Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 55 (1982)
Heft: 3

Artikel: Approximants de Borel
Autor: Hirsbrunner, Béat
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-115284

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Helvetica Physica Acta, Vol. 55 (1982) 295–329 0018–0238/82/030295–35$1.50 + 0.20/0
© Birkhäuser Verlag Basel, 1982

Approximants de Borel[1])

par Béat Hirsbrunner, Chaire d'Informatique Théorique,
EPFL—DMA, CH-1015 Ecublens—Lausanne, Suisse

(7. IV. 1982)

Abstract. We review several related methods to compute numerically the Borel sum of a Borel summable power series through the use of what we call ⟨⟨Borel approximants⟩⟩. One of our purposes is to prepare the ground for a companion paper devoted to a problem in quantum field theory. As an illustration, we quote our high precision computations of the ground level of the anharmonic oscillator, and compare them with others obtained by the use of different methods.

Table des matières

Introduction

1. Le Théorème de Watson–Nevanlinna
   1.A. Séries asymptotiques 297
   1.B. La B^*-some d'une série de puissances 298
   1.C. Le théorème WN 299
   1.D. Remarques 302
2. Construction des approximants de Borel
   2.A. Les approximants de Borel 304
   2.B. Sur la théorie d'erreur 305
   2.C. Remarques 307
3. Le niveau fondamental de l'oscillateur anharmonique
   3.A. Le choix de l'application conforme 309
   3.B. Le calcul des coefficients b_m 309
   3.C. Le calcul des intégrales $M_m(z)$ 310
   3.D. Les approximants de Borel 310
   3.E. Comparaison de différentes méthodes 312
4. Raffinements
   4.A. Quelques théorèmes sur le comportement des coefficients d'une série de puissances 313
   4.B. Cinq méthodes de raffinements 314
   4.C. Le niveau fondamental de l'oscillateur anharmonique, bis. 318
   4.D. Quelques remarques 321
5. Notes et Bibliographie commentée 323
   Remerciements 326
   Références bibliographiques 326

[1]) Ce travail, rèalisé à l'Institut de Physique Théorique de l'Université de Lausanne, est une version légèrement modifiée de la première partie de la thèse de doctorat Hirsbrunner (1981a).

Introduction

Le présent article et son compagnon, Hirsbrunner (1982), ont pour thème commun la sommabilité selon Borel de séries de puissances divergentes et son application à certaines séries perturbatives de la physique théorique.

Il arrive fréquemment que les développements perturbatifs en série de puissance d'un petit paramètre z,

$$\sum a_n z^n,$$

se trouvent diverger pour toute valeur non nulle de z. Mais souvent ils représentent asymptotiquement la grandeur physique $f(z)$ qu'ils sont censés approcher:

$$f(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n z^n = 0(z^{N+1}),$$

lorsque z tend vers 0 sous certaines conditions (voir Chap. 1.A). Dans certains cas, on a pu montrer que la série divergente possède une somme selon Borel (B^*-somme, voir Chap. 2.B), et que cette B^*-somme est égale à $f(z)$. Comme exemples de résultats de ce type, mentionnons le cas des niveaux de l'oscillateur anharmonique, Graffi–Grecchi–Simon (1970), auquel nous consacrons nos Chap. 3 et 4.C, et le cas de la masse des particules asymptotiques dans le modèle $\lambda : \phi^4 :_2$, Eckmann–Epstein (1979), qui fournit le sujet de notre second article, Hirsbrunner (1982). Notre Chap. 5 contient des références à d'autres cas où l'on démontre que la série de puissances est B^*-sommable avec B^*-somme égale à f.

Les démonstrations consistent presque toutes dans l'application d'un intéressant critère que nous exposerons au Chap. 1.C, sous le nom de théorème de Watson–Nevanlinna.

Le Chap. 2 montre comment l'évaluation numérique d'une B^*-somme peut se faire par une série convergente $\sum b_m M_m(z)$ dans l'hypothèse où les conditions d'applicabilité du théorème de Watson–Nevanlinna sont remplies. Cette remarque est ancienne: Watson (1912) prenait pour les $M_m(z)$ des ⟨⟨factorielles inverses⟩⟩. Mais, du point de vue numérique, la convergence est alors très lente. En 1975, J. J. Loeffel a proposé un nouvel algorithme basé sur un prolongement analytique à l'aide d'une application conforme, voir Hirsbrunner–Loeffel (1975), Loeffel (1976) et Le Guillou–Zinn Justin (1977). Dans beaucoup de cas $\sum b_m M_m(z)$ devient alors une série ⟨⟨rapidement⟩⟩ convergente (voir Chap. 2.B).

Comme nous l'avons déjà dit, notre Chap. 3 est consacré à l'oscillateur anharmonique, à titre d'illustration. Nous donnons les résultats de nos calculs numériques du niveau fondamental de l'oscillateur anharmonique, et nous comparons les méthodes décrites au Chap. 2 à la multitude de celles qu'on trouve sur le marché et dont certaines sont particulièrement bien adaptées à ce cas.

Ces méthodes sont susceptibles de variations qui permettent de tenir compte de circonstances spéciales et d'atteindre certains buts tels qu'augmenter la rapidité de la convergence, obtenir une convergence monotone ou plus uniforme. Notre Chap. 4 donne un aperçu de la question, illustré par quelques applications numériques. Nous insistons en particulier sur l'attention qu'il faut accorder aux singularités de la transformée de Borel $\sum (a_n/n!)t^n$ de la série étudiée.

Le Chap. 5, qui clos cet article de caractère général, contient une brève revue de quelques autres aspects du sujet.

Notre deuxième article, Hirsbrunner (1982), est consacré à une délicate application des méthodes décrites ici dans un contexte de théorie quantique des champs.

1. Le Théorème de Watson–Nevanlinna

Ce chapitre contient avant tout des rappels: sur les développements asymptotiques en séries de puissances, sur la notion de somme borélienne (B^*-somme) de telles séries, et sur le Théorème de Watson–Nevanlinna, qui donne un critère pour l'existence de la B^*-somme et pour l'égalité entre cette B^*-somme et la fonction asymptotique à la série considérée.

1.A. *Séries asymptotiques*

Soit f une fonction définie dans un ouvert connexe

$D \subset \mathbb{C}, \qquad 0 \in \bar{D}.$

Définition (d'après Poincaré (1886)). La série formelle $\sum a_n z^n$ est appelée *uniformément asymptotique* à f dans D en $z=0$ si et seulement si $\forall N \in \mathbb{Z}^+$ on a:

$$\sup_{z \in D, |z| \leq r} \left\{ \left(f(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \right) \Big/ z^N \right\} \to 0$$

lorsque $r \to 0$.

On note alors $f(z) \sim \sum a_n z^n$.

Propriété. Si $f(z) \sim \sum a_n \cdot z^n$ et $f(z) \sim \sum b_n \cdot z^n$ alors $\forall n \; a_n = b_n$. C'est à dire toute fonction f possède au plus une série asymptotique. (Ceci suit du fait que

$$\forall N \; a_N - b_N = \lim_{|z| \to 0,\, z \in D} \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot z^n - \sum_{n=0}^{N} b_n \cdot z^n \right) \Big/ z^N = 0).$$

Exemple 1. $f(z) = \exp(-z^{-1})$ possède la série uniformément asymptotique $\sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot z^n$ dans

$D = \{z \in \mathbb{C} / |\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta\}, \qquad \delta > 0, \quad \text{en} \quad z = o.$

Deux fonctions différentes peuvent donc avoir la même série asymptotique.

Exemple 2. Considérons $f \in C^\infty(R)$ sur l'intervalle $D = [0, 1]$. Alors f possède la série asymptotique

$$\sum_{n=0} (n!)^{-1} \cdot f^{(n)}(0) \cdot x^n,$$

dans D en $x = 0$. De plus le théorème de Taylor nous assure que

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(0) \cdot x^n \right| \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sup_{0 \leq a \leq 1} |f^{(N+1)}(a)| \qquad \forall x \in [0, 1].$$

Une série asymptotique peut donc diverger (p. ex. $f \in C^\infty$, non analytique). Si elle converge, la somme $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ ne représente pas nécessairement la fonction $f(z)$ (voir l'exemple 1). La reconstruction de f à partir de sa série asymptotique n'est donc en général pas possible.

Rappelons que la définition de Poincaré n'exige rien ni sur la fonction f ni sur la manière dont le terme $(f(z) - \sum^N a_n z^n)/z^N$ s'approche de zéro. Quelles conditions supplémentaires faut-il imposer pour qu'une reconstruction soit possible? Celle-ci devrait s'effectuer de telle sorte qu'une série convergente ne représente que sa somme de Cauchy. Le cas de convergence correspond à: $\exists M$, $\exists A > 0$, $\exists C > 0$ telles que $\forall z \in D$, $\forall N \geq M$

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n \right| \Big/ |z|^{N-1} \leq C \cdot A^N \cdot |z|.$$

La généralisation la plus naturelle est de multiplier le membre de droite par un facteur μ_N où $\{\mu_N\}_{N=M}^\infty$ est une suite positive croissante. Ceci entraîne que $\forall n \geq M$: $|a_n| \leq C \cdot A^n \cdot \mu_n$.

1.B. *La B^*-somme d'une série de puissances*

En suivant la méthode de sommation due à Borel (1899) nous introduisons la notion de la B^*-somme:

Définition. Soit z réel positif, fixe. La série formelle $\sum a_n \cdot z^n$ est appelée *B^*-sommable* si et seulement si:

1) $\exists \mu_n > 0$, $\exists r > 0$ tels que $a(t) \equiv \sum_{n=0} (a_n/\mu_n) \cdot t^n$ converge $\forall t$ avec $|t| < r$,
2) $a(t)$ possède un prolongement analytique $g(t)$ le long de l'axe réel positif,
3) il existe une fonction positive, décroissante ϕ telle que $\forall n: \int_0^\infty t^n \cdot \phi(t)\, dt = \mu_n$ et

$$\int_0^\infty \phi(t) \cdot g(z \cdot t)\, dt \equiv B_z \text{ existe.}$$

B_z est appelée la *B^*-somme* de $\sum a_n z^n$. La fonction $t \mapsto g(t)$ est appelée la *transformée de Borel* de $\{a_n\}_{n=0}^\infty$

Dans la suite nous allons nous intéresser au cas où $\exists A > 0$, $\exists C > 0$ telles que $\forall z \in D$, $\forall N$:

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n \right| \leq C \cdot N! \cdot A^N \cdot |z|^N. \tag{1.1}$$

On peut alors prendre $\mu_n = n!$, $r = A^{-1}$ et $\phi(t) = \exp(-t)$.

Exemple 3. La fonction f_0 définie pour les z réels positifs par $f_0(z) = \int_0^\infty \exp(-t)/(1 + z \cdot t)\, dt$ possède les propriétés suivantes:

1) f_0 possède un prolongement analytique f dans le plan coupé $\mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$ et même dans le domaine $D_\alpha \equiv \{z \in \mathbb{C} / |z| > 0, |\arg z| \leq \alpha\}$, $\forall \alpha \geq 0$; D_α est non schlicht si $\alpha \geq \pi$.

2) La série $\sum(-1)^n \cdot n! \cdot z^n$ est uniformément asymptotique à $f(z)$ dans D_α pour tout α avec $\alpha < \lambda < 3\pi/2$, λ fixe.

(Et il est aisé de vérifier que la condition (1.1) est satisfaite $\forall \alpha < \lambda$. Notons que les constantes A et C dépendent de λ; en particulier nous nous servirons dans la remarque 1 du paragraphe 1.D du résultat: $A = 1$ si $\lambda \leq \pi$ et $A = 1/\cos(\lambda - \pi)$ si $\pi \leq \lambda < 3\pi/2$.)

3) La série $\sum(-1)^n n! \cdot z^n$ est B^*-sommable de B^*-somme $B_z = \int_0^\infty \exp(-t)/(1+z \cdot t)\, dt$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$. Il est intéressant de noter que $B_z = f_0(z)$.

1.C. *Le théorème WN*

Watson a démontré en 1911 que toute fonction f qui possède des propriétés du type 1) et 2) de l'exemple 3 peut être reconstruite à partir de sa série asymptotique. Plus précisément on a le critère suivant dû à Watson (1911) et à Nevanlinna (1918):

Soient les domaines (voir Figs. 1 à 3):

$$D_{0,R} = \{z \in \mathbb{C} / |z - \tfrac{1}{2}R| < \tfrac{1}{2}R\} = \left\{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}\,\frac{1}{z} > \frac{1}{R}\right\},$$

$$D_{\alpha,R} = \bigcup_{|\phi| \leq \alpha} D^{(\phi)} \quad \text{avec} \quad D^{(\phi)} = e^{i\phi} D_{0,R},$$

$D_{\alpha,R}$ est non schlicht si $\alpha \geq \pi/2$.

$$T_{0,A} = \{t \in \mathbb{C} / \mathrm{dist}\,(t, \mathbb{R}_+) < 1/A\},$$

$$T_{\alpha,A} = \bigcup_{|\phi| \leq \alpha} T^{(\phi)} \quad \text{avec} \quad T^{(\phi)} = e^{i\phi} T_{0,A},$$

$T_{\alpha,A}$ est schlicht $\forall \alpha \geq 0$.

Théorème WN (Watson, Nevanlinna)

Hypothèses:

1) *Soient $\alpha \geq 0$, $R > 0$, α et R fixes.*
2) *Soit f une fonction continue sur $\bar{D}_{\alpha,R}$ et holomorphe dans $D_{\alpha,R}$ (multi-valuée si $\alpha \geq \pi/2$).*
3) *Soit $\sum a_n \cdot z^n$ une série formelle telle que $\exists A > 0, \exists C > 0$,*

$$\forall z \in D_{\alpha,R}, \forall N: \left| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot z^n \right| \leq C \cdot N! \cdot A^N \cdot |z|^N$$

$$\left(\textit{donc} \quad \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dz^n}(0) = a_n \quad \textit{et} \quad |a_n| \leq C \cdot n! \cdot A^n \right).$$

Conclusion:

1) *$\sum a_n \cdot z^n$ est B^*-sommable, plus précisément:*
   a) *$a(t) \equiv \sum_{n=0}^\infty (a_n/n!) \cdot t^n$ converge dans $\{|t| < 1/A\}$*

LABORATOIRE DE PHYSIQUE UNIVERSITE NEUCHATEL

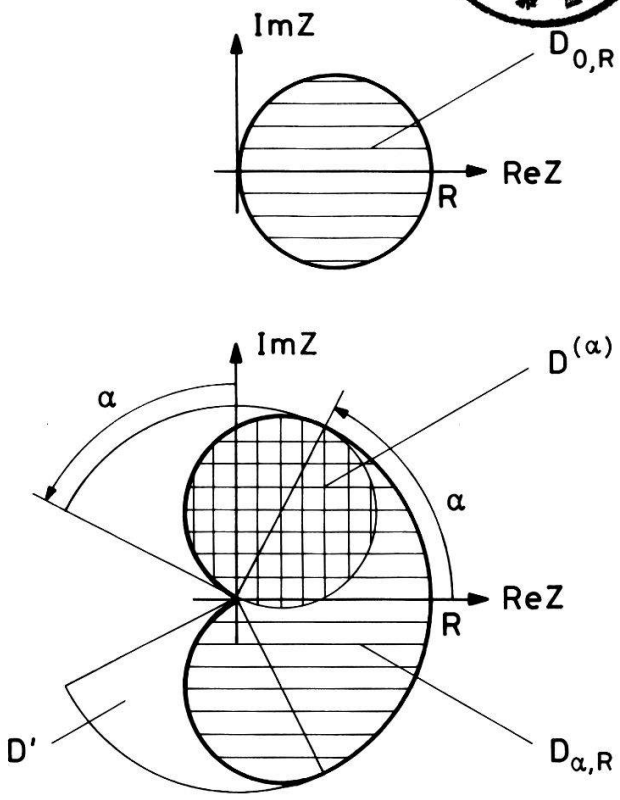

Figure 1
Les domaines d'holomorphie $\langle\langle D\rangle\rangle$. $D_{\alpha,R}$ est le domaine d'holomorphie de la fonction $z \to f(z)$ du Théorème WN. $D_{\alpha,R}$ est non schlicht si $\alpha \geq \pi/2$. $D_{0,R}$ est le domaine d'holomorphie minimal de f nécessaire pour la reconstruction de f à partir de sa série asymptotique (aus sens du Théorème WN). D' est le domaine d'holomorphie de f utilisé par Hardy (1949).

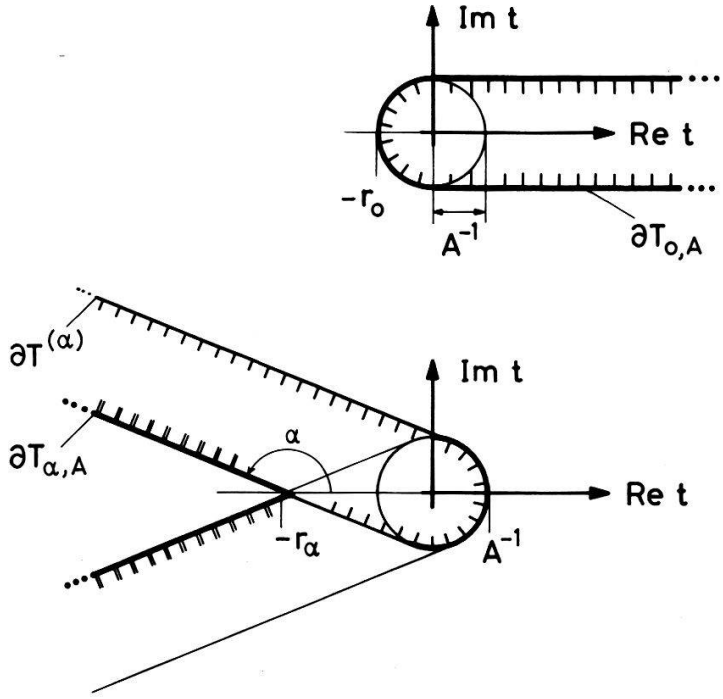

Figure 2
Les domaines d'holomorphie $\langle\langle T\rangle\rangle$ (indiqués dans la figure par leurs frontières $\langle\langle\partial T\rangle\rangle$). $T_{\alpha,A}$ est le domaine d'holomorphie de la transformée de Borel $t \to g(t)$ du Théorème WN. $T_{\alpha,A}$ est schlicht $\forall\alpha \geq 0$; en particulier $T_{\alpha,A} = \mathbb{C}$ si $\alpha \geq \pi$. $\bar{T}_{\alpha,A}$ est le secteur $\{t \in \mathbb{C} \mid |\arg(t + r_\alpha)| \leq \alpha\}$ si $\pi/2 \leq \alpha < \pi$, avec $r_\alpha = 1/(A \cdot \sin\alpha)$.

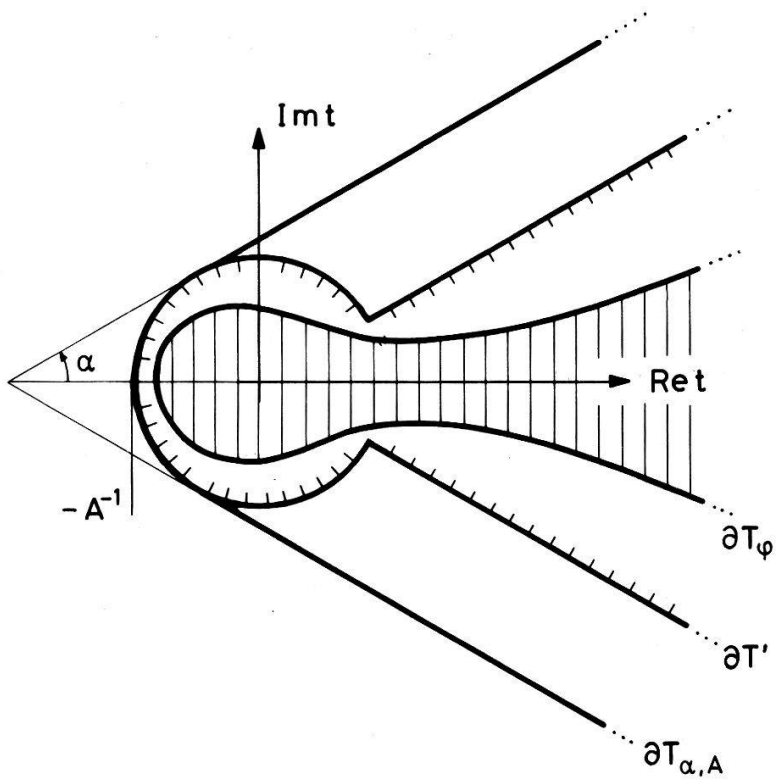

Figure 3
Les domaines d'holomorphie $\langle\langle T\rangle\rangle$ (indiqués dans la figure par leurs frontières $\langle\langle\partial T\rangle\rangle$). $T_{\alpha,A}$ comme dans la Fig. 2, mais pour $0\leq\alpha\leq\pi/2$. T' est le domaine d'holomorphie de g utilisé par Hardy (1949). T_ϕ est le domaine appliqué dans le cercle unité par la transformation conforme ϕ (des exemples sont donnés dans les Figs. 4 et 5).

b) *$a(t)$ possède un prolongement analytique $g(t)$ dans $T_{\alpha,A}$*
c) *$\forall A'>A$, $\exists C_1>0$ telles que $\forall t\in T_{\alpha,A'}$:*

$$|g(t)|<C_1\cdot\exp(|t|/R)$$

d) *$B_z\equiv(1/z)\cdot\int_0^{\infty\cdot e^{i\phi}}\exp(-t/z)\cdot g(t)\,dt$ converge absolument pour tout $z\in D^{(\phi)}$, $|\phi|\leq\alpha$*

2) *$f(z)=B_z$ pour tout $z\in D^{(\phi)}$, $|\phi|\leq\alpha$.*

Pour la démonstration originale voir Watson (1911) ($\alpha>0$) et Nevanlinna (1918) ($\alpha=0$). On trouve la démonstration également dans Hardy (1949) ($\alpha>0$) et Loeffel (1982) ($\alpha\geq0$). L'idée de la démonstration est exposée dans Sokal (1979) ($\alpha\geq0$). Notons encore que la borne supérieure de $|g(t)|$ peut être précisée, notamment lorsque t s'approche du bord du domaine $T_{\alpha,A}$: voir Loeffel (1982).

Remarque. Hardy (1949) utilise les domaines D' et T' (voir figures 1 et 3) définies par:

$$D'\equiv\{z\in\mathbb{C}/0<|z|<R,\qquad|\arg z|\leq\alpha+\pi/2\},$$
$$T'\equiv\{t\in\mathbb{C}/|t|<1/A\}\ U\ \{t\in\mathbb{C}/|\arg t|<\alpha\}.$$

Notons que $D'\supset D_{\alpha,R}$, alors que $T'\subset T_{\alpha,A}$.

Corollaire 1. *Si les hypothèses du Théorème* WN *sont satisfaites pour* $\alpha \geq \pi$ *alors*

1) $\sum a_n z^n$ *est une série convergente dans le disque*

$$D \equiv \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\},$$

2) $\forall z \in D$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Pour la démonstration voir Loeffel (1982). Si α est suffisamment grand, le prolongement analytique g possède la représentation:

Corollaire 2. *Soit* $t \to g(t)$ *la fonction définie dans le Théorème* WN *et soit* $\alpha \geq \pi/2$.

Alors

$$g(t) = (1/t) \cdot \int_0^{\infty e^{i\phi}} \exp(-s/t) \cdot h(s)\, ds$$

$$\forall t \in e^{i\phi} \cdot \mathbb{R}_+, \qquad \forall \phi \quad \text{avec} \quad |\phi| \leq \alpha - \pi/2,$$

où h est une fonction entière définie $\forall s \in \mathbb{C}$ par $h(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n/(n!)^2) \cdot s^n$.

En fait nous avons plus: comme $\sum (a_n/n!) \cdot t^n$ représente une fonction $t \to g(t)$ holomorphe dans le disque $|t| < 1/A$, $\sum (a_n/n!) t^n$ est *B'-sommable* de *B'*-somme égale à $g(t)$ dans le *polygone de Borel* P_B, voir Hardy (1949) chap. 8.8 et Whittaker–Watson (1927) chap. 7.8. De plus l'holomorphie de g dans $T_{\alpha,A}$ nous assure que $e^{i\phi}\mathbb{R}_+ \subset P_B$ pour $0 \leq |\phi| \leq \alpha - \pi/2$. (Dans le Chap. 4.D, Rem. 5 nous discuterons les approximants de Borel de la B'-somme de la série $\sum (-z)^n$).

1.D. *Remarques*

1) Les constantes A et C du Théorème WN dépendent de α et R.

Il est intéressant de noter que la dépendance de A en α est souvent telle que r_α (voir Fig. 2) est indépendant de α: voir exemple 3. Mais il n'en est pas toujours ainsi: voir ci-dessous l'Exemple 4.

2) Le corollaire 2 est intéressant dans le sens qu'il nous livre une représentation explicite des fonctions f et g intervenant dans le Théorème WN (pour $z \in D^{(\phi)}$, $0 \leq |\phi| \leq \alpha - \pi/2$).

3) L'inverse du Théorème WN, connu sous le nom de '*lemme de Watson*', est également vrai. Voir Beyer–Heller (1967) et Olver (1974).

4) Le théorème WN peut se généraliser à

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n \right| \leq C \cdot A^N \cdot \Gamma(N+B+1) \cdot |z|^N, \qquad B > -1,$$

avec

$$\langle\langle B_z = (1/z) \cdot \int_0^{\infty} \exp(-t/z) \cdot (t/z)^B \cdot \sum (a_n/\Gamma(n+B+1)) \cdot t^n\, dt \rangle\rangle. \tag{1.2}$$

Ceci permet donc aux coefficients a_n de croître plus rapidement: $|a_n| \leq$

$C \cdot A^n \cdot \Gamma(n+B+1) \sim A^n \cdot n! \cdot n^B$. Voir par exemple Beyer–Heller (1967). C'est la version que nous utiliserons dans le Chap. 4.

5) Le théorème WN peut aussi se généraliser à

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n \right| \leq C \cdot A^N \cdot \Gamma(N/k+1) \cdot |z|^N, \qquad k>0,$$

avec

$$\langle\langle B_z = (1/z^k) \cdot \int_0^\infty \exp(-t/z^k) \cdot \sum (a_n/\Gamma(n/k+1)) \cdot t^{n/k}\, dt \rangle\rangle \tag{1.3}$$

Indication; montrer que la fonction h définie par $h(y) = f(z)$, $y = z^k$, satisfait le Théorème WN. Voir Nevanlinna (1918), Beyer–Heller (1967), Graffi–Grecchi–Simon (1970).

Exemple 4. Soit la fonction f définie pour z positif par $f(z) = \int_0^\infty \exp(-t) \cdot \exp(-z^2 t^2)\, dt$. On a

$$f(z) \sim \sum_{n=0} a_n z^n = \sum b_n \cdot (z^2)^n \quad \text{avec} \quad a_{2n} = b_n = (-1)^n \cdot (2n)!/n!$$

et $a_{2n+1} = 0$. Il est aisé de vérifier que:

1) $\sum a_n z^n$ satisfait le Théorème WN pour $\alpha \leq \lambda < \pi/4$ et on a $\sum (a_n/n!) \cdot t^n = \exp(-t^2)$ et

$$B_z = (1/z) \cdot \int_0^\infty \exp(-t/z) \cdot \exp(-t^2)\, dt,$$

2) $\sum b_n y^n$ satisfait le Théorème WN pour $\alpha \leq \lambda < \pi$ (dans la variable $y = z^2$) et on a $\sum (b_n/n!) \cdot t^n = (1+4t)^{-1/2}$ et

$$B_z = (1/z^2) \cdot \int_0^\infty \exp(-t/z^2)(1+4t)^{-1/2}\, dt,$$

3) $\sum a_n z^n$ satisfait le Théorème WN généralisé à $k=2$ (voir remarque 5 ci-dessus) et on a $\sum (a_n/(n/2)!) \cdot t^{n/2} = (1+4t)^{-1/2}$ et B_z comme pour 2).

Indication: analogue à l'exemple 3; voir aussi Olver (1974) chap. 14.

Exemple 5. En mécanique quantique la série perturbative $\sum a_n z^n$ de la n-ième valeur propre $E_n^{(m)}(z)$ de l'oscillateur anharmonique $p^2 + q^2 + zq^{2m}$, $m = 2, 3 \ldots$ satisfait le Théorème WN généralisé pour $k = 1/(m-1)$, voir Graffi–Grecchi–Simon (1970). Nous continuerons la discussion de cet exemple dans les Chap. 3 et 4.C.

2. Construction des approximants de Borel

Le Théorème de Watson–Nevanlinna nous assure l'égalité entre la B^*-somme

$$B_z = \int_0^\infty \exp(-t) \cdot g(zt)\, dt$$

de la série $\sum a_n z^n$ et la fonction $f(z)$ asymptotique à cette série. Dans ce chapitre nous montrons comment l'évaluation numérique de cette B^*-somme peut se faire par une série convergente

$$B_z = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cdot M_m(z),$$

et nous montrons que dans beaucoup de cas cette série converge ⟨⟨rapidement⟩⟩.

2.A. *Les approximants de Borel*

La difficulté de l'évaluation numérique de la B^*-somme B_z est liée au fait que la transformée de Borel $g(t)$ n'est connue que pour $|t|<1/A$:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n/n!) \cdot t^n.$$

L'idée clef pour surmonter cette difficulté consiste à appliquer, par une transformation *conforme* ϕ, le domaine d'holomorphie $T_{\alpha,A}$ de $g(t)$ dans le disque $|w|<1$. Pour tout $t \in T_{\alpha,A}$ on a alors $g(t) = g(\phi^{-1}(w)) = \sum b_m w^m = \sum b_m \phi(t)^m$, d'où

$$\langle\langle f(z) = (1/z) \cdot \int \exp(-t/z) \cdot g(t)\, dt$$

$$= (1/z) \cdot \sum b_m \cdot \int \exp(-t/z) \cdot \phi(t)^m\, dt \rangle\rangle^{2)}$$

Plus explicitement, en suivant Loeffel (1976):

- Soient $f(z)$ et $\sum a_n z^n$ satisfaisant les hypothèses du Théorème WN.
- Soit pour simplifier la discussion $z \in D_{0,R}$ (voir Fig. 1).
- Soit $\phi : T_\phi \to D_1 = \{w \in \mathbb{C} / |w| < 1\}$ une transformation conforme avec $\mathbb{R}^+ \subset T_\phi \subset T_{\alpha,A}$ (voir Fig. 3) et $\phi(0) = 0$, $\phi(t) > 0$ pour tout $t > 0$, $\phi(\partial T_\phi) = \partial D_1$.
- Soit ϕ^{-1} l'application inverse de ϕ.

On a alors: comme $t \to g(t)$ est holomorphe dans T_ϕ, $g \circ \phi^{-1}$ est holomorphe dans D_1; on peut donc écrire $\forall t \in T_\phi$, c'est à dire $\forall\, |w| \equiv |\phi(t)| < 1$:

$$g(t) = g(\phi^{-1}(w)) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cdot w^n.$$

Or pour $|t| < A^{-1}$ on a $g(t) = \sum (a_n/n!) \cdot t^n$; d'où il suit pour tout $|t| \equiv |\phi^{-1}(w)| < A^{-1}$ (et en se rappelant que par construction de $\phi : \phi^{-1}(0) = 0$):

$$g(\phi^{-1}(w)) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n!) \cdot (\phi^{-1}(w))^n$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n!) \cdot \left(\sum_{m=n}^{\infty} C_{m,n} \cdot w^m \right)$$

$$= a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{m} C_{m,n} \cdot a_n/n! \right) \cdot w^m.$$

---

2) Pour les séries convergentes il est bien connu que l'on peut obtenir un prolongement analytique en dehors du cercle de convergence à l'aide d'une transformation conforme, voir par exemple Dienes (1931) page 311. En physique cette idée a été souvent utilisée, voir par exemple Weinberg (1964) et Ciulli et al. (1975).

Les coefficients b_m sont donc définis par:

$$b_0 = a_0, \qquad b_m = \sum_{n=1}^{m} C_{m,n} \cdot a_n/n! \qquad \forall m \geq 1, \tag{2.1}$$

où les $C_{m,n}$ sont les coefficients du développement de Taylor de $(\phi^{-1}(w))^n = \sum_{m \geq n} C_{m,n} \cdot w^m$.

Il vient maintenant pour la fonction $f(z)$:

$$f(z) = (1/z) \cdot \int_0^\infty \exp(-t/z) \cdot g(t)\, dt$$

$$= (1/z) \cdot \int_0^\infty \exp(-t/z) \cdot \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{m=0}^{N} b_m \cdot \phi(t)^m \right) dt,$$

et comme $|g(t)| < C_1 \exp(-|t|/R)$ pour tout $t \in T_\phi$ (voir Théorème WN), le théorème de la convergence dominée de Lebesgue nous permet d'interchanger l'intégrale avec la limite (Loeffel (1982)). D'où

$$f(z) = \lim_{N \to \infty} B_N(z) \qquad \forall z \in D_{0,R}$$

avec

$$B_N(z) = \sum_{m=0}^{N} b_m \cdot M_m(z) \tag{2.2}$$

$$M_m(z) = (1/z) \cdot \int_0^\infty \exp(-t/z) \cdot \phi(t)^m\, dt \tag{2.3}$$

$B_N(z)$ est appelé le N-ème *approximant de Borel* de $f(z)$.

Remarques. La construction de la suite $\{B_N(z)\}_N$ est analogue pour $z \in \exp(i\phi) \cdot D_{0,R}$, $|\phi| \leq \alpha$.

2.B. *Sur la théorie d'erreur*

La rapidité de convergence de la suite $\{B_N(z)\}_N$ dépend de l'application conforme ϕ. Nous donnons ici les résultats pour deux familles d'applications conformes ϕ particulièrement intéressantes (ces ϕ seront utilisés dans le Chap. 4.C):

1) $\phi(t) = 1 - \exp(-\beta \cdot t)$, avec $\beta > 0$ (2.4)

(voir Fig 4).

Advantage. Les intégrales $M_m(z)$ peuvent être calculées sous forme fermée:

$$M_m(z) = \beta^m \cdot m! \Big/ \left(\prod_{j=1}^{m} (z^{-1} + j \cdot \beta) \right), \qquad m \geq 1 \tag{2.5}$$

(factorielle inverse).

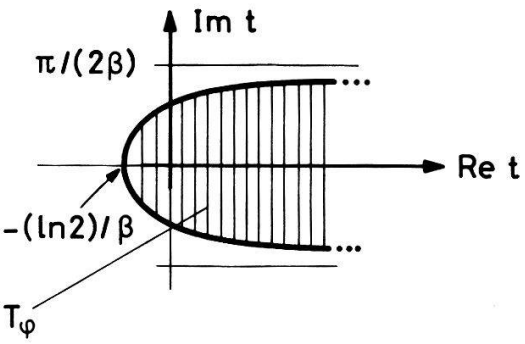

Figure 4
T_ϕ est le domaine appliqué dans le cercle unité par l'application conforme (2.4). On a $T_\phi \subset T_{0,A}$ pour $\beta \geq A \cdot \pi/2$ (où $T_{0,A}$ est le domaine d'holomorphie de la transformée de Borel $g(t)$ du Théorème WN, voir Fig. 2).

Désavantage. La convergence de la suit $\{B_N(z)\}_N$ est très lente:

$$|f(z)-B_{N-1}(z)| = 0(N^{-C_z}) \quad \text{lorsque} \quad N \to \infty, \tag{2.6}$$

$$\forall z \in D_{0,R}, \quad \text{avec} \quad C_z = \frac{1}{\beta} \cdot \left(\operatorname{Re}\frac{1}{z} - \frac{1}{R}\right) > 0.$$

Remarque. Dans ce cas $\sum b_m M_m(z)$ est une série de factorielles inverses. On peut trouver une étude détaillée des séries de factorielles inverses dans Nörlund (1926) et Doetsch (1955), Chap. 11. Ces auteurs étudient, en particulier, la représentation $f(z) = \sum b_m M_m(z)$ avec l'application conforme (2.4).

$$2)\ \phi(t) = (u-1)/(u+1) \tag{2.7}$$

avec $u = (q \cdot t + 1)^\gamma$; $\gamma \geq \frac{1}{2}$ et $q > 0$ (voir Fig. 5).

Désavantage (secondaire de nos jours). Les intégrales $M_m(z)$ doivent être calculées avec l'ordinateur (sauf pour $\gamma = 1$ où les $M_m(z)$ peuvent s'exprimer à l'aide de fractions continues, voir Chap. 3.C; ceci peut être utile pour les calculs à haute précision, voir Chap. 3.D et aussi Hirsbrunner (1976)).

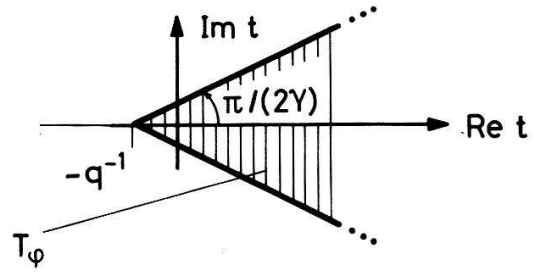

Figure 5
T_ϕ est le domaine appliqué dans le cercle unité par l'application conforme (2.7). Si $\alpha \in (0, \pi/2)$, on a $T_\phi \subset T_{\alpha,A}$ pour $\gamma \geq \pi/(2\alpha)$ et $q \geq A$; si $\alpha \in [\pi/2, \pi)$, on a $T_\phi \subseteq T_{\alpha,A}$ pour $\gamma \geq \pi/(2\alpha)$ et $q \geq A \cdot \sin\alpha$ (où $T_{\alpha,A}$ est le domaine d'holomorphie de la transformée de Borel $g(t)$ du Théorème WN, voir Figs. 2 et 3).

Avantage. L'application conforme (2.7) permet de mieux tenir compte du domaine d'holomorphie de la transformée de Borel $g(t)$. Conséquence: la convergence de la suite $\{B_N(z)\}_N$ est beaucoup plus rapide:

$$|f(z)-B_{N-1}(z)| = 0(\exp - C_z \cdot N^\delta) \quad \text{lorsque} \quad N \to \infty, \tag{2.8}$$

$$\forall z \in D_{0,R} \quad \text{avec} \quad C_z = \left(\frac{2}{q} \cdot \operatorname{Re}\frac{1}{z}\right)^{\gamma\cdot\delta} - \left(\frac{2}{q}\cdot\frac{1}{R}\right)^{\gamma\cdot\delta} > 0,$$

$$\delta = 1/(1+\gamma) < 1.$$

Indication: estimer

$$|M_m(z)| = 0\left(\exp\left(-\left(\frac{2}{q}\cdot\operatorname{Re}\frac{1}{z}\right)^{\gamma\cdot\delta}\cdot m^\delta\right)\right)$$

par la méthode du col; estimer

$$|b_m| = \left|(2\pi i)^{-1}\cdot\oint_{|w|=r<1}(g\cdot\phi^{-1})(w)\cdot w^{-m-1}\,dw\right| = 0\left(\exp\left(\left(\frac{2}{q}\frac{1}{R}\right)^{\gamma\cdot\delta}\cdot m^\delta\right)\right)$$

en utilisant $|g(t)| < C_1 \cdot \exp(|t|/R)$, voir Théorème WN; et finalement estimer

$$\left|\sum_{m=N}^{\infty} b_m M_m(z)\right| \approx \int_N^\infty |b_m M_m(z)|\,dm.$$

Pour plus de détail voir Loeffel (1982).

2.C. *Remarques*

1) Les b_m sont des combinaisons linéaires des a_n, $n \le m$; les coefficients de ces combinaisons (les $C_{m,n}$) et les intégrales $M_m(z)$ (z fixé) ne dépendent que du choix de l'application conforme ϕ.

2) Avec l'application conforme (2.4) la série $\sum b_m M_m(z)$ devient une série de *factorielles inverses.* Déjà Stirling et Euler ont montré que certaines séries divergentes du type $\sum(-1)^n \cdot n! \cdot z^n$ peuvent se ramener à l'étude de séries de factorielles inverses. Dans le cadre du Théorème WN, la représentation $f(z) = \sum b_m M_m(z)$ avec l'application conforme (2.4) est probablement due à Watson (1912).

L'idée de Watson est d'écrire f sous la forme

$$f(z) = (1/z)\cdot\int_0^\infty \exp(-t/z)\cdot g(t)\,dt$$
$$= (1/z)\cdot\int_0^1 (1-w)^{(1/z)-1}\cdot h(w)\,dw$$

où g est la transformée de Borel de $\sum a_n z^n$,

$$h(w) = g(\phi_1^{-1}(w)) \text{ et } \phi_1(t) = 1-\exp(-t) = w.$$

Watson obtient la représentation

$$f(z)=\sum_{m=0}^{N-1} b_m M_m(z)+R_N(z)$$

en intégrant N fois par partie l'intégrale $\int_0^1 \cdots dw$. (Rappelons que dans l'algorithme proposé par Loeffel (1976) l'idée est de développer $h(w)$ en puissances de w et d'inverser $\int$ avec $\sum$). Une étude détaillée de la n-ème dérivée $h^{(n)}(w)$ dans le disque $|w|<1$ permet à Watson de montrer que $|R_N(z)|<C\cdot N^{-C_z}$ avec $C_z>0$, pour $z\in D\subset D_{0,R}$. Pour plus de détail voir Watson (1912).

3) La resommation selon Borel n'améliore pas la rapidité de convergence d'une série $\sum a_n z^n$ convergente. (Ce résultat théorique n'est toutefois valable que pour N suffisamment grand, voir Chap. 4.D, Rem 5).

En effet pour une série de puissance convergente, le reste

$$\left|f(z)-\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n\right|$$

est borné, pour N suffisamment grand, par

$$\sum_{n\geq N} r^n = r^N\cdot(1-r)^{-1}=(1-r)^{-1}\cdot\exp(-|\ln r|\cdot N),$$

où $r=C\cdot|z|$, C une constante positive. Or $|f(z)-B_{N-1}(z)|$ décroît au mieux comme $\exp(-C'\cdot N^{\delta})$ avec $C'>0$, $\delta<1$ (voir Chap. 2.B).

4) Le Chap. 4 est consacré à décrire et à discuter d'autres approximants de Borel, construits en utilisant des méthodes proches de celle que nous venons de présenter, dans le but d'améliorer la convergence dans divers sens (rapidité, monotonie, uniformité, . . .).

3. Le niveau fondamental de l'oscillateur anharmonique

Dans l'exemple 5 du Chap. 1.D, nous avons mentionné les résultats de Graffi–Grecchi–Simon (1970) concernant l'oscillateur anharmonique d'hamiltonien $p^2+q^2+zq^4$. En particulier, le niveau fondamental $E(z)$ et sa série perturbative usuelle $\sum a_n z^n$ satisfont les conditions du Théorème de Watson–Nevanlinna. Nous pouvons donc appliquer les méthodes du Chap. 2 et calculer les approximants de Borel $B_N(z)$ de $E(z)$.

Dans la *Section A* nous discutons le choix de l'application conforme. Dans les *Sections B et C* nous mentionnons quelques difficultés liées au calcul numérique des approximants de Borel $B_N(z)$. Dans la *Section D* nous calculons les $B_N(z)$ et nous montrons que nos méthodes permettent de reproduire les résultats les plus précis connus par ailleurs. Et enfin dans la *Section E* nous comparons nos méthodes à la multitude de celles qu'on trouve sur le marché et dont certaines sont particulièrement bien adaptées à ce cas.

Dans ce chapitre les approximants de Borel $B_N(z)$, définis par les relations (2.1) à (2.3), ne seront calculés qu'avec une seule application conforme ϕ. Ces calculs seront repris (notamment avec plusieurs applications conformes différentes) dans le Chap. 4.C.

3.A. *Le choix de l'application conforme ϕ*

Simon (1970) a montré que la transformée de Borel de la série perturbative de $E(z)$ est analytique dans le domaine

$$T=\{t\in\mathbb{C}\mid |\arg(t+\tfrac{2}{3})|\leq\pi-\varepsilon\},\qquad \varepsilon>0. \tag{3.1}$$

Nous pouvons donc choisir

$$\phi(t)=(u-1)/u,\qquad u=(p\cdot t+1)^{\gamma}, \tag{3.2}$$

avec $\gamma=\frac{1}{2}$ et $p=\frac{9}{8}$. Notons que $\phi(-\frac{2}{3})=-1$. Ce choix est motivé par la triple exigence:

1. $T_\phi\subset T$ (par construction des $B_N(z)$, voir Chap. 2.A).
2. T_ϕ est le domaine le plus grand possible. Car plus T_ϕ est grand, plus la convergence de la suite $\{B_N(z)\}_N$ est rapide (voir Chap. 2.B; avec (3.2), l'erreur $|E(z)-B_{N-1}(z)|$ est voisine de (2.8)).
3. Il existe un algorithme simple qui permet de calculer les intégrales $M_m(z)$, définies par (2.3), avec une grande précision (voir Chap. 3.C).

3.B. *Le calcul des coefficients b_m*

A première vue, le calcul des coefficients b_m, définis par

$$b_m=\sum_{n=0}^{m} C_{m,n}\cdot a_n/n!,$$

voir (2.1), ne pose aucun problème. En effet les coefficients a_n ont été calculés par Reid (1967) pour $n\geq 20$, puis par Bender–Wu (1969) pour $n\geq 75$ (avec 12 chiffres significatifs). Et le calcul des coefficients $C_{m,n}$, qui ne dépendent que de l'application conforme ϕ, donc ici de (3.2), est facile. Mais malheureusement on a

$$|b_m|=D_m\cdot\max_n|C_{m,n}\cdot a_n/n!|,$$

avec $D_m\ll 1$ (il n'est pas très difficile d'établir cette inégalité à partir de la théorie d'erreur du Chap. 2.B). A titre d'exemple, nous avons obtenu par simulation numérique dans le cas qui nous intéresse ici:

$$D_m=10^{-d(m)}\quad\text{avec}\quad d(m)\approx 0.6\cdot m.^{3)}$$

En d'autres termes, si les coefficients a_n, $n\leq m$, sont connus avec N chiffres significatifs, le coefficient b_m ne pourra être calculé qu'avec au plus $N-0.6\cdot m$ chiffres significatifs. Pour cette raison Gagnebin (1975) a recalculé les coefficients a_n, $n\leq 60$, avec plus de 100(!) chiffres significatifs.[4])

---

[3]) Plus généralement, on a la règle heuristique (basée sur les innombrables exemples que nous avons testés): ⟨⟨plus $m\to D_m$ décroît rapidement, plus la suite des approximants de Borel converge rapidement⟩⟩.

[4]) Ces calculs ont été refaits à partir des équations (2.8) et (2.9) de Bender–Wu (1969). Nous signalons que l'équation (2.9) de Bender–Wu (1969) s'écrit en fait $A_n=(-1)^{n+1}\cdot B_{n,1}$ et non pas $A_n=-B_{n,1}$. Je rémercie Thierry Gagnebin de m'avoir communiqué ses résultats.

3.C. *Le calcul des intégrales $M_m(z)$*

Nous avons testé d'innombrables méthodes d'intégration numérique. Une des méthodes les plus efficaces, pour le calcul des intégrales $M_m(z)$ définies par (2.3), est celle dite de Gauss–Legendre.[5,6]) Cette méthode possède néanmoins un grave désavantage: il est pratiquement impossible d'évaluer de manière réaliste l'erreur $|M_m(z)-I|$, où I est la valeur approchée de $M_m(z)$ obtenue avec Gauss–Legendre. Pour cette raison nous avons utilisé la méthode suivante pour le calcul à haute pécision du Chap. 3.D. Avec l'application conforme (3.2), l'intégrale $M_m(z)$ peut s'exprimer comme une somme d'intégrales du type

$$F_n(z)=\int_0^\infty e^{-t}\cdot(z\cdot p\cdot t+1)^{-\gamma\cdot n}\,dt,$$

$0\leq n\leq m$. Et le calcul précis de l'intégrale $F_n(z)$ est très simple. En effet, $F_n(z)$ possède une représentation sous la forme d'une fraction continue, voir Wall (1948) page 355. Et on a, si $A_k(z)$ est le k-ème approximant de cette fraction continue:

1. La suite $\{A_k(z)\}_k$ converge (rapidement) vers $F_N(z)$.
2. $A_{2k}(z)<F_n(z)<A_{2k+1}(z)$, voir Wall (1948) page 334.
3. $A_k(z)=N_k/D_k$ où N_k et D_k sont définis par une simple relation de récurrence, voir Wall (1948) page 15.

3.D. *Les approximants de Borel*

Nous avons calculé la suite des approximants de Borel $\{B_N(z)\}_N$ de la série perturbative du niveau fondamental $E(z)$, pour $0\leq N\leq 60$ et $0<z\leq 10$. Les $B_N(z)$, définis par les relations (2.1) à (2.3), ont été construits avec l'application conforme (3.2).

Le *Tableau 1* illustre la rapidité de convergence de la suite $\{B_N(z)\}_N$. Ce tableau montre que la convergence est très rapide pour z suffisamment petit, ici $z\leq 0.1$. Toutefois, elle devient de plus en plus lente lorsque z augmente. Ce comportement est en accord avec nos résultats théoriques du Chap. 2.B.

Nous avons poussé nos calculs assez loin, pour voir s'il était possible de reproduire les résultats les plus précis connus par ailleurs.[7]) Dans le *Tableau 2* nous donnons nos résultats obtenus en utilisant les coefficients perturbatifs a_n, $n\leq 60$. Pour $z\geq 0.8$ nos résultats sont en accord avec ceux de Biswas et al. (1973). Pour $z<0.8$ les résultats publiés à ce jour ne sont pas aussi précis; nous avons comblé cette lacune en recalculant $E(z)$ à l'aide d'une méthode non-perturbative, plus précisément à l'aide de la relation (II.11) de Hioe et al. (1975). Les résultats ainsi obtenus sont en parfait accord avec ceux du Tableau 2.

---

[5]) Vour p. ex. Mineur (1966). Nous avons utilisé le programme de Williams (1969): ce programme est disponible au Centre de Calcul de l'EPF-Lausanne.

[6]) Cette méthode de Gauss–Legendre est également bien adaptée au cas des intégrales $M_m(z)$ du Chap. 4. Seule exception: le cas $m=0$, $-1<B'<0$, $\lambda'\neq 0$ doit être traité avec beaucoup de prudence.

[7]) Les résultats, à 15 décimales, de Biswas et al. (1973) sont les plus précis publiés à ce jour.

Tableau 1
La rapidité de convergence de la suite des approximants de Borel $\{B_N(z)\}_N$ du niveau fondamental $E(z)$ de l'oscillateur anharmonique $p^2+q^2+zq^4$. Les $B_N(z)$, définis par les relations (2.1) à (2.3), ont été construits avec l'application conforme (3.2).

N	$z=0.1$	$z=1$	$z=10$
0	1.00	1.00	1.00
1	1.064 95	1.345	1.81
2	1.064 64	1.338	1.78
3	1.065 290	1.386	2.16
4	1.065 272	1.382	2.11
5	1.065 285 28	1.390 3	2.279
6	1.065 285 07	1.390 0	2.268
7	1.065 285 501	1.391 83	2.352
8	1.065 285 489	1.391 70	2.344
9	1.065 285 508 7	1.392 176	2.389
10	1.065 285 508 3	1.392 157	2.386
11	1.065 285 509 485	1.392 297	2.412 4
12	1.065 285 509 459	1.392 290	2.410 7
13	1.065 285 509 538 3	1.392 331 9	2.425 4
14	1.065 285 509 536 5	1.392 330 0	2.424 5
15	1.065 285 509 543 13	1.392 344 3	2.433 8
16	1.065 285 509 543 06	1.392 344 0	2.433 5
17	1.065 285 509 543 664	1.392 348 98	2.439 2
18	1.065 285 509 543 652	1.392 348 79	2.438 9
19	1.065 285 509 543 711 0	1.392 350 55	2.442 41
20	1.065 285 509 543 710 1	1.392 350 50	2.442 27

Tableau 2
Le niveau fondamental $E(z)$ calculé avec les approximants de Borel $B_N(z)$. Ces approximants, définis par les relations (2.1) à (2.3), ont été construits avec l'application conforme (3.2). Les nombres entre parenthèses sont les erreurs estimées sur la dernière décimale. Ces erreurs ont été obtenues à partir de la rapidité de convergence apparente de la suite des approximants de Borel.

z	N	$E(z)$	
0.01	17	1.007 373 672 081 382 460 533 843 88	(12)
0.1	41	1.065 285 509 543 717 688 857 09	(5)
0.2	55	1.118 292 654 367 039 153 430 8	(3)
0.3	60	1.164 047 157 353 841 982 74	(5)
0.4	60	1.204 810 327 372 499 431	(3)
0.5	60	1.241 854 059 651 497 32	(8)
0.6	60	1.275 983 566 342 557 0	(8)
0.7	60	1.307 748 651 120 030	(6)
0.8	60	1.337 545 208 148 18	(4)
0.9	60	1.365 669 825 784 45	(15)
1.0	60	1.392 351 641 530 3	(4)

Il est intéressant de remarquer que la somme partielle de la série perturbative de $E(z)$ permet également de calculer la valeur $E(0.01)$ avec une très grande précision, toutefois en utilisant un nombre de coefficients perturbatifs a_n bien plus élevé. En effet soit

$$S_N(z)=\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n+\tfrac{1}{2}a_N z^N\right)\pm\tfrac{1}{2}\,|a_N|\,z^N.$$

Comme $a_n \sim -n!(-\frac{3}{2})^n$, le reste $\frac{1}{2}|a_N|\, z^N$ est minimal pour $N \approx 2/(3z)$. On obtient ainsi:

$$S_{67}(0.01) = 1.007\,373\,672\,081\,382\,460\,533\,843\,905\,983 \cdot (1 \pm 0.12 \cdot 10^{-28}).$$

Malheureusement le minimum du reste $\frac{1}{2}|a_N|\, z^N$ croît très rapidement lorsque z augmente. Pour $z = 0.1$ p. ex., on obtient

$$S_6(0.1) = 1.0653 \cdot (1 \pm 0.10 \cdot 10^{-2}).$$

3.E. *Comparaison de différentes méthodes*

Depuis 1930 d'innombrables méthodes ont été développées pour le calcul de $E(z)$, voir tableaux 5 à 7 du Chap. 5. La méthode la plus efficace est certainement la méthode non-perturbative de Banerjee et al. (1978). Malheureusement, parmi toutes ces méthodes, seules les méthodes perturbatives, c'est à dire basées sur des développements en séries de puissances de z, sont aisément généralisables au calcul numérique de certaines fonctions en théorie des champs à d dimensions, $d \geq 2$. Pour cette raison, nous ne discutons ici que les différentes méthodes perturbatives.

Dans le *Tableau 3* nous comparons les erreurs relatives

$$R_N(z) = |\text{Approximant}_N(z) - E(z)|/E(z),$$

obtenues par différentes méthodes de resommation de la série perturbative, à l'ordre N, de $E(z)$. Dans ce tableau nous distinguons très nettement deux groupes, caractérisés aussi bien par l'ordre de grandeur de $R_N(z)$ que par la rapidité de croissance de $R_N(z)$ lorsque z augmente.

Dans le premier groupe nous avons, par ordre croissant de l'erreur relative $R_N(z)$, les approximants de Borel et Padé–Borel, puis Euler, et enfin Padé. Ces approximants sont caractérisés par une croissance relativement rapide de $R_N(z)$ lorsque z augmente. Ce comportement est en accord avec la théorie d'erreur (voir Chap. 2.B et Gunson–Ng (1972), section 6). Dans les innombrables exemples que nous avons testés, nous avons obtenu, dans le cas des approximants de Borel, des erreurs relatives voisines de celles du Tableau 3. Dans ce sens, la rapidité de convergence des approximants de Borel de $E(z)$ est représentative d'une large classe de fonctions.

Tableau 3

Les erreurs relatives $R_N(z) = |\text{Approximant}_N(z) - E(z)|/E(z)$ obtenues par différentes méthodes de resommation de la série perturbative, à l'ordre N, de $E(z)$. La convergence des approximants précédés d'une étoile * n'est pas démontrée. Les approximants de Borel de Hirsbrunner–Loeffel (1975) sont définis comme dans le Tableau 1; les approximants de ⟨⟨Wick⟩⟩ ont été calculés avec la relation (70) de Seznec–Zinn Justin (1979). Pour le calcul des erreurs relatives nous avons utilisé les $E(z)$ de Biswas et al. (1973); la notation $2E$-07 signifie $2 \cdot 10^{-7}$.

Auteurs	Approximants	N	$R_N(0.2)$	$R_N(0.8)$	$R_N(2)$
Simon (1970)	Padé	40	9E-12	3E-06	3E-04
Graffi–Grecchi–Simon (1970)	*Padé–Borel	20	8E-12	2E-07	2E-05
Gunson-Ng (1972)	Euler	32	3E-11	8E-07	
Hirsbrunner–Loeffel (1975)	Borel	20	8E-12	2E-07	2E-05
Caswell (1979)	Borel–Wick	25			3E-13
Caswell (1979)	*'Wick'	20	3E-14		8E-11
Seznec–Zinn Justin (1979)	*⟨⟨Wick⟩⟩	5	2E-07	1E-06	1E-06

Dans certains cas, il est possible d'augmenter sensiblement la précision des résultats en utilisant certaines propriétés supplémentaires. Dans le cas du niveau fondamental $E(z)$, un raffinement très efficace consiste à ramener, par un changement d'échelle, la variable $z<\infty$ à une variable bornée $g<$constante (voir Caswell (1979), section II). Ceci a été mise en oeuvre par Caswell (1979), section II, et dans une version généralisée par Caswell (1979), sections III–V, et Seznec–Zinn Justin (1979). Les résultats ainsi obtenus sont spectaculaires, voir Tableau 3. Ce raffinement permet aussi d'obtenir d'excellents résultats pour le k-ème niveau de l'oscillateur anharmonique $p^2+q^2+zq^{2m}$, pour $m=2$ et 3 (voir Caswell (1979), Tableaux 3 et 6). Dans le cas de certaines fonctions en théorie des champs ϕ_3^4, ce raffinement ne permet par contre pas d'améliorer les résultats obtenus par la méthode des approximants de Borel (voir Seznec–Zinn Justin (1979), section 5).

Notre conclusion est que la méthode de la sommation selon Borel, combinée avec des raffinements dans les cas où cela est possible, se révèle être parmi les méthodes perturbatives les plus efficaces.

Dans le prochain chapitre nous allons montrer comment il est possible de raffiner la construction des approximants de Borel, afin d'atteindre certains buts tels qu'augmenter la rapidité de convergence ou obtenir une convergence monotone ou plus uniforme. Contrairement à la discussion ci-dessus, nous porterons notre attention sur le comportement des approximants de Borel $B_N(z)$ pour N petit, disons $0\leq N\leq 10$. Nous continuerons la discussion de l'exemple du niveau fondamental $E(z)$ dans le Chap. 4.C.

4. Raffinements

La construction des approximants de Borel donnée au Chap. 2 contient un élément de souplesse dans le choix de l'application conforme ϕ. Nous avons dit au Chap. 2.B comment on peut augmenter la rapidité de la convergence des séries $\sum b_m M_m(z)$ en faisant un choix judicieux de ϕ.

Dans ce chapitre, nous poursuivons cette discussion, et nous l'élargissons. Il est en effet possible de varier d'autres façons encore la construction des approximants de Borel, dans le but d'améliorer leur convergence. Après avior évoqué quelques propriétés générales des séries de puissances, nous passons en revue quelques-uns de ces raffinements.

Ces efforts pour affiner la construction des approximants de Borel ne sont pas sans importance. En physique, les coefficients a_n des séries perturbatives $\sum a_n z^n$ ne sont souvent connus de manière précise que pour $n\leq N$, N étant de l'ordre de quelques unités. Il est alors essentiel de tirer le meilleur parti possible des quelques coefficients connus en utilisant de manière judicieuse les libertés que nous avons dans la construction des approximants de Borel. Ces méthodes améliorées nous seront d'un grand secours dans les calculs que nous présentons dans Hirsbrunner (1982).

4.A. *Quelques théorèmes sur le comportement des coefficients d'une série de puissances*

L'idée clef des différents raffinements est de tenir compte de la position et de la nature des singularités de la transformée de Borel, c'est-à-dire des fonctions

$$t\to g(t) \quad \text{et} \quad w\to g(\phi^{-1}(w)).$$

Les différentes méthodes de raffinement sont basées sur les trois propositions bien connues suivantes, voir Titchmarsh (1939) chap. 7.:

Le rayon de convergence d'une série de puissance est déterminée par la position des singularités de la fonction représentée, mais aussi par le comportement asymptotique des modules des coefficients de la série:

Proposition 1. *La série de puissance* $\sum C_n z^n$ *possède le rayon de convergence* $r = 1/\limsup |C_n|^{1/n}$.

Exemple 1. Si $r = 1$ et si les seules singularités sur le cercle unité sont des pôles isolés d'ordre p alors

$$|C_n| = 0(n^{p-1}).$$

La position exacte des singularités est plus difficile à déterminer. Mais on a par exemple:

Proposition 2. *Soit* $h(z) = \sum C_n z^n$ *avec* $\forall n\ C_n = |C_n| \cdot \exp(\mathrm{in}\,\alpha)$, α *fixé. Si la série possède un rayon de convergence* r *alors* $z = r \cdot \exp(-i\alpha)$ *est un point singulier de* h.

Exemple 2. $1/(1+z) = \sum (-1)^n \cdot z^n$.

Le comportement asymptotique des coefficients C_n, $n \to \infty$, est relié au comportement asymptotique de $h(z) = \sum C_n z^n$ lorsque z s'approche du cercle de convergence le long d'un rayon:

Proposition 3. *Soient* $h_1(z) = \sum C_n z^n$ *et* $h_2(z) = \sum d_n \cdot z^n$, *où* $C_n \geq 0$, $d_n \geq 0$ *et les séries convergent pour* $|z| < 1$ *et divergent pour* $z = 1$. *Soit* C *une constante. Si*

$$C_n \sim C \cdot d_n \quad \textit{lorsque} \quad n \to \infty \ \textit{alors}$$
$$h_1(z) \sim C \cdot h_2(z) \quad \textit{lorsque} \quad z \nearrow 1.$$

Exemple 3. Soit $h_1(t) = \sum C_n \cdot t^n$ avec

$$C_n = (-A)^n \cdot (\Gamma(n+B+1)/\Gamma(n+B'+1)) \cdot C \cdot (1+0(1/n))$$

où $A > 0$. Soit $h_2(t) = (1+At)^\alpha \cdot (\ln(1+At))^\beta$ avec $\alpha = B' - B - 1$ et $\beta = 1$ si $\alpha \in \mathbb{Z}^+$, $\beta = 0$ sinon. Alors

$$h_1(t) \sim C' \cdot h_2(t) \quad \text{lorsque} \quad t \searrow -A^{-1}.$$

(Indication: suit de la proposition 3 avec $z = -A \cdot t$).

4.B. *Cinq méthodes de raffinements*

Soient $f(z)$ et $\sum a_n z^n$ satisfaisant le Théorème WN (voir Chap. 1.C); mais nous utiliserons désormais la représentation généralisée

$$f(z) = (1/z) \cdot \int_0^\infty \exp(-t/z) \cdot (t/z)^{B'} \cdot g(t)\, dt, \tag{4.1}$$

avec

$$B' > -1$$

et

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n/\Gamma(n+B'+1)) \cdot t^n \tag{4.2}$$

pour $|t| < 1/A$. (Le Théorème WN correspond au cas $B' = 0$). Et nous écrivons le N-ème approximant de Borel $B_N(z)$ de $f(z) = \lim B_N(z)$ sous la forme généralisée

$$B_N(z) = \sum_{m=0}^{N} b_m \cdot M_m(z), \tag{4.3}$$

où

$$M_m(z) = (1/z) \cdot \int_0^{\infty} \exp(-t/z) \cdot (t/z)^{B'} \cdot (t/\phi(t))^{\lambda'} \cdot \phi(t)^m \, dt, \tag{4.4}$$

λ' est une constante réelle fixée, l'application conforme ϕ est définie comme dans le Chap. 2.A et les coefficients b_m sont définis par le développement

$$(\phi^{-1}(w)/w)^{-\lambda'} \cdot g(\phi^{-1}(w)) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cdot w^m, \tag{4.5}$$

pour $|w| < 1$. $B_N(z)$ dépend donc des trois paramètres fixés ϕ, B', λ. (L'approximant de Borel du Chap. 2.A correspond au cas $B' = 0, \lambda' = 0$).

Pour fixer les idées et pour simplifier la discusion nous supposons en plus:

1) z positif.
2) $a_n = (-A)^n \cdot \Gamma(n+B+1) \cdot C \cdot (1+0(1/n))$
   $= (-A)^n \cdot n! \cdot n^B \cdot C' \cdot (1+0(1/n))$
   (en physique les coefficients a_n des séries perturbatives possèdent souvent ce comportement).
3) La transformée de Borel g, définie par (4.2), est holomorphe dans le plan coupé $\mathbb{C} \backslash (-\infty, -1/A]$.

(Les méthodes ci-dessous s'adaptent aisément au cas où ces hypothèses supplémentaires ne sont pas satisfaites).

Méthode 1. a) L'idée est de faire varier l'application conforme ϕ. Ceci a pour effet de modifier la *position* de la singularité de $w \to g(\phi^{-1}(w))$ en $w_s = \phi^{-1}(-1/A)$, et donc de modifier le comportement des coefficients b_m. Un choix convenable de ϕ peut améliorer la rapidité de convergence de la suite $\{B_N(z)\}_N$. Nous l'avons déjà noté au Chap. 2.B.

b) Pour ce type d'étude la famille d'applications conformes ϕ la plus simple est donnée par $\phi(t) = 1-(p \cdot t+1)^{-\gamma}$, et les meilleurs résultats sont en général obtenus (dans le cas $\lambda' = 0$) avec $\gamma = \frac{1}{2}$ et $p = A$. Notons que $\phi(-1/A) = \infty$. (Voir Figs. 8a et 9a).

Méthode 2 (d'après Le Guillou–Zinn Justin (1977 et 1980)). a) L'idée est de faire varier le paramètre B' dans un voisinage de B. Ceci a pour effet de modifier

la *nature* de la singularité de la transformée de Borel $g(t)$ lorsque $t \searrow -A^{-1}$ (voir Exemple 3 ci-dessus) et donc de modifier le comportement des coefficients b_m. Un choix convenable de B' peut améliorer la rapidité de convergence de la suite $\{B_N(z)\}_N$.

b) Pour ϕ tel que $\phi(-A^{-1}) = -1$ on obtient en général le meilleur résultat avec $B' = B + \frac{3}{2}$, c'est à dire pour $g(t) \sim (1 + A \cdot t)^{1/2}$ lorsque $t \searrow -A^{-1}$. (Voir Figs. 8b et 9b).

Méthode 3 (d'après Parisi (1977)). a) L'idée est de tenir compte du comportement de $f(z)$ lorsque $z \nearrow \infty$: $f(z) \sim f_\infty \cdot z^\lambda$.

Pour ce nous devons bien sûr supposer que le Théorème WN soit satisfait pour tout z positif (plus précisément $\forall z \in D_{0,\infty}$).

b) Pour alléger la notation nous posons $A = 1$ et $B' = 0$. Pour simplifier la discussion nous prenons $\phi(t) = t/(1+t)$ comme application conforme (ϕ applique le demi plan $\operatorname{Re} t > -\frac{1}{2}$ dans le disque $|w| < 1$) et nous supposons que la transformée de Borel $g(t)$ soit holomorphe dans le plan coupé $\mathbb{C} \backslash (-\infty, -1]$. Notons que $\phi^{-1}(w) = w/(1-w)$ et $\phi((-\infty, -1]) = [1, \infty)$. La fonction $w \to g(\phi^{-1}(w))$ est donc holomorphe dans le plan coupé $\mathbb{C} \backslash [1, \infty)$ et le comportement de $f(z)$ lorsque $z \nearrow \infty$ détermine le comportement de $g(\phi^{-1}(w))$ lorsque $w \nearrow 1$ (et vice-versa):

Lemme. *Soit $\varepsilon > 0$, z et w réels. On a:*

$$f(z) \underset{z \to \infty}{\sim} f_\infty \cdot z^\lambda + 0(z^{\lambda - \varepsilon})$$

si et seulement si

$$g(\phi^{-1}(w)) \underset{w \to 1}{\sim} [f_\infty / \Gamma(\lambda + 1)] \cdot (1-w)^{-\lambda} + 0((1-w)^{-\lambda + \varepsilon}).$$

Indication. Suit de $f(z) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot g(z \cdot t)\, dt$ avec $g(t) \underset{t \to \infty}{\sim} [f_\infty / \Gamma(\lambda + 1)] \cdot (1+t)^\lambda + 0((1+t)^{\lambda - \varepsilon})$.

c) L'idée est alors d'écrire $g(\phi^{-1}(w))$ sous la forme $g(\phi^{-1}(w)) = (1-w)^{-\lambda} \cdot h(\phi^{-1}(w))$ et de développer h (et non pas g!) en série de puissance de w:

$$h(\phi^{-1}(w)) = \sum b_m \cdot w^m \quad \text{pour} \quad |w| < 1.$$

Le N-ème approximant de Borel peut alors s'écrire:

$$B_N(z) = \sum_{m=0}^{N} b_m \cdot M_m(z)$$

avec

$$M_m(z) = (1/z) \cdot \int_0^1 \exp[-z^{-1} \cdot w/(1-w)] \cdot (1-w)^{-\lambda - 2} \cdot w^m\, dw$$

$$= (1/z) \cdot \int_0^\infty \exp[-t/z] \cdot (1+t)^\lambda \cdot [t/(1+t)]^m\, dt$$

d) Notons que $B_0(z) \sim a_0 \cdot \Gamma(1+\lambda) \cdot z^\lambda$ lorsque $z \to \infty$, c'est à dire

$$f(z)/B_0(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} f_\infty/[a_0 \cdot \Gamma(1+\lambda)].$$

Cette méthode est donc particulièrement bien adapté au régime $z \gg 1$. De plus dans certains cas la convergence de la suite $\{B_N(z)\}_N$ devient uniforme en z: p. ex. pour l'oscillateur anharmonique (voir Parisi (1977)) et pour $f(z) = 1/(1+z)$ (voir Chap. 4.D, Rem 5). (Voir Figs. 8c et 9c).

Méthode 4 (généralisation de Parisi (1977) et Kazakov et al. (1979)). a) En général le comportement de $f(z)$ lorsque $z \nearrow \infty$ n'est pas connu. Et plus grave, le Théorème WN n'est en général pas satisfait pour $z > R$, R fini. La méthode 3 n'est donc que très rarement applicable.

b) Mais même dans le cas où $R < \infty$, la méthode 3 nous suggère d'écrire le Nème approximant de Borel $B_N(z)$ de $f(z)$ sous la forme des relations (4.3) à (4.5) ci-dessus. Notons que

$$B_0(z) \underset{z\to\infty}{\sim} b_0 \cdot \Gamma(B'+\lambda'+1) \cdot z^{\lambda'}$$

avec

$$b_0 = \left(\frac{d\phi^{-1}(w)}{dw}\bigg|_{w=0}\right)^{-\lambda'} \cdot a_0/\Gamma(B'+1).$$

c) Pour une application ϕ donnée, l'idée est alors d'optimiser la rapidité de convergence de $\{B_N(z)\}_N$ en variant λ'. Dans le cas où $f(z) \sim f_\infty \cdot z^\lambda$ lorsque $z \to \infty$, les meilleurs résultats sont en général obtenus pour $\lambda' \approx \lambda$, voir Kazakov et al. (1979).

d) Pour ce type d'étude, la famille d'applications conformes ϕ la plus simple est donnée par ϕ telle que

$$\phi^{-1}(w) = t = q^{-1} \cdot w/(1-w)^\beta, \qquad 0 < \beta \leq 2.$$

Pour ϕ telle que $\phi(-A^{-1}) = -1$, le meilleur résultat est en général obtenu avec $B' \approx B+2$. (Voir Figs. 8d et 9d).

Méthode 5. D'autres raffinements peuvent augmenter la rapidité de convergence de la suite $\{B_N(z)\}_N$, tels par exemple:

a) Construire les approximants de Borel de la fonction composée $h \circ f$, où h est une fonction convenablement choisie. Par exemple:

- $(h \circ f)(z) = (f(z) - f(0))/z$, ce qui a pour effet de modifier, comme dans les méthodes 3 et 4, le comportement de la transformée de Borel au voisinage de l'infini.
- $h \circ f = f^{1/\nu}$ si $f(0) \neq 0$ et $f(z) \sim (z_c - z)^\nu$ lorsque $z \nearrow z_c$, $z_c > 0$; voir Hirsbrunner (1982).

b) (Voir Corollaire 2, Chap 1.C.): écrire f sous la forme

$$f(z) = (1/z) \cdot \int_0^\infty \exp(-t/z) \cdot \left[(1/t) \cdot \int_0^\infty \exp(-s/t) \cdot \sum [a_n/(n!)^2] \cdot s^n \, ds\right] dt$$

et appliquer le domaine S, avec $\mathbb{R}^+ \subset S \subset \mathbb{C}$, dans le cercle unité. On peut

s'attendre à obtenir de bons résultats si on tient compte du comportement de la transformée de Borel $g(t)$ lorsque $t \to \infty$, où $g(t) = \sum (a_n/n!)t^n$ pour $|t| < 1/A$ (voir Chap. 4.D, Rem. 5).

4.C. *Le niveau fondamental de l'oscillateur anharmonqiue, bis*

Nous poursuivons ici la discussion du Chap. 3 des approximants de Borel de la série perturbative du niveau fondamental $E(z)$ de l'oscillateur anharmonique. Notre but est d'illustrer les méthodes de raffinements du Chap. 4.B, en d'autres termes d'illustrer l'influence des trois paramètres (fixés) ϕ, B', λ' sur le comportement de la suite $\{B_N(z)\}_N$ pour $N \leq N_0$, N_0 étant de l'ordre de quelques unités.

Pour le choix de B' et λ', nous sommes guidés par les résultats de Bender–Wu (1969) et Simon (1970):

$$a_n \sim (-A)^n \cdot \Gamma(n+B+1) \cdot C \cdot (1+0(1/n)) \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty,$$

$$E(z) \sim E_\infty \cdot z^\lambda \cdot (1+0(z^{-2/3})) \quad \text{lorsque} \quad z \to \infty,$$

avec $A = \frac{3}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{3}$. Le choix de l'application conforme ϕ a été discuté dans le Chap. 3.A; nous utiliserons les ϕ suivants

$$\phi_1(t) = 1 - \exp(-\beta t) \quad \text{avec} \quad \beta = A \cdot \ln 2 \tag{4.6}$$

$$\phi_2(t) = (u-1)/u \quad \text{avec} \quad u = At+1 \tag{4.7}$$

$$\phi_3(t) = (u-1)/(u+1) \quad \text{avec} \quad u = At+1 \tag{4.8}$$

$$\phi_4(t) = (u-1)/u \quad \text{avec} \quad u = \sqrt{At+1} \tag{4.9}$$

$$\phi_5(t) = (u-1)/(u+1) \quad \text{avec} \quad u = \sqrt{At+1} \tag{4.10}$$

Il est intéressant de noter que la singularité de la transformée de Borel $g(t)$ en $t = -1/A$ est appliquée en

$$\phi_j(-1/A) = -1 \quad \text{pour} \quad j = 1, 3, 5 \quad \text{et} \quad \phi_j(-1/A) = \infty \quad \text{pour} \quad j = 2, 4.$$

La *Fig. 6* illustre le comportement des sommes partielles

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

et des approximants de Borel $B_N(z)$ du niveau fondamental $E(z)$. Les $B_N(z)$, définis par les relations (4.3) à (4.5), ont été construits avec

$$\phi_5, B' = B = -\tfrac{1}{2}, \qquad \lambda' = 0 \tag{4.11}$$

La divergence de la suite $\{S_N(z)\}_N$ est clairement illustrée par cette figure. Nous voyons aussi que plus z est grand, plus la convergence de la suite $\{B_N(z)\}_N$ est lente. Ceci est en accord avec les résultats des Chap. 2.B et 3.D. Un choix convenable de λ', à savoir $\lambda' \approx \lambda = \frac{1}{3}$, permet de rendre la convergence plus uniforme en z, voir Parisi (1977); ce paramètre est donc particulièrement intéressant dans le régime $z \gg 1$.

La *Fig. 7* illustre la rapidité de convergence des approximants de Borel $B_N(z)$ du niveau fondamental $E(z)$. Les $B_N(z)$, définis par les relations (4.3) à

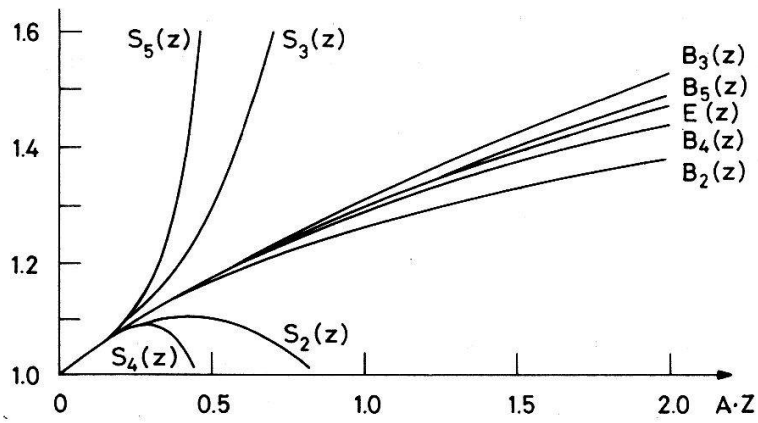

Figure 6
Le comportement des sommes partielles $S_N(z)$ et des approximants de Borel $B_N(z)$ du niveau fondamental $E(z)$. Les $B_N(z)$ ont été construits avec (4.11). Comme $a_n \sim -(-\frac{3}{2})^n \cdot n!$ lorsque $n \to \infty$, nous avons reporté en abscisse les valeurs de $A \cdot z$, avec $A = \frac{3}{2}$.

(4.5), ont été construits avec

$$\text{a) } \phi_5, B' = B = -\tfrac{1}{2}, \qquad \lambda' = 0 \ \{\text{comme } (4.11)\} \tag{4.12}$$

$$\text{b) } \phi_3, B' = B = -\tfrac{1}{2}, \qquad \lambda' = 0 \tag{4.13}$$

$$\text{c) } \phi_1, B' = B = -\tfrac{1}{2}, \qquad \lambda' = 0 \tag{4.14}$$

$$\text{d) } \phi_1, B' = B + \tfrac{3}{2} = 1, \qquad \lambda' = 0. \tag{4.15}$$

Les cas a) à c) montrent que la rapidité de convergence de la suite $\{B_N(z)\}_N$ dépend du choix de l'application conforme ϕ: plus le domaine T_ϕ est grand, plus la convergence est rapide. Cette propriété (obtenue ici déjà pour N petit!) est en

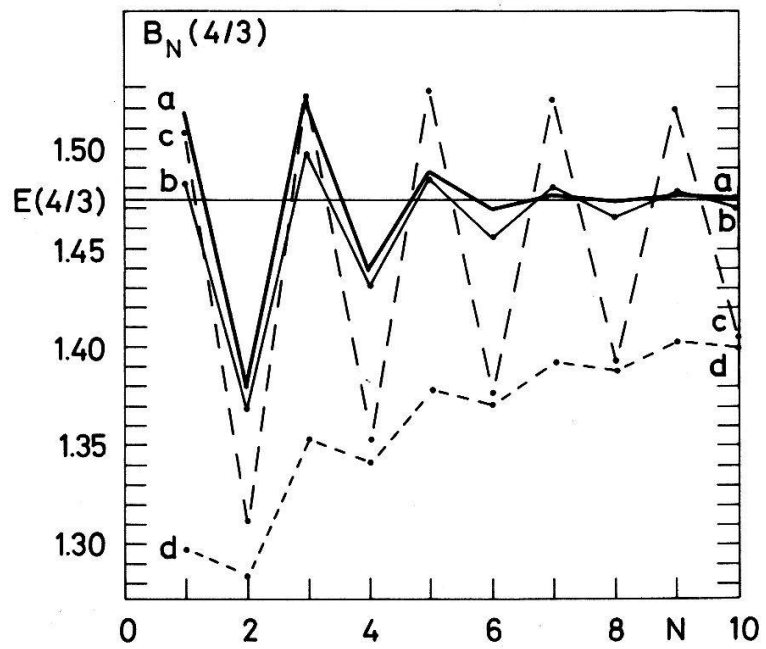

Figure 7
La rapidité de convergence des approximants de Borel $B_N(z)$ du niveau fondamental $E(z)$, pour $z = \frac{4}{3}$. Les $B_N(z)$ ont été construits avec respectivement (4.12), (4.13), (4.14), (4.15). La valeur exacte est $E(\frac{4}{3}) = 1.47\,295 \cdots$

accord avec les résultats théoriques du Chap. 2.B. Les cas c) et d) illustrent l'influence du paramètre B' sur le comportement de la suite $\{B_N(z)\}_N$. Dans le cas c) on a

$$B_{2N}(z) < E(z) < B_{2N-1}(z),$$

alors que dans le cas d) on a

$$B_{2N}(z) < B_{2N-1}(z) < E(z).$$

Dans le cas a), une variation de B' produit un effet analogue; voir Figs. 7a et 8b. Voir aussi Le Guillou–Zinn Justin (1980).

Les *Figs. 8 et 9* illustrent les méthodes de raffinements 1 à 4 du Chap. 4.B. Les approximants de Borel, définis par les relations (4.3) à (4.5), ont été construits avec

a) méthode 1: $\phi_4, B' = B = -\frac{1}{2}, \quad \lambda' = 0$ (4.16)

b) méthode 2: $\phi_5, B' = B + \frac{3}{2} = 1, \quad \lambda' = 0$ (4.17)

c) méthode 3: $\phi_2, B' = B + \frac{1}{2} = 0, \quad \lambda' = \lambda = \frac{1}{3}$ (4.18)

d) méthode 4: $\phi_5, B' = B + 2 = \frac{3}{2}, \quad \lambda' = \lambda = \frac{1}{3}$ (4.19)

Les Figs. 7 à 9 montrent que le comportement de la suite $\{B_N(z)\}_N$ dépend très sensiblement du choix des paramètres ϕ, B', λ': un choix convenable permet de construire des suites $\{B_N(z)\}_N$, $N \leq N_0$, respectivement monotones croissantes ou oscillantes ou monotones décroissantes. (Les choix optimaux de ϕ, B', λ' dépendent de N_0). Notre conclusion est que, pour N_0 fixé, la *combinaison* de ces différentes suites permet d'augmenter très sensiblement la précision du résultat.

Ces méthodes améliorées nous seront d'un grand secours dans l'article compagnon, Hirsbrunner (1982), consacré au calcul de la masse des particules asymptotiques dans le modèle $\lambda : \phi^4 :_2$.

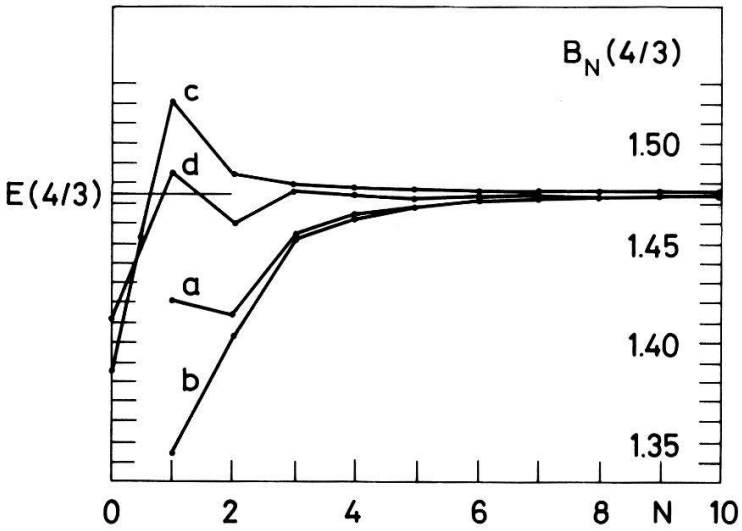

Figure 8
Illustration des méthodes de raffinements 1 à 4 du Chap. 4.B. Les approximants de Borel $B_N(z)$ ont été construits avec respectivement (4.16), (4.17), (4.18), (4.19). L'échelle de l'axe des ordonnées est identique à celle de la Fig. 7.

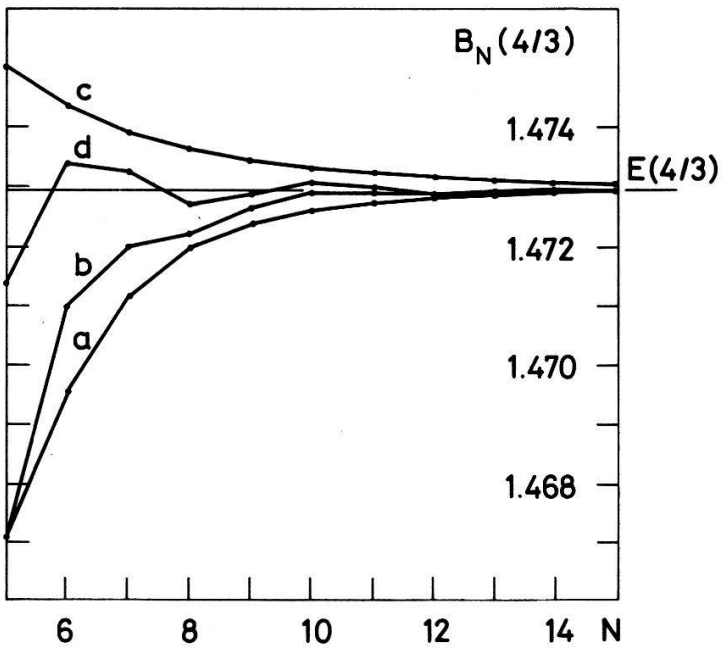

Figure 9
Comme la Fig. 8, mais pour $5 \leq N \leq 15$. L'échelle de l'axe des ordonnées a été multipliée par un facteur 30.

4.D. *Quelques remarques*

Nous terminons ce chapitre avec quelques remarques de caractère général.

1) Pour pouvoir reconstruire une fonction $f(z)$ à partir de sa série asymptotique $\sum a_n z^n$ il suffit que le Théorème WN soit satisfait pour $\alpha = 0$. Mais dans la pratique cela ne permettra de calculer (numériquement) $f(z)$ qu'avec une précision très faible (voir Fig. 7c). Notons aussi que pour $\alpha = 0$ les méthodes 1 à 5 ne permettent pas (en général) d'améliorer sensiblement la précision du résultat (voir figure 7d).

2) Il est très difficile de faire une ⟨⟨bonne⟩⟩ théorie de l'erreur pour N 'petit' et en tenant compte des raffinements des méthodes 1 à 5. Ceci d'autant plus que la valeur exacte de R n'est en général pas connue et que les meilleurs résultats sont obtenus en combinant les méthodes 1 à 5. Dans la pratique on se contente donc souvent d'une théorie de l'*erreur* '*expérimentale*' (simulation numérique). En général la précision 'expérimentale' du résultat final est considérablement supérieure à la précision théorique.

Mais nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que cette erreur 'expérimentale' doit être estimée avec une grande prudence. Voir Gaunt–Guttmann (1974).

3) Dans la pratique les hypothèses du Théorème WN sont souvent très difficiles à vérifier. En particulier le *domaine d'holomorphie* de la transformée de Borel $g(t)$ est en général très mal connu. La méthode 1 nous fournit alors un outil simple et efficace permettant d'estimer la position et la nature des singularités de $g(t)$; voir aussi Jeffreys (1958). Une telle étude est à la base des résultats de Collet–Eckmann–Hirsbrunner (1977).

Notons aussi qu'une étude numérique de la décroissance de $N \to |f(z) - B_N(z)|$ peut donner des informations sur la valeur de R (par comparaison avec la théorie d'erreur, voir Chap. 2.B).

4) Le *comportement* de $f(z)$ lorsque $z \to \infty$ n'est en général pas connu. Mais si le Théorème WN est satisfait pour $\alpha > \pi/2$, $R = \infty$ et si le comportement asymptotique des coefficients a_n, $n \to \infty$, est connu alors il est possible de déterminer (approximativement) le comportement de $f(z)$, $z \to \infty$, à partir des N premiers coefficients a_n, $N \approx 10$(!): voir Tarasov (1979).

5) Nous avons vu dans le Chap. 2.C, Rem. 3 que la resommation selon Borel n'améliore pas la rapidité de convergence d'une série $\sum a_n z^n$ *convergente.* Nous montrons ici, à l'aide d'un exemple, que ce résultat théorique, établi pour N suffisamment grand, n'est pas valable pour N petit.

Exemple. Soit la fonction $f(z) = 1/(1+z)$. Pour $|z| < 1$ on a

$$f(z) = \lim_{N \to \infty} S_N(z) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} (-z)^n,$$

et pour $\operatorname{Re} z > -1$ on a, voir Hardy (1949) Chap. 8.8:

$$f(z) = \int_0^\infty \exp(-t) \cdot t^{B'} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-zt)^n / \Gamma(n + B' + 1)\, dt,$$

avec $B' > -1$, B' fixé. Dans le *Tableau 4* nous avons calculé les sommes partielles $S_N(z)$ et les approximants de Borel $B_N(z)$ de $f(z)$. Les $B_N(z)$, définis par les relations (4.3) à (4.5), ont été construits avec

$$\phi(t) = (u-1)/u, \qquad u = t/20 + 1; \qquad B' = 0, \qquad \lambda' = 0 \tag{4.20}$$

$$\phi(t) = (u-1)/u, \qquad u = t/60 + 1; \qquad B' = 60, \qquad \lambda' = -1 \tag{4.21}$$

Ce tableau montre clairement que la suite $\{B_N(z)\}_N$ converge plus rapidement que la suite $\{S_N(z)\}_N$, pour $N \leq 10$. De plus les approximants de Borel permettent

Tableau 4

Les sommes partielles $S_N(z)$ et les approximants de Borel $B_N(z)$ de la fonction $f(z) = 1/(1+z) = \sum (-z)^n$. Les $B_N(z)$, définis par les relations (4.3) à (4.5), ont été construits avec (4.20) dans les colonnes 3 et 4, et (4.21) dans les colonnes 5 à 7.

N	$S_N(0.5)$	$B_N(0.5)$	$B_N(2.0)$	$B_N(0.5)$	$B_N(2.0)$	$B_N(2'999)$
0	1.000 0	1.000 000	1.000 0	0.664 211	0.332 099	0.000 333 331
1	0.500 0	0.523 292	−0.687 3	0.667 854	0.335 722	338 794
2	0.750 0	0.718 892	1.544 7	0.666 706	0.333 462	333 686
3	0.625 0	0.650 957	−0.774 6	661	291	107
4	0.687 5	0.670 401	1.092 7	666	326	283
5	0.656 3	0.666 026	−0.029 4	667	334	343
6	0.671 9	727	0.429 5		334	340
7	0.664 1	669	0.337 2		333	334
8	0.668 0	665	0.322 5			333
9	0.666 0	667	0.334 0			
10	0.667 0		0.334 8			
∞	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-3}$

de calculer la fonction $f(z)$ en dehors du cercle de convergence de la série $\sum(-z)^n$, plus précisément pour tout z avec $\operatorname{Re} z > -1$. Pour $\lambda' \approx -1$, la convergence de la suite $\{B_N(z)\}_N$ est uniforme en z; la rapidité de convergence est spectaculaire et peut s'expliquer par le comportement de $B_0(z)$ lorsque $z \to \infty: B_0(z) \sim z^{\lambda'}$. (Nous avons étudié un autre exemple, tiré de la physique des écoulements, dans Hirsbrunner (1981b); les résultats sont tout à fait analogues, sauf que la convergence de la suite $\{B_N(z)\}_N$ n'est pas aussi rapide).

5. Notes et bibliographie commentée

0. Des progrès considérables ont été réalisés durant les années 70 dans le domaine des séries perturbatives sommables selon Borel. On peut trouver un *résumé* dans

A) Simon (1981): pour les résultats rigoureux
B) Zinn–Justin (1981): pour les résultats heuristiques.
Ces deux travaux contiennent également une bibliographie détaillée.

1. On trouve une *bibliographie détaillée* dans les références suivantes:

A) Sur les séries convergentes et divergentes et sur les développements asymptotiques:
1) avant 1880: voir Burkhardt (1911) et Dingle (1973)
2) de 1880 à 1930: voir Dienes (1931)
3) de 1930 à 1974: voir Dingle (1973) et Olver (1974).

B) Sur les séries perturbatives en mécanique quantique, avec applications numériques:
1) de 1967 à 1979: voir paragraphe 5 ci-dessous.

C) Sur les séries perturbatives sommables selon Borel en mécanique quantique:
1) de 1969 à 1975: voir Reed–Simon (1978), pages 61–64
2) de 1977 à 1979: voir Hunziker (1979), pages 38–40
3) jusqu'en 1980: voir Simon (1981).

D) Sur les séries perturbatives sommables selon Borel en théorie constructive des champs:
1) de 1975 à 1979: voir Magnen–Sénéor (1979), pages 221–222 et Le Guillou–Zinn Justin (1980).

E) Sur le comportement asymptotique des coefficients d'une série asymptotique (⟨⟨Lipatov⟩⟩), avec applications numériques (par sommation selon Borel):
1) de 1977 à 1978: voir Herbst–Simon (1978), note 4, page 69.
2) jusqu'en 1980: voir Zinn–Justin (1981).

F) Sur l'utilisation des approximants de Padé en physique: voir Baker, Jr–Gammel (1970).

G) Sur les procédés d'accélération de convergence en analyse numérique:
1) de 1955 à 1980: voir Brezinski (1980) et Mori (1980).

2. La sommabilité selon Borel a été introduite par Emile Borel dans une série d'articles publiés de 1895 à 1899. Pour l'*histoire des séries divergentes* on

peut se référer à:

A) Burkhardt (1911) pour la période 1750–1860. On y trouve de nombreuses informations difficile à trouver ailleurs.
B) Houzel et al. (1976). Cet ouvrage est le fruit d'une collaboration rare et délicate: la coopération de spécialistes en mathématique et en philosophie. Il aborde essentiellement les difficultés auxquelles les mathématiciens du 18e siècle furent confrontés dans la manipulation des séries.
C) On trouve un excellent résumé dans Hardy (1949), pages 13–20, pour la période 1700–1900 et dans Dingle (1958), pages 456–7, pour la période 1860–1955.
D) On trouve de nombreuses notes historiques intéressantes dans Olver (1974).

3. Pour un *exposé pédagogigue* sur les diverses méthodes de resommation de séries convergentes et divergentes on peut se référer à:

A) Hardy (1949).
B) Wall (1948) et Baker, Jr et al. (1970) (pages 1–39) pour les fractions continues et les approximants de Padé.

4. La resommation selon Borel a été étendue à la *double série* $f(x, y) \sim \sum a_{m,n} x^m y^n$ par Sobelman (1979).

5. Depuis 1930 d'innombrables travaux ont été consacrés au calcul du k-ème niveau d'énergie de l'oscillateur anharmonique d'hamiltonien $p^2 + \alpha q^2 + z q^{2m}$ pour $\alpha = -1, 0, 1$ $m = 2, 3, 4$ et $0 \leq z < \infty$. Dans les *Tableaux 5 à 7* nous avons résumé les principales méthodes (variationnelles, perturbatives et autres) développées de 1962 à 1979; pour la période 1930 à 1968 voir les références de Reid (1970).

Tableau 5
Méthode variationnelle.

Auteurs	α	m	k	z
Reid (1965)	1	2	0 à 9	0.1 à 1
Reid (1970)	0	2	0 à 23	1
Somorjai–Hornig (1962)	−1	2	0 à 8	0.05 à 0.4

La méthode la plus efficace (du point de vue du calcul numérique) est certainement celle proposée par Banerjee et al. (1978).[8]) Leur méthode est analogue à celle de Biswas et al. (1973), mais elle introduit en plus un changement d'échelle astucieux qui permet d'obtenir une rapidité de convergence (plus ou moins) indépendante de z.[9]) Cette méthode a été généralisée par Richardson–Blankenbecler (1979).

Les résultats les plus précis (15 décimales) ont été publiés par Biswas et al.

[8]) Je remerice Mark Robert de m'avoir communiqué cette référence.
[9]) Le changement d'échelle est également une technique bien adaptée aux méthodes perturbatives, voir Chap. 3.E.

Tableau 6
Méthode perturbative.

Auteurs	α	m	k	z	Approximants
Reid (1967)	1	2	0 à 9	0.25 à 1	Padé
Loeffel et al. (1969)	1	2	0	0.1 à 1	
Simon (1970)	1	2	0	0.1 à 15	
Graffi et al. (1970)	1	2	0	0.1 à 14	Padé–Borel
Gunson–Ng (1972)	1	2	0	0.2 à 0.8	Euler
'Chap. 3 ci-dessus'	1	2	0	0.01 à 10	Borel
Caswell (1979)	1	2	0 à 2	2 à $2 \cdot 10^6$	
Caswell (1979)	1	2	0 à 10	0.02 à ∞	'Wick'
	1	3	0 à 10	0.02 à ∞	
	−1	2	0 à 10	0.05 à 200	
	−1	3	0 à 10	0.01 à 200	

Tableau 7
Autres méthodes.

Auteurs	α	m	k	z	Méthode
Biswas et al. (1973)	1	2	0 à 7	0.1 à 100	Déterminant de 'Hill'.
	1	3	0 et 2	0.1 à 100	
	1	4	0 et 2	0.1 à 100	
Banerjee et al. (1978)	1	2	0 à 10^4	0.0001, 1, 40000	
	0	2	0 à 10^4	1	
Hioe et al. (1975)	1	2	0 à 8	0.004 à ∞	'Déterminant' et formules approchées.
Hioe et al. (1976)	1	3	0 à 5	0.0002 à ∞	
	1	4	0 à 3	0.0002 à ∞	
Hioe et al. (1978)	1	2	0 à 8	0.2 à ∞	
Bender et al. (1977)	0	2	0 à 10	1	WKB
Balian et al. (1978)	0	2	0 à 6	1	

(1973) et Banerjee (1978). On trouve les tableaux les plus complets dans Hoie et al. (1975, 1976 et 1978). (Les méthodes perturbatives ont été discutées dans le Chap. 3.E ci-dessus).

6. Dans la littérature mathématique le *Théorème WN* n'a pas reçu d'attention particulière: tout au plus est-il cité de temps en temps (plutôt comme 'curiosité' et souvent dans une formulation partielle comme dans Hardy (1949)).

L'inverse du théorème WN par contre, connu sous le nom de '*lemme de Watson*', a été l'objet de nombreuses recherches: voir Dingle (1973) et Olver (1974). Quelques uns de ces travaux sont fort utile pour l'étude des approximants de Borel, notamment dans le cadre de la méthode 1 (Chap. 4.B): p. ex. Jeffreys (1958) et Beyer–Heller (1967).

7. Au cas où le Théorème WN est satisfait pour $\alpha \geq \pi/2$ il est possible de

reconstruire la fonction $f(z)$ à partir de sa série asymptotique $\sum a_n z^n$ en resommant $\sum a_n z^n$ selon *Euler*, voir Gunson–Ng (1972). Ce travail est resté totalement inconnu (sauf semble-t-il pour Dingle (1973) et Biswas et al. (1973)) et ceci bien qu'il se situe à une époque où les physiciens furent très intéressés à trouver des méthodes de resommation rigoureuses et aptes au calcul numérique (voir Graffi–Grecchi–Simon (1970)).

Comme pour les approximants de Borel (pour $\alpha = \pi/2$) la rapidité de convergence des *approximants de 'Gunson–Ng'* est du type $\exp(-\delta_z \cdot \sqrt{N})$, $\delta_z > 0$. Notons néanmoins que la construction des approximants de 'Gunson–Ng' est moins transparente que celle des approximants de Borel.

8. Il serait intéressant de voir si *l'analogie* entre les approximants de 'Gunson–Ng' et les approximants de Padé $[N, N]$ (voir Gunson–Ng (1972)) peut être étendue aux approximants de Borel. Indication: dans les trois cas le Nème approximant est obtenu à partir d'un réarrangement des N premiers coefficients a_n.

9. Le *comportement asymptotique des coefficients* C_n est déterminé par la position et la nature des singularités de la fonction $h(z) = \sum C_n \cdot z^n$, et inversément; voir Chap. 4.A. On peut trouver des informations supplémentaires sur:

a) la théorie générale: dans Titchmarsh (1939), chap. 7;
b) une analyse dans le cadre du lemme de Watson: dans Jeffreys (1958) et Olver (1974);
c) une analyse numérique du comportement des coefficients: dans Bender–Wu (1969) et Tarasov (1979);
d) une analyse numérique de l'erreur 'expérimentale' (Chap. 4.D): dans Gaunt–Guttmann (1974).

10. Le comportement des coefficients a_n est relié aux singularités de la transformée de Borel $g(t)$: si $a_n \sim A^n \cdot \Gamma(n+B+1) \cdot \cos(n\theta) \cdot C \cdot (1+0(1/n))$ lorsque $n \to \infty$ alors $g(t)$ possède une singularité en $t_0 = A^{-1} \cdot \exp(\pm i\theta)$. Si $t_0 > 0$ alors la Borel-somme $\int_0^\infty e^{-t/z} \cdot g(t) \cdot dt$ n'est pas définie et le théorème WN n'est pas valable: $\sum a_n \cdot z^n$ est *non-Borel-sommable.* Dans ce cas il n'existe aucune théorie (générale) de resommation de $\sum a_n z^n$. Néanmoins quelques progrès ont été réalisés ces dernières années, voir Khuri (1979).

Remerciements

Je remercie Jean-Jacques Loeffel pour ses encouragements et ses précieux conseils.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

G. A. Baker Jr et J. L. Gammel, *The Padé Approximant in Theoretical Physics* (Academic Press 1970).

R. Balian, G. Parisi et A. Voros, *Discrepancies from Asymptotic Series and Their Relation to Complex Classical Trajectories*, Phys. Rev. Lett. *41*, 1141–1144 (1978).

K. Banerjee, S. P. Bhatnagar, V. Choudhry et S. S. Kanwall *The Anharmonic Oscillator*, Proc. R. Soc. Lond. *A360*, 575–586 (1978).

C. M. BENDER, K. OLAUSSEN et P. S. WANG, *Numerological Analysis of the WKB Approximation in Large Order*, Phys. Rev. *D16*, 1740–1748 (1977).
C. M. Bender et T. T. Wu, *Anharmonic Oscillator*, Phys. Rev. *184*, 1231–1260 (1969).
W. A. Beyer et L. Heller, *Analytic Continuation of Laplace Transforms by means of Asymptotic Series*, J. Math. Phys. *8*, 1004–1018 (1967).
S. N. BISWAS, K. DATTA, R. P. SAXENA, P. K. SRIVASTAVA et V. S. VARMA, *Eigenvalues of λx^{2m} Anharmonic Oscillators*, J. Math. Phys. *14*, 1190–1195 (1973).
E. BOREL (1899), *Mémoire sur les séries divergentes*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. *16*, 9–136 (1899); *Leçons sur les séries divergentes*, 2e édition (Gauthier–Villars 1928), pages 135 ff.
C. BREZINSKI, *A General Extrapolation Algorithm*, Numer. Math. *35*, 175–187 (1980).
H. BURKHARDT (1911), *Ueber den Gebrauch divergenter Reihen in der Zeit von 1750–1860, Math. Ann. 70*, 169–206 (1911), *Trigonometrische Reihen und Integrale*, Enzykl. Math. Wiss. *IIa 12*, 820–1354 (1916).
W. E. CASWELL, *Accurate Energy Levels for the Anharmonic Oscillator and a Summable Series for the Double-Well Potential in Perturbation Theory*, Ann. Phys. *123*, 153–184 (1979).
B. CIULLI, C. POMPONIÙ, I. SABBA-STEFANESCU, *Analytic Extrapolation Techniques and Stability Problems in Dispersion Relation Theory*, Phys. Rep. *17c*, 133–224 (1975).
P. COLLET, J. P. ECKMANN et B. HIRSBRUNNER, *A numerical test of Borel summability in the ε-expansion of the hierarchical model*, Phys. Let. *71B*, 385–386 (1977).
P. DIENES, *The Taylor Series* (Oxford 1931).
R. B. DINGLE, *Asymptotic expansions and converging factors*, Proc. Roy. Soc. London *244A*, 456–490 (1958).
R. B. DINGLE, *Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation* (Academic Press 1973).
G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace Transformation* (Birkhäuser Basel 1955), Vol. 2, chap. 11.
J. P. ECKMANN et H. EPSTEIN, *Borel Summability of the Mass and the S Matrix in ϕ^4 Models*, Comm. Math. Phys. *68*, 245–258 (1979).
D. S. GAUNT et A. J. GUTTMANN, *Asymptotic Analysis of Coefficient*, paru dans Phase Transitions and Critical Phenomena, Vol. 3, édité par Domb et al. (Academic Press 1974), pages 181–243.
TH. GAGNEBIN, *Calcul à multiple précision des coefficients a_n de Bender–Wu, Centre de Calcul Université de Neuchâtel*, avril 1975, non publié. Communication privée.
S. GRAFFI, V. GRECCHI et B. SIMON, *Borel Summability: Application to the Anharmonic Oscillator*, Phys. Let. *32B*, 631–634 (1970).
J. GUNSON et P. H. NG, *Summability of Asymptotic Perturbation Expansions*, Nuovo Cim. *8A*, 63–78 (1972).
G. H. HARDY, *Divergent Series* (Oxford Univ. Press 1949).
W. HERBST et B. SIMON *Stark Effect Revisited*, Phys. Rev. Let. *41*, 67–69 (1978).
F. T. HIOE, DON MACMILLEN et E. W. MONTROLL, *Quantum Theory of Anharmonic Oscillators. II. Energy Levels of Oscillators with $x^{2\alpha}$ Anharmonicity*, J. Math. Phys. *17*, 1320–1337 (1976).
F. T. HIOE, DON MACMILLEN et E. W. MONTROLL, *Quantum Theory of Anharmonic Oscillators*, Phys. Rep. *C43*, 305–335 (1978).
F. T. HIOE et E. W. MONTROLL, *Quantum Theory of Anharmonic Oscillators. I. Energy Levels of Oscillators with Positive Quartic Anharmonicity*, J. Math. Phys. *16*, 1945–1955 (1975).
B. HIRSBRUNNER, *Calcul à haute précision du niveau fondamental de l'oscillateur anharmonique $\lambda \cdot q^4$*, Rapport interne Université de Lausanne, août 1976, non publié.
B. HIRSBRUNNER (1981a), *La sommabilité selon Borel et son application en théorie des champs*, thèse de doctorat Université de Lausanne, avril 1981. 206 pages, 155 références. Non publié. Peut être obtenue sur demande.
B. HIRSBRUNNER (1981b), *Plane Poiseuille Flow: A Numerical Test of Borel Summability*, Rapport Chaire d'Informatique Théorique EPFL-DMA, sept. 1981, non publié. 26 pages. Peut être obtenu sur demande.
B. HIRSBRUNNER (1982), *Calcul numérique de la masse physique dans le modèle $\lambda : \phi^4 :_2$, pour de petites valeurs de λ*, Helv. Phys. Acta —, — (1983).
B. HIRSBRUNNER et J. J. LOEFFEL, *Sur les séries asymptotiques sommables selon Borel*, Helv. Phys. Acta *48*, 546 (1975).
CH. HOUZEL, J. L. OVAERT, P. RAYMOND et J. J. SANSUC, *Philosophie et calcul de l'infini* (Maspero Paris 1976).
W. HUNZIKER, *Schroedinger Operators with Electric or Magnetic Fields*, paru dans Mathematical Problems in Theoretical Physics, Proceedings Lausanne 1979, édité par K. Osterwalder (Springer 1979), pages 25–44.

H. JEFFREYS, *The Remainder in Watson's Lemma*, Proc. Roy. Soc. London, *248A*, 88–92 (1958).

D. I. KAZAKOV, O. V. TARASOV et A. A. VLADIMOROV, *On the Calculation of Critical Exponents by the Methods of Quantum Field Theory*, Sov. Phys. JETP *50*, 521–526 (1979).

N. N. KHURI, *Zeros of the Gell-Mann-Low Function and Borel Summations in Renormalizable Theories*, Phys. Let. *82B*, 83 (1979). Voir aussi: G. PARISI, *Asymptotic Estimates in Perturbation Theory*, paru dans Hadron Structure and Lepton–Hadron Interactions, Cargèse 1977 (Plenum Press 1979) pages 665–85; R. BALIAN, G. PARISI et A. VOROS, *Quartic Oscillator*, paru dans Feynman Path Integrals, Marseille mai 1978 (Springer 1979), pages 337–60, Ed. S. Albeverio; SEZNEC–ZINN-JUSTIN (1979).

J. C. LE GUILLOU et J. ZINN-JUSTIN, *Critical Exponents for the n-Vector Model in Three Dimensions from Field Theory*, Phys. Rev. Lett. *39*, 95–98 (1977).

J. C. LE GUILLOU et J. ZINN-JUSTIN, *Critical Exponents from Field Theory*, Phys. Rev. *B21*, 3976–3998 (1980).

J. J. LOEFFEL (1976), *Transformation of an Asymptotic Series in a Convergent One*, paru dans Workshop on Padé Approximants, Marseille mai 1975, édité par Bessis et al. (Commissariat à l'Energie Atomique 1976).

J. J. LOEFFEL (1982), *Transformation of an Asymptotic Series in a Convergent one*, Helv. Phys. Acta —, — (1983) Je remercie J. J. Loeffel de m'avoir communiqué ses résultats.

J. J. LOEFFEL, A. MARTIN, B. SIMON et A. S. WIGHTMAN, *Padé Approximants and the Anharmonic Oscillator*, Phys. Lett. *30B*, 656–658 (1969).

J. MAGNEN et R. SÉNÉOR, *Expansions and Summability Methods in Constructive Field Theory*, paru dans Mathematical Problems in Theoretical Physics, Proceedings Lausanne 1979, édité par K. Osterwalder (Springer 1979), pages 217–223.

H. MINEUR, *Techniques de calcul numérique*, 605 pages (Dunod 1966).

M. MORI, *Analytic Representations Suitable for Numerical Computation of Some Special Functions*, Numer. Math. *35*, 163–174 (1980).

F. NEVANLINNA (1918), *Zur Theorie der asymptotischen Potenzreihen*, Ann. Acad. Fennicae, *A12*, n° 3 (1918); *On trouve un résumé dans* L. Bieberbach, Jahrbuch Fort. Math. *46*, 1463 (1916–18).

N. E. NÖRLUND, *Leçons sur les séries d'interpolation*, (Gauthier-Villars, Paris 1926).

R. B. OLVER, *Asymptotics and Special Functions* (Academic Press 1974).

G. PARISI, *The Perturbative Expansion and the Infinite Coupling Limit*, Phys. Let, *69B*, 329 (1977).

H. POINCARÉ, Acta Math. *8*, 295–344 (1886).

M. REED et B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. IV (Academic Press 1978).

CH. E. REID, *Lower Bounds for the Energy Levels of Anharmonic Oscillators*, J. Chem. Phys. *43*, S186–S189 (1965).

CH. E. REID, *Transformation of Perturbation Series into Continued Fractions, with Application to an Anharmonic Oscillator*, Int. J. Quantum Chem. *1*, 521–534 (1967).

CH. E. REID, *Energy Eigenvalues and Matrix Elements for the Quartic Oscillator*, J. Mol. Spectr. *36*, 183–191 (1970).

J. L. RICHARDSON et R. BLANKENBECLER, *Moment Recursions and the Schrödinger Problem*, Phys. Rev. *D19*, 496–502 (1979).

R. SEZNEC et J. ZINN-JUSTIN, *Summation of Divergent Series by Order Dependent Mappings: Application to the Anharmonic Oscillator and Critical Exponents in Field Theory*, J. Math. Phys. *20*, 1398–1408 (1979).

B. SIMON, *Coupling Constant Analyticity for the Anharmonic Oscillator*, Ann. Phys. *58*, 76–136 (1970).

B. SIMON, *Large Orders and Summability of Eigenvalue Perturbation Theory: A Mathematical Overview*. To appear in Int. J. Quantum Chemistry (Proc. 1981 Sanibel Workshop).

G. E. SOBELMAN, *Asymptotic Estimates and Borel Resummation for a Doubly Anharmonic Oscillator*, Phys. Rev. *D19*, 3754 (1979).

A. SOKAL (1979), *An Improvement of Watson's Theorem on Borel Summability*, preprint Princeton 08540 (1979). Paru dans J.M.P. *21*, 261–3 (1980).

R. L. SOMORJAI et D. F. HORNIG, *Double-Minimum Potentials in Hydrogen-Bonded Solids*, J. Chem. Phys. *36*, 1980–1987 (1962).

O. V. TARASOV, *The Infinite Coupling Limit and the Asymptotics of Coefficients of the Perturbation Expansion*, Let. Math. Phys. *3*, 143–9 (1979).

E. C. TITCHMARSH, *The Theory of Functions*, Oxford University Press, 2e édition 1939.

H. S. WALL, *Analytic Theory of Continued Fractions* (Van Nostrand 1948).

G. N. WATSON, *A Theory of Asymptotic Series*, Phil. Trans. Royal Soc., *211A*, 279 (1911). Voir aussi: T. Carleman, *Les fonctions quasi-analytiques* (Gauthier-Villars Paris 1926).

G. N. WATSON, *The Transformation of an Asymptotic Series into a Convergent Series of Inverse Factoriels*, Rend. Circ. Mat. Palermo *34*, 41–88 (1912).

S. WEINBERG, *Perturbation Theory of Strong Repulsive Potentials*, Journ. Math. Phys. *5*, 743 (1964).

E. T. WHITTAKER et G. N. WATSON (1927), *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 4e édition (1927 et 1958).

R. O. WILLIAMS, *Computation of Integrals by the Method of Gaussian Quadrature*, Graduate School Computing Center, University of Colorado, 30 July 1969.

J. ZINN-JUSTIN, *Perturbation Series at Large Orders in Quantum Mechanics and Field Theories: Application to the Problem of Resummation*, Phys. Rep. *70*, 109–167 (1981).