Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 56 (1983)
Heft: 6

Artikel: Leonhard Euler 1707-1783 : Schlaglichter auf sein Leben und Werk
Autor: Fellmann, Emil A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-115438

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Helvetica Physica Acta, Vol. **56** (1983) 1099–1131 0018–0238/83/061099–33$1.50 + 0.20/0
© Birkhäuser Verlag Basel, 1983

Leonhard Euler 1707–1783
Schlaglichter auf sein Leben und Werk

von Emil A. Fellmann, Arnold Böcklin-Strasse 37, CH-4051 Basel

Johann Jakob Burckhardt (Zürich) zur Vollendung seines achtzigsten Lebensjahres in freundschaftlicher Verbundenheit zugeeignet

Inhaltsübersicht:

Prolog

1. *Zu Leben und Werk*
   1.1 Kurzvita
   1.2 Eulers Charakter
   1.3 Zum Werk
2. *Reine Mathematik*
   2.1 Zahlentheorie und Algebra
   2.2 Reihenlehre, Funktionentheorie, Analysis
   2.3 Geometrie
3. *Mechanik*
   3.1 Allgemeines
   3.2 Hydromechanik
      3.2.1 Bemerkungen zur sogenannten "Bernoullischen Gleichung"
      3.2.2 Das "nouveau principe"
      3.2.3 Hydrostatik
      3.2.4 Hydrodynamik

Epilog

Anmerkungen

Elephants are always drawn
smaller than live . . .
Johathan Swift

Prolog

Er entgeht auf natürliche Weise dem gewöhnlichen Schicksal der meisten "Gefeierten", nur gerade in einem kalendarisch markanten Jahr literarisch bedacht zu werden: als Folge des rühmlichen Beschlusses der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft [1]) vom 6. September 1909 erschien seit 1911 bis heute (im Durchschnitt) jährlich ein Band von Eulers *Opera omnia* [2]), und noch immer ist das Gesamtwerk dieses Geistesgiganten im Druck nicht vollständig zugänglich. Das *Burckhardt-Verzeichnis* [3]) listet mehr als 700 Abhandlungen und Bücher *über* Leonhard Euler auf, die zeitlich im allgemeinen regellos verteilt seit Eulers Tod ihre – meist bewundernden – Verfasser gefunden haben, und als äusseres Zeichen der Anerkennung schliesslich widmete 1979 die Schweizerische Nationalbank dem grössten Basler aus dem kleinsten Kanton die kleinste Banknote mit der grössten Auflage. [4]) Muss es da nicht als selbstverständlich erscheinen, dass Volk und Regierung des Stadtstaates Basel Leonhard Euler anlässlich der 200. Wiederkehr seines Todestages einen stattlichen Gedenkband [5]) gestiftet haben?

Die sogenannten exakten Wissenschaften sind in den letzten Jahrzehnten infolge ihres Missbrauchs hinsichtlich technologischer und oekologischer Anwendungen stark in Misskredit geraten – und leider nicht nur zu unrecht. Dennoch soll und darf uns dieser Umstand nicht daran hindern, im Rahmen des geschichtlichen Kulturganzen und in der Ziellinie eines (immer noch nicht veralteten) "wissenschaftlichen Humanismus" die Leistungen der wahrhaft bedeutendsten Vertreter des Menschengeschlechts gebührend zu würdigen; Euler war nämlich nicht nur der weitaus produktivste Mathematiker der Menschheitsgeschichte, sondern auch einer der grössten Gelehrten aller Zeiten. Kosmopolit im wahrsten Sinne des Wortes – er verlebte die ersten zwanzig Jahre in Basel, wirkte insgesamt über dreissig Jahre in St. Petersburg (heute Leningrad UdSSR) und ein Vierteljahrhundert in Berlin (damals Preussen) – gelangte er wie nur wenige

---

1) Cf. J. J. Burckhardt, *Die Euler-Kommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft – ein Beitrag zur Editionsgeschichte*, in: Leonhard Euler 1707–1783, Gedenkband des Kantons Basel-Stadt, Birkhäuser Basel 1983, p. 501ff. (Dieser Gedenkband wird hier künftig als "*EGB 83*" zitiert und das darin enthaltene "Burckhardt-Verzeichnis" kurz mit "*BV*").

2) Cf. *EGB 83* p. 508 f.; *Leonhard Euler, Opera omnia*, Verlagsprospekt Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart 1982.

3) Cf. *EGB 83* p. 511–552.

4) Angesichts der ehrenvollen Berücksichtigung Eulers durch die Schweizerische Nationalbank ist man gerne geneigt, die zwei etwas peinlichen astronomisch-physikalischen Fehler zu verzeihen, die sich in die so sinnreich und prächtig gestaltete Zehnfranken-Banknote eingeschlichen haben: die falsche Richtung des Kometenschweifs und die Darstellung von *fünf* (statt der zu Eulers Zeit bekannten *vier*) Jupitermonden (von welchen erst noch zwei in derselben Bahn laufen!). – Denjenigen, die sich mit dem noch dickeren Fehler auf der englischen "Newton-Einpfund-Jubiläumsbanknote" (1977) trösten wollen, auf welcher die Sonne im geometrischen Zentrum statt in einem Brennpunkt der Ellipse steht, sei auf Euripides verwiesen, wo es etwa heisst:
"Ein Tor, der nach des Nachbars Kinderstreichen
sich Trost schafft für das eig'ne schwache Tun;
der immer um sich späht und schaut und nun
sich seinen Wert bestimmt nach falschen Zielen".

5) Cf. Anm. 1.

Gelehrte zu einer Popularität und Berühmtheit, wie sie etwa mit derjenigen von Galilei, Newton oder Albert Einstein verglichen werden kann.

Der Rahmen des hier vorliegenden Versuchs einer Würdigung ist folgendermassen abgesteckt:

Zur Entlastung der Darstellung von biographischen Daten wie auch zur allgemeinen Uebersicht wird zunächst eine tabellierte *Kurzvita* gegeben. Ihr folgen zwei kurze Abschnitte über *Eulers Charakter* und sein (äusseres) *Werk*, [6]) begleitet von einer chronologisch aufgebauten Liste der *Hauptwerke* Eulers, [7]) deren dort angegebene "Kurztitel" im vorliegenden Text als Kennzeichnung verwendet werden. Das eigentliche Kernstück bilden die sieben "wissenschaftlichen Kapitel" in Uebersichten.

1. Zu Leben und Werk

1.1. *Kurzvita Leonhard Eulers*

1707 am 15. April in Basel (Schweiz) als Sohn des reformierten Pfarrers Paul Euler und Margaretha Brucker geboren.

1720 Leonhard bezieht die Basler Universität, welche schon im Jahre 1460 gegründet wurde. Anfänglich studiert er Theologie, orientalische Sprachen und Geschichte, bald jedoch Mathematik bei Johann Bernoulli (1667–1748), der nach dem Tod von Isaac Newton (1643–1727) zum weltgrössten Mathematiker avancierte. Bernoulli erkannte im jungen Euler schon früh den zukünftigen "Mathematikerfürsten" und förderte ihn entscheidend durch Hinweise auf die Werke der Meister, vor allem jedoch durch seine persönliche Unterweisung in den damaligen Frontgebieten mathematischer Forschung.

1727 Euler bewirbt sich mit einer Dissertation *Ueber den Schall* um die vakante Physikprofessur in Basel, kam jedoch als erst Zwanzigjähriger nicht in die Ränge. So folgt er einem durch die Bernoullis vermittelten Ruf an die 1725 von Peter dem Grossen gegründete Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Hier wirkt er zunächst als Adjunkt, dann ab 1731 als Professor und Akademiemitglied (ohne Lehrverpflichtung, wenn man von der Autorschaft elementarmathematischer Unterrichtmittel absieht). Die Hauptwerke dieser "ersten Petersburger Periode" sind die zweibändige "Mechanik", die "Musiktheorie" und die doppelbändige "Schiffstheorie", die allerdings erst später im Druck erschien.

1734 Anfang Januar Heirat mit Katharina Gsell, einer Tochter des in St. Petersburg wirkenden Schweizer Kunstmalers Georg Gsell. Ende November Geburt des Sohnes Johann Albrecht, der als einziger Sprössling Leonhards Mathematiker und in der Akademie sein Nachfolger werden sollte. Von

---

[6]) Umfassendere Information findet der interessierte Leser in *EGB 83*. Einen Gesamtüberlick über Eulers Werke bieten die in Anm. 1 und 2 genannten Schriften.

[7]) Zuweilen werden die Bezüge auf die Werke Eulers hier abgekürzt zitiert, und zwar in der Reihenfolge: Nummer des Eneström-Verzeichnisses (cf. *EGB 83*, p. 521), Serie der *Opera omnia*, Band, ev. Seitenangabe. Ein Beispiel möge diese Praxis verdeutlichen: E.65/O.I,24, p. 231 f. verweist auf Eulers *Methodus inveniendi lineas curvas*... im Band 24 der Serie I, Seiten 231 f. Eine Tabelle zur Auffindung der Abhandlungungen und Bücher Eulers in den *Opera omnia* bei bekannter Eneström-Nummer ist in den beiden bis heute erschienenen Bänden O.IV A,1, p. 529 f. und O.IV A,5, p. 525 f. leicht zugänglich.

den insgesamt 13 Kindern Leonhard Eulers überlebten ihn bloss drei, die ihm jedoch 21 Enkel hinterliessen.

1738 Verlust des rechten Auges durch einen gefährlichen Abszess.

1741 Im Hinblick auf die politischen Wirren im Russischen Reich akzeptiert Euler einen Ruf Friedrichs des Zweiten an die neu zu gründende Preussische Akademie ("Berliner Akademie") und siedelt mit seiner Familie nach Berlin über. Dort amtiert er als Präsident der Mathematischen Klasse. Maupertuis, der sich mit der spektakulären Lapplandexpedition von 1736 (Gradmessung zwecks Nachweis der Abplattung der Erde) einen Namen gemacht hatte, wurde Präsident der Akademie – als Wissenschafter jedoch weit unter Euler stehend.

In der Berliner Periode entstanden neben hunderten von Abhandlungen Eulers Hauptwerke zur Variationsrechnung, zur Funktionentheorie, zur Differentialrechnung, sowie die sogenannte "zweite Mechanik" und die "Philosophischen Briefe". Auch das Konzept der so berühmt gewordenen "Algebra" datiert noch aus der Berliner Zeit. Während dieser Periode unterhielt Euler ohne Unterbruch aktive Beziehungen zur Petersburger Akademie und wirkte als "goldene Brücke" zweier Akademien mit Weltgeltung.

1766 Das Unverständnis und Fehlverhalten Friedrichs des Zweiten erleichtert Euler die Annahme eines Rufes der russischen Kaiserin Katharina II nach Petersburg, wo er bis zu seinem Tod verblieb.

1771 Als Folge einer missglückten Staroperation verliert der Mathematiker auch sein linkes Auge und erblindet fast völlig. Während der grossen Feuersbrunst in Petersburg wird er mit knapper Not vom Basler Handwerker Peter Grimm aus dem brennenden Haus gerettet. Nun steigert Euler seine Produktion ins Unvorstellbare: rund die Hälfte seines gewaltigen Opus entstand in der "zweiten Petersburger Periode", darunter die dreibändige "Intergralrechnung", die ebenfalls dreibändige "Dioptrik" sowie die endgültige Fassung der "Algebra".

1773 Nach dem Tod der Gattin Katharina heiratet Euler 1776 deren Halbschwester Abigail Gsell.

1783 am 18. September erleidet Euler einen Schlaganfall und stirbt rasch und schmerzlos.

1.2. *Eulers Charakter*

Ueber den Charakter Eulers äussern sich alle Zeitgenossen und Biographen einhellig: er war ein Sonnenkind, wie die Astrologen sagen würden, von offenem und heiterem Gemüt, unkompliziert, humorvoll und gesellig. Obwohl in seiner zweiten Lebenshälfte recht wohlhabend, war er in materieller Hinsicht bescheiden, stets frei von jeglichem Dünkel, niemals nachtragend, dabei selbstbewusst, kritisch und draufgängerisch. Zuweilen konnte er leicht aufbrausen, um sich jedoch sogleich wieder zu beruhigen, ja über seinen eigenen Ausbruch zu lachen. In *einem* Punkt aber verstand er keinen Spass: in der Frage der Religion und des christlichen Glaubens. Eulers Strenggläubigkeit ist der Schlüssel zum Verständnis vieler wichtiger Fakten in seinem Leben, so zum Beispiel für seine unerbittliche Verfolgung der Leibniz'schen Monadenlehre Wolff'scher Prägung wie auch für seine heftigen Attacken gegen gewisse Enzyklopädisten und andere

"Freygeister", die er 1747 in seiner theologischen Schrift "Rettung der göttlichen Offenbahrung..." ritt. Trotzdem war Eulers (gelebte!) Toleranz bei weitem ehrlicher und ausgeprägter als diejenige seines königlichen Herrn, der sich ihrer nur als Schlagwort bediente und sie stracks vergessen konnte, wenn ihm ihre Anwendung auch nur im geringsten hinderlich war.

Auch in wissenschaftlichen Besitzansprüchen war Euler überaus bescheiden; er kannte – im Gegensatz zu den meisten Gelehrten aller Zeiten – nie Prioritätshändel, ja er verschenkte zuweilen generös neue Entdeckungen und Erkenntnisse. In seinen Werken versteckt er nichts, sondern legt die Karten stets offen auf den Tisch und bietet dem Leser die gleichen Voraussetzungen und Chancen, Neues zu finden, ja er führt ihn oft dicht an die Entdeckung hinan und überlässt ihm die Entdeckerfreuden – die einzig wahre Pädagogik: Das macht Eulers Bücher dem Lernenden zum Erlebnis, unterhaltsam und spannend zugleich. Das Gefühl des Neides muss diesem erstaunlichen Menschen absolut fremd gewesen sein; er gönnte jedem alles und freute sich stets auch an den neuen Entdeckungen anderer. Dies alles war ihm nur möglich, weil er geistig so unermesslich reich und psychisch in selten anzutreffendem Masse ausgeglichen war.

Das Phänomen Euler ist wesentlich an drei Faktoren gebunden: erstens an die Gabe eines wohl einmaligen Gedächtnisses. Was Euler je gehört, gesehen

Abb. 1

oder geschrieben hatte, scheint sich ihm für immer fest eingeprägt zu haben. Davon gibt es unzählige zeitgenössische Zeugnisse. Noch in hohem Alter soll er beispielsweise seine Familienangehörigen, Freunde und Gesellschaften mit der wortgetreuen (lateinischen) Rezitation jedes beliebigen Gesanges aus Vergils Aeneis entzückt haben, und Protokolle der Akademiesitzungen kannte er nach Jahrzehnten (!) noch auswendig – von seinem Gedächtnis für mathematische Belange ganz zu schweigen. Zweitens war seine gewaltige Gedächtniskraft gepaart mit einer seltenen Konzentrationsfähigkeit. Lärm und Betrieb in seiner unmittelbaren Umgebung störten ihn kaum in seiner Gedankenarbeit. "Ein Kind auf den Knien, eine Katze auf dem Rücken, so schrieb er seine unsterblichen Werke", berichtet sein Freund und Kollege Thiébault. Der dritte Schlüssel zum "Mysterium Euler" besteht schlicht in steter, ruhiger Arbeit.

1.3. *Zum Werk*

Allein schon im Hinblick auf seine Produktivität ist Euler ein einzigartiges Phänomen. Das 1910–1913 erschienene Verzeichnis (Gustaf Eneström) von Eulers damals gedruckt vorliegenden Schriften [8]) weist 866 Nummern auf, und die grosse (schweizerische) Euler-Werkausgabe, an welcher seit der letzten Jahrhundertwende viele Fachleute verschiedener Nationen gearbeitet haben und noch immer arbeiten, umfasst bis heute rund 70 Quartbände, denen noch 14 Bände "Briefe und Manuskripte" folgen sollen. (Die Ausgabe erfolgt stets in Eulers Originalsprachen, [9]) also mehrheitlich in Latein und Französisch, selten deutsch).

Rein vom Umfang seiner Arbeitsleistung her gesehen bleibt Euler nicht hinter den produktivsten Vertretern des Menschengeschlechts wie etwa Voltaire, Goethe, Leibniz oder Telemann zurück. Hier sei eine nach Dekaden geordnete tabellarische Uebersicht über die Quantität der von Euler druckfertig gemachten Schriften wiedergegeben [10]) (allerdings ohne Berücksichtigung einiger Dutzend Arbeiten, die noch nicht datiert werden konnten):

Jahre	Arbeiten	%	Jahre	Arbeiten	%
1725–1734	35	4	1755–1764	110	14
1735–1744	50	10	1765–1774	145	18
1745–1754	150	19	1775–1783	270	34

Auf die Fachdisziplinen bezogen ergibt sich der jeweilige prozentuale Anteil etwa folgendermassen:

Algebra, Zahlentheorie, Analysis	40%
Mechanik, übrige Physik	28%
Geometrie, einschliesslich Trigonometrie	18%
Astronomie	11%
Schiffswesen, Architektur, Artilleristik	2%
Philosophie, Musiktheorie, Theologie und anderes	1%

[8]) Gustaf Eneström, *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Ergänzungsband 4, 1. Lieferung 1910, 2. Lieferung 1913.

[9]) Sämtliche in der vierten Serie der *Opera omnia* edierten lateinischen Briefe und Dokumente erscheinen simultan in moderner Uebersetzung (deutsch oder französisch).

[10]) Wir folgen hier der Darstellung des wohl besten Eulerkenners unserer Zeit, A. P. Juškevič (cf. *EGB 83*, p. 551).

(In dieser Aufstellung sind die ca. 3000 bis heute bekannten Briefstücke sowie die noch unedierten Manuskripte nicht berücksichtigt).

Hauptwerke Leonhard Eulers

(in Kurztiteln), chronologisch nach Druckjahren geordnet

1736 *Mechanica* (2 Bände)

1738, 1740 *Rechenkunst* (2 Bände)

1739 *Tentamen novae theoriae musicae* («Musiktheorie»)

1744 *Methodus inveniendi* («Variationsrechnung»)

1744 *Theoria motuum planetarum et cometarum* («Himmelsmechanik»)

1745 *Neue Grundsätze der Artillerie*

1747 *Rettung der göttlichen Offenbarung gegen die Einwürfe der Freygeister*

1748 *Introductio in analysin infinitorum* («Einführung», 2 Bände)

1749 *Scientia navalis* («Schiffstheorie», 2 Bände)

1753 *Theoria motus lunae* («Erste Mondtheorie»)

1755 *Institutiones calculi differentialis* («Differentialrechnung», 2 Bände)

1762 *Constructio lentium objectivarum* («Achromatische Linsen»)

1765 *Theoria motus corporum* («Zweite Mechanik»)

1766 *Théorie générale de la dioptrique* («Linsentheorie»)

1768 *Lettres à une Princesse d'Allemagne* («Philosophische Briefe», 2 Bände)

1768 *Institutiones calculi integralis* («Integralrechnung», 3 Bände bis 1770)

1769 *Dioptrica* («Optik», 3 Bände bis 1771)

1770 *Vollständige Anleitung zur Algebra* («Algebra», 2 Bände, 1768 Vorabdruck einer russischen Übersetzung)

1772 *Theoria motuum lunae* («Zweite Mondtheorie»)

1773 *Théorie complette de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux* («Zweite Schiffstheorie»)

2. Reine Mathematik

2.1. *Zahlentheorie und Algebra*

In der Zahlentheorie führt eine direkte Linie von Diophant (um 250) über Fermat (1601–1665) zu Euler. Fermat hinterliess seinen nach ihm benannten "kleinen Satz", dass für irgendeine Primzahl p und jede dazu teilerfremde

natürliche Zahl n die Zahl $n^p - n$ durch p teilbar sei, ohne Beweis. Eulers Beschäftigung mit diesem Satz, die mit einem eleganten Beweis gekrönt wurde, führte schliesslich zur Theorie der Reste nach einem Modul und gipfelte in Eulers wohl bedeutsamster Entdeckung auf diesem Gebiet: im Gesetz der quadratischen Reziprozität. Euler selbst vermochte zwar das Gesetz nicht zu beweisen, und auch A.-M. Legendre (1752–1833) gab 1785 bloss einen unvollständigen Beweis. Erst C. F. Gauss (1777–1855) gelang 1801 der völlige Durchbruch, und eine Ausdehnung des Gesetzes auf andere Zahlbreiche und höhere Potenzreste bewerkstelligten Ernst Kummer (1810–1893), David Hilbert (1862–1943) und Emil Artin (1898–1962). Von ungewöhnlicher Fruchtbarkeit war eine weitere, noch berühmtere von Fermat hinterlassene Behauptung, der sogenannte "grosse Fermatsche Satz", der sich – ebenfalls ohne Beweis – als Marginalie in Fermats Handexemplar der Diophant-Ausgabe von Bachet de Méziriac (1581–1638) vorfindet. Es ist die Behauptung (oder Vermutung), dass die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

für kein natürliches $n > 2$ eine Lösung in von Null verschiedenen ganzrationalen Zahlen x, y, z besitzt; (für $n = 2$ geht die Gleichung in den pythagoreischen Lehrsatz über und lässt unendlich viele Tripel zu). Euler beweist 1753 unter Verwendung einer "descente infinie" die Unmöglichkeit für den Fall $n = 4$, später für weitere natürliche Exponenten. Für den allgemeinen Fall war der Unmöglichkeitsbeweis trotz bedeutender theoretischer Fortschritte bis in unsere Tage nicht zu erbringen.

Im Anschluss an die zahlentheoretischen Ueberlegungen von Marin Mersenne (1588–1648) gelangte Fermat zur weiteren Vermutung, dass alle Zahlen von der Form

$$p = 2^{2^k} + 1$$

prim seien. Dies stimmt zwar für die Werte von $k = 0, 1, 2, 3, 4$, doch schon für $k = 5$ ergibt sich die Zahl $p = 4'294'967'297$, von welcher Euler nachwies, dass sie den Teiler 641 besitzt und folglich keine Primzahl ist.

Ebenfalls von Fermat behauptet, aber erst durch Euler bewiesen, ist der wahrhaft schöne Satz, dass alle Primzahlen von der Form $p = 4n + 1$ in eine Summe von zwei Quadratzahlen zerlegt werden können, dass also immer gilt

$$p = 4n + 1 = x^2 + y^2. \tag{1}$$

Der Satz gilt in einer Umkehrung: Jede ganze Zahl von der Form $4n + 1$, die auf eine *einzige* Weise als Summe zweier teilerfremder Quadrate darstellbar ist, ist prim. Mit dieser Einsicht gewinnt Euler ein wirksames Hilfsmittel zur Charakterisierung grosser Zahlen. Ein Beispiel möge dies verdeutlichen: Die Zahl 2'232'037 ist prim, da nur die Zerlegung $2'232'037 = 1^2 + 1'494^2$ nach obiger Vorschrift möglich ist. Hingegen ist die Zahl 1'000'009 nicht prim, da sie auf *zwei* Arten in eine Quadratsumme zerlegbar ist, nämlich

$$1'000'009 = 3^2 + 1'000^2 = 972^2 + 235^2.$$

Von hier aus gelangt Euler über die allgemeinere Darstellung von Primzahlen der Struktur

$$p = mx^2 + ny^2 \tag{2}$$

zur Entwicklung von wirksamen Methoden zur Entscheidung über den allfälligen Primcharakter grosser Zahlen, was schliesslich die Grundlage für die allgemeine Theorie der binären quadratischen Formen abgab, die in der Folge von Lagrange und Gauss entwickelt und ausgebaut werden sollte. Für $m = 1$ ergibt sich aus (2) die Gleichung

$$p = x^2 + ny^2, \tag{3}$$

und Euler formulierte daraus das Problem, alle natürlichen Zahlen n anzugeben, für welche gilt: Wenn eine Zahl p auf nur eine einzige Weise in der Form (3) bei teilerfremden x und y darstellbar ist, dann ist sie prim. Beispielsweise erfüllen die Zahlen $n = 1, 2, 3, 5$ unter den angegeben Voraussetzungen die Gleichung (3), nicht aber die Zahl $n = 11$ (Gegenbeispiel: $15 = 2^2 + 11.1^2$ ist nicht prim). Euler nannte solche Zahlen *numeri idonei* ("passende" oder "taugliche" Zahlen) und suchte nach einer Methode, sie zu bestimmen. Um nicht für jedes n unendlich viele Zahlen p auf ihre Darstellbarkeit gemäss Gleichung (3) prüfen zu müssen, stützte Euler die Untersuchung auf folgendes Resultat seiner Ueberlegungen ab: Für jedes n, das *nicht* "tauglich" ist, gibt es ein natürliches $m < 4n$, das nur auf eine einzige Weise durch $x^2 + ny^2$ darstellbar ist, obwohl m *keine* Primzahl ist. Mit diesem Kriterium rechnete Euler sukzessive bis $m = 1'000$ und mehr durch und machte dabei die unerwartete Entdeckung, dass *nach* $n = 1848$ keine *numeri idonei* mehr auftauchen: Insgesamt existieren deren nur 65, und Euler gab sie vollständig an:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
12,	13,	15,	16,	18,	21,	22,	24,	25,	28,
30,	33,	37,	40,	42,	45,	48,	57,	58,	60,
70,	72,	78,	85,	88,	93,	102,	105,	112,	120,
130,	133,	165,	168,	177,	190,	210,	232,	240,	253,
273,	280,	312,	330,	345,	357,	385,	408,	462,	520,
760,	840,	1320,	1365,	1848.					

Es ist heute klar, dass Euler – und auch noch später Gauss – mit den ihnen zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln den *Beweis* für die Endlichkeit der *numeri idonei* nicht erbringen konnten. Dies wurde erst 1934 durch Heilbronn und Chowla geleistet.

Bei all diesen Untersuchungen operierte Euler mit elementaren arithmetischen und algebraischen Methoden, doch war er auch der Erste, der *analytische Methoden* in die Zahlentheorie eingeführt hat. So arbeitete er bereits während der ersten Petersburger Periode mit der Beziehung

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\left(1 - \frac{1}{3^k}\right)\left(1 - \frac{1}{5^k}\right)\cdots},$$

kürzer geschrieben

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \prod_p \left[1 : \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)\right],$$

wobei die linke Seite die *Riemannsche Zetafunktion* $\zeta(k)$ darstellt und p die Reihe der Primzahlen durchläuft. In diesem Zusammenhang stellt und studiert

Euler bereits Probleme, die sich für die Theorie der transzendenten Zahlen als wichtig erweisen sollten. Seine von 1744 datierende Kettenbruchentwicklung der fundamentalen Transzendenten

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots,$$

der Basis der natürlichen Logarithmen, wurde 1768 von Johann Heinrich Lambert (1728–1777) für die Irrationalitätsbeweise der Zahlen π und e aufgegriffen, und Lindemann (1852–1939) benützte für seinen Transzendenzbeweis von π die von Euler 1728 gefundene Gleichung $\lg(-1) = \pi i$, wobei i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ bedeutet.

Schliesslich verwendete Euler für die Lösung des 1740 von dem in Berlin lebenden französischen Mathematikers Philippe Naudé (1684–1745) gestellten Partitionsproblems die Koeffizienten der Potenzreihe

$$\prod_{s=1}^{\infty}(1-x^s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k x^{k(3k-1)/2},$$

worin die rechte Seite eine spezielle Thetafunktion darstellt, wie sie später C. G. J. Jacobi in seiner Theorie der elliptischen Funktionen eingeführt hat.[11]) Heute heisst diese Gleichung *Eulersche Identität*; in ihr begegnen wir erstmals in der Geschichte der Mathematik einer Thetafunktion.

Als die Mathematiker des frühen 17. Jahrhunderts auf den fundamentalen Satz stiessen, dass eine algebraische Gleichung n-ten Grades

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

im allgemeinen n verschiedene Wurzeln bezw. Lösungen hat (die auch "imaginär" sein können), war es eine noch durchaus offene Frage, ob das Gebiet der imaginären Wurzeln beschränkt ist auf die Zahlen von der Form $a + bi$, die man (nach Gauss) komplexe Zahlen nennt. Viele namhafte Mathematiker schlossen damals die Existenzmöglichkeit andersartiger imaginärer Zahlen nicht aus. Euler hingegen glaubte seit spätestens 1743, dass *alle* Wurzeln einer algebraischen Gleichung von dieser Form $a + bi$ sind. D'Alembert (1748) und Euler (1751) führten je einen lückenhaften Beweis an, doch sollte es noch über ein halbes Jahrhundert dauern, bis dafür ein vollständiger Beweis erbracht werden konnte. In diesem Kontext formulierte Euler erstmals streng den *Fundamentalsatz der Algebra*, dass ein Polynom n-ten Grades als Produkt von n Linearfaktoren darstellbar ist:

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

wo die x_ν die Nullstellen des Polynoms sind. Einen allgemeinen Beweis dieses für die Algebra sehr wichtigen Satzes gab allerdings erst Gauss in seiner Doktordissertation von 1799.

Mitte der dreissiger Jahre versuchte Euler – wie wir seit N. H. Abel (1802–1829) und E. Galois (1811–1832) wissen, aus theoretischen Gründen vergeblich – die allgemeine Lösung einer algebraischen Gleichung von höherem als dem vierten Grad durch Radikale darzustellen. Denn wie alle seine Zeitgenossen war

---

[11]) *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, Königsberg 1829.

er von der Möglichkeit der Auflösung solcher Gleichungen überzeugt, und er schrieb es nur der vermeintlich mangelhaften Entwicklung der zeitgenössischen Algebra zu, dass die Auflösung nicht gelingen wollte. Dennoch gelangte er zu bemerkenswerten Teilresultaten: in einer relativ späten Arbeit (1762), in welcher er versuchte, Gleichungen höheren Grades mittels der Substitution

$$x = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt[n]{z_k}$$

aufzulösen, fand er spezielle Formen der Gleichung 5. Grades, deren Wurzeln durch Radikale darstellbar sind.

Euler arbeitete Näherungsmethoden für die Lösung *numerischer Gleichungen* aus und bearbeitete ferner – wahrscheinlich von Daniel Bernoulli angeregt – das Eliminationsproblem. So gelang ihm ein Beweis des bereits Newton (1643–1727) bekannten Satzes, dass zwei algebraische Kurven vom Grad m bezw. n höchstens $m \cdot n$ Schnittpunkte haben können. In diesem Zusammenhang gelangte er zum wichtigen Begriff der *Resultante.* In zwei Abhandlungen vom Jahre 1748 gab Euler eine stichhaltige Erklärung des sogenannten *Cramerschen Paradoxons,* dass eine Kurve n-ter Ordnung (C_n) nicht immer durch $n(n+3)/2$ ihrer Punkte bestimmt zu sein braucht, da diese Zahl für $n \geqq 3$ nicht grösser wird als n^2, d.h. als die Anzahl der Schnittpunkte der C_n mit einer anderen Kurve gleicher Ordung. [12]) Die Tiefgründigkeit dieses Paradoxons wurde allerdings erst viel später erkannt, nämlich 1818 von G. Lamé (1794–1870), 1827 von J. D. Gergonne (1771–1859) und 1828 von J. Plücker (1801–1868).

Noch in seiner letzten Berliner Zeit – wahrscheinlich [13]) 1765 – ging Euler an die Abfassung seiner zweibändigen *Vollständigen Anleitung zur Algebra,* die er seinem Gehilfen, einem ehemaligen Schneidergesellen, in die Feder diktiert haben soll. Dieses Buch – besonders bemerkenswert im Hinblick auf Eulers meisterhaftes didaktisches Geschick – wurde ein Bestseller. Es erschien 1768/69 zuerst in russischer Uebersetzung, 1770 in der deutschen Originalfassung und schliesslich in englischer, französischer und holländischer Sprache in vielen Auflagen. Die "Algebra", wie man das Buch kurz zu nennen pflegt, führt den absoluten Anfänger Schritt um Schritt von den natürlichen Zahlen über die arithmetischen und algebraischen Grundsätze und Praktiken bis in die sublimsten Details der unbestimmten Analysis ein; sie gilt – nach dem Urteil heutiger erstrangiger Mathematiker – noch immer als die beste Einführung in die Algebra für einen "mathematischen Säugling". Sinnigerweise wurde die grosse Euler-Ausgabe 1911 mit diesem Band eröffnet. Kein Geringerer als Lagrange, Eulers Nachfolger als Direktor der Mathematischen Klasse der Berliner Akademie, versah das Buch mit wertvollen Zusätzen. In dieser Form ist es den romanischen Lesern in den Ausgaben von Johann III Bernoulli noch immer zugänglich, und für den

---

[12]) G. Cramer, *Introduction à l'analyse des courbes algébriques,* Genève 1750. – Das Paradoxon findet sich schon bei Colin Maclaurin, *Geometria organica sive descriptio linearum curvarum universalis,* London 1720, p. 135–137. (Cf. P. Speziali in *EGB 83*).

[13]) Es ist ein weitverbreitetes Märchen, Euler habe die "Algebra" unmittelbar nach seiner Erblindung in St. Petersburg zur Selbstkontrolle verfasst bezw. seinem "Gehilfen" in die Feder diktiert. Erstens hatte Euler eine solche "Selbstkontrolle" in keiner Weise nötig, und zweitens erblindete er fast völlig erst nach der Staroperation 1771 (cf. R. Bernoulli in *EGB 83*), als das Buch schon mehrfach gedruckt war. Drittens finden sich im Text der "Algebra" einige Stellen, die als Hinweis auf die Abfassungszeit **1765** und **1766** gedeutet werden können.

Vollständige
Anleitung
zur
Algebra
von
Hrn. Leonhard Euler.

Erster Theil.
Von den verschiedenen Rechnungs-Arten, Verhältnißen und Proportionen.

St. Petersburg.
gedruckt bey der Kays. Acad. der Wissenschaften 1770.

Abb. 2

deutschen Sprachkreis am ehesten in der verbreiteten Reclam-Ausgabe, wo es als einziges (!) mathematisches Buch figuriert. [14])

2.2. *Reihenlehre, Funktionentheorie und Analysis*

Den unendlichen *Reihen* kam schon in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts eine stets wachsende Bedeutung zu, und im anbrechenden "goldenen Zeitalter der Analysis" wurde ihre Theorie zum schlechthin unentbehrlichen Hilfsmittel zur Lösung vieler einschlägiger Probleme der mathematischen Wissenschaften.

Ueber die ersten Reihenstudien Eulers informiert uns glänzend J. E. Hofman [15]) (1900–1973). Eulers Studien über die bereits oben erwähnte Zetafunktion nehmen ihren Anfang beim "Baslerproblem", die Summe der nichtabbrechenden Folge der reziproken Quadratzahlen zu bestimmen, also den Summenwert

$$S_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

zu berechnen. Dass diese Summe endlich ist, d.h. dass die Reihe konvergiert, ergibt sich sofort durch Vergleich mit einer bekannten geometrischen Reihe. Das

---

[14]) Ansprechend für den modernen Leser ist die sprachlich revidierte Reclam-Ausgabe von J. E. Hofmann, Stuttgart 1959 (leider vergriffen).

[15]) J. E. Hofmann, *Um Eulers erste Reihenstudien*, Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers ... vorgelegten Abhandlungen, Berlin 1959, p. 139–208.

Problem wurde bereits 1650 von Pietro Mengoli (1625–1686) erwähnt und war spätestens 1673 auch in England bekannt, doch trat es erst durch die nachdrücklich formulierte Stellung [16]) in der ersten Reihendissertation (1689) von Jakob Bernoulli ins Bewusstsein der Mathematiker. Weder Jakob noch Johann gelang die Lösung – trotz grösster Anstrengungen –, und in der Folge bemühten sich auch Niklaus I und Daniel Bernoulli mehr oder weniger erfolgreich um das Problem, doch den Vogel schoss erst Euler, ab, indem er 1735 das überraschende Resultat

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6}$$

durch die Bewältigung eines viel allgemeineren Problems als Spezialfall erhielt. Dieses Problem war die Bestimmung der Summe S_{2k}, das heisst der Summe der reziproken Potenzen der natürlichen Zahlen mit geradzahligen Exponenten. Euler erhielt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \zeta(2k) = a_{2k}\pi^{2k},$$

wo a_{2k} die Koeffizienten der "Euler- Maclaurinschen Summenformel" darstellen. Etwas später gelang ihm derselbe Nachweis mit Hilfe der mit den a_{2k} eng verwandten *Bernoullischen Zahlen.* Die reizvollen Teilresultate

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{und} \quad S_4 = \frac{\pi^4}{90}$$

meldete Euler 1736 Daniel Bernoulli nach Basel, dem Eulers Verfahren undurchsichtig blieb, doch erriet der alte Fuchs Johann eine Variante der Eulerschen Methode, meldete seine Nachentdeckung nach St. Petersburg sowie an seine nächsten Freunde und liess 1742 die ganze Sache seinen *Opera* einverleiben, [17]) ohne seinen Lieblings- und Meisterschüler auch nur mit einer Silbe zu erwähnen. – Die Geschichte hat eben nie ihr letztes Wort gesprochen.

Im Zusammenhang mit der Zetafunktion – das Problem der Bestimmung von $\zeta(2k+1)$ ist bis heute ungelöst – findet Euler die heute nach ihm bennante Konstante $C = 0{,}577'215'644\ldots$, die in der asymptotischen Formel

$$C = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum \frac{1}{n} - \lg n\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right] - \lg n\right\}$$

als "Schlüssellimes" auftritt und für die Theorie der Gammafunktionen, der Riemannschen Zetafunktion und für den Integrallogarithmus von grösster Bedeutung ist. Obwohl man die Zahl C auf hunderte, ja tausende von Dezimalen kennt, ist es bis heute unbekannt, ob sie rational, irrational oder transzendent ist. (Cf. Abb. 3).

Von grosser Tagweite sind Eulers schon 1734 aufgenommene Studien über die *harmonischen Reihen,* die 35 Jahre später mit einer weiteren Abhandlung

---

[16]) Jakob Bernoulli, *Opera,* Genf 1744, Bd. 1, p. 398.

[17]) Johann Bernoulli, *Opera,* Lausanne und Genf 1742, Bd. 4, p. 20–25.

Qua de summis fericeum $1 \pm \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} \pm \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} \pm \frac{1}{6^6} +$ etc. jam dudum etiam huc redeunt ut sit generaliter hujus feriei $\frac{1}{n+1} - \frac{m}{(n+2)^2} + \frac{m^2}{(n+3)^3} - \frac{m^3}{(n+4)^4} + \frac{m^4}{(n+5)^5} - \frac{m^5}{(n+6)^6} +$ etc. summa $= \int x^{mx} x^n dx$ posito post integrationem $x = 1$. Quod si jam ponatur $n = 0$, erit $\frac{1}{1} - \frac{m}{2^2} + \frac{m^2}{3^3} - \frac{m^3}{4^4} +$ etc. $= \int x^{mx} dx$ hunique fiet cum $\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} -$ etc. $= \int x^x dx$; uti Ipse olim inveniri. tum etiam $\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} +$ etc. $= \int x^{-x} dx = \int \frac{dx}{x^x}$

Expressio, quam aequivalens invenisti Vir Celeb. huic feriei $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x}$ est admodum concinna et elegans: dubito autem an sit apta ad quotvis assignatorum terminorum summam proxime exhibendam: quemadmodum ego per methodum meam feriei summandi universalem quotcunque terminorum summam in fractionibus decimalibus ad plures quam 16 figuras expedite assignare possum. Invenni scilicet esse hujus feriei summam $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{x}$

$$= \text{Const.} + lx + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2.3.2x^2} + \frac{1}{4.5.6x^4} - \frac{1}{6.7.6x^6} + \frac{3}{8.9.10x^8} - \frac{5}{10.11.6x^{10}}$$

$$+ \frac{691}{12.13.210x^{12}} - \frac{35}{14.15.2x^{14}} + \text{etc.}$$

quae quidem series maxime convergit: constantem autem tantam accipi oportet ut satisfiat uni casui, veluti si est $x = 10$, et deinde feriei primorum terminorum actu addantur: qui valor semel inventus pro omnibus casibus valebit. deinceps autem notandum est esse lx logarithmum hyperbolicum ipsius x, cum sit $lx = \int \frac{dx}{x}$. Est autem illa constans

0,5772156649015328 2. et quia est $l10 = 2,302585092994045684$ erit verbi gratia summa millies mille terminorum $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1000000}$

$= 14,392726722865723 29.$

Qua de integratione aequationum differentialium indefiniti gradus mihi rescribis mirifice mihi placent: methodus quidem, qua utaris Vir Excell. in aequatione $0 = y + \frac{a dy}{dx} + \frac{b ddy}{dx^2} + \frac{c d^3y}{dx^3} +$ etc. fere congruit cum mea, altera autem quam praebes pro aequatione $0 = y + \frac{ax dy}{dx} + \frac{bxx ddy}{dx^2} + \frac{cx^3 d^3y}{dx^3} +$ etc. a mea maxime discrepat, mihique compendia nonnulla patefecit, quae ex mea methodo non tam fronte manarent. Ceterum meae methodus hoc praecipue discrepat, quod semper aequationem realem ex duplici imaginaria praebeat, id quod his ad quantitates vel exponentiales vel a circuli quadratura pendentes confugere velimus, efficit omnino requirit.

Abb. 3

Dritte Seite des Briefes von Euler an Johann Bernoulli vom 20. Juni 1740 (alten Stils). Im Zusammenhang mit seiner Beschäftigung mit der Zetafunktion fand Euler bereits 1734 oder früher die heute nach ihm benannte, wichtige Konstante $C = 0.577\,215\ldots$, die er hier auf 17 Dezimalen nach dem Komma angibt, von denen die ersten 15 richtig sind (19. Zeile von oben).
[Das Original gehört zu den Beständen der Basler Universitätsbibliothek und trägt die Signatur *Ms. L Ia 657 Nr., 15**. Wir danken der UBB für die Publikationsgenehmigung und Herrn Marcel Jenni für die Reproaufnahme].

gekrönt wurden. Solche Reihen haben die Form

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{b+c}, \frac{a}{b+2c}, \ldots, \frac{a}{b+kc}, \ldots.$$

Man nennt sie *harmonisch*, weil das n-te Glied A_n das harmonische Mittel des $(n-1)$-ten und $(n+1)$-ten Gliedes ist, weil also gilt

$$\frac{A_{n-1}-A_n}{A_n-A_{n+1}}=\frac{A_{n-1}}{A_{n+1}}.$$

Als Spezialfall $(a=b=c=1)$ ergibt sich die bekannte Folge der reziproken natürlichen Zahlen

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

die man schlechthin als "die harmonische Reihe" bezeichnet. Dass sie divergiert, hatte schon Nicole D'Oresme (1323?–1382) gezeigt, und Johahn Bernoulli mühte sich nicht ohne Erfolg damit ab, die Summe ihrer ersten hundert Millionen (!) Glieder methodisch zu berechnen. [18]) Euler allerdings hatte bereits 1734 den Zusammenhang zwischen der harmonischen Reihe und dem (natürlichen) Logarithmus mittels seiner (oben erwähnten) Konstanten C herausgefunden, nämlich

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}=\lg(k+1)+r(k)+C, \quad \text{mit} \quad |r(k)|<\frac{1}{2k}.$$

In der angeführten späteren Abhandlung gab Euler der harmonischen Reihe die Gestalt folgender asymptotischer Entwicklung:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{x}-\lg x=C+\frac{1}{2x}-\frac{B_1}{2x^2}+\frac{B_2}{4x^4}-\frac{B_3}{6x^6}+-\ldots,$$

wo die B_i die vorerwähnten *Bernoullischen Zahlen* bedeuten, denen Euler in seiner "*Differentialrechnung*" von 1755 im Zusammenhang mit der Potenzreihenentwicklung für den Cotangens den Namen gab. Im gleichen Werk tauchen auch erstmals im Druck die *Eulerschen Zahlen* als Koeffizienten der Secansreihe auf. Diese Zahlen erwiesen sich als sehr nützlich zur Summation von Reihen aus den Potenzen der natürlichen Zahlen und ihren Reziproken.

Die im 18. Jahrhundert studierten Funktionen waren mit wenigen Ausnahmen *analytisch*, weshalb sich Euler vorwiegend der Potenzreihen bediente. Ein ganz spezielles Verdienst Eulers besteht nun in der Einführung einer besonders wichtigen Klasse von trigonometrischen Progressionen, die man heute *Fourier-Reihen* nennt und denen heute grundlegende Bedeutung in der

---

[18]) In seinem Brief vom 31. August 1740 an Euler gelangte Bernoulli (mittels eines Theorems, über das er schon Jahrzehnte zuvor mit Leibniz korrespondiert hatte) zu den beachtlichen Teilresultaten

$$\sum_1^{10^6}\frac{1}{x}\cong 14.392\,726\,722\,865\,723, \qquad \sum_1^{10^7}\frac{1}{x}\sim 16\frac{2}{3} \quad \text{und} \quad \sum_1^{10^8}\frac{1}{x}\sim 19.$$

Mathematik sowie in der gesamten Physik, insbesondere auch in der Elektrotechnik, zukommt. In seinem Brief an Goldbach vom 4.7.1744 drückte Euler erstmals eine algebraische Funktion durch eine solche Reihe aus, nämlich

$$\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}=\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

Im Druck erschien dieses historische Beispiel einer *Fourier-Reihe* erstmals in Eulers "*Differentialrechnung*" von 1755. Seiner Umwandlung von Potenzreihen in unendliche Produkte kam später grosse Wichtigkeit für die Theorie der analytischen Funktionen zu, wie aus dem Beispiel der oben erwähnten *Eulerschen Zahlen*, also den Koeffizienten der Entwicklung

$$\sec z=\frac{1}{\cos z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{E_{2n}}{(2n)!}z^{2n},$$

ersichtlich ist. (Die ersten vier Eulerschen Zahlen sind: $E_0=1$, $E_2=-1$, $E_4=5$, $E_6=-61$. Die Eulerschen Zahlen mit ungeraden Indices sind sämtlich Null.)

Die Meinungen der Mathematiker des 18. Jahrhunderts über die Zulässigkeit *divergenter Reihen*, d.h. von Reihen, die keinen endlichen Summenwert aufweisen, gingen stark auseinander. Viele Mathematiker wandten sich grundsätzlich *gegen* jede Verwendung divergenter Reihen, doch Euler, der sich auch davon zuverlässsige Resultate versprach, stellte ihre Anwendung ausser jeden Zweifel. Wenn er jedoch in einzelnen Fällen divergente Reihen heranzog, pflegte er sich darüber deutlich auszusprechen. Die einzige Angriffsfläche für seine Kritiker war seine Meinung, dass jede "vernünftige" Summationsmethode für eine divergente Reihe zum gleichen Resultat führen müsse. Natürlich besass Euler kein Kriterium für eine solche "Vernünftigkeit", was er jedoch mit einer immensen Erfahrung in derartigen Dingen und einer bewundernswerten Intuition kompensieren konnte. Das befähigte ihn, über die damals bekannten Konvergenzkriterien hinaus eine neue, erweiterte Definition einer Reihensumme vorzuschlagen und zwei Summationsmethoden zu skizzieren, deren exakte Begründung und Festigung erst um die letzte Jahrhundertwende geleistet werden konnte. [19]) Auch hier hat Euler eine Pionierleistung ersten Ranges vollbracht.

Die *Funktionentheorie* beginnt überhaupt erst mit Euler. Seine grosse Trilogie – *Introductio*, *Differentialrechnung* und *Integralrechnung* [20]) – ist eine grossartige Synopsis der wichtigsten mathematischen Entdeckungen in der Analysis bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts. Von besonderer Bedeutung ist hier die Ausarbeitung des analytischen Funktionsbegriffs sowie die klare Feststellung, dass die mathematische Analysis als eine "Wissenschaft von Funktionen" aufzufassen ist, und geradezu eine mathematikhistorische Zäsur ist Eulers Konzeption der komplexen Funktionen.

Am Beispiel des damals hochaktuellen Problems der schwingenden Saite erwies sich die Klasse der analytischen Funktionen für die mathematische Behandlung vieler Anwendungen als unzureichend. Euler behalf sich sofort mit sogenannten "willkürlichen", d.h. nichtanalytischen Funktionen, die sich stückweise geometrisch annähern liessen. Ueber die Möglichkeit der analytischen

---

[19]) Cf. G. Hardy, *Divergent Series*, Oxford 1949.
[20]) Cf. die Werktabelle im Abschnitt 1.3.

Darstellung solcher nichtanalytischer Funktionen stritten sich damals viele Mathematiker – nicht zuletzt Euler, d'Alembert und Daniel Bernoulli. Ein Resultat der Kontroverse um die Theorie der schwingenden Saite war Eulers allgemeine Definition einer Funktion als Grösse, deren Werte sich irgendwie mit den *Aenderungen* der unabhängigen Variabeln ändern.

Der grösste Teil des ersten Bandes der *Introductio* ist der Theorie der elementaren Funktionen gewidmet, ohne dass jedoch von der Infinitesimalrechnung Gebrauch gemacht wird. Euler skizziert hier erstmalig die analytische Theorie der trigonometrischen Funktionen und gibt 1743 eine einfache, wenn auch nicht ganz strenge Herleitung der Formel

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x,$$

die sich substantiell 1716 auch schon beim jungen, genialen Roger Cotes [21]) findet, jedoch erst von Euler vielseitig verwendet und in der Analysis eingebürgert worden ist. (Diese Formel ziert übrigens die schweizerische Jubiläums-Briefmarke von 1957). Aus dieser Beziehung liess sich dann als Spezialfall ($x = \pi$) sehr leicht eine schöne Formel finden, nämlich

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

besonders schön deswegen, weil sie lediglich aus den Hauptsymbolen e, π, i und den Fundamentalziffern 0 und 1 besteht und sich zudem durch grösstmögliche Einfachheit auszeichnet.

Schliesslich gelangte Euler im Kontext mit seinen Studien über *Funktionen einer komplexen Variabeln*, die teilweise von d'Alembert antizipiert wurden, mittels der schon von Johann Bernoulli verwendeten Substitution $z = x + iy$ zum imponierenden Resultat

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

In diesem Zusammenhang sei erwähnt, dass Euler mittels mehrfacher Anwendung der elementaren Formel

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

auf die Funktionen

$$y = \sin \frac{x}{2k}$$

zu der sehr eleganten und fruchtbaren Darstellung

$$\frac{\sin x}{x} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2k}$$

gelangte.

---

[21]) Roger Cotes (1682–1716), Physiker und Mathematiker, seit 1706 Professor für Astronomie in Cambridge und seit 1711 Mitglied der *Royal Society*, ist hauptsächlich bekannt als der Herausgeber der zweiten Auflage von Newtons *Principia mathematica* (1713).

★

Beide Gebiete der *Analysis*, die Differential- wie die Integralrechnung, wurden von Euler enorm bereichert. Seine '*Differentialrechnung*' enthält, neben zahlreichen neuen Sätzen und Details eine Grundlegung der *Differenzenrechnung*. In der '*Integralrechnung*' finden sich die Methoden der unbestimmten Integration in moderner Form erschöpfend dargestellt für die Fälle, in denen die Integration auf elementare Funktionen führt. Viele Methoden sind erst von Euler entwickelt worden, und noch heute kennt jeder Mathematiker die "Eulersche Substitution," mit deren Hilfe gewisse irrationale Differentiale rationalisiert werden können. Bereits als Zweiundzwanzigjähriger führt er die – wie sie heute gennant werden – "Eulerschen Integrale erster und zweiter Art" (Beta- und Gammafunktion) im Kontext mit seinen Studien über die Interpolation der Fakultäten ein. Diese Funktionstypen bildeten zusammen mit den Zeta- und den Bessel-Funktionen die wichtigsten transzendenten Funktionen im Eulerschen Zeitalter.

Ein neues und weites Feld tat sich auf, als Daniel Bernoulli behauptete, dass die Lösung irgendeiner beliebigen Wellengleichung durch trigonometrische Funktionen ausdrückbar sei. Zu Unrecht bestritten Euler und d'Alembert diese bedeutungsvolle Einsicht, und die später von Lagrange, Laplace und anderen weitergeführte Diskussion wurde erst durch die epochemachenden Arbeiten von Fourier (1768–1830) im ersten Jahrzehnt des 19. Jahrhunderts zungunsten Bernoullis entschieden. Mathematisch definitiv fundiert wurde dieser Problemkomplex allerdings erst gegen die Jahrhundertmitte von G. P. L. Dirichlet (1805–1859) und B. Riemann. (1826–1866).

(Zum *Additionstheorem der elliptischen Integrale*, einer mathematischen Hauptleistung Eulers, sowie zur *Variationsrechnung* sei auf *EGB 83*, p. 47–52. verwiesen.)

2.3. *Geometrie*

Die Mehrzahl seiner Entdeckungen in der Geometrie machte Euler durch die Anwendung algebraischer und analytischer Methoden. Das Lehrgebäude sowohl der ebenen wie auch der sphärischen Trigonometrie verdankt seine heutige Form – einschliesslich der Notationsweise – Leonhard Euler. Seine – von Johann Bernoulli angeregten – Studien über geodätische Linien auf einer Fläche waren richtungweisend für die später einsetzende Entwicklung der Differentialgeometrie, und von noch grösserer Bedeutung waren seine Entdeckungen in der Flächentheorie, von welcher Gaspard Monge (1746–1818) und andere Forscher in der Folge ausgehen sollten. In seinen späten Jahren schliesslich nahm Euler seine Arbeiten über die allgemeine Theorie der Raumkurven exakt dort wieder auf, wo Clairaut 1731 aufgehört hatte – allerdings wurden sie erst posthum gedruckt.

Im zweiten Band der *Introductio* gab Euler eine methodisch geschlossene Darstellung der analytischen Geometrie der Ebene wie auch des Raumes sowie die vollständige Durcharbeitung und Ausdehnung der Descartesschen Koordinatenmethode auf den dreidimensionalen Raum. Im Anhang findet sich erstmalig die Einteilung der Flächen zweiten Grades in fünf Geschlechter sowie die *Eulerschen Formeln* zur Koordinatentransformation, und durch die Einteilung der

Kurven dritten Grades wie auch durch seine Lehre von den Asymptoten algebraischer Kurven wurde Euler zum Vorläufer Julius Plückers (1801–1868).

Aus der Fülle der Eulerschen Entdeckungen in der *elementaren Geometrie* sollen hier nur fünf genannt werden:

1) Es ist bekannt, dass Euler rein mathematisch die zuerst von Jakob Bernoulli und Christiaan Huygens (1629–1695) studierte [22]) *Kreisevolvente*

$$x = a(\cos\phi + \phi\sin\phi); \qquad y = a(\sin\phi - \phi\cos\phi)$$

als günstigste Profilform der Flanken bei Zahnrädern eruiert hat. [23]) Diese Kurve liefert – sinnvoll verwendet – optimale mechanische Eigenschaften bezüglich Reibungsverlust, Geräuscharmut und Kraftübertragung. (Technisch realisiert wurde diese Entdeckung bezw. Erfindung Eulers erst im letzten Jahrhundert mit der *Evolventenverzahnung*). Weniger bekannt ist aber, dass Euler in dieser bereits 1762 entstandenen Arbeit (E.330/0.II,17) die heute nach Felix Savary (1797–1841) benannte Gleichung antizipiert hat. Sie dient zur Bestimmung des Krümmungsradius einer Rollkurve und ermöglicht eine elegante Konstruktion deren Krümmungszentren.

2) In einer Arbeit von 1763 (E.325/O.I,26) begegnen wir dem aus der Schulmathematik wohlbekannten und berühmten Satz, dass in einem beliebigen ebenen Dreieck der Höhenschnittpukt (H), der Umkreismittelpunkt (U) und der Schwerpunkt (S) auf einer Geraden liegen (*Eulersche Gerade*). Un zwar sind die Punkte, wie Euler nachweist, auf der Geraden so verteilt, dass immer gilt $\overline{SH} = 2\overline{SU}$.

3) Die sicher populärste Entdeckung Eulers im Gebiet der Elementargeometrie ist der nach ihm benannte *Polyedersatz*. Sei bei einem beliebigen, durch lauter ebene Vielecke begrenzten, konvexen räumlichen Körper die Flächenanzahl f, die Eckenzahl e und die Kantenzahl k, so gilt stets

$$e + f - k = 2.$$

Dieser verblüffende Satz war zwar schon Descartes (1596–1650) in etwa bekannt, doch hatte Euler davon keine Kenntnis, und ein Beweis wurde von Descartes auch nicht gegeben. Euler teilte zunächst das wunderhübsche Resultat seinem Freund Goldbach am 14.11.1750 brieflich mit samt einer (induktiven) Herleitung, hingegen fügte er hinzu, dass er dafür noch keinen strengen Beweis erbringen könne: "... Dieses ist klar, weil keine *hedra* aus weniger als 3 Seiten und kein *angulus solidus* aus weniger als 3 *angulus planis* bestehen kann. Folgende Proposition aber kann ich noch nicht recht *rigorose* demonstrieren: 6. *In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero hedrarum et numero angulorum solidorum binario superat numerum acierum, seu est* $H + S = A + 2, \ldots$".

Eine in diesem Sinne abgefasste Abhandlung präsentierte Euler bereits am 26.11.1750 (E.230/0.I,26), der er – nachdem er den Beweis für die Formel

---

[22]) Cf. etwa E. A. Fellmann, *Christiaan Huygens*, Humanismus und Technik 22,3, Berlin 1979.
[23]) Cf. O.II,17.

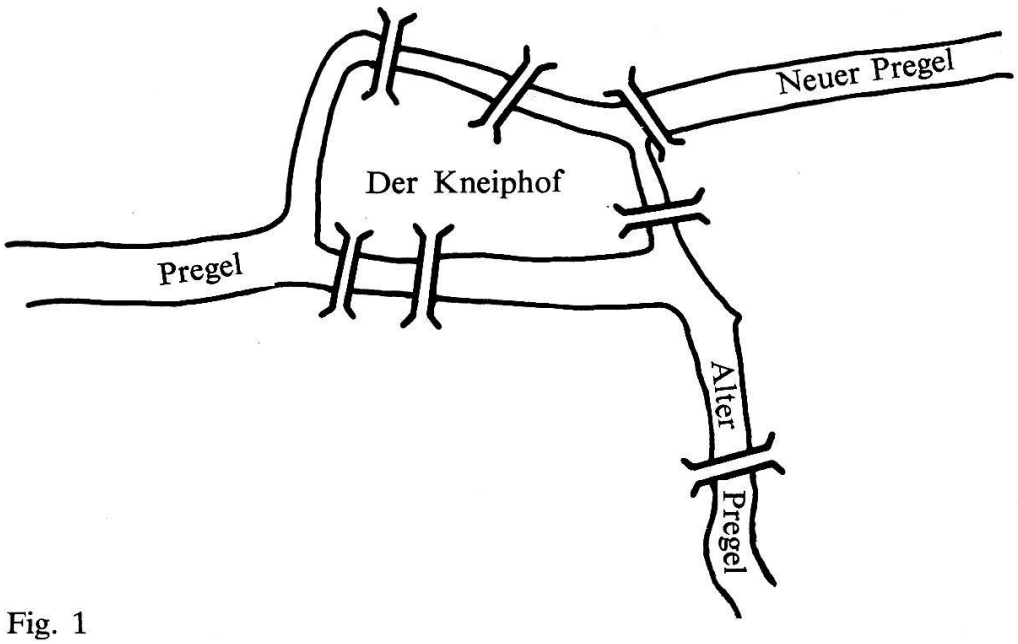


Fig. 1

gefunden hatte – im September 1751 eine zweite, entscheidende folgen liess [24]) (E.231/O.I,26).

Tatsächlich gehört der Eulersche *Polyedersatz* aus heutiger Sicht in einen viel allgemeineren Zusammenhang. Ist nämlich α^r die Anzahl der r-dimensionalen Zellen eines endlichen Komplexes K, so heisst die Zahl $\chi(K) = \sum (-1)^r \alpha^r$ die "Eulersche Charakteristik von K". Die "Formel von Euler-Poincaré"

$$\chi(K) = \sum (-1)^r p^r(K)$$

vermittelt die Beziehung zwischen $\chi(K)$ und den sogenannten "Bettischen Zahlen" $p^r(K)$. Der *Eulersche Polyedersatz* kann somit folgendermassen formuliert werden: *Ein konvexes Polyeder im dreidimensionalen euklidischen Raum hat stets die Charakteristik* 2.

4) In seinem Brief vom 8.9.1679 an Huygens hatte Leibniz die Idee zu einer neuen geometrischen Analysis angeregt, die "uns unmittelbar den *situs* ausdrückt, wie die Algebra die *Magnitudo*". [25]) Huygens scheint sich nichts von dieser neuen *characteristica geometrica* versprochen zu haben, und Leibniz liess dann diesen Gedanken wieder fallen. Euler griff – nach seinen eigenen Worten – unter Beibehaltung des Namens auf diese *analysis situs* zurück. [26]) In seiner Studie

---

[24]) In seiner Einleitung zum Band O.I,26, p. XVI, stellte Andreas Speiser die Schlüssigkeit des Eulerschen Beweises in Frage. Seitdem (1953) sind viele Kommentatoren und Geschichtsschreiber der Mathematik dieser Meinung gefolgt. Allem Anschein nach wurde Speiser durch ein Urteil von Lebesgue (1924) beeinflusst, das jedoch von letzterem selbst wieder relativiert worden ist. Der erste, der Speiser öffentlich widersprochen hat, war Delone in seiner Arbeit *BV* Delone (Delaunay) 1958. Cf. auch I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, London 1976, (Deutsche Uebersetzung: *Beweise und Widerlegungen*, Vieweg, Braunschweig und Wiesbaden 1979, Kapitel 1).

[25]) Cf. *Oeuvres de Chr. Huygens*, Bd. VIII, p. 219–224.

[26]) Der Mathematiker und Mathematikhistoriker Hans Freudenthal (Utrecht) vertritt recht überzeugend die Ansicht, dass Eulers topologische Ansätze nichts mit dem zu tun haben, was Leibniz unter seiner *Analysis situs* verstanden hat. Cf. Hans Freudenthal, *Leibniz und die Analysis situs*, Studia Leibnitiana, Bd. IV, Heft 1, 1972, p. 61–69.

(E.53/O.I,7) der als "Königsberger Brückenproblem" überlieferten Aufgabe liegen die ersten systematischen Ansätze zur *Topologie* vor, einer Disziplin, die heute eine Hauptrolle in der mathematischen Forschung spielt und der F. B. Listing 1847 den Namen gegeben hat. Es handelte sich bei Euler um die Frage, ob die Stadt Königsberg durchwandert werden könne, wenn jede der sieben Brücken über den Pregel (Fig. 1) genau einmal überschritten werden soll. Euler fand 1735, dass diese Forderung unerfüllbar ist, unabhängig davon, ob an den Ausgangs-punkt zurückgekehrt werden soll oder nicht. Die Beschäftigung mit diesem Problem und dessen Verallgemeinerung führte Euler zu wichtigen Sätzen der Graphentheorie. [27])

5) In einer 1763 verfassten Studie (E.324/O.I,26) fand Euler die Beziehung zwischen den Seiten eines Dreiecks, von welchem zwei Winkel ein vorgeschriebenes Verhältnis haben. Diese Relationen, für welche Euler über

$$\cos n\alpha \pm i \sin n\alpha = (\cos \alpha \pm i \sin \alpha)^n$$

eine rekurrente Reihe fand, sollten später auf die *Kreisteilungsgleichung* (Gauss) führen.

3. Mechanik

3.1. *Allgemeine Mechanik*

Der Beginn der Hauptstudien Eulers zur Mechanik lässt sich bereits in der ersten Petersburger Periode ansetzen. In der Einleitung zum ersten Band seiner *Mechanica* (1736) entwirft Euler ein umfassendes Programm dieser Wissenschaft, das als Hauptmerkmal die systematische und fruchtbare Anwendung der Analysis auf die damals aktuellen sowie auf neue Probleme der Mechanik trägt. Die Vorgänger Eulers verfuhren – summarisch gesprochen – synthetisch-geometrisch, wozu die unsterblichen *Principia mathematica* Newtons als prägnantes Beispiel dienen können, und auch der Basler Jakob Hermann, Eulers Kollege in Petersburg, vermochte sich trotz seiner angestrebten Modernität in der *Phoronomia* von 1716 vom barocken Stil *à la* Jakob Bernoulli, seinem einstigen Lehrer, nicht zu lösen. Euler verfährt auch hier – wie später in der Optik – analytisch und fordert für die Mechanik einheitliche, analytische Methoden, die zu klaren und direkten Darstellungen und Lösungen der einschlägigen Probleme führen sollen. Aehnlich wie später in der *Methodus*, [28]) der "Variationsrechnung", enthält der Buchtitel schon das ganze Programm: *Mechanik oder die Wissenschaft von der Bewegung, analytisch dargestellt.*

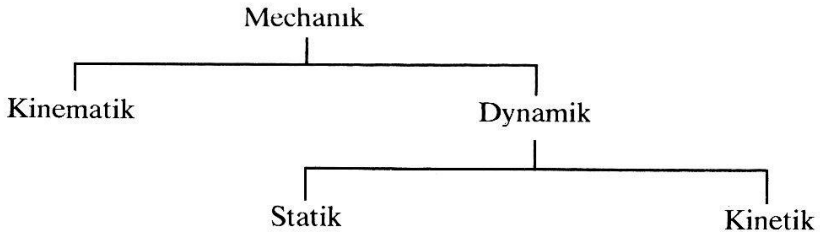
Euler beginnt mit der Kinematik und der Dynamik [29]) eines Massenpunktes

---

[27]) Cf. D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig 1936.

[28]) Cf. die Werktabelle im Abschnitt 1.3.

[29]) Zur Präzisierung der Einteilung der Mechanik verweise ich auf G. Hamel, *Elementare Mechanik*, Leipzig 1912, p. 9f., Sowie auf das moderne Werk von I. Szabó, *Einführung in die Technische Mechanik*, Berlin, Heidelberg, Wien 1975, 8. Aufl., p. 3. Demgemäss ist die Mechanik folgendermassen einzuteilen:



MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.

TOMVS I.

INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.
ACAD. SCIENT. IMPER.

PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.

Abb. 4

und behandelt im ersten Band die freie Bewegung eines Massenpunktes im Vacuum und im widerstehenden Mittel. Der Abschnitt über die Bewegung eines Massenpunktes unter der Einwirkung einer nach einem festen Punkt gerichteten Kraft ist eine brillante analytische Um- und Neuformulierung der entsprechenden Kapitel in Newtons *Principia* und war ursprünglich als Einleitung zu Eulers bereits früher erschienenen Himmelsmechanik gedacht. [30]) Im zweiten Band studiert er die erzwungene Bewegung eines Massenpunktes und löst im Kontext mit den Gleichungen für die Bewegung eines Punktes auf einer vorgegebenen Fläche eine Reihe von differentialgeometrischen Problemen der Flächentheorie und der Theorie der geodätischen Linien. Fast dreissig Jahre später gab Euler in der *Theoria motus* von 1765, der sogenannten "zweiten Mechanik", eine neue Darstellung der Punktmechanik, [31]) indem er nach dem Vorbild von Maclaurin

[30]) In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, dass von Eulers Mechanik eine deutsche Uebersetzung von J. Ph. Wolfers, Greifswald 1848/1850, vorliegt.

[31]) István Szabó (1906–1980), der ein vorzüglicher Kenner von Eulers Schriften mechanischen Inhalts war, wies mich seinerzeit darauf hin, dass Euler die vektorische Darstellung der Kinetik bereits in seiner Arbeit E. 177 (cf. hier Anm. 38) gegeben hat.

(1742) die Kraftvektoren auf ein festes, rechtwinkliges Koordinatensystem in drei Dimensionen projizierte, und stellte im Zusammenhang mit den Untersuchungen der Rotationsbewegung die auf die Hauptträgheitsachse bezogenen Differentialgleichungen der Dynamik auf, die diese Bewegung charakterisieren. Er formulierte ferner das durch elliptische Integrale ausdrückbare Gesetz der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt ("Eulersche Winkel"), auf das er anlässlich des Studiums der Präzession der Aequinoktien und der Nutation der Erdachse geführt wurde. Andere Fälle der Kreiseltheorie, in denen die Differentialgleichungen integrierbar sind, wurden später von Lagrange (1788) und von der Weierstrass-Schülerin S. V. Kovalevskaja (1888) entdeckt und behandelt. [32])

In einem der beiden Anhänge der bereits oben im Zusammenhang mit der Variationsrechnung erwähnten *Methodus* regte Euler eine Formulierung des berühmt-berüchtigten Prinzips der kleinsten Aktion an für den Fall der Bewegung eines Massenpunktes unter der Einwirkung einer Zentralkraft: die entsprechende Bahnkurve minimalisiert das Integral $\int mv\,ds$, während Maupertuis das erwähnte Prinzip fast zur gleichen Zeit in einer viel spezielleren, also weniger allgemeinen Weise aufstellte. Im zweiten Anhang der *Methodus* wandte Euler – auf Anregung Daniel Bernoullis – die Variationsrechnung auf die Theorie der Balkenbiegung an, die er bereits seit 1727 studierte, und gelangte über die Beziehung

$$\int \frac{ds}{R^2} \triangleq \int \frac{y''^2\,dx}{\sqrt{(1+y'^2)^5}} \quad (R \text{ ist Krümmungsradius})$$

zur wahrhaft spektakulären, aus den Ingenieurwissenschaften bis zum heutigen Tag nicht wegzudenkenden "Eulerschen Knickungsformel" für die Kraft P

$$P = \frac{\pi^2 E k^2}{4f^2},$$

worin Ek^2 die "absolute Elastizität" (Steifigkeit) und $2f$ die Länge eines beidseitig gelenkig gelagerten Stabes ist. Neben dieser ersten Berechnung eines elastostatischen Eigenwertes war Euler auch der Erste, der in den Eigenfrequenzen des transversal schwingenden Balkens elastokinetische Eigenwerte berechnet hat.

★

In der Domäne der *Hydromechanik* war Eulers erste grössere Arbeit sein umfassendes Opus über das "Schiffswesen", die *Scientia navalis*. Im ersten Band behandelt er die allgemeine Gleichgewichstheorie schwimmender Körper und studiert – damals ein *novum* – Stabilitätsprobleme sowie kleine Schwingungen (Schwankungen) in der Nachbarschaft des Gleichgewichtszustandes. In diesem Zusammenhang definiert Euler über den (richtungsunabhängigen) Flüssigkeitsdruck die "ideale Flüssigkeit", was zweifellos später Cauchy für die Definition des Spannungstensors als Vorlage diente.

Der zweite Band bringt Anwendungen der allgemeinen Theorie auf den Spezialfall des Schiffes. [33]) Mit der *Scientia navalis* hat Euler eine neue Wis-

---

[32]) J. L. Lagrange, *Mécanique analytique*, in: *Oeuvres*, t. 12, Paris 1889; S. V. Kovalevskaja, in: *Acta mathematica* 12, 1889, p. 177–232.

[33]) E. 110,111/O.II, 18, 19, ed. C. A. Truesdell. Cf. ferner die 200-seitige *Einleitung* von W. Habicht zu diesen zwei Bänden in O.II,21, ed. W Habicht.

senschaft begründet und auf die Entwicklung der Seefahrt sowie des Schiffsingenieurwesens nachhaltig eingewirkt, und nur wenigen Spezialisten ist die Tatsache bewusst, dass wir das technisch realisierbare Prinzip des Flügelradantriebs und der Schiffsschraube keinem andern zu verdanken haben als Leonhard Euler. Natürlich waren diese kühnen Projekte zu Eulers Zeit dazu verurteilt, im Theoretischen stecken zu bleiben, da die zur Realisierung nötigen Antriebsenergien noch nicht zur Verfügung standen. [34]) In der Technikgeschichte wohlbekannt sind hingegen Eulers Versuche über die Segnersche Wasserkraftmaschine und seine daran anknüpfende Theorie der Wasserturbine. Jakob Ackeret (†1981) hat eine solche Turbine nach Eulers Vorschriften anfertigen lassen und festgestellt, dass der Wirkungsgrad der Eulerschen Maschine über 71% beträgt [35]) – ein sensationelles Resultat, wenn man bedenkt, dass man heute mit den modernsten Mitteln und vergleichbaren Dimensionen den Wirkungsgrad einer solchen Turbine mit wenig über 80% ansetzen muss.

In die frühen Fünfzigerjahre fällt die Abfassung einiger wahrhaft klassischer Abhandlungen über eine analytische Theorie der Fluidmechanik, in welchen Euler ein System von grundlegenden Formeln zur Hydrostatik wie auch der -dynamik entwickelt (cf. infra). Darunter finden sich die Kontinuitätsgleichung für Flüssigkeiten konstanter Dichte, die – gewöhnlich nach Laplace benannte – Gleichung für das Geschwindigkeitspotential sowie die allgemeinen "Eulerschen Gleichungen" für die Bewegung idealer (also reibungsfrei strömender) kompressibler oder inkompressibler Flüssigkeiten. Kennzeichnend auch für diese Gruppe von Arbeiten ist die Anwendung gewisser partieller Differentialgleichungen auf die anfallenden Probleme. Auf diese Dinge war Euler, wie wir aus Selbstzeugnissen wissen, besonders stolz – und das mit Recht.

3.2. *Hydromechanik*

3.2.1. *Bemerkungen zur sogenannten "Bernoullischen Gleichung"*

Bevor wir einige von Eulers Hauptleistungen auf dem Gebiet der Hydromechanik resümieren, seien einige Bemerkungen vorausgeschickt. Die kompetentesten Darstellungen des Gegenstandes finden sich bei C. A. Truesdell [36]) und I. Szabó [36]) (†1980). Dieser hat auch mit der mehr als fragwürdigen, weitverbreiteten Behauptung gründlich aufgeräumt, Johann Bernoulli (1667–1748) habe sich gegenüber seinem Sohn Daniel [37]) (1700–1782) des Plagiats schuldig gemacht (cf. Szabó, *Prinzipien*, Kap. III, B).

Auch hinsichtlich eines andern Punktes soll hier differenziert werden: es betrifft die sogennante "Bernoullische Gleichung". Ihr werden in der Lehrbuchliteratur nach Lust und Laune (bezw. nach Wissen und/oder Nichtwissen) *drei verschiedene Gleichungen* zugeordnet:

---

[34]) Cf. W. Habicht, *Einleitung* zu O.II,20, p. 50.

[35]) Cf. J. Ackeret, *Untersuchung einer nach den Eulerschen Vorschlägen* (1754) *gebauten Wasserturbine*, Schweizerische Bauzeitung 123, 1944, p. 9–15.

[36]) Eulers Leistungen auf dem Gebiet der Hydromechanik sind treffend gewürdigt worden von C. A. Truesdell in den Bänden der Eulerausgabe O.II, 11_2, 12 und 13, in seinen hervorragenden *Essays in the History of Mechanics*, Springer Berlin 1968, sowie von I. Szabó, *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, Birkhäuser, Basel 1979_2, p. 225–257. Dieses vorzügliche Buch wird im folgenden kurz zitiert als "Szabó, *Prinzipien*".

[37]) Daniel Bernoulli, *Hydrodynamica*, Strassburg 1738.

SCIENTIA
NAVALIS
SEV
TRACTATVS
DE
CONSTRVENDIS AC DIRIGENDIS
NAVIBVS
PARS PRIOR
COMPLECTENS
THEORIAM VNIVERSAM
DE SITV AC MOTV
CORPORVM AQVAE INNATANTIVM.

AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
PROF. HONORARIO ACADEMIAE IMPER. SCIENT. ET
DIRECTORE ACAD. REG. SCIENT. BORVSSICAE.

INSTAR SVPPLEMENTI AD TOM. I. NOVORVM COMMENTAR. ACAD. SCIENT. IMPER.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
CIↃ IↃCCCXLIX.

Abb. 5

1) Unter dem Namen "Bernoullische Stromfadengleichung" zirkuliert der Energieerhaltungssatz idealer (reibungsfreier) inkompressibler Flüssigkeiten

$$\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}+z=\frac{\bar{v}^2}{2g}+\frac{\bar{p}}{\gamma}+\bar{z}=H=\text{konst.}, \tag{1}$$

wo v (Fig. 2) die Strömungsgeschwindigkeit, g die Erdbeschleunigung, p der Druck, γ das spezifische Gewicht und z eine systembezogene Niveauhöhe bedeuten. Die Gleichung (1) stammt von *Daniel Bernoulli* und beherrscht in Verbindung mit der Kontinuitätsgleichung $vQ=\bar{v}\bar{Q}$ (Erhaltung der Masse) die stationären Strömungsvorgänge, soweit $\vec{v}\perp Q$ über dem Querschnitt Q als konstant betrachtet werden kann.

2) Von Vater *Johann Bernoulli* stammt die Erweiterung der Gleichung (1) für bezüglich der Zeit τ instationäre Strömungen mit der Geschwindigkeit $u=u(s,\tau)$

$$\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}+z=\frac{\bar{v}^2}{2g}+\frac{\bar{p}}{\gamma}+\bar{z}+\frac{1}{g}\int_s^{\bar{s}}\frac{\partial u}{\partial \tau}\,ds, \tag{2}$$

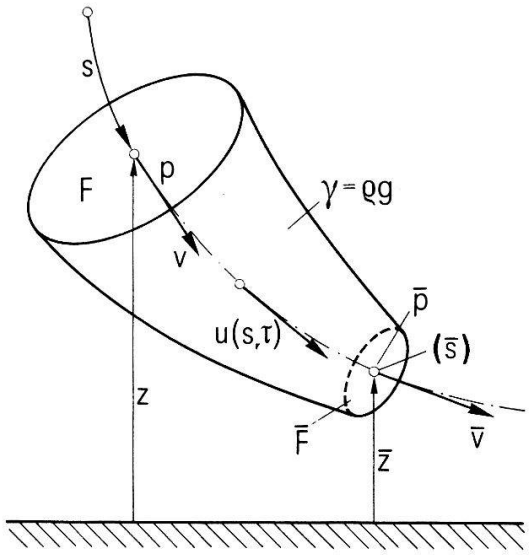


Fig. 2

und das ist Johanns ureigenste Leistung, mit welcher er – in dieser Beziehung – zweifelsfrei über Daniels *Hydrodynamica* von 1738 hinausging.

3) Aus den Eulerschen Bewegungsgleichungen (cf. *infra*) folgt als erstes Integral die für reibungsfrei und stationär strömende inkompressible und kompressible (gasförmige) Fluide gültige Energieaussage

$$\frac{v}{2} + U + P = \text{konst.}, \tag{3}$$

worin U das Potential der Massenkraft und $P = \int dp/f(p)$ das sog. Druckintegral bedeuten. Auch diese – von *Euler* stammende – Beziehung trägt den Namen "Bernoullische Gleichung".

3.2.2. *Das "Nouveau principe"*

Von Johann Bernoullis 1742 gedruckter *Hydraulica*, die er allerdings schon zwei Jahre zuvor als Manuskript einsehen konnte, wesentlich angeregt, verfasste Leonhard Euler eine kurze Arbeit, [38]) welche "die ganze Mechanik quasi revolutionieren sollte". Dieses "nouveau principe" lautet schlicht

$$dX = dm\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad dY = dm\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad dZ = dm\frac{d^2z}{dt^2}, \tag{4}$$

wo die Variablen x, y, z die Koordinaten des Massenelementes dm und dX, dY, dZ die an diese angreifenden Kräfte bedeuten. Zwar trägt die Formelgruppe (4) heute fälschlicherweise den Namen "Newtonsches Grundgesetz", doch ist selten jemandem bewusst, dass dieses Prinzip in Verbindung mit dem Momentensatz ausreicht, die Bewegung eines "wirklichen Körpers" zu berechnen, was weder Newton noch irgendeinem seiner unmittelbaren Nachfolger möglich war. Zudem benötigt man zu seiner Formulierung das *Eulersche Schnittprinzip*, d.h. das

---

[38]) *Découverte d'un nouveau principe de mécanique*, Mém. Ac. Sc. Berlin 6, (1750) 1752, (E.177/O.II,5).

(gedankliche) Herausschneiden eines Körperelementes aus dem Gesamtverband mit den am Element angreifenden Kräften. I. Szabó:

> "Mit der Phantasie des grossen Künstlers lehrte [Euler] uns, in Gedanken in die Materie hineinzuschauen, wohin weder Auge noch Experiment eindringen können, und hatte damit den Grundstein zur einzig wahren, nämlich der Kontinuumsmechanik gelegt."

Greift die aus Oberflächen- und Massenkräften resultierende Kraft dK an ein solchermassen "herausgeschnittenes" Massenelement dm an, so postuliert Euler via Beschleunigung a das "neue Prinzip"

$$dK = dm \cdot a = dm\left[\frac{d^2x}{dt^2}; \frac{d^2y}{dt^2}; \frac{d^2z}{dt^2}\right]. \tag{5}$$

Erst 25 Jahre später drang Euler zur definitiven Erkenntnis durch, dass es zur vollständigen Bewältigung der Kontinuumsmechanik noch eines weiteren, von (5) unabhängigen Prinzips bedarf, nämlich des Drehmomenten- oder Drallsatzes. [39])

3.2.3. *Hydrostatik*

Euler eröffnet seine *Scientia navalis* [40]) mit einem wahrhaft fundamentalen *Lemma* als erster Säule mit dem (modernen!) Begriff des *hydrostatischen Druckes*:

> "Der Druck, den das Wasser auf einen eingetauchten Körper ausübt, ist an den einzelnen Stellen senkrecht zur Oberfläche, und die Kraft, die ein beliebiges Element des eingetauchten Körpers erfährt, ist gleich dem Gewicht eines geraden Wasserzylinders, dessen Grundfläche gleich dem Element der Körperoberfläche und dessen Höhe gleich der Tiefe des Elementes unter dem höchsten Wasserspiegel ist."

Einen weiteren Grundstein legt er bald mit seiner Definition der *Stabilität* einer Gleichgewichtslage: eine solche ist *stabil*, wenn bei einer kleinen Auslenkung α ($\sin\alpha \sim \alpha$) aus den zur Ruhelage zurücktreibenden Kräften eine harmonische Schwingung resultiert – und *das* versteht Euler unter seiner "Methode der kleinen Schwingungen".

Die zweite Säule errichtet er mit der Darstellung der Gleichgewichtsbedingungen inkompressibler und kompressibler Fluide. Kurz und modern notiert lassen sich Eulers Ideen etwa so wiedergeben:

$$P = P(x, y, z), \qquad Q = Q(x, y, z), \qquad R = R(x, y, z)$$

seien die Orthogonalkomponenten der auf das Fluid pro Masseneinheit einwirkenden Kräfte. Die Gleichgewichtsbedingung am Element in der x-Richtung fordert

$$Pq\,dx\,dy\,dz - \frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = 0 \qquad (q \text{ Dichte, } p \text{ Druck}),$$

---

[39]) Cf. B. L. van der Waerden, *Eulers Herleitung des Drehimpulssatzes, EGB 83*, p. 271–281.
[40]) Cf. die Werktabelle Abschnitt 1.3, (E.110, 111/O.II, 18, 19).

somit

$$\frac{\partial p}{\partial x} = qP,$$

und entsprechend für die y- und z-Richtung

$$\frac{\partial p}{\partial y} = qQ \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = qR.$$

Also gilt für das totale Differential

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz = q(P\,dx + Q\,dy + R\,dz). \tag{6}$$

Euler zieht die Schlussfolgerung, dass mögliches Gleichgewicht an die Integrabilität von (6) gebunden ist, und das wiederum hängt von gewissen Relationsbedingungen der Funktionen P, Q und R ab. Im positiven Fall etwa ist

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz$$

ein totales Differential und integrierbar, wenn die Beziehungen

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \tag{7}$$

statthaben. Jedoch muss in (6) $dp = q\,dV$ die Dichte q noch immer derart sein, dass rechts ein totales Differential auftritt; dies trifft z.B. zu unter den Bedingungen

$$\frac{\partial(qP)}{\partial y} = \frac{\partial(qQ)}{\partial x}; \qquad \frac{\partial(qP)}{\partial z} = \frac{\partial(qR)}{\partial x}; \qquad \frac{\partial(qQ)}{\partial z} = \frac{\partial(qR)}{\partial y}.$$

Ist q beispielsweise konstant, so liegt Inkompressibilität vor. Im Schwerefeld ist $P = Q = 0$, $R = -g$, sodass (6) $dp = -g\,dz$ liefert, und für den Fall q $(=\rho) =$ konst. ergibt sich mit der Intergrationskonstanten h die wohlbekannte Formel

$$p = \rho g(h - z) = \gamma(h - z),$$

d.h. der Druck nimmt mit der Tiefe linear zu.

3.2.4. *Hydrodynamik* [41])

Die fundamentalen Bewegungsgleichungen der Fluide hat Euler in einer Arbeit [42]) von 1755 niedergelegt. Mittels seines oben dargelegten Schnittprinzips und der Anwendung des "neuen Prinzips" (4) ermittelte Euler – wenn wir es stilisiert betrachten – den Geschwindigkeits-, Druck- und Dichtezustand in jedem Punkt des Fluides, der durch die Koordinaten x, y, z zum Zeitpunkt t unter der Einwirkung der gegebenen spezifischen Orthogonalkraftkomponenten P, Q, R charakterisiert ist. Die Geschwindigkeitskomponenten seien u, v, w, p der Druck

---

[41]) Cf. die ausführlichere Darstellung in Szabó, *Prinzipen*, III, E,3.

[42]) *Principes généraux du mouvement des fluides*, Mém. Ac. Sc. Berlin 11, (1755) 1757, (E.226/O.II,12).

und q die Dichte. Alle diese Grössen einschliesslich P, Q und R sind als Funktionen von x, y, z, t zu betrachten. Nun führt Euler (sehr modern gedacht!) für irgendeine dieser Funktionen $f = f(x, y, z; t)$ das totale Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz \tag{8}$$

ein und erläutert daran sehr ausführlich die Anteile der lokalen (mit $\partial f/\partial t$ verbundenen) und der konvektiven Aenderung, die zusammen die – wie man es heute nennt – substantielle Aenderung

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{9}$$

ausmachen. [43]) Befindet sich nun ein Fluidelement mit den Geschwindigkeitskomponenten u, v, w zur Zeit t am Ort x, y, z und zur Zeit $t + dt$ am "Nachbarort" $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, dann gilt für ein und dasselbe Fluidteilchen

$$dx = u\,dt, \qquad dy = v\,dt, \qquad dz = w\,dt,$$

also

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v, \qquad \frac{dz}{dt} = w,$$

und es folgt in Verbindung mit (9) die "Eulersche Differentiationsregel"

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\,u + \frac{\partial f}{\partial y}\,v + \frac{\partial f}{\partial z}\,w, \tag{10}$$

woraus sich sofort die Beschleunigungskomponenten ergeben:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\,u + \frac{\partial u}{\partial y}\,v + \frac{\partial u}{\partial z}\,w \\
\frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}\,u + \frac{\partial v}{\partial y}\,v + \frac{\partial v}{\partial z}\,w \\
\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}\,u + \frac{\partial w}{\partial y}\,v + \frac{\partial w}{\partial z}\,w.
\end{aligned} \tag{11}$$

Betrachten wir nun gemäss Eulers "neuem Prinzip" (6) ein quaderförmiges Fluidelement mit den Kantenlängen dx, dy, dz, so haben wir beispielsweise in der x-Richtung

$$q\,dx\,dy\,dz\,\frac{du}{dt} = q\,dx\,dy\,dz\,P - \frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$$

und erhalten daraus, unter Verwendung der entsprechenden y-, z-Analogien, die *Eulerschen Bewegungsgleichungen*

$$\frac{du}{dt} = P - \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x}; \qquad \frac{dv}{dt} = Q - \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial y}; \qquad \frac{dw}{dt} = R - \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial z}; \tag{12}$$

---

[43]) Das Symbol ∂ für die partielle Differentiation benutzte Euler noch nicht.

hier sind die substantiellen Ableitungen nach (11) zu bilden. Allerdings reichen diese drei Gleichungen zur Bestimmung der fünf Variablen u, v, w, p und q nicht aus, und Euler wusste das natürlich sehr wohl. Er behalf sich wie folgt: Das Volumenelement $dV = dx\,dy\,dz$ zur Zeit t ergibt sich nach Ablauf der Zeit $t + dt$ mittels einer linearen Transformation als

$$dV' = \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt\right] dx\,dy\,dz,$$

und die Dichte q wird dann zu

$$q' = q + \left|\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} u + \frac{\partial q}{\partial y} v + \frac{\partial q}{\partial z} w\right| dt.$$

Nach dem Massenerhaltungssatz ist aber $q\,dV = q'\,dV'$, und die Kombination dieser drei Gleichungen liefert direkt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial (uq)}{\partial x} + \frac{\partial (vq)}{\partial y} + \frac{\partial (wq)}{\partial z} = 0. \tag{13}$$

Handelt es sich um inkompressible Fluide (q konst.), so vereinfacht sich (13) zu

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{14}$$

und für diesen Fall determinieren die Gleichungen (12) und (14) den Strömungszustand.

Mit der Voraussetzung nun, dass auch u, v, und w bekannte Funktionen sind, gelangt Euler unter Berücksichtigung des Druckes p zur Gleichung

$$\frac{dp}{q} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz - (U\,dx + V\,dy + W\,dz) \tag{15}$$

mit

$$U = U(u, v, w), \qquad V = V(u, v, w), \qquad W = W(u, v, w),$$

also beispielsweise

$$U = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Die Gleichung (15) kann längs Verbindungswegen integriert werden, wenn $q = q(p)$. Wesentlich einfacher wird alles, wenn die Geschwindigkeitskomponenten von der Art sind, dass

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = d\phi \tag{16}$$

ein totales Differential ist, bezw. dass ein Geschwindigkeitspotential $\phi = \phi(x, y, z; t)$ existiert derart, dass

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \qquad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \tag{17}$$

was physikalisch bedeutet, dass die Fluidpartikel sich wirbelfrei fortbewegen.

Aus (15) erhält Euler somit für das *Druckintegral* den Ausdruck

$$\int \frac{dp}{q(p)} = \Psi - \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) - \frac{\partial \phi}{\partial t}, \tag{18}$$

wo Ψ das zum Kraftfeld P, Q, R gehörige Potential bedeutet mit

$$P = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad R = \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

(Dass diese Beziehung auch heute noch eine wichtige Rolle spielt, ersieht man etwa aus I. Szabó, *Höhere Technische Mechanik*, 6. Aufl., Berlin et al., Springer 1977, p. 477f.)

Damit ist die sogenannte klassische Hydromechanik durch Euler vollendet. [44]) Die Berücksichtigung der Temperatur führt zur allgemeinen Zustandsgleichung für die idealen Flüssigkeiten (einschliesslich der Gase), doch danach konnte auch ein Euler mangels einer Thermodynamik in seiner Zeit nicht greifen, obwohl er es (in Ansätzen) versucht hat. Die Frage nach dem (allgemeinen) Strömungszustand führt auf Anfangs- und Randwertprobleme.

Zum Abschluss dieses Kapitels zitieren wir eine treffende Chakterisierung der Eulerschen Gewaltleistung aus der Feder des wohl ersten Kenners [45]) der Eulerschen *mechanica*:

> "Diese Eulersche Theorie der Flüssigkeiten besitzt eine kaum zu überschätzende Wichtigkeit. Ihre Grundgesetze wurden von Euler in Form einiger einfacher und schöner Gleichungen formuliert, die mit knapper Erklärung auf eine Postkarte geschrieben werden könnten. Es ist eine der tiefsinnigsten Seiten des Buches der Natur. Erstens war es die erste Formulierung einer Teilerfassung der Erfahrungswelt mit Hilfe des Modells des kontinuierlichen Feldes. Zweitens hat die ideale Flüssigkeit als Musterbeispiel oder Ausgangspunkt für viele spätere physikalische Modelle bis in die heutige Zeit gedient. Drittens ist ein ganz neuer Zweig der reinen Analysis, die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, daraus entstanden. Dies sind alles verborgene, erst später bewiesene Folgerungen der Eulerschen Theorie. In der Mechanik erscheint Euler nicht so sehr als Rechner oder Löser besonderer Probleme, vielmehr als der Schöpfer der Begriffe. Seine Leistungen in der Mechanik bilden einen Triumph der mathematischen Denkweise."

Epilog

Eulers Ansehen und Einfluss waren schon zu seinen Lebzeiten beeindrukkend. Während etwa zwei Dezennien war er der geistige Führer der gebildeten

---

[44]) Zu Eulers Rolle in der Frühperiode der theoretischen Hydraulik greife man zu G. K. Mikhailov, *Leonhard Euler und die Entwicklung der theoretischen Hydraulik im zweiten Viertel des* 18. *Jahrhunderts, EGB 83*, wo auch die Verdienste von Johann und Daniel Bernoulli gewürdigt und sorgfältig gegen diejenigen Eulers abgegrenzt werden, soweit dies heute überhaupt möglich ist. Ferner sei nachdrücklich auf die Studie von W. Habicht, *Einige grundlegende Themen in Leonhard Eulers Schiffstheorie, EGB 83*, hingewiesen.

[45]) C. A. Truesdell, *Eulers Leistungen in der Mechanik*, Extrait de l'Enseignement Mathématique III, fasc. 4 (1957).

Kreise im protestantischen Teil Deutschlands. Unschätzbare Dienste leistete er als "goldene Brücke zwischen zwei Akademien", wovon seine Korrespondenzen ein ebenso eindrückliches Zeugnis ablegen wie die Tatsache, dass während seiner Berliner Zeit 1741–1766 in den Petersburger Akten (den Zeitschriftenbänden der Akademie) 109 Publikationen aus seiner Feder stammten, gegenüber 119 in den *Mémoiren* der Preussischen Akademie. Insgesamt hat Euler zwölf internationale Akademiepreise gewonnen, die acht Preise seiner Söhne Johann Albrecht (7) und Karl (1), die man *substantialiter* ruhig auch auf sein Konto buchen kann, nicht mitgerechnet. Louis XVI schenkte ihm für seine "zweite Schiffstheorie" 1000 Rubel, und Katharina II., die sich nicht lumpen lassen wollte, bescherte ihn mit dem doppelten Betrag.

Einhellig ist das Urteil der bedeutendsten Mathematiker *nach* Euler. Laplace pflegte seinen Studenten zu sagen: "Lisez Euler, c'est notre maître à tous", und Gauss erklärte klar und deutlich: "Das Studium der Werke Eulers bleibt die beste Schule in den verschiedenen Gebieten der Mathematik und kann durch nichts anderes ersetzt werden". In der Tat wurde Euler durch seine Bücher, die sich durchweg durch höchstes Streben nach Klarheit und Einfachheit auszeichnen und die ersten eigentlichen Lehrbücher im modernen Sinn darstellen, nicht nur zum Lehrer Europas seiner Zeit, sondern er blieb dies bis tief ins neunzehnte Jahrhundert hinein: die Werke Bernhard Riemanns, eines der bedeutendsten Vertreter der *ars inveniendi* grössten Stils, tragen unverkennbare Eulersche Züge. Gotthelf Abraham Kästner, dem wir die erste deutsche Mathematikgeschichte verdanken, prägte den treffenden Vergleich, dass im mathematischen Stil d'Alembert der Deutsche sei und Euler der Franzose, und Carl Gustav Jacob Jacobi schloss sich diesem Urteil an. Henri Poincaré berichtet, dass nach Theodore Strong "Euler der Gott der Mathematik sei, dessen Tod den Niedergang der mathematischen Wissenschaften markiere". Und wirklich waren Euler, d'Alembert und Lagrange, die im letzten Drittel ihres Jahrhunderts gewissermassen ein mathematisches Triumvirat bildeten, unleugbar von dem Gefühl einer hereinbrechenden *décadence* touchiert, wie man aus ihren Korrespondenzen ersehen kann. Wenn sie glaubten, keine geistigen Erben zu haben, so hängt dies wohl damit zusammen, dass man "auf den Gipfeln alleine ist".

Doch auch prominente Zeitgenossen scheinen ähnlich empfunden zu haben. So schrieb Denis Diderot, das Haupt der *Encyclopédie*, in seinen "Gedanken zur Interpretation der Natur" (1754): "Wir stehen vor einer grossen Umwälzung in den Wissenschaften. Bei der Neigung, die die Geister jetzt, wie mir scheint, zur Moral, zur schönen Literatur, zur Naturgeschichte und zur experimentellen Physik haben, möchte ich fast versichern, dass man in Europa vor Ablauf eines Jahrhunderts nicht drei grosse Mathematiker zählen wird. Diese Wissenschaft wird plötzlich dort stehenbleiben, wo die Bernoulli, Euler, Maupertuis, Clairaut, Fontaine, d'Alembert und Lagrange sie verlassen haben. Sie werden die Säulen des Herkules errichtet haben. Man wird nicht darüber hinausgehen. Ihre Werke werden in den kommenden Jahrhunderten fortbestehen wie jene ägyptischen Pyramiden, deren hieroglyphenbedeckte Steinmassen bei uns eine erschreckende Idee von der Macht und den Hilfsmitteln der Menschen hervorrufen, die sie erbaut haben." Nun – die Geschichte hat derlei Ressentiments schlagend widerlegt, denn nirgends treffender als im Reich des Mathematischen gilt das Wort Johannis: *Der Geist weht, wo er will.*

Gewiss hat man oftmals – fast immer zu unrecht – auf vermeintlich eindeutige

Schwächen im Werk Eulers hingewiesen, hauptsächlich auf das angeblich unzulässige Umspringen mit dem Begriff des Unendlichen, sei es im Grossen (Reihentheorie) wie auch im Kleinen. Um Konvergenz- und Stetigkeitskriterien im modernen Sinne wie auch um die logisch exakte und geschlossene Fundierung der Analysis im Sinne der *ars demonstrandi* eines Cauchy, Bolzano oder Weierstrass *konnte* er sich gar nicht kümmern, da ein (im heutigen Sinne) strenger Beweis etwa für das Cauchysche Konvergenzkriterium erst nach einer Definition der reelen Zahlen – also frühestens 1870 – ermöglicht wurde. Euler verliess sich – nur vereinzelt erfolglos – auf seine erstaunliche Instinktsicherheit und algorithmische Kraft. Und hat nicht gerade Euler, der mehr als jeder andere Sterbliche geforscht und gesucht hat, einen unbedingten Anspruch auf die Worte von Karl Weierstrass, des Meisters der Strenge: "Dass dem Forscher, solange er sucht, jeder Weg gestattet ist, versteht sich von selbst", umso mehr als Georg Cantor, der Schöpfer der (nicht "naiven"!) Mengenlehre, das Wesen der Mathematik gerade in der Freiheit erblickt? Gewiss ist Eulers analytisch-algorithmischer Funktionsbegriff – ein Bernoullisches Erbstück – zu eng und zu speziell und *erfordert* geradezu naheliegende, aber aus heutiger Sicht "verbotene" Verallgemeinerungen, deren gefährliche Klippen Euler nur zu umschiffen vermochte mit seiner grenzenlosen Phantasie – *conditio sine qua non* für einen schöpferischen Mathematiker – und einer kaum fassbaren algorithmischen Virtuosität, die es ihm erlaubte, die gestellten Probleme von den verschiedensten Seiten anzugreifen, die gewonnenen Resultate zu kontrollieren und nötigenfalls zu berichtigen.

Andreas Speiser (1885–1970), der einen grossen Teil seines Lebens Eulers Werk gewidmet hat, betonte wieder und wieder: "Noch viele Schätze sind in Eulers Werk zu heben, und wer Prioritäten jagen will, findet kein dankbareres Gefilde". – Tatsächlich wird noch einige Zeit verstreichen, bis das gewaltige Werk vollständig im Druck zugänglich sein wird, und eine Werkbiographie des prominentesten Auslandschweizers steht noch aus. Freilich – ein solches Unterfangen wäre gleichbedeutend mit der Abfassung einer Geschichte der mathematischen Wissenschaften des achtzehnten Jahrhunderts.