèse R: $R \geq z_{cr}$ où z_{cr} est le point critique de m_{ph}^2 , c'est à dire $m_{ph}^2(z_{cr}) = 0$.

Nous allons brièvement commenter ces trois hypothèses.¹⁰⁾

Hypothèses α et R: la seule argumentation heuristique qui nous permette de «justifier» ces deux hypothèses est le fait que «la suite $\{\bar{B}_N(z)\}_N$ semble bien converger vers $m_{ph}^2(z)$ pour $0 \leq z \leq z_{cr}$ » (voir Figs. 4 et 5).

Hypothèse A: en 1976 Lipatov a développé une méthode heuristique qui permet de déterminer le comportement asymptotique des coefficients des séries perturbatives en théorie des champs.^{11,12)} En suivant cette méthode on obtient pour les coefficients a_n de la série perturbative de $m_{ph}^2(z)$:

$$a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -(-A)^n \cdot \Gamma(n+B+1) \cdot C \cdot (1+O(1/n)) \quad (3.13)$$

avec $1/A = 1.4626$, $B = 1$ et C une constante positive (pour l'évaluation de la valeur de A voir l'Annexe 2 de Hirsbrunner (1981a).¹³⁾

⁹⁾ La démonstration du Théorème 4 est basée sur le développement en essais («cluster expansion») de Glimm-Jaffe-Spencer (1973). Ce développement nous livre bien une borne supérieure A_s pour A , mais cette borne est certainement beaucoup trop grande: $A_s \gg A$. En ce qui concerne α il n'est guère possible, avec les techniques actuelles, de faire mieux que «il existe $\alpha > 0$ »: voir Eckmann-Magnen-Sénéor (1975) et Eckmann-Epstein (1979) pour le difficile passage de $\alpha = 0$ à «il existe $\alpha > 0$ ».

¹⁰⁾ Notons qu'à notre connaissance des hypothèses analogues ont été faites dans tous les travaux publiés depuis 1976 et qui contiennent des applications numériques des approximants de Borel. Dans tous ces travaux on admet même une version plus forte pour l'hypothèse α : $\alpha = \pi - \epsilon$, $\epsilon > 0$.

¹¹⁾ Lipatov (1976). Voir aussi Zinn-Justin (1977). On peut trouver un excellent résumé dans Zinn-Justin (1979).

¹²⁾ Le méthode de Lipatov est une généralisation de la méthode du col aux intégrales de chemin de Feynman. Cette généralisation n'est pas rigoureuse, mais elle a déjà été utilisée avec succès dans de nombreuses applications en théorie des champs: notamment pour la fonction β , les exposants critiques, les développements en ϵ, \dots ; voir Brézin-Le Guillou-Zinn-Justin (1977) et les références dans Herbst-Simon (1978), note 4, page 69. On peut trouver des justifications partielles dans Parisi (1977), Auberson-Mahoux-Mennessier (1978) et surtout Spencer (1980), Ellis-Rosen (1980).

¹³⁾ Ce résultat a également été obtenu par Zinn-Justin (1981), tableau 1 page 129. Notons que $A = 4/A_{Zinn-Justin}$.

3.D. Le choix optimal des paramètres ϕ , B' , λ' et ν'

1. Nous avons construit, pour commencer, les approximants de Borel $\bar{B}_N(z)$ de $m_{ph}^2(z)$ avec l'application conforme «minimale»

$$\phi(t) = 1 - \exp(-\beta \cdot t). \quad (3.15)$$

Le choix est justifié par le fait que les hypothèses du théorème de Watson–Nevanlinna n'ont été vérifiées, dans le cas de la masse $m_{ph}^2(z)$, que pour $\exists \alpha > 0$ (voir Théorème 4, Section 1.C). Ce ϕ correspond au cas où $\alpha = 0$ (voir Figs. 3 et 4 de Hirsbrunner (1982)).

Avec ce ϕ , le choix optimal de β et B' est donné par

$$\beta = A \cdot \ln 2 \quad \text{et} \quad B' = B - 0.2 \quad (3.16)$$

où A et B sont déterminés par l'équation (3.13); il est intéressant de noter que $\phi(-1/A) = -1$. Pour les paramètres λ' et ν' nous n'avons pas trouvé de valeur optimale; nous avons choisi ici

$$\lambda' = 0 \quad \text{et} \quad \nu' = 1 \quad (3.17)$$

2. Nous avons ensuite optimisé le choix de l'application conforme ϕ . Les innombrables exemples que nous avons testés, notamment la fonction d'essai $f_\nu(z)$ de l'Annexe 1 et l'oscillateur anharmonique du Chapitre 4.C de Hirsbrunner (1982), nous ont permis d'exhiber une famille de fonctions particulièrement bien adaptée à notre propos:

$$\phi(t) = (u - 1)/u \quad \text{avec} \quad u = (p \cdot t + 1)^{(\pi/2)/\alpha'} \quad (3.18)$$

où $p > 0$, $\alpha' > 0$. Avec (3.18), le choix optimal des cinq paramètres p , α' et B' , λ' et ν' est donné par

$$p = A, \quad \pi/4 \leq \alpha' \leq \pi/2, \quad (3.19)$$

$$B' = B, \quad \lambda' \approx 1, \quad (3.20)$$

$$0.5 \leq \nu' \leq 6, \quad (3.21)$$

où A et B sont déterminés par l'équation (3.13); il est intéressant de noter que $\phi(-1/A) = \infty$.

Ce choix n'est pas unique. Nous analyserons, dans le prochain chapitre, les trois cas caractéristiques suivants

$$\alpha' = \pi/4, \quad \nu' = 1 \quad (3.22a)$$

$$\alpha' = \pi/2, \quad \nu' = 1 \quad (3.22b)$$

$$\alpha' = \pi/2, \quad \nu' = 2 \quad (3.22c)$$

pour différentes valeurs de λ' dans un voisinage de 1.

4. Résultats

Dans ce dernier chapitre nous analysons d'abord, dans la Section A, le comportement *numérique* de diverses suites d'approximants de Borel $\{\bar{B}_N(z)\}_N$

pour le carré de la masse $m_{ph}^2(z)$, $z \geq 0$ (voir équations (2.11) et (3.12)).¹⁴⁾ La construction de ces $\bar{B}_N(z)$ a été largement discutée dans le chapitre précédent; nous n'y reviendrons donc pas.

Nous discutons ensuite, dans la Section B, la question de savoir avec quelle précision ces $\bar{B}_N(z)$, $N \leq 4$, approchent la masse $m_{ph}^2(z)$ pour $0 \leq z \leq z_{cr}$. En particulier, nous portons notre attention sur le plus petit zéro z_N de $\bar{B}_N(z)$. Nous hasardons une *conjecture* qui permet d'une part d'évaluer la limite

$$z_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} z_N$$

à partir des zéros z_N , $N \leq 4$ (!), et d'autre part d'identifier cette limite z_∞ avec le point critique z_{cr} de $m_{ph}^2(z)$. Cette conjecture, qui repose sur l'étude d'un exemple développé dans l'Annexe 1, nous permettra d'évaluer z_{cr} avec une précision que nous estimons de l'ordre de 5 à 10%, à condition de connaître l'exposant critique ν de $m_{ph}^2(z)$ (ν détermine la manière dont $m_{ph}^2(z)$ approche 0 lorsque z approche z_{cr}).

Et enfin nous montrons, dans la Section C, dans quelle mesure la connaissance supplémentaire des coefficients a_5 , a_6 de la série perturbative de $m_{ph}^2(z)$ permettrait d'améliorer nos résultats.

4.A. Le comportement numérique des $\bar{B}_N(z)$

1. A titre illustratif nous avons construit, pour commencer, les approximations de Borel $\bar{B}_N(z)$ de $m_{ph}^2(z)$ avec l'application conforme «mininale» (3.15). La Fig. 4 montre que le comportement des $\bar{B}_N(z)$ est bien du type qui nous est suggéré

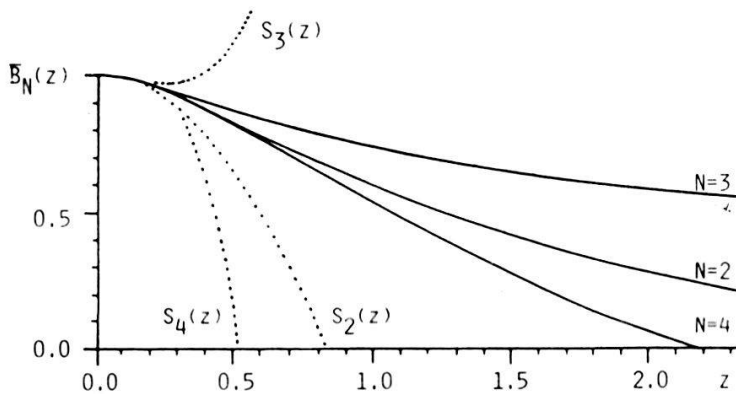


Figure 4

Les sommes partielles $S_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$ de la masse $m_{ph}^2(z)$ et les approximations de Borel $\bar{B}_N(z)$ construits avec (3.15) à (3.17).

par l'image de Goldstone dans la région à une phase (Fig. 1), du moins pour $z \leq 1$. Toutefois pour $z \geq 1$ la convergence de la suite $\{\bar{B}_N(z)\}_N$ devient très lente et il est en particulier impossible de localiser la limite z_∞ à partir des zéros z_N de $\bar{B}_N(z)$, $N \leq 4$. Dans la Fig. 4 nous donnons également les sommes partielles

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n. \quad (4.1)$$

Le comportement de ces $S_N(z)$ se passe de tout commentaire!

¹⁴⁾ Nous rappelons que $m_{ph}^2(m_0^2, \lambda) = m_0^2 \cdot m_{ph}^2(z)$ avec $z = \lambda/m_0^2$, voir Chapitre 2.A.

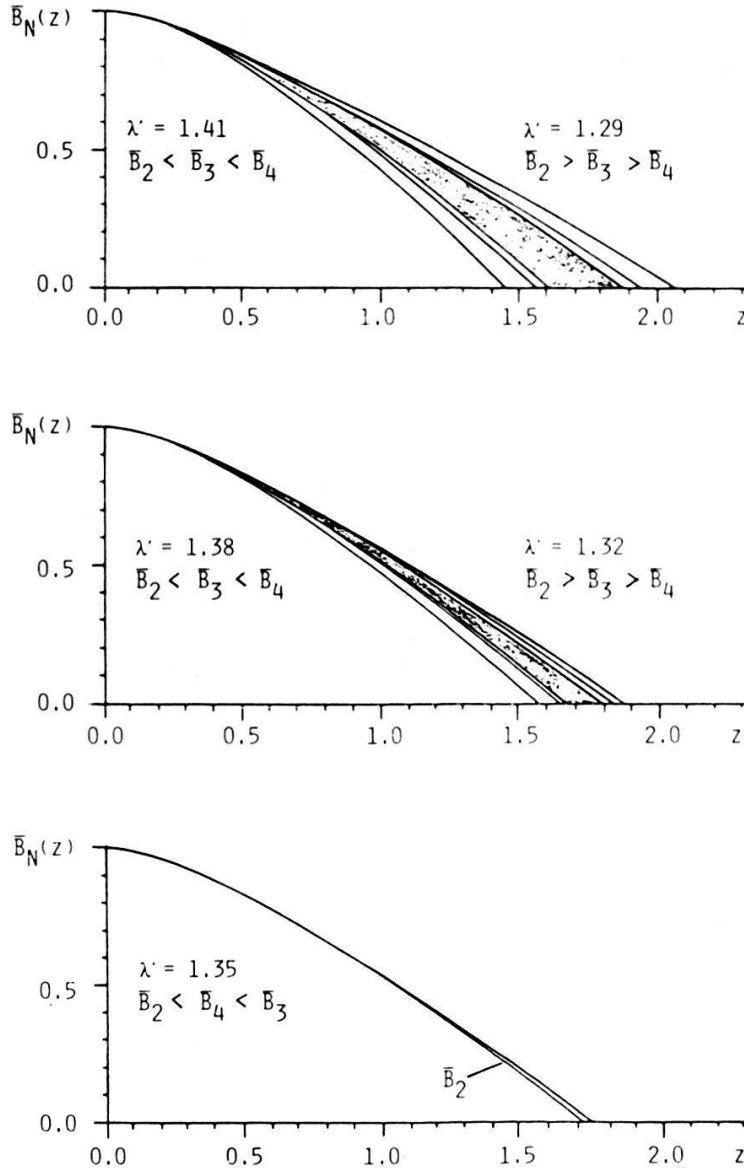


Figure 5a

Les approximants de Borel de la masse $m_{ph}^2(z)$ construits avec (3.18) à (3.20) et (3.22a).

2. Nous avons ensuite construit les approximants de Borel $\bar{B}_N(z)$ de $m_{ph}^2(z)$ en optimisant le choix des quatre paramètres ϕ , B' , λ' et ν' , voir équations (3.18) à (3.22). Les résultats sont donnés dans les Figs 5a–c. Ces figures montrent très clairement la convergence rapide des différentes suites $\{\bar{B}_N(z)\}_N$.

4.B. Discussion

En regardant les Figs 5a–c de plus près, on s'aperçoit que le comportement numérique de ces $\bar{B}_N(z)$ est tout à fait analogue à celui des $\bar{B}_N(z)$ de la fonction d'essai $f_\nu(z)$ de l'Annexe 1, voir Figs 8 et 9. Ainsi on a pour $0 < z < z_N$:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{B}_{N-1}(z) < \bar{B}_N(z) \quad \text{pour } \lambda' > \lambda'_0 \\ \bar{B}_{N-1}(z) > \bar{B}_N(z) \quad \text{pour } \lambda' < \lambda'_0 \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

($\lambda'_0 = 1.35, 1.05$ resp. 1.07 dans le cas des Figs 5a, 5b resp. 5c). Pour $\lambda' \approx \lambda'_0$ suite $\{\bar{B}_N(z)\}_{N=2}^4$ est oscillante.

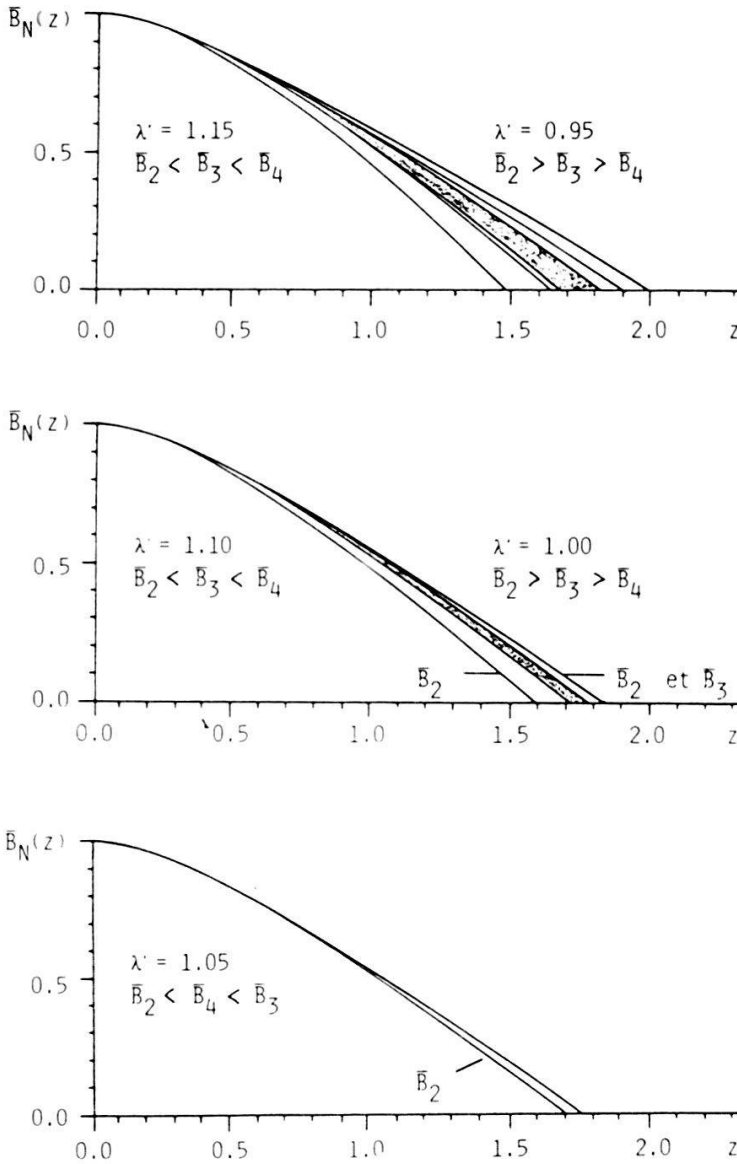


Figure 5b

Les approximants de Borel de la masse $m_{ph}^2(z)$, construits avec (3.18) à (3.20) et (3.22b).

Et comme dans le cas de la fonction d'essai $f_\nu(z)$, nous devons distinguer deux intervalles: $0 < z \leq 1$ et $1 \leq z < z_{cr}$. Pour $0 < z \leq 1$, les $\bar{B}_N(z)$ ne dépendent que très faiblement de ν' ; tout porte à penser que l'on a, indépendamment de ν' :

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}_{N-1}(z) < \bar{B}_N(z) < m_{ph}^2(z) & \text{ pour } \lambda' > \lambda'_0 \\ \bar{B}_N(z) \approx m_{ph}^2(z) & \text{ pour } \lambda' \approx \lambda'_0 \\ \bar{B}_{N-1}(z) > \bar{B}_N(z) > m_{ph}^2(z) & \text{ pour } \lambda' < \lambda'_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

pour $N \leq 4$ et $0 < z \leq 1$. Dans le second intervalle, $1 \leq z < z_{cr}$, les $\bar{B}_N(z)$, $N \leq 4$, dépendent par contre très fortement de ν' et les relations (4.3) ne sont certainement plus valables pour tout ν' ; ceci est clairement illustré par les Figs 6a-c, où nous donnons les plus petits zéros z_N des $\bar{B}_N(z)$ des Figs 5a-c.

Nous hasardons la conjecture suivante.

Conjecture. Pour $\nu' = \nu$ (ν étant l'exposant critique de $m_{ph}^2(z)$), les relations (4.3) sont également valables dans l'intervalle $1 \leq z < z_{cr}$; pour $\nu' \neq \nu$ on a par

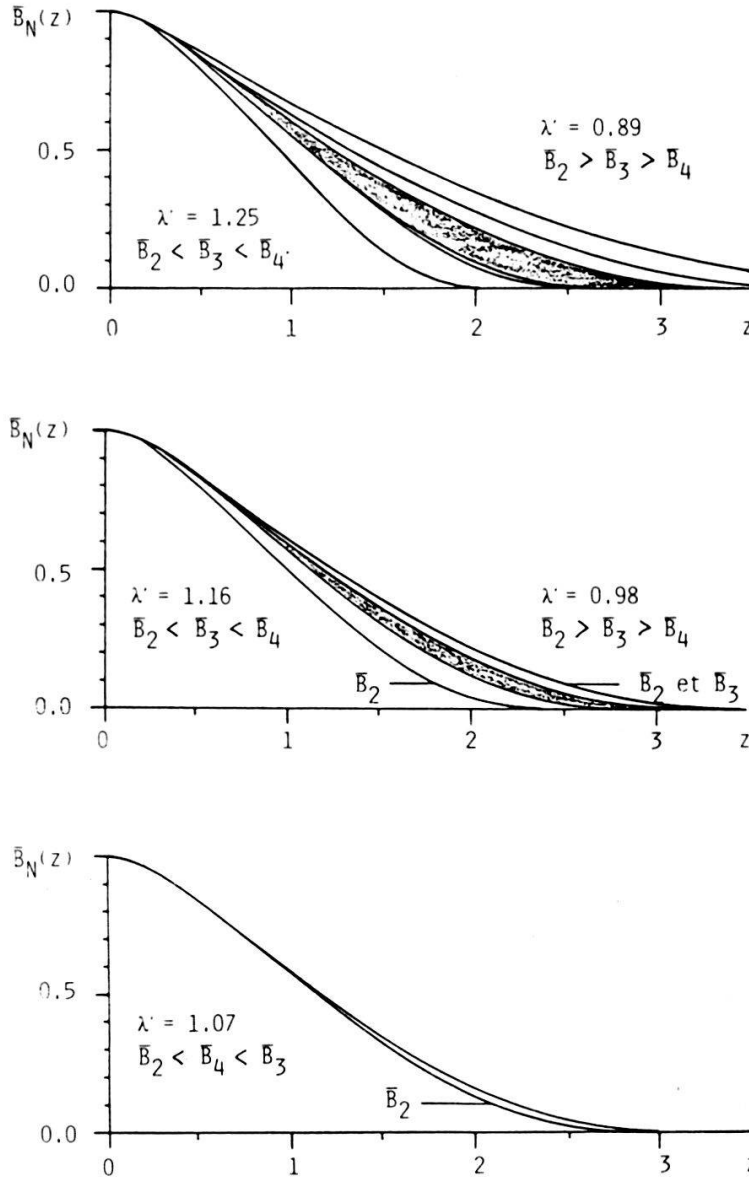


Figure 5c
Les approximants de Borel de la masse $m_{ph}^2(z)$, construits avec (3.18) à (3.20) et (3.22c).

contre, indépendamment de λ' :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{B}_N(z) < m_{ph}^2(z) \text{ pour } \nu' < \nu \\ \bar{B}_N(z) > m_{ph}^2(z) \text{ pour } \nu' > \nu \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

pour $N \leq 4$ et $1 \leq z < z_{cr}$. (Cette conjecture est compatible avec les discussions du Chapitre 3.A et de l'Annexe 1).

Cette conjecture nous permet d'évaluer facilement le point critique z_{cr} de la masse $m_{ph}^2(z)$:

$$z_{cr} = x(\nu') + \delta x(\nu') \text{ pour } \nu' \approx \nu \quad (4.5)$$

où par définition

$$\left. \begin{array}{l} x(\nu') = (z_{sup} + z_{inf})/2 \\ \delta x(\nu') = \pm (z_{sup} - z_{inf})/2 \end{array} \right\} \quad (4.6)$$

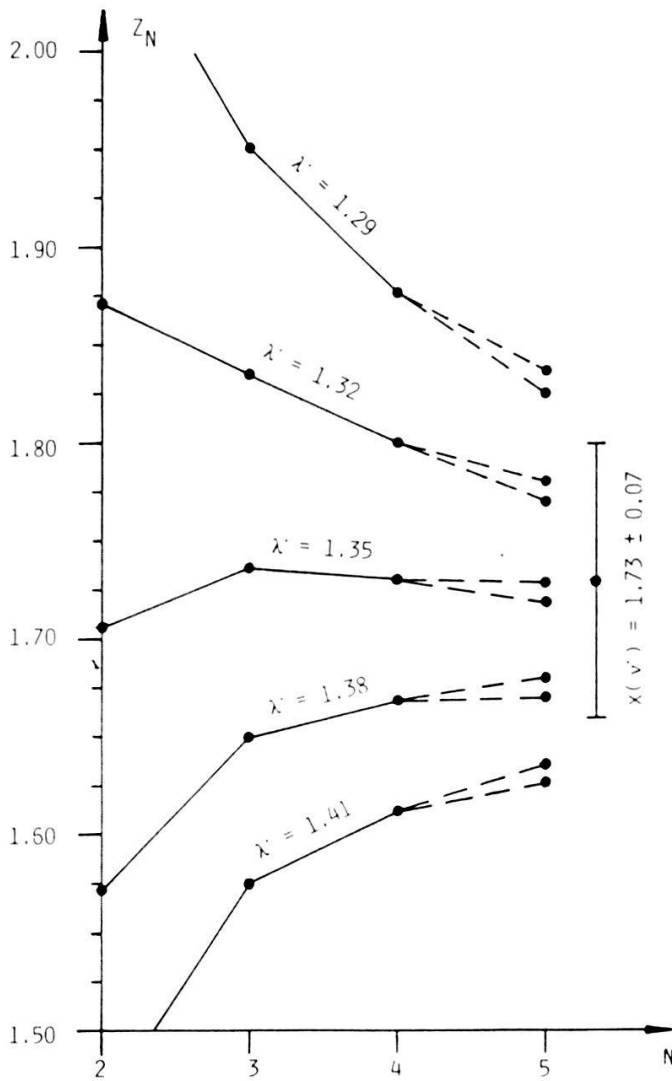


Figure 6a

Les zéros z_N des approximants de Borel $\bar{B}_N(z)$ de la Figure 5a. Les zéros z_5 ont été calculés en posant $a_5 = 64 \pm 2$ (estimation, voir Annexe 2).

z_{\inf} (resp. z_{\sup}) étant le plus petit zéro de $\bar{B}_4(z)$ pour $\lambda' > \lambda'_0$ (resp. $\lambda' < \lambda'_0$). Nous avons évalué $x(\nu')$ et $\delta x(\nu')$ pour différentes valeurs de ν' . Nous avons trouvé

$$x(\nu') + \delta x(\nu') = \begin{cases} 1.73 \pm 0.07 & \text{pour } \nu' = 1 \\ 2.03 \pm 0.10 & \text{pour } \nu' = 1.25 \\ 2.32 \pm 0.15 & \text{pour } \nu' = 1.50 \\ 2.59 \pm 0.21 & \text{pour } \nu' = 1.75 \\ 2.85 \pm 0.30 & \text{pour } \nu' = 2 \end{cases} \quad (4.7)$$

c'est à dire, par un ajustement par la méthode des moindres carrés

$$\left. \begin{aligned} x(\nu') &= 1.12\nu' + 0.62 \\ \delta x(\nu') &= 0.016 \cdot \exp(1.46\nu') \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

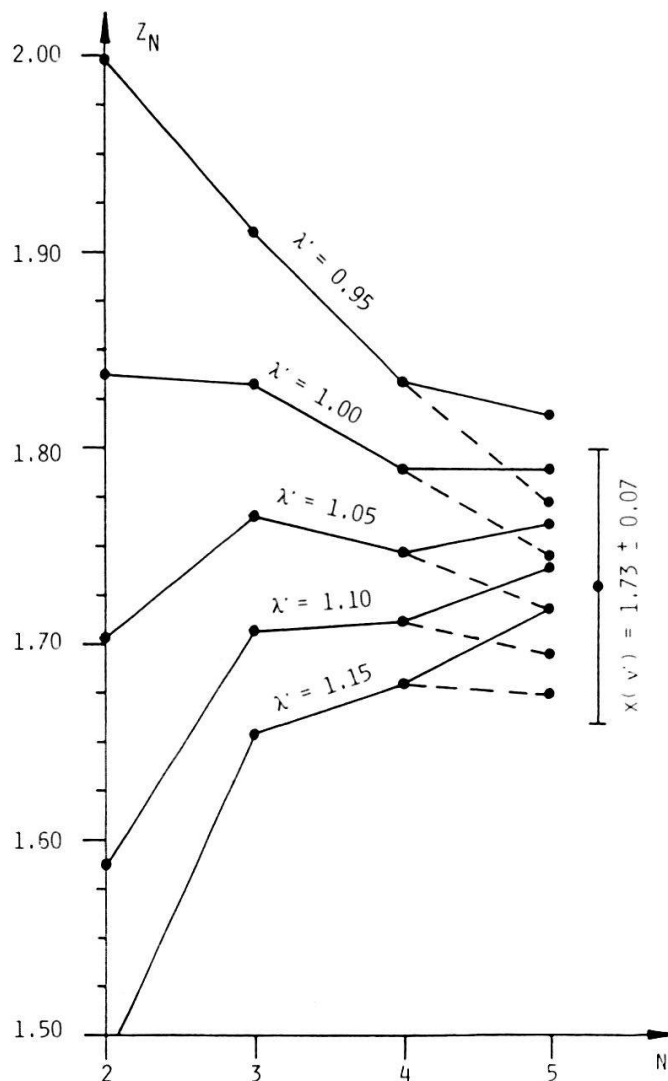


Figure 6b

Les zéros z_N des approximants de Borel $\bar{B}_N(z)$ de la Figure 5b. Les zéros z_5 ont été calculés en posant $a_5 = 64 \pm 2$ (estimation, voir Annexe 2).

4.C. Peut-on améliorer ces résultats?

Nous pensons qu'il n'est guère possible d'améliorer ces résultats en n'utilisant que l'information dont nous disposons actuellement.

D'après l'Annexe 2.D la connaissance *supplémentaire* des coefficients perturbatifs a_5 , a_6 n'apporte (probablement) aucune amélioration décisive: certes l'évaluation de z_{cr} serait plus précise, mais elle resterait dépendante de ν' . D'après l'Annexe 1.C cette difficulté ne peut être résolue que si k est suffisamment grand, $k \approx 10$? (k étant le nombre de coefficients perturbatifs a_n connu). Dans ce cas il est probable que la resommation selon Borel de la série perturbative de la masse m_{ph}^2 permettrait de déterminer non seulement le *point critique* z_{cr} mais également l'*exposant critique* ν .

En principe il est bien sûr possible de calculer autant de coefficients a_n que l'on désire. Mais il se trouve que:

- la *difficulté* liée au calcul (exact) des a_n croît avec n ;
- déjà le calcul (exact) de a_5 est non trivial;¹⁵⁾

¹⁵⁾ Nous pensons notamment au graphe non planaire de la Fig. 3.

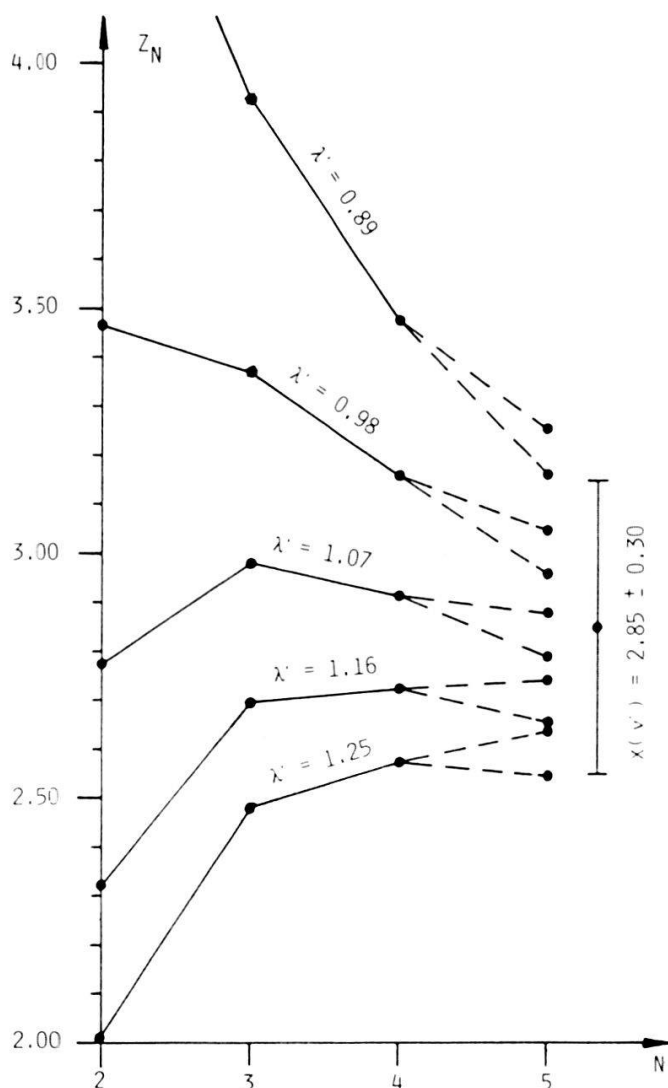


Figure 6c

Les zéros z_N des approximants de Borel $\bar{B}_N(z)$ de la Figure 5c. Les zéros z_5 ont été calculés en posant $a_5 = 64 \pm 2$ (estimation, voir Annexe 2).

– le calcul (exact) de a_n n'est intéressant que si l'erreur δa_{n-1} est suffisamment petite (voir Annexe 2.C).

Ceci nous amène à penser que l'énorme effort que nécessite(rait) le calcul des a_n , $n \geq 5$, est nettement disproportionné par rapport aux (nouveaux) résultats que l'on peut escompter. Il est certainement préférable de porter l'effort sur l'évaluation de l'exposant critique ν par d'autres méthodes (telles par exemple les méthodes du groupe de renormalisation¹⁶)).

Conclusion

Les approximants de Borel $\bar{B}_N(z)$, $N \leq 4$, de la série perturbative de la masse physique

$$m_{ph}^2(m_0^2, \lambda) = m_0^2 \cdot m_{ph}^2(z) \quad \text{avec} \quad z = \lambda/m_0^2, \quad m_0^2 \text{ fixé,}$$

¹⁶) Après avoir terminé ce travail, j'ai appris que Le Guillou–Zinn-Justin (1977) ont obtenu à l'aide du groupe de renormalisation: $\nu = 1.94 \pm 0.16$ (voir tableau I, page 3985).

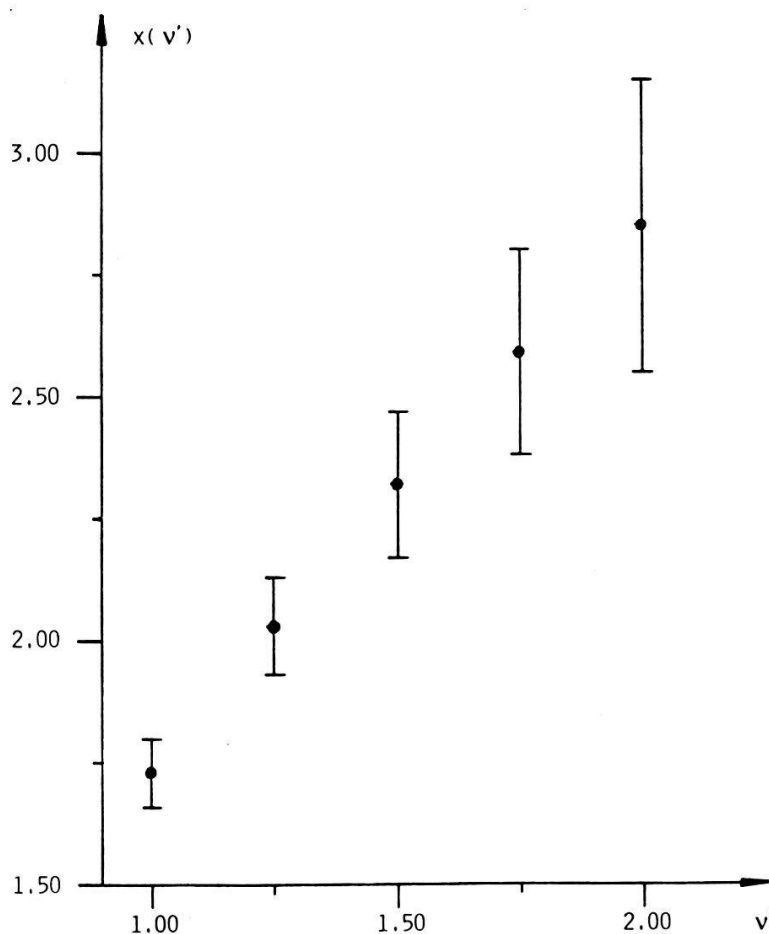


Figure 7

Le zéro $x(v') + \delta x(v')$ de la masse $m_{ph}^2(z)$, pour $1 \leq v' \leq 2$ (voir relation (4.7)).

dans le modèle $\lambda : \phi^4 :_2$, nous ont permis de minoriser resp. majoriser $m_{ph}^2(z)$ dans l'intervalle $0 \leq z \leq 1$. Pour $z \geq 1$, cet encadrement n'est par contre plus «garanti». Plus précisément, nous pensons que pour $1 \leq z < z_{cr}$ nos $\bar{B}_N(z)$ n'encadrent $m_{ph}^2(z)$ que si $v' \approx v$ (voir la conjecture du Chap. 4.B; v est l'exposant critique de $m_{ph}^2(z)$ et v' est le paramètre introduit dans le Chapitre 3.A). *Dans le cas où l'exposant critique de $m_{ph}^2(z)$ est connu, il est alors possible d'évaluer le point critique z_{cr} de $m_{ph}^2(z)$ avec une précision que nous estimons de l'ordre de 5 à 10%.* Ces résultats ont été obtenus en utilisant:

- 1) la sommabilité selon Borel de la série perturbative $\sum a_n z^n$ de $m_{ph}^2(z)$, voir Chapitre 1 (résultat rigoureux établi par Eckmann–Epstein (1979));
- 2) les coefficients perturbatifs a_n pour $n \leq 4$ (ces a_n ont été calculés dans le Chapitre 2);
- 3) le comportement asymptotique des a_n lorsque $n \rightarrow \infty$ (résultat heuristique basé sur les travaux de Lipatov (1976) et Zinn-Justin (1977));
- 4) les hypothèses A, α, R du Chapitre 3.C;
- 5) la conjecture du Chapitre 4.B (basée sur l'étude de la fonction d'essai $f_v(z)$ de l'Annexe 1).

Remerciements

Je remercie Jean-Jacques Loeffel pour sa lecture critique du manuscrit et ses précieux conseils.

Annexe 1. La fonction d'essai f_ν .

A. Définition de f_ν

Soit la fonction d'essai f_ν définie par

$$f_\nu(z) = (1 - z/z_{cr})^\nu \cdot \left(3/2 - 1/2 \cdot \int_0^\infty \exp(-t) \cdot \frac{t}{1 + z \cdot A \cdot t} dt \right) \\ \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$$

avec z_{cr} , ν et A telles que $f_\nu(z)$ soit «proche» de la masse $m_{ph}^2(z)$:

$$z_{cr} > 0, \quad \nu > 0 \quad \text{et} \quad 1/A = 1.4626.$$

B. Quelques propriétés de f_ν

Pour tout $z_{cr} > 0$ et $\nu > 0$ on a:

1. $f_\nu(z) \sim \sum a_n \cdot z^n$ satisfait le théorème de Watson-Nevanlinna et les hypothèses A , α , R (Chap. 3.C) avec $1/A = 1.4626$, $\alpha < \pi$, $R \geq z_{cr}$.

2. Les a_n possèdent le même comportement asymptotique que les coefficients perturbatifs de la masse m_{ph}^2 , voir (3.13):

$$a_n \sim -(-A)^n \cdot \Gamma(n + B + 1) \cdot C \cdot (1 + O(1/n)),$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, avec $1/A = 1.4626$, $B = 1$ et ici $C = 0.5$. Notons que ce comportement est indépendant de z_{cr} et ν .

3. $f_\nu(z_{cr}) = 0$ et $f_\nu(z) \sim (z_{cr} - z)^\nu$ lorsque $z \nearrow z_{cr}$.

4. $f_\nu(z) \sim 1.5 \cdot (-z/z_{cr})^\nu$ lorsque $z \nearrow \infty$, pour $\nu = 1, 2, \dots$

C. Les approximants de Borel de f_ν

Dans cette section nous discutons le choix optimal des paramètres ϕ , B' , λ' , ν' et le comportement numérique de diverses suites d'approximants de Borel $\{\bar{B}_N(z)\}_{N=0}^k$ de la fonction d'essai $f_\nu(z)$, et ceci pour différentes valeurs de k ¹⁷). On peut essentiellement distinguer trois cas: $k \leq 5$, $k \approx 10$ et $k \geq 20$. Pour $z_{cr} \in [1, 10]$ et $\nu \in [0.25, 4]$ nous avons obtenu les résultats suivants.

1. k petit ($k \leq 5$)

Pour $k \leq 5$, le choix optimal des paramètres est donné par (3.18) à (3.20), $\nu' \in [\sim \nu/2, \sim 2\nu]$ et il existe λ'_0 ($\lambda'_0 \approx 1$, la valeur exacte est donnée par l'examen

¹⁷) Pour les définitions de la notion «optimal» et de l'approximant de Borel $\bar{B}_N(z)$ voir les sections 3.A et 3.B; il suffit de lire $f_\nu(z)$ à la place de $m_{ph}^2(z)$.

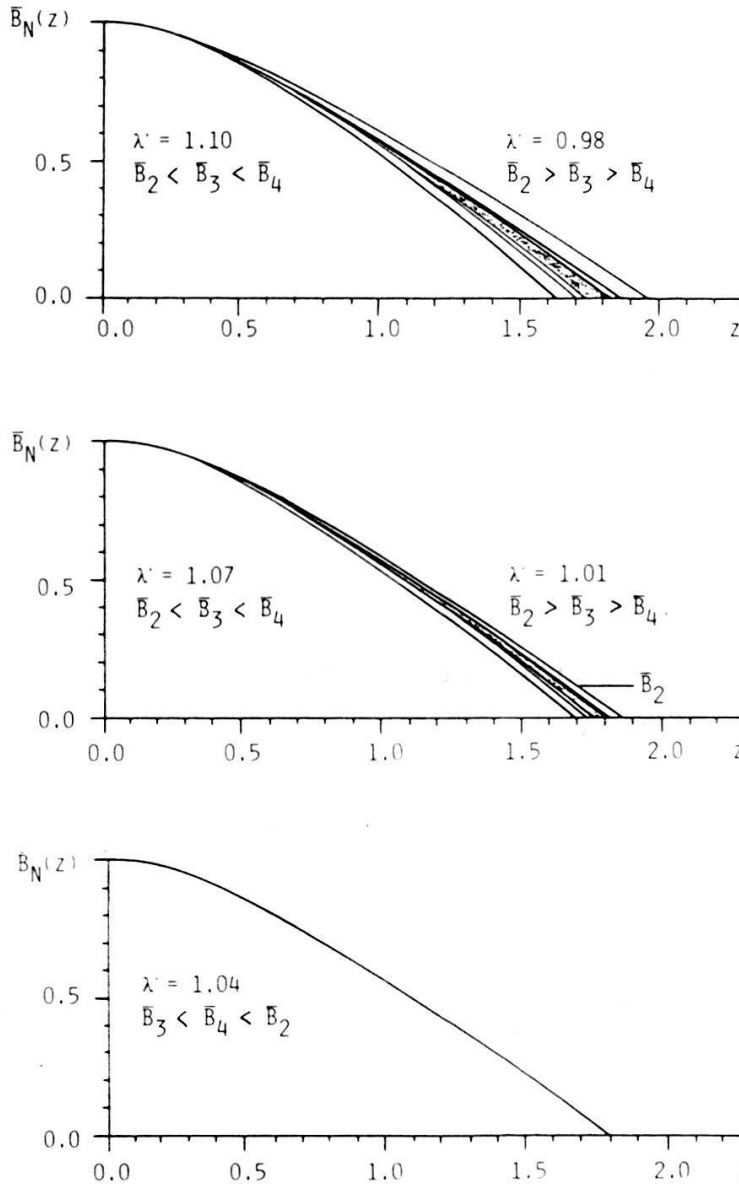


Figure 8

Les approximants de Borel de la fonction d'essai $f_\nu(z)$ avec $z_{cr} = 1.8$ et $\nu = 1$, construits avec (3.18) à (3.20) et (3.22b).

numérique) tel que la suite $\{\bar{B}_N(z)\}_{N=2}^5$ est

- croissante pour $\lambda' > \lambda'_0$;
- décroissante pour $\lambda' < \lambda'_0$.

Plus précisément on a pour $N \leq 5$ et $0 < z < z_N$:

$$\left. \begin{array}{ll} \bar{B}_{N-1}(z) < \bar{B}_N(z) & \text{pour } \lambda' > \lambda'_0 \\ \bar{B}_{N-1}(z) > \bar{B}_N(z) & \text{pour } \lambda' < \lambda'_0 \end{array} \right\} \quad (\text{A1.1})$$

Pour $\lambda' \approx \lambda'_0$, la suite est oscillante. Ceci est très clairement illustré par la Fig. 8. On a même mieux: les suites d'approximants de Borel (A1.1) minorisent resp majorisent $f_\nu(z)$, du moins pour z «pas trop grand». Plus précisément il existe $z_d > 0$ (la valeur exacte de z_d est donnée par l'examen numérique) tel que pour

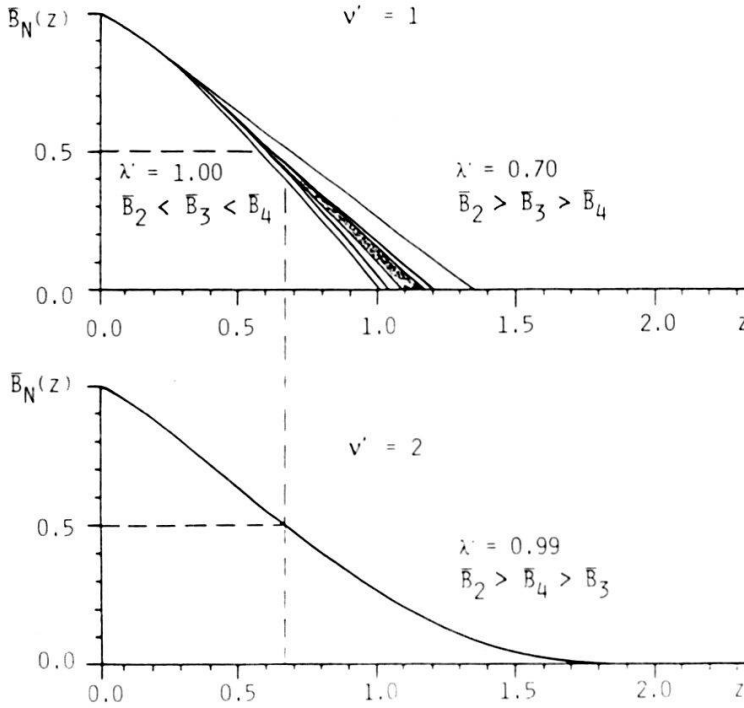


Figure 9

Les approximants de Borel de la fonction d'essai $f_\nu(z)$ avec $z_{cr} = 1.8$ et $\nu = 2$, construits avec (3.18) à (3.20) et (3.22b) respectivement (3.22c). Le traitillé indique que dans le cas $\nu' = 1$ les $\bar{B}_N(z)$ dévient fortement de $f_\nu(z)$ pour $z \geq 0.6$.

$N \leq 5$ et $0 < z < z_d$ on a

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}_{N-1}(z) < \bar{B}_N(z) < f_\nu(z) & \text{ pour } \lambda' > \lambda'_0 \\ \bar{B}_N(z) \approx f_\nu(z) & \text{ pour } \lambda' \approx \lambda'_0 \\ \bar{B}_{N-1}(z) > \bar{B}_N(z) > f_\nu(z) & \text{ pour } \lambda' < \lambda'_0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.2})$$

On pourrait espérer que $z_d \geq z_N$; malheureusement ceci n'est vrai que si

$$\nu' = \nu$$

Dans le cas $\nu' \neq \nu$, nous avons obtenu dans l'intervalle ouvert $z \in (z_d, z_N)$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}_N(z) < f_\nu(z) & \text{ pour } \nu' < \nu \\ \bar{B}_N(z) > f_\nu(z) & \text{ pour } \nu' > \nu \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.3})$$

pour $N \leq 5$ et pour tout λ' . Une discussion analogue au point 2 du chapitre 3.A permet de comprendre ce résultat, à défaut de l'expliquer! Un exemple avec $\nu' < \nu$ et $\nu' = \nu$ est donné par la Fig. 9. Regardons, pour un instant, cette figure de plus près. Le traitillé indique que dans le premier cas, $\nu' < \nu$, les $\bar{B}_N(z)$ dévient fortement de $f_\nu(z)$ pour $z \geq 0.6$; on a «donc» ici $z_d \approx 0.6$, c'est à dire

$$z_d \approx z_{cr}/3.$$

Dans le deuxième cas, $\nu' = \nu$, on a $\bar{B}_N(z) \approx f(z)$ pour $0 \leq z \leq z_{cr}$ et $N \geq 2$ (!); c'est à dire

$$z_d = z_{cr}.$$

En résumé, si l'on s'intéresse à évaluer z_{cr} à l'aide des zéros z_N des approximants de

Borel $\bar{B}_N(z)$ de $f_\nu(z)$, $N \leq 5$, une connaissance aussi précise que possible de la valeur numérique de ν est nécessaire. De plus, à supposer que la valeur de ν soit inconnue, l'étude numérique du choix optimal du paramètre ν' ne donne qu'une vague idée sur la valeur possible de ν .

2. k moyen ($k \approx 10$)

Pour $k \approx 10$, le choix optimal des paramètres est le même que dans le cas « k petit», sauf que

$$A_1 \leq p \leq A, \quad \pi/2 \leq \alpha' \leq \pi, \quad B' \geq B \quad \text{et} \quad \nu' \approx \nu \pm \nu/10.$$

avec

$$A = 1/1.4626 \quad \text{et} \quad A_1 = (1 - 2^{-(\alpha')/\pi}) \cdot A$$

(Notons que $\phi(-1/A) = -1$ si $p = A_1$ et $\phi(-1/A) = \infty$ si $p = A$). Comme dans le cas « k petit» il est possible de construire des suites d'approximants de Borel *croissantes*, *oscillantes* respectivement *décroissantes*, et de *minoriser* respectivement *majoriser* la fonction $f_\nu(z)$. Mais un tel choix ne correspond plus, ici, à un choix optimal.

Il est intéressant de noter que la valeur optimale de ν' se situe maintenant dans un «petit voisinage», de l'ordre de $\sim 10\%$, de l'exposant critique ν . Notons aussi que l'évaluation de z_{cr} ne nécessite plus la connaissance «précise» de la valeur ν (z_{cr} peut être évalué avec une «relative grande précision», même avec ν' «très différent» de ν).

3. k grand ($k \geq 20$)

Pour $k \geq 20$, le choix optimal des paramètres est analogue (mais pas identique) au cas « k moyen». Il est encore possible de construire des suites d'approximants de Borel *croissantes*, *oscillantes* respectivement *décroissantes*, et de *minoriser* respectivement *majoriser* la fonction $f_\nu(z)$; mais un tel choix ne correspond plus du tout à un choix optimal.

Si les valeurs de z_{cr} et ν sont inconnues, alors une étude minutieuse du comportement des suites $\{\bar{B}_N(z)\}_{N=0}^{20}$ dans un voisinage des zéros $z = z_{20}$ permet de déterminer z_{cr} et ν avec une «très grande précision».

D. Sur la dépendance en z_{cr} et ν .

Dans cette section nous discutons la dépendance en z_{cr} et ν de différentes quantités intéressantes. Nous nous limitons au cas $\nu' = 1$; les approximants de Borel $B_N(z)$ sont alors définis par les relations (3.6) à (3.9).

1. Les quantités suivantes ne dépendent que très faiblement de z_{cr} et ν :
 a_n : le comportement asymptotique des a_n lorsque $n \rightarrow \infty$ est indépendant de z_{cr} et ν ; pour n petit ($n = 0, 1, 2, \dots$) la dépendance est faible, voir tableau 4.
2. Les grandeurs suivantes dépendent très fortement de z_{cr} et ν :
 $f_\nu(z)$: z_{cr} détermine le zéro de f_ν et ν détermine le comportement de f_ν lorsque $z \nearrow z_{cr}$ (et lorsque $z \nearrow \infty$).

Tableau 4

a_n sont les coefficients de la série perturbative de la fonction d'essai $f_v(z)$ et b_n sont les coefficients des approximants de Borel $B_N(z)$ construits avec (3.18) à (3.20), (3.22b) et $\lambda' = 1$.

n	a_n	a_n	b_n	b_n
	$(z_{cr} = 1.5)$ $(\nu = 1.0)$	$(z_{cr} = 1.8)$ $(\nu = 1.2)$	$(z_{cr} = 1.5)$ $(\nu = 1.0)$	$(z_{cr} = 1.8)$ $(\nu = 1.2)$
0	1.000	1.000	0.6837	0.6837
1	0.017	0.017	- 0.6752	- 0.6752
2	- 1.858	- 1.821	- 0.4530	- 0.4439
3	4.770	4.801	- 0.0278	- 0.0160
4	- 15.668	- 15.715	- 0.0111	0.0022
5	62.528	62.663	- 0.0056	0.0089
6	- 293.281	- 293.747	- 0.0032	0.0123

$B_N(z)$: on a $B_N(z) = \sum b_m \cdot M_m(z)$ où les $M_m(z)$ sont indépendants des a_n , donc indépendants de z_{cr} et ν . Les coefficients b_m , par contre, dépendent très sensiblement de z_{cr} et ν , voir tableau 4. (Dans le Chap. 3.B de Hirsbrunner (1982) nous avons vu qu'une petite variation δa_n des coefficients a_n entraîne en général une grande variation δb_m ¹⁸)).

Annexe 2. Sur le calcul de a_5, a_6 .

Dans cette annexe nous développons un argument heuristique qui permet d'évaluer (avec une fiabilité relativement grande) les coefficients a_5, a_6 de la série perturbative de la masse $m_{ph}^2(z)$. Nous discutons ensuite la question de l'opportunité d'un calcul exact de a_5, a_6 .

A. Une estimation de a_5, a_6

La connaissance des $a_n, n \leq 4$, et du comportement asymptotique de a_n lorsque $n \rightarrow \infty$ (voir la relation (3.13)) nous permet d'estimer très facilement a_5 et a_6 . En effet soit

$$C_n = a_n / [(-1.4626)^{-n} \cdot (n+1)!].$$

De (3.13) il suit

$$C_n = C \cdot (1 + O(1/n)).$$

Pour n suffisamment grand on a donc $C_n \approx C$. Or on a $C_0 = 1, C_1 = 0, C_2 = 0.5348, C_3 = 0.5327, C_4 = 0.5589$. Il est ainsi plausible de poser $C_5 = C_6 = 0.60 \pm 0.10$ (?), d'où $a_5 = 65 \pm 11$ (?) et $a_6 = -309 \pm 52$ (?). Cette estimation n'est évidemment pas très fiable. Mais on peut faire mieux en extrapolant les coefficients b_m qui interviennent dans la définition des approximants de Borel $B_N(z)$. Nous nous contentons ici de donner le résultat (le détail de cette délicate étude est donné dans l'Annexe 4 de Hirsbrunner (1981a)).

¹⁸) On peut trouver d'autres illustrations dans les tableaux 7 à 9 de Hirsbrunner (1981a) et dans le Chapitre 3.C de Hirsbrunner (1981b).

Conjecture:

$$a_5 = 64.0 \pm 2.0 \quad \text{et} \quad a_6 = -326 \pm 30 (?) \quad (\text{A2.1})$$

B. *La répercussion des erreurs $\{\delta a_n\}_{n=0}^N$ sur le zéro z_N .*

De la définition de l'approximant de Borel $B_5(z)$,

$$B_5(z) = B_4(z) + b_5 \cdot M_5(z),$$

il vient en évaluant le membre de gauche en $z = z_5$ (rappel: z_N est le zéro de $B_N(z)$, c'est à dire $B_N(z_N) = 0$) et en développant par Taylor le membre de droite autour de $z = z_4$ (en négligeant les termes d'ordre supérieur):

$$z_5 = z_4 - d \cdot b_5,$$

avec $d = -M_5(z_4)/B_4(z_4)$. Le coefficient b_5 est une combinaison linéaire des a_n , $n \leq 5$

$$b_5 = \sum_{n=0}^5 c_{m,n} \cdot a_n.$$

Pour $n \leq 4$ les erreurs δa_n peuvent être négligées; il suit alors que l'erreur δz_5 due à δa_n , $n \leq 5$, est donnée par

$$\delta z_5 = (-d \cdot c_{5,5}) \cdot \delta a_5$$

Le coefficient $-d \cdot c_{5,5}$ dépend des paramètres ϕ , B' , λ' , ν' . Dans le cas (3.18) à (3.20), (3.22b) et avec $0.95 \leq \lambda' \leq 1.15$ (ceci correspond aux valeurs utilisées dans les Figs 5b, 6b) on trouve

$$\delta z_5 = 0.011 \cdot \delta a_5. \quad (\text{A2.2})$$

Un calcul analogue donne pour l'erreur δz_6 due aux erreurs δa_n , $n \leq 6$:

$$\delta z_6 = 0.045 \cdot \delta a_5 + 0.0018 \cdot \delta a_6 \quad (\text{A2.3})$$

(Le détail de ces calculs est donné dans l'Annexe 4 de Hirsbrunner (1981a)).

C. *La précision souhaitable de a_5 , a_6*

Le calcul exact de a_5 (resp. a_5 et a_6) n'est intéressant que si $|\delta z_5|$ (resp. $|\delta z_6|$) est suffisamment petit. D'après la Fig. 6b il est raisonnable d'imposer au moins $|\delta z_5| < 0.01$ (resp. $|\delta z_6| < 0.01$). De (A2.2), (A2.3) il suit $|\delta a_5| < 0.91$ (resp. $|\delta a_5| < 0.11$ et $|\delta a_6| < 2.8$), c'est à dire

$$|\delta a_5/a_5| < 1.4\% \quad (\text{A2.4})$$

respectivement

$$|\delta a_5/a_5| < 0.2\% \quad \text{et} \quad |\delta a_6/a_6| < 0.9\% \quad (\text{A2.5})$$

D. *Conclusion*

La connaissance (exacte) de a_5 , a_6 permettrait de diminuer l'erreur $\delta x(\nu')$ voir Fig. 7, d'un facteur 2 à 5. Par contre elle ne permettrait pas d'évaluer le point critique z_{cr} indépendamment de l'exposant critique ν . Et étant donné la grande

difficulté liée au calcul de a_5 , a_6 (nous pensons notamment au graphe non planaire de la Fig. 3) et la grande précision exigée (voir (A2.4) et (A2.5)), nous pensons que l'énorme effort que nécessite(rait) le calcul de a_5 , respectivement a_5 , a_6 est nettement disproportionné par rapport aux (nouveaux) résultats que l'on peut escompter. Le calcul de a_5 ne présente un certain intérêt que dans la mesure où cela permettrait de confirmer (ou infirmer) notre conjecture (A2.1) et notre confiance que nous avons en évaluant le point critique z_{cr} par

$$z_{cr} = x(\nu') + \delta x(\nu') \quad \text{pour} \quad \nu' \approx \nu$$

voir Chapitre 4.B; pour cela un calcul de a_5 avec une faible précision, disons $|\delta a_5/a_5| \approx 3\%$, serait suffisant.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- G. AUBERSON, G. MAHOX et G. MENNESSIER (1978). *On the Perturbation Theory of the Anharmonic Oscillator at Large Orders*, Nuovo Cimento 48A, 1–23 (1978).
- G. AUBERSON et G. MENNESSIER (1980). *Some Properties of Borel Summable Functions*, preprint Université Montpellier (PM/80/10) 1980, paru dans J. Math. Phys. 22, 2472–2481 (1981).
- E. BRÉZIN, J. C. LE GUILLOU, J. ZINN-JUSTIN (1977). *Perturbation at Large Order. I. The ϕ^{2N} Interaction*, Phys. Rev. 15D, 1544–1557 (1977); II. *Role of the Vacuum Instability*, Phys. Rev. 15D, 1558–1564 (1977).
- J. DIMOCK (1974). *Asymptotic Perturbation Expansion in the $P(\phi)_2$ Quantum Field Theory*, Com. Math. Phys. 35, 347–356 (1974).
- J. DIMOCK et J. GLIMM (1974). *Measures on Schwartz Distribution Space and Applications to $P(\phi)_2$ Field Theories*, Adv. Math. 12, 58–83 (1974).
- J. P. ECKMANN et H. EPSTEIN (1979). *Borel Summability of the Mass and the S Matrix in ϕ^4 Models*, Com. Math. Phys. 68, 245–258 (1979).
- J. P. ECKMANN, H. EPSTEIN et J. FRÖHLICH (1976). *Asymptotic Perturbation Expansion for the S-Matrix and the Definition of Time Ordered Functions in Relativistic Quantum Field Models*, Ann. Inst. Henri Poincaré, A25, 1–34 (1976).
- J. P. ECKMANN, J. MAGNEN et R. SÉNÉOR (1975). *Decay Properties and Borel Summability for the Schwinger Functions in $P(\phi)_2$ Theories*, Com. Math. Phys. 39, 251–271 (1975).
- R. S. ELLIS et J. S. ROSEN (1980). 1. *Asymptotic Expansions of Gaussian Integrals*, Bul. Am. Math. Soc. 3, 705–710 (1980); 2. *Laplace's Method for Gaussian Integrals with an Application to Statistical Mechanics* (49 pages), preprint University of Massachusetts, February 1980; 3. *Asymptotic Analysis of Gaussian Integrals, I: Isolated Minimum Points* (79 pages), II: *Manifold of Minimum Points* (50 pages), preprint University of Massachusetts, July 1980.
- J. FRÖHLICH (1976). *An Introduction to Some Topics in Constructive Quantum Field Theory*, paru dans *Many Degrees of Freedom in Field Theory*, Bielefeld Summer Institute 1976, édité par L. Streit, Plenum Press 1978, pages 1–50.
- J. GLIMM et A. JAFFE (1974). *ϕ^4_2 Quantum Field Model in the Single-Phase Region: Differentiability of the Mass and Bounds on Critical Exponents*, Phys. Rev. D10, 536–539 (1974).
- J. GLIMM, A. JAFFE et T. SPENCER (1973). *The Particle Structure of the Weakly Coupled $P(\phi)_2$ Model and Other Applications of High Temperature Expansions: Part I: Physics of Quantum Field Models* (p. 132–198); Part II: *The Cluster Expansion* (p. 199–242), parus dans *Constructive Quantum Field Theory*, Erice 1973, édité par G. Velo et A. Wightman, Springer 1973.
- J. GLIMM, A. JAFFE et T. SPENCER (1974). *The Wightman Axioms and Particle Structure in the $P(\phi)_2$ Quantum Field Model*, Ann. Math. 100, 585–632 (1974).
- W. HERBST et B. SIMON (1978). *Stark Effect Revisited*, Phys. Rev. Let. 41, 67–69 (1978).
- B. HIRSBRUNNER (1981a). *La sommabilité selon Borel et son application en théorie des champs*, thèse de doctorat, Université de Lausanne, avril 1981. 206 pages, 155 références. Non publié. Peut être obtenue sur demande au Secrétariat Inst. Phys. Théor., Université de Lausanne, CH-1015 Lausanne.
- B. HIRSBRUNNER (1981b). *Plane Poiseuille Flow: A Numerical Test of Borel Summability*, Rapport Chaire d'Informatique Théorique EPFL-DMA, Septembre 1981. 26 pages. Non publié. Peut être obtenu sur demande au Secrétariat Info. Théor., EPFL, CH-1015 Lausanne.

- B. HIRSBRUNNER (1982). *Approximants de Borel*, *Helv. Phys. Acta* 55, 295–329 (1982).
- J. C. LE GUILLOU et J. ZINN-JUSTIN (1977). *Critical Exponents for the n -Vector Model in Three Dimensions from Field Theory*, *Phys. Rev. Lett.* 39, 95–98 (1977). Le détail des calculs a paru dans J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, *Critical Exponents from Field Theory*, *Phys. Rev.* 21B, 3976–3998 (1980), 80 références.
- L. N. LIPATOV (1976). 1. *Calculation of the Gell-Mann-Low Function in Scalar Theories with Strong Nonlinearity*, *JETP Letters* 24, 157–160 (1976); 2. *Divergence of the Perturbation-Theory Series and Pseudo-particles*, *JETP Letters* 25, 104–107 (1977); 3. *Divergence of the Perturbation-Theory Series and the Quasi-Classical Theory*, *Soviet Physics JETP* 45, 216–223 (1977).
- J. MAGNEN et R. SÉNÉOR (1977). *Phase Space Cell Expansion and Borel Summability for the Euclidean ϕ_3^4 Theory*, *Com. Math. Phys.* 56, 237–276 (1977).
- G. PARISI (1977). *The Perturbative Expansion and the Infinite Coupling Limit*, *Phys. Lett.* 69B, 329–331 (1977).
- B. SIMON (1974). *The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton University Press 1974.
- TH. SPENCER (1980). *The Lipatov Argument*, *Com. Math. Phys.* 74, 273–280 (1980).
- H. E. STANLEY (1971). *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford 1971.
- S. J. SUMMERS (1979). *On the Phase Diagram of a $P(\phi)_2$ Quantum Field Model*, preprint CNRS-Marseille 79/P. 1138, September 1979.
- J. ZINN-JUSTIN (1977). *Perturbation Series at Large Order and Vacuum Instability*, paru dans *Topics in Quantum Field Theory and Gauge Theories*, *Proceedings Salamanca 1977*, édité par J. A. de Azcárraga, Springer 1978 (pages 126–154).
- J. ZINN-JUSTIN (1979). *Large Order Estimates in Perturbation Theory*, *Phys. Rep.* 49, 205–213 (1979).
- J. ZINN-JUSTIN (1981). *Perturbation Series at Large Orders in Quantum Mechanics and Field Theories: Application to the Problem of Resummation*, *Phys. Rep.* 70, 109–167 (1981).