

<b>Zeitschrift:</b>	Helvetica Physica Acta
<b>Band:</b>	55 (1982)
<b>Heft:</b>	4
<b>Artikel:</b>	Sur la tension superficielle de l'hélium liquide He <sup>4</sup> au voisinage du point
<b>Autor:</b>	Robert, M.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-115290">https://doi.org/10.5169/seals-115290</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur la tension superficielle de l'hélium liquide $\text{He}^4$ au voisinage du point $\lambda$

Par M. Robert, Baker Laboratory, Cornell University, Ithaca,  
New York 14853, U.S.A.

(8.VII. 1982; rev. 31. VIII. 1982)

*Abstract.* It is suggested on theoretical grounds that the apparent discontinuity in slope of the surface tension of liquid helium  $\text{He}^4$  at the  $\lambda$ -point, which was observed experimentally, may not be real.

## Introduction

Depuis les expériences de van Urk, Keesom et Kamerlingh Onnes [1] en 1925, il a été observé que la tension superficielle de l'hélium liquide  $\text{He}^4$  exhibait, en fonction de la température, un changement qualitatif au point  $\lambda$ . Alors que les premières mesures indiquaient l'apparition d'une courbure dans le graphe de la tension superficielle  $\sigma$  en fonction de la température  $T$  au voisinage de 2.4°K, les mesures plus détaillées de Allen et Misener [2], en 1938, suggéraient la possibilité d'une légère discontinuité de la pente en  $T_\lambda \sim 2.17^\circ\text{K}$ . Les expériences suivantes de Atkins et Narahara [3], en 1964, plus précises que les précédentes, révélaient une apparente discontinuité de la pente de  $\sigma(T)$  en  $T_\lambda$ . Ces suggestions d'un changement de la pente de  $\sigma(T)$  en  $T_\lambda$  ont plus récemment été confirmées par Magerlein et Sanders [4] dans des mesures faites avec une grande résolution dans la région  $T_\lambda - 100 \text{ mK} < T < T_\lambda + 100 \text{ mK}$ .

Du point de vue théorique, des arguments partiellement contradictoires ont été avancés par Sobyanyin [5] et par Hohenberg [6] et récemment Widom [7a] a remarqué que le problème de l'interface de l'hélium liquide  $\text{He}^4$  près de  $T_\lambda$  pouvait être étudié par une théorie du type van der Waals [8, 9] à deux densités [10], la tension superficielle étant une tension noncritique près d'un point critique terminal (en anglais: "critical end point").

Alors que les premiers résultats numériques obtenus dans le cadre d'une telle théorie par Ramos-Gómez [7b] suggéraient une discontinuité de  $d\sigma/dT$  en  $T_\lambda$ , conformément aux résultats expérimentaux décrits plus haut, des calculs numériques très récents, dus à Tavan et Widom [11], indiquent au contraire que cette discontinuité n'est pas présente.

L'objet de cet article est de présenter une étude analytique du problème de la variation de la tension superficielle de l'hélium au voisinage du point  $\lambda$  dans le cadre de la théorie de van der Waals-Widom. Il sera démontré que suivant cette théorie, la tension superficielle de l'hélium liquide admet nécessairement une dérivée par rapport à la température  $T$  qui est continue en  $T_\lambda$ .

## Déivation des résultats

Avant de présenter les détails de la démonstration, il est utile de rappeler la définition du modèle de Ramos-Gómez et Widom [7].

La fonctionnelle d'énergie libre de Helmholtz  $F(x, y)$  à deux densités  $x$  et  $y$  a la forme:

$$F(x, y) = F_1(x, y) \cdot F_2(x, y)$$

avec:

$$F_1(x, y) = [x^2 - y - (x_0^2 - y_L)]^2 + (y - y_L)^2 + 2(x - x_0)^2(x_0^2 - y_L) \quad (1)$$

et:

$$F_2(x, y) = x^2 + (y - y_G)^2;$$

$(\pm x_0, y_L)$  et  $(0, y_G)$  sont les coordonnées des trois "phases" dans le plan des densités  $(x, y)$ .

Pour  $T > T_\lambda$ ,  $x_0 = 0$  et  $y_L < 0$ ;  $x$  est proportionnel au paramètre d'ordre de la phase superfluide et  $y$  est proportionnel à la densité de la phase normale,  $y_L$  se rapportant à la densité de la phase liquide et  $y_G$  à celle de la phase gazeuse.

La tension superficielle  $\sigma$  est donnée par:

$$\sigma = \min_{(x, y)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(z) dz \quad (2)$$

avec:

$$\Psi(z) = F(x(z), y(z)) + \frac{m_1}{2} \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left( \frac{dy}{dz} \right)^2$$

où  $m_1$  et  $m_2$  sont des constantes positives et  $z$  est l'axe vertical suivant lequel les densités  $x$  et  $y$  varient. Les équations de Euler-Lagrange correspondant à ce problème variationnel s'écrivent:

$$m_i \frac{d^2 \phi_i(z)}{dz^2} = \frac{\partial F}{\partial \phi_i}, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

où  $\phi_i(z) = x(z)$ ,  $y(z)$ . La tension superficielle donnée par (2) peut également s'écrire:

$$\sigma = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} F(x(z), y(z)) dz, \quad (4)$$

où  $x(z)$  et  $y(z)$  sont maintenant les profils des densités de l'équilibre. L'expression (4) sera celle qui sera utilisée par la suite.

On dénotera par  $\varepsilon$  la grandeur sans dimension  $\varepsilon_0 \cdot ((T - T_\lambda)/T_\lambda)$ , où  $\varepsilon_0$  est une constante positive sans dimension. Pour  $\varepsilon \leq 0$ , i.e. pour  $T \leq T_\lambda$ , les solutions de

(3) ont la forme: [11]

$$x_\varepsilon(z) = \begin{cases} x_0(\varepsilon) \cdot \tanh \frac{z}{2\xi_2(\varepsilon)}, & z > 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}, \quad y_\varepsilon(z) \sim \frac{y_L(\varepsilon) + y_G(\varepsilon)}{2} + \frac{y_L(\varepsilon) - y_G(\varepsilon)}{2} \tanh \frac{z}{2\xi_1(\varepsilon)}, \quad (5)$$

où:

$$x_0(\varepsilon) = \sqrt{\frac{-\varepsilon}{2}}, \quad y_L(\varepsilon) = \frac{-\varepsilon}{2}, \quad (6)$$

$$y_G(\varepsilon) = -1 + \varepsilon$$

et les longueurs de cohérence  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont données par:

$$\xi_1^{-1}(\varepsilon) \sim 2(1 - \frac{3}{4}\varepsilon) \quad (7)$$

$$\xi_2^{-1}(\varepsilon) \sim \sqrt{-2\varepsilon}(1 - 2\varepsilon)$$

Les expressions (6) et (7) suivent directement de la forme de la fonctionnelle d'énergie libre de Helmholtz  $F$  de (1).

Pour  $\varepsilon < 0$ , les solutions  $x(z)$  et  $y(z)$  données par (5)–(7) ne sont pas exactes mais approchent bien les solutions numériques [11]; cependant les comportements de ces solutions pour  $|z| \rightarrow \infty$  sont exacts et ce sont ces comportements asymptotiques qui constituent un des ingrédients essentiels de la démonstration qui suit.

Pour  $\varepsilon > 0$ , la phase superfluide n'est plus présente et  $x_\varepsilon(z) \equiv 0$ . L'interface est alors describable par une théorie ordinaire à une densité [10]. Dans ce cas on obtient comme solution exacte de (3) le profil classique  $y(z)$ :

$$y_\varepsilon(z) = \frac{y_L(\varepsilon) + y_G(\varepsilon)}{2} + \frac{y_L(\varepsilon) - y_G(\varepsilon)}{2} \tanh \frac{z}{2\xi_1(\varepsilon)}$$

avec:

$$y_L(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{4}, \quad (8)$$

$$y_G(\varepsilon) = -1 + \varepsilon,$$

et:

$$\xi_1^{-1}(\varepsilon) \sim 2(1 - \frac{3}{4}\varepsilon);$$

$y$  est désormais proportionnel à la densité ordinaire  $\rho$ .

La fonctionnelle  $F$  de (1) est par construction du type champ moyen, et les dépendances en  $\varepsilon$  de  $x_0$  et de  $y_L$  dans (6) et (8), qui suivent directement de la forme de  $F$ , sont typiques de la théorie du champ moyen. Par ailleurs il existe une analogie entre le présent point critique terminal et le point critique ordinaire de l'équilibre liquide-vapeur [11]. Ici le paramètre d'ordre,  $x_0$ , a, d'après (6), un exposant critique égal à  $\frac{1}{2}$ , qui est la valeur de l'exposant  $\beta$  du paramètre d'ordre dans la théorie du champ moyen du point critique de l'équilibre liquide-vapeur.

De plus, la discontinuité de  $dy_L/d\epsilon$  en  $\epsilon = 0$  équivaut à la discontinuité de la chaleur spécifique à volume constant suivant l'isochore critique qui caractérise la théorie du champ moyen du point critique de l'équilibre liquide-vapeur. Dans cette analogie, la densité  $y$  joue le rôle de la densité d'énergie ou d'entropie à un tel point critique.

En utilisant les valeurs de  $x_0$ ,  $y_L$  et  $y_G$  données par (6),  $F$  prend, pour  $\epsilon < 0$ , la forme:

$$F(x, y, \epsilon) = \left[ (x^2 - y)^2 + \left( y + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 \right] [x^2 + (y + 1 - \epsilon)^2]. \quad (9)$$

En utilisant (4), on a:

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = 2 \frac{d}{d\epsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} F_\epsilon(z) dz, \quad (10)$$

où  $F_\epsilon(z) = F(x_\epsilon(z), y_\epsilon(z), \epsilon)$  est donné par l'expression (9).

Notre résultat sera établi en démontrant que premièrement dans (10) les opérations  $d/d\epsilon$  et  $\int dz$  peuvent être échangées pour tout  $\epsilon \neq 0$  fixé et deuxièmement qu'il en est de même des opérations  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$  et  $\int dz (d/d\epsilon)$ . Nous discutons ici seulement le cas  $\epsilon < 0$ , le cas  $\epsilon > 0$  étant beaucoup plus simple et se traitant de la même façon.

Nous commençons avec une identité générale [12] qui suit du principe variationnel (2) et dont la validité n'est pas limitée à la forme spécifique de la fonctionnelle  $F$  de (1):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\epsilon} F_\epsilon(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(z) dz, \quad (11)$$

où:

$$f_\epsilon(z) = f(x_\epsilon(z), y_\epsilon(z), \epsilon)$$

avec:

$$f(x, y, \epsilon) = \frac{\partial F}{\partial \epsilon}(x, y, \epsilon).$$

Cette identité résulte du fait que les profiles des densités  $x(z)$  et  $y(z)$  sont ceux de l'équilibre, et puisque ces derniers minimisent l'intégrale dans (2), cette intégrale est stationnaire par rapport aux variations des profils  $x$  et  $y$  autour de leur forme d'équilibre. Il n'y a donc finalement de contribution à l'intégrale (2) que par la dépendance explicite de  $F$  en  $\epsilon$ . Cet argument est le même que celui par lequel se dérive le théorème de Hellmann-Feynman de la mécanique quantique moléculaire [12].

On obtient à partir de (9):

$$f(x, y, \epsilon) = f^{-1}(x, y, \epsilon) + f^2(x, y, \epsilon) \quad (12)$$

où

$$f^1(x, y, \epsilon) = \left( y + \frac{\epsilon}{2} \right) [x^2 + (y + 1 - \epsilon)^2]$$

et:

$$f^2(x, y, \varepsilon) = -2(y + 1 - \varepsilon) \left[ (x^2 - y)^2 + \left( y + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \right].$$

Le fait que:

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} f_\varepsilon^i(z) = 0, \quad i = 1, 2,$$

suggère la décomposition:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(z) dz = g_\varepsilon^{1-} + g_\varepsilon^{1+} + g_\varepsilon^{2-} + g_\varepsilon^{2+},$$

où:

$$\begin{aligned} g_\varepsilon^{1-} &= \int_{-\infty}^0 f_\varepsilon^1(z) dz, \\ g_\varepsilon^{1+} &= \int_0^{+\infty} f_\varepsilon^1(z) dz, \\ g_\varepsilon^{2-} &= \int_{-\infty}^0 f_\varepsilon^2(z) dz, \end{aligned} \tag{13}$$

et:

$$g_\varepsilon^{2+} = \int_0^{+\infty} f_\varepsilon^2(z) dz.$$

Les fonctions  $f_\varepsilon^i(z)$ ,  $i = 1, 2$ , sont bornées et décroissent exponentiellement à l'infini; elles sont donc en particulier intégrables. L'idée est alors de majorer, pour chaque  $f_\varepsilon^i$ , certains facteurs, en s'assurant que les facteurs restants demeurent intégrables.

En utilisant les formes explicites données par les équations (5)–(7), on obtient, pour le terme  $g_\varepsilon^{1-}$ :

$$y(z) + \frac{\varepsilon}{2} < M^{1-}$$

et:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} [x^2(z) + (y(z) + 1 - \varepsilon)^2] = 0,$$

où  $M^{1-} < \infty$  est une constante. Or  $x(z) = 0$  pour  $z < 0$ , et donc:

$$\int_{-\infty}^0 f_\varepsilon^1(z) dz < M^{1-} \int_{-\infty}^0 [y(z) + 1 - \varepsilon]^2 dz. \tag{14}$$

En utilisant (5), l'intégrand de (14) s'écrit, pour  $z < 0$ :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon\right)^2 \left(1 + \tanh \frac{z}{\xi_1(\varepsilon)}\right)^2.$$

Lorsque  $\varepsilon$  décroît (en valeur absolue),  $\xi_1^{-1}(\varepsilon)$  décroît et par suite  $\xi_1(\varepsilon)$  croît. Pour  $\varepsilon = 0$ ,  $\xi_1 = \frac{1}{2}$ . Pour tout  $\varepsilon$  fixé on peut ainsi majorer la fonction  $(y(z) + 1 - \varepsilon)^2$  par une fonction qui décroît exponentiellement à l'infini et est donc intégrable en  $z$ . De plus, pour tout  $\varepsilon$  il existe une fonction intégrable en  $z$  indépendante de  $\varepsilon$ , qui majore la fonction  $(y(z) + 1 - \varepsilon)^2$ . Une telle fonction est par exemple la fonction  $(y_\varepsilon(z) + 1 - \varepsilon)^2|_{\varepsilon=0}$ .

Pour le terme  $g_\varepsilon^{1+}$ , on a:

$$g_\varepsilon^{1+} = \int_0^{+\infty} \left( y_\varepsilon(z) + \frac{\varepsilon}{2} \right) [x_\varepsilon^2(z) + (y_\varepsilon(z) + 1 - \varepsilon)^2] dz.$$

Or:

$$x_\varepsilon^2(z) + (y_\varepsilon(z) + 1 - \varepsilon)^2 < M^{1+} < \infty$$

et:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left( y_\varepsilon(z) + \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0,$$

et donc:

$$|g_\varepsilon^{1+}| < M^{1+} \int_0^{+\infty} \left| y_\varepsilon(z) + \frac{\varepsilon}{2} \right| dz. \quad (15)$$

Avec (5), l'intégrand de (15) s'écrit:

$$\left( \frac{3\varepsilon}{4} - \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \tanh \frac{z}{\xi_1(\varepsilon)} \right).$$

L'argument se conclut comme pour le cas précédent du terme  $g_\varepsilon^{1-}$ . Le majorant intégrable est par exemple la fonction  $(y_\varepsilon(z) + \varepsilon/2)|_{\varepsilon=0}$ .

Pour le terme  $g_\varepsilon^{2-}$ , on a:

$$g_\varepsilon^{2-} = -2 \int_{-\infty}^0 (y_\varepsilon(z) + 1 - \varepsilon) \left[ (x_\varepsilon^2(z) - y_\varepsilon(z))^2 + \left( y_\varepsilon(z) + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \right] dz.$$

En utilisant:

$$(x_\varepsilon^2(z) - y_\varepsilon(z))^2 + \left( y_\varepsilon(z) + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 < M^{2-} < \infty$$

et:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} (y_\varepsilon(z) + 1 - \varepsilon) = 0,$$

on obtient:

$$|g_\varepsilon^{2-}| < 2M^{2-} \int_{-\infty}^0 |y_\varepsilon(z) + 1 - \varepsilon| dz. \quad (16)$$

Mais l'intégrand de (16) est la racine carrée de celui de (14), et l'argument pour ce terme se conclut donc de la même façon que pour (14).

Finalement considérons le terme  $g_\varepsilon^{2+}$ . On a:

$$g_\varepsilon^{2+} = -2 \int_0^{+\infty} (y_\varepsilon(z) + 1 - \varepsilon) \left[ (x_\varepsilon^2(z) - y_\varepsilon(z))^2 + \left( y_\varepsilon(z) + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \right] dz.$$

Or:

$$+2|y_\epsilon(z) + 1 - \epsilon| < M^{2+} < \infty$$

et:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left[ (x_\epsilon^2(z) - y_\epsilon(z))^2 + \left( y_\epsilon(z) + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 \right] = 0,$$

et donc:

$$|g_\epsilon^{2+}| < M^{2+} \int_0^{+\infty} \left| (x_\epsilon^2(z) - y_\epsilon(z))^2 + \left( y_\epsilon(z) + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 \right| dz. \quad (17)$$

De plus, on a:

$$y_\epsilon(z) + \frac{\epsilon}{2} = \frac{3\epsilon}{4} - \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} - \frac{3\epsilon}{4} \right) \tanh \frac{z}{2\xi_1(\epsilon)},$$

et ce terme s'annule lorsque  $z \rightarrow +\infty$ . Pour le terme  $x_\epsilon^2(z) - y_\epsilon(z)$ , on obtient:

$$\begin{aligned} x_\epsilon^2(z) - y_\epsilon(z) &= -\frac{\epsilon}{2} \left( \tanh \frac{z}{2\xi_2(\epsilon)} \right)^2 \\ &\quad - \left( \frac{\epsilon}{4} - \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{1}{2} - \frac{3\epsilon}{4} \right) \tanh \frac{z}{2\xi_1(\epsilon)}. \end{aligned}$$

Ce terme s'annule également lorsque  $z \rightarrow +\infty$ . Contrairement aux cas précédents, le majorant intégrable n'est pas indépendant de  $\epsilon$ . Nous reviendrons sur ce point plus loin.

Par conséquent, pour tout  $\epsilon^* < 0$  fixé, on peut majorer en module l'intégrand de (17) par une fonction intégrable indépendante de  $\epsilon$  pour  $\epsilon < \epsilon^* < 0$ , et donc échanger  $d/d\epsilon$  et  $\int dz$ .

Nous considérons maintenant l'échange de la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  et de l'intégration par rapport à  $z$ :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(z) dz.$$

Cet échange des processus de limite et d'intégration est légitime si la fonction  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(z)$  existe et si l'intégrand  $f_\epsilon(z)$  est majorable en module par une fonction  $h(z)$  dans  $L^1(\mathbb{R})$ , indépendamment de  $\epsilon$ .

L'analyse précédente montre que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(z)$  existe, et que le seul cas où la fonction  $h$  n'existe pas est celui du premier terme de l'intégrand de (17). Cependant un calcul explicite va montrer que cette difficulté n'est qu'apparente. On a:

$$\begin{aligned} x_\epsilon^2(z) - y_\epsilon(z) &= -\frac{\epsilon}{2} \left( \tanh \frac{z}{2\xi_2(\epsilon)} \right)^2 \\ &\quad - \left( \frac{\epsilon}{4} - \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{1}{2} - \frac{3\epsilon}{4} \right) \tanh \frac{z}{2\xi_1(\epsilon)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Pour  $z$  grand, qui est le régime à contrôler, on a:

$$\tanh x \cong 1 - 2e^{-2x},$$

et donc:

$$x_\varepsilon^2(z) \cong -\frac{\varepsilon}{2} (1 - 2e^{-z/\xi_2(\varepsilon)})^2$$

$$\cong -\frac{\varepsilon}{2} (1 - 4e^{-z/\xi_2(\varepsilon)})$$

et:

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(z) &\cong \frac{\varepsilon}{4} - \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} - \frac{3\varepsilon}{4} \right) (1 - 2e^{-z/\xi_1(\varepsilon)}) \\ &= -\frac{\varepsilon}{2} - \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{2} \right) e^{-z/\xi_1(\varepsilon)}; \end{aligned}$$

par suite:

$$x_\varepsilon^2(z) - y_\varepsilon(z) \cong 2\varepsilon e^{-z/\xi_2(\varepsilon)} + \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{2} \right) e^{-z/\xi_1(\varepsilon)}. \quad (19)$$

Contrairement au second terme de (19), le premier n'est pas majorable en module par une fonction intégrable, indépendamment de  $\varepsilon$ , au voisinage de  $\varepsilon = 0$ . Mais on a:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-\xi_2^{-1}(\varepsilon) \cdot z} dz \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\varepsilon \left[ \frac{1}{\sqrt{-2\varepsilon(1-2\varepsilon)}} \cdot e^{-\xi_2^{-1}(\varepsilon) \cdot z} \right] \Big|_0^{+\infty} \right\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'expression explicite (7) pour  $\xi_2^{-1}(\varepsilon)$ . Donc le terme gênant ne contribue pas à  $d\sigma/d\varepsilon$  dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Nous avons donc vérifié que les conditions permettant l'échange de la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  et de l'intégration par rapport à  $z$  sont satisfaites pour tout  $\varepsilon \leq 0$ .

On vérifie enfin que les quantités:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon(z) dz$$

et:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} f_\varepsilon(z) dz$$

sont égales.

Cette démonstration permet de conclure que, dans le cadre de la théorie de van der Waals-Widom classique, la fonction  $d\sigma/d\varepsilon$  est continue en  $\varepsilon = 0$ , en d'autres termes que la fonction  $d\sigma/dT$  est continue en  $T_\lambda$ .

## Discussion

Les calculs précédents utilisent les profils des densités  $x_\varepsilon(z)$  et  $y_\varepsilon(z)$  donnés par la théorie de van der Waals-Widom classique. La question se pose tout d'abord de savoir si un résultat semblable à celui obtenu ici reste valable dans une

formulation non classique [13] de cette théorie et ensuite si le même résultat peut être étendu à un nombre arbitraire [14] de densités [10]. Des calculs préliminaires [15] suggèrent qu'un résultat identique à celui établi ici conserve sa validité dans ces cas plus généraux.

Enfin on peut mentionner que des oscillations, d'origine quantique, du profil de densité de la surface de l'hélium liquide He<sup>4</sup> dans son état fondamental, ont été prédites par Regge [16] et trouvées dans des calculs variationnels numériques par Liu, Kalos et Chester [17]; de telles oscillations, si elles existent réellement, ne subsistent probablement pas jusqu'au point critique [18]. Si la théorie utilisée ici ne prédit pas de telles oscillations, nous pensons que leur présence n'invaliderait pas la démonstration et le résultat donné plus haut.

Des mesures expérimentales plus précises que celles qui ont été faites jusqu'ici seront nécessaires pour confirmer ou contredire ces prédictions théoriques.

## Remerciements

L'auteur remercie vivement P. Tavan dont les calculs numériques de haute précision ont motivé dans une large mesure le présent travail, et qui lui a communiqué ses résultats avant leur publication. Il remercie également G. V. Chester et B. Widom pour d'utiles discussions, B. Payandeh pour ses critiques du manuscrit et Ch. Pfister pour ses remarques. Ce travail a été effectué pendant que l'auteur était membre du groupe du Professeur Widom et a été soutenu financièrement par le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique.

## RÉFÉRENCES

- [1] A. TH. VAN URK, W. H. KEESEM and H. KAMERLINGH ONNES, *Leiden Comm.* 179a, (1925).
- [2] J. F. ALLEN and A. D. MISNER, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 34, 299 (1938).
- [3] K. R. ATKINS and Y. NARAHARA, *Phys. Rev.* 138A, 437 (1965).
- [4] J. H. MAGERLEIN and T. M. SANDERS JR., *Phys. Rev. Lett.* 36, 258 (1976).
- [5] A. A. SOBYANIN, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 61, 433 (1971), traduit en anglais dans *Sov. Phys. JETP* 34, 229 (1972).
- [6] P. C. HOHENBERG, *J. Low Temp. Phys.* 13, 433 (1973).
- [7a] B. WIDOM, *J. Chem. Phys.* 67, 872 (1977); voir aussi Ramos-Gómez F. and Widom B., *Physica* 104A, 595 (1980) ainsi que la référence suivante (7b).
- [7b] F. RAMOS-GÓMEZ, thèse de doctorat, Universidad Nacional Autónoma de México (1980), pp. 104–131 et pp. 148–157.
- [8] J. D. VAN DER WAALS, *Verk. d. Kon. Ak. v. Wet. Amsterdam Deel I, Nr. 8* (1893); traduction française dans *Arch. Neerl.* 28, 121 (1894), allemande dans *Z. Phys. Chem.* 13, 657 (1894) et anglaise dans *J. Stat. Phys.* 20, 197 (1979).
- [9] B. WIDOM, *Phys. Rev. Lett.* 34, 999 (1975).
- [10] Le terme "densité" est pris ici au sens de la terminologie de Griffiths et Wheeler (*Phys. Rev. A*2, 1047 (1970)).
- [11] P. TAVAN and B. WIDOM, à paraître dans *Phys. Rev. B*<sup>1</sup> (Jan 1, 1983).
- [12] Cette identité est donnée dans Widom B., *Physica* 95A, 1 (1979) et est dérivée en détail dans la référence (7b) pp. 122–127. Pour le théorème de Hellmann-Feynman, voir par exemple H. Hellmann, *Einführung in die Quantenchemie*, Deuticke, Leipzig, 1937, ou Cohen-Tannoudji C. et al., *Quantum Mechanics*, Wiley, New York, 1977, vol. II, p. 1192–3.
- [13] La formulation non classique de cette théorie pour le problème de l'interface d'un fluide simple est donnée par Fisk S. and Widom B., *J. Chem. Phys.* 50, 3219 (1969).
- [14] Voir Ref. (7a) ainsi que Griffiths R. B. *Phys. Rev. B*7, 545 (1973) et Cohen E. G. D., dans

*Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, édité par E. G. D. Cohen, North Holland 1975, vol. 3 pp. 47-79.

- [15] M. ROBERT and P. TAVAN, en progrès.
- [16] T. REGGE, J. Low Temp. Phys. 9, 123 (1972).
- [17] K. S. LIU, M. H. KALOS and G. V. CHESTER, Phys. Rev. B12, 1715 (1975).
- [18] L'auteur remercie G. V. Chester pour une discussion de cette question.