

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 47 (1974)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Berechnung der Grundzustandsenergie des 3-Alpha-Teilchen-Systems(<sup>12</sup>C-Kern) mit Hilfe der Faddejev-Gleichungen  
**Autor:** Jaisli, Walter  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-114567>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Berechnung der Grundzustandsenergie des 3-Alpha-Teilchen- Systems ( $^{12}\text{C}$ -Kern) mit Hilfe der Faddejev-Gleichungen

von Walter Jaisli<sup>1</sup>

Institut für Theoretische Physik der Universität Schönberggasse 9, CH-8001 Zürich

(21. I. 74)

*Abstract.* The quantum mechanical three-body theory is applied to the three-alpha cluster model of  $^{12}\text{C}$  to explain the experimental ground-state energy. A detailed comparison of the results with the work of other authors is presented. It turns out, that the cluster model does not describe the physical reality of the  $^{12}\text{C}$  ground-state adequately.

## 1. Einleitung

Die Arbeiten von Faddejev [1] und Lovelace [2] zum quantenmechanischen Dreikörperproblem sind bisher insbesondere auf das Drei-Nukleon System und das Drei-Alpha System angewandt worden. Während im ersten Falle unter anderem die Berechnung der Bindungsenergie des  $^3\text{H}$  aus der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung möglich sein sollte, handelt es sich im zweiten Falle hauptsächlich um die Ermittlung der Bindungsenergie des  $^{12}\text{C}$  aus der Wechselwirkung zweier Alpha-Teilchen. Leider ergeben sich in beiden physikalischen Systemen Schwierigkeiten: Im Drei-Nukleon System hat man algebraische Komplikationen wegen des Spins der beteiligten Nukleonen; im Drei-Alpha System dagegen hat man es zwar mit identischen spinlosen Teilchen zu tun; sie sind jedoch geladen und man hat die langreichweite Coulomb-abstoßung zu berücksichtigen.

In der vorliegenden Arbeit soll das Drei-Alpha System ausführlich untersucht werden. Auszugehen ist dabei von der durch Benn et al. [3] genau gemessenen  $^8\text{Be}$ -Resonanz des Zwei-Alpha Systems, sowie den übrigen Streudaten zweier Alphateilchen aneinander (s. z.B. [4]). Benn et al. [5] haben aus diesen Daten ein zuverlässiges phänomenologisches Alpha-Alpha Potential berechnet. Die Frage lautet also: Reichen die Daten der elastischen Alpha-Alpha Streuung aus, um die gemessene Bindungsenergie  $E_{\text{exp}} = 7,3$  MeV des  $^{12}\text{C}$  Grundzustandes gegenüber drei  $^4\text{He}$  Kernen zu erklären? Anders ausgedrückt: Ist das Clustermodell, welches das  $^{12}\text{C}$  als aus drei strukturlosen  $^4\text{He}$  Kernen bestehend beschreibt, eine gute Näherung für die Berechnung der Grundzustandsenergie?

In die Faddejev-Gleichungen geht das Zweiteilchenpotential nicht direkt ein, sondern nur die Off-Shell Streumatrix.<sup>2)</sup> Diese ist durch die Zweiteilchenstreuexperimente nur *auf* der Energieschale (On-Shell) bestimmt. Um die Off-Shell Fortsetzung zu

<sup>1)</sup> Jetzt: Fachsektion Physik, Universität, D28 Bremen.

<sup>2)</sup> Relativistische Effekte und eventuelle Dreiteilchenkräfte werden in der vorliegenden Arbeit durchgehend vernachlässigt.

ermitteln, gibt es zwei Wege: Entweder nimmt man ein die Zweiteilchenstreuung gut beschreibendes Potential und berechnet damit die Off-Shell Streumatrix; oder man stellt das allgemeine analytische Verhalten der Off-Shell Streumatrix durch einen Näherungsausdruck dar, dessen Parameter durch die Forderung bestimmt sind, daß die Streuexperimente gut beschrieben werden. Mit dem Resultat einer der beiden Methoden löst man dann die Faddejev-Gleichungen für das Dreikörperproblem.

Im folgenden wird stets vorausgesetzt, daß nur der Zustand mit relativem Bahndrehimpuls  $l = 0$  (s-Welle) zur Zweiteilchenstreuung wesentlich beiträgt. Dies ist bei identischen spinlosen Bosonen deshalb eine gute Näherung, weil sowieso nur geradzahlige Drehimpulse vorkommen dürfen. Die Faddejev-Gleichungen für einen gebundenen Zustand des aus drei identischen spinlosen Bosonen bestehenden Systems können dann als Integralgleichung in zwei Variablen geschrieben werden. Da dieses Problem nur mit extrem aufwendigen Methoden gelöst werden kann (s. z.B. [6]) ist es zweckmäßig, eine weitere Vereinfachung zu machen: Man entwickelt die Zweiteilchenstreumatrix in eine Summe von separablen Termen und nimmt an, daß von der Entwicklung nur die ersten Terme einen wesentlichen Beitrag leisten. Berücksichtigt man nur einen Term, d.h. legt man ein separables Potential zugrunde (s. z.B. [7]), kann die Faddejev-Gleichung als Integralgleichung in einer Variablen geschrieben werden, die überdies vom Fredholmschen Typ ist und mit numerischen Standardmethoden gelöst werden kann. Berücksichtigt man mehrere Glieder der Entwicklung, erhält man ein gekoppeltes System von Integralgleichungen, dessen Lösung ebenfalls keine prinzipiellen Schwierigkeiten bietet.

Lovelace [2] hat gezeigt, daß die Verwendung separabler Potentiale oder Streuoperatoren in der Kernphysik gerechtfertigt ist, wenn das Zweikörpersystem durch einen gebundenen Zustand oder eine enge niederenergetische Resonanz beherrscht wird. Diese Bedingung ist im  $\alpha$ - $\alpha$ -System mit der  ${}^8\text{Be}$ -Resonanz näherungsweise erfüllt.

Harrington [8] hat die erwähnte Integralgleichung mit einer Zweiteilchenstreuamplitude gelöst, die einem separablen Potential vom Yamaguchi-Typ entspricht. Die Parameter des Potentials wurden so angepaßt, daß Streulänge und effective-range der  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung richtig wiedergegeben werden. Dabei wurde die genannte Coulombabstoßung in der  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuphase abgespalten. Als Resultat gibt Harrington eine  ${}^{12}\text{C}$ -Bindungsenergie von 12,8 MeV an. Die Coulombabstoßung im  ${}^{12}\text{C}$  schätzt er nachträglich klassisch auf -5 MeV ab, so daß die mit  $E_{\text{exp}} = 7,3$  MeV zu vergleichende Zahl 7,8 MeV ist. Einen angeregten Zustand des  ${}^{12}\text{C}$  fand Harrington nicht. Die Grundzustandsenergie würde also durch ein  $3\alpha$ -Teilchenmodell befriedigend wiedergegeben.

Leung und Park [9] haben mit einer Wellenfunktionsmethode u.a. auch für ein Yamaguchi-Potential das  ${}^{12}\text{C}$  behandelt. Sie zeigten allgemein, daß ihre Methode mit der von [8] identisch ist. Sie erhalten die gleiche Grundzustandsenergie für  ${}^{12}\text{C}$  wie in [8], finden aber zusätzlich noch einen angeregten Zustand. Die Diskrepanz führen sie auf Ungenauigkeiten in der numerischen Rechnung zurück. Die gute Übereinstimmung des Resultates von [8] und [9] für die Grundzustandsenergie des  ${}^{12}\text{C}$  mit dem experimentellen Wert beruht darauf, daß der Ansatz für das verwendete Yamaguchi-Potential nur den anziehenden Teil der  $\alpha$ - $\alpha$  Wechselwirkung, nicht aber den abstoßenden Hard-core berücksichtigt. Ein in dieser Hinsicht verbesserter Ansatz [10] für das Potential führt dann auch zu einer theoretischen Grundzustandsenergie von 1,48 MeV im Gegensatz zum Experiment.

Einen anderen Weg haben Ball et al. [11] und Fulco et al. [12] beschritten: Mit Hilfe eines Potentials berechneten sie die Off-Shell  $T$ -Matrix und entwickelten das Resultat in eine Summe separabler Terme nach Lippmann-Schwinger Eigenfunktionen

(s. Weinberg [13]). Lösung der Faddejev-Gleichung ergibt dann eine Bindungsenergie für  $^{12}\text{C}$  von *ca.* 2,2 MeV. Fuda [14, 15] hat die Weinbergentwicklung auch auf Potentiale mit einem Hard-core angewandt, ohne jedoch ein konkretes Beispiel durchzurechnen. Da nicht das Potential direkt, sondern nur die Off-Shell  $T$ -Matrix in die Faddejev-Gleichung eingeht, bietet der Hard-core keine grundsätzlichen Schwierigkeiten.

Ohne den Umweg über ein Potential hat Duck [16] direkt eine spezielle Form für die der  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung angepaßte Off-Shell  $T$ -Matrix in die Faddejev-Gleichung eingesetzt. Damit findet er *keine* Bindung für den  $^{12}\text{C}$ -Kern.

In Anbetracht dieser Situation ist es gerechtfertigt, die bereits vorliegenden numerischen Untersuchungen zur Bindungsenergie des  $^{12}\text{C}$  mit Hilfe der Faddejev-Gleichungen zu ergänzen und zu vervollständigen. Dabei soll insbesondere das Problem der Coulombabstoßung zwischen den  $\alpha$ -Teilchen konsequenter als bisher berücksichtigt werden. Das geschieht dadurch, daß bei einem großen Abschneideradius von *ca.*  $12 \cdot 10^{-13}$  cm die  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuphase auf endliche Reichweite des Potentials umgerechnet wird: das äußere Ende des Coulombpotentials wird abgeschnitten. Dieses Verfahren wird in Abschnitt 2 kurz erläutert und der Einfluß des Abschneidens auf die  $^8\text{Be}$  Resonanzparameter angegeben. In Abschnitt 3 wird der Faddejev-Formalismus für die Zwecke dieser Arbeit kurz beschrieben. Abschnitt 4 behandelt die Lösung der Faddejev-Gleichungen für verschiedene lokale Potentiale mit Hilfe der Weinberg-Entwicklung. Die ausführlichsten Rechnungen werden mit dem Benn-Scharf Potential [5] durchgeführt. Damit wird insbesondere der Hard-core Einfluß auf die Bindungsenergie des  $^{12}\text{C}$  zum ersten Mal genau ermittelt. Zu Vergleichszwecken werden auch das Haefner-Potential (s. z.B. [17]) sowie das in [12] verwendete Darriulat-Potential herangezogen. Beide besitzen einen Soft-core. Dies gibt Anlaß zu einer Kritik der Resultate von [12]. In Abschnitt 5 wird die Faddejev-Gleichung mit einer Reihenentwicklung für die Off-Shell  $T$ -Matrix gelöst, welche nur die  $\alpha$ - $\alpha$  Streuphase sowie die analytischen Eigenschaften der Off-Shell Amplitude zur Voraussetzung hat; es wird also kein Potential benutzt. Dies ist eine Verbesserung und Verallgemeinerung der von Wong und Zambotti [18] angegebenen Methode. In Abschnitt 6 werden die Resultate diskutiert. Die angewandten numerischen Methoden werden in einem Anhang kurz erläutert.

Als wesentliches Ergebnis der Arbeit stellt sich heraus, daß der Grundzustand des  $^{12}\text{C}$  *nicht* durch die Zweiteilchenwechselwirkung von drei strukturlosen  $\alpha$ -Teilchen beschrieben werden kann. Die aus den elastischen  $\alpha$ - $\alpha$  Streudaten folgende Bindungsenergie liegt für alle behandelten derartigen Modelle zwischen 0 MeV und 1 MeV gegenüber einem gemessenen Wert  $E_{\text{exp}} = 7,3$  MeV. Dieses Ergebnis stimmt mit den Rechnungen überein, welche die Grundzustandsenergie des  $^{12}\text{C}$  mit Hilfe von Variationsmethoden ermittelten [19, 20, 21].

## 2. Die $\alpha$ - $\alpha$ Streuphase

### 2.1. Numerik

Wir wollen die numerischen Werte der  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuphase (es bezieht sich alles auf die s-Welle, d.h.  $l = 0$ ) kurz erläutern und den Einfluß der Umrechnung auf endliche Reichweite des Coulombpotentials diskutieren. Dabei wird als Längeneinheit  $1 \text{ F} = 10^{-13} \text{ cm}$  genommen und die anderen Einheiten werden so gewählt, daß

$$\hbar = M_\alpha = 1$$

( $M_\alpha$  = Masse des  $\alpha$ -Teilchens). Die Energieeinheit ist dann 10,42 MeV.

Nach [3] und [4] ist die  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuphase insbesondere im niederenergetischen Bereich gut bekannt. Rasche [22] hat gezeigt, daß sie unterhalb 1 MeV durch eine Effective-range-Entwicklung mit Einschluß des Shape-Parameters gut wiedergegeben werden kann. Bezeichnet man den Coulombparameter mit

$$\eta = \frac{2e^2}{k} = \frac{0,27605}{k} \quad (2.1)$$

und definiert

$$h(\eta) = \operatorname{Re} \frac{\Gamma'(-i\eta)}{\Gamma(-i\eta)} - \log \eta \quad (2.2)$$

so gilt für die Phase  $\delta_c(k)$  ( $k$  = Wellenzahl der Relativbewegung):

$$h(\eta) + \frac{\pi \cdot \operatorname{ctg} \delta_c(k)}{\exp(2\pi\eta) - 1} = A + B \cdot k^2 + C \cdot k^4. \quad (2.3)$$

Die beste Annäherung an die gemessene Phase erreicht man mit:

$$A = 0,778 \cdot 10^{-3}$$

$$B = 1,012 \text{ F}^2$$

$$C = 0,8 \text{ F}^4$$

Die davon abweichenden Werte in [22] enthalten numerische Fehler.

Oberhalb 1 MeV ist die Effective-range-Entwicklung nicht mehr brauchbar. Die Meßpunkte liegen hier aber so dicht, daß man sie z.B. durch eine geglättete Kurve verbinden kann (s. [5], Fig. 2).  $\delta_c$  ist die durch die Kernwechselwirkung relativ zu den Coulombwellen entstehende Phase. Da die im folgenden Abschnitt benutzten Formeln auf der Annahme eines endlichen Zweiteilchenpotentials beruhen, schneiden wir das Coulombpotential bei einer endlichen Reichweite  $R$  ab. Das ist folgendermaßen zu verstehen: Wir nehmen an, daß die Kernwechselwirkung zwischen den beiden  $\alpha$ -Teilchen eine Reichweite von weniger als 5 F hat. Für größere Abstände wirkt dann nur noch das Coulombpotential. Wir berechnen unter dieser Voraussetzung die Phase  $\delta_0(k; R)$  die bei gleichem Kernpotential, jedoch mit einem elektrostatischen Potential endlicher Reichweite  $R$  ( $> 5$  F) relativ zu freien Wellen entsteht.

Das elektrostatische Potential für Abstände  $< R$  soll mit dem Coulombpotential übereinstimmen. Die Abhängigkeit der  $^{12}\text{C}$ -Bindungsenergie von der Wahl des Parameters  $R$  muß natürlich untersucht werden.

Eine wohlbekannte elementare Rechnung (s. z.B. [5]) liefert:

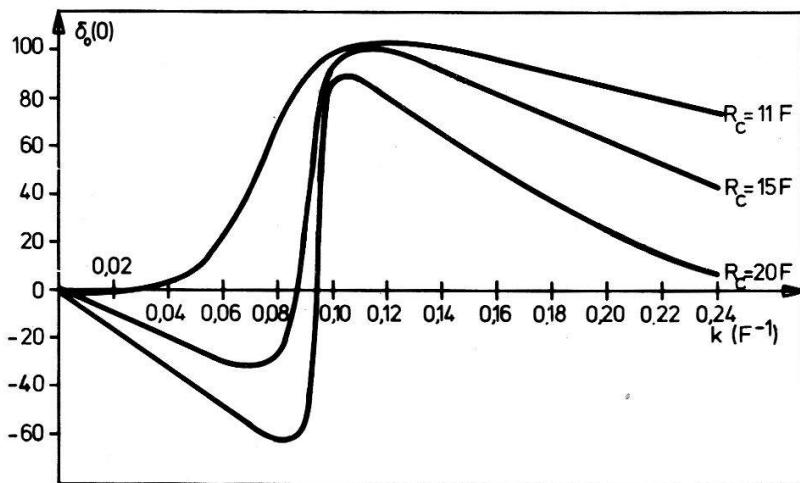
$$\operatorname{ctg} \delta_0(k; R) = \frac{1 + A(k; R) \operatorname{ctg}(kR)}{\operatorname{ctg}(kR) - A(k; R)} \quad (2.4)$$

wobei

$$A(k; R) = \frac{G_0(\eta; kR) + F_0(\eta; kR) \operatorname{ctg} \delta_c(k)}{G_0(\eta; kR) + F_0(\eta; kR) \operatorname{ctg} \delta_c(k)} \quad (2.5)$$

$G_0(\eta; \rho)$  bzw.  $F_0(\eta; \rho)$  sind die irreguläre bzw. reguläre Coulombwellenfunktion für die s-Welle. Der Punkt bedeutet Ableitung nach dem Argument  $\rho$ .

Figur 1 zeigt, wie sich die Streuphase  $\delta_0(k; R)$  als Funktion des Parameters  $R$  verhält. Offensichtlich hängen auch die Parameter der  $^8\text{Be}$ -Resonanz von  $R$  ab. Bezeichnen wir die zur Resonanz gehörige Wellenzahl mit  $k_c$  und die Resonanzbreite



Figur 1  
Totale Streuphase  $\delta_0(k, R)$ .

mit  $\Gamma_c$  und mit  $k_0(R)$  und  $\Gamma_0(R)$  die dem abgeschnittenen Coulombpotential entsprechenden Werte, so wird (s. z.B. [5]):

$$\lim_{R \rightarrow \infty} k_0^2(R) = k_c^2 = (0,8824 \pm 0,0005) \cdot 10^{-2} \text{ F}^{-2} \quad (2.6)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Gamma_0(R) = \Gamma_c = (0,65 \pm 0,16) \cdot 10^{-6} \text{ F}^{-2} \quad (2.7)$$

$$\Gamma_0(R) = \frac{\Gamma_c}{\dot{F}(\eta_c, k_c R) + F^2(\eta_c, k_c R)} \quad (2.8)$$

$$k_0^2(R) = k_c^2 + \left\{ \frac{\dot{G}(\eta_c, k_c R)}{\dot{F}(\eta_c, k_c R)} + \frac{F(\eta_c, k_c R)}{\dot{F}(\eta_c, k_c R)[\dot{F}^2(\eta_c, k_c R) + F^2(\eta_c, k_c R)]} \right\} \cdot \frac{\Gamma_c}{2} \quad (2.9)$$

Für  $k > 1,1 \text{ F}^{-1}$  geht  $\delta_0(k; R)$  in die reine Hard-core-Phase über:

$$\delta_0(k, R) \simeq -kR_{\text{HC}} \quad (2.10)$$

$$R_{\text{HC}} \approx 1,2 \text{ F}$$

Im folgenden arbeiten wir mit der Phase

$$\delta(k, R) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_0(k, R) + kR_{\text{HC}} \quad (2.11)$$

Dies ist deshalb notwendig, weil in den folgenden Abschnitten Formeln benutzt werden, die nur gelten, wenn die Streuphase als Funktion der Wellenzahl  $k$  im Unendlichen beschränkt bleibt. Wegen der Subtraktion der reinen Hard-core-Phase von  $\delta_0(k; R)$  muß der Einfluß des Hard-core auf die Bindungsenergie gesondert behandelt werden (s. Abschnitt 4).

Die durch die Subtraktion der Hard-core-Phase hervorgerufene Änderung der Resonanzparameter  $k_c$  und  $\Gamma_c$  ist so klein, daß sie numerisch nicht ins Gewicht fällt.

Die Parametrisierung (2.3) in Verbindung mit (2.4), (2.5) und (2.11) wird für  $0,11 \text{ F}^{-1} < k < 0,32 \text{ F}^{-1}$  benutzt. In [5] wurde gezeigt, daß bei sehr kleinen Energien die folgende Darstellung zweckmäßiger ist:

$$\delta(k, R) = -kR + \arctg \frac{F_0(\eta, kR)}{\dot{F}_0(\eta, kR)} + \arctg \frac{\Gamma_0 \cdot \frac{k}{2 k_c}}{k_0^2 - k^2} \quad (2.12)$$

(2.12) hat den Vorteil, daß die beiden ersten Terme allein durch das abgeschnittene Coulombpotential verursacht werden, während der dritte von der zusätzlichen nuclearen Wechselwirkung herrührt.

Tabelle 1  
Resonanzparameter nach Abschneiden  
der Coulomb-Wechselwirkung

$R [\text{F}]$	$k_0^2 [10^{-3} \text{ F}^{-2}]$	$\Gamma_0 [10^{-3} \text{ F}^{-2}]$
11	5,907	6,856
12	6,956	4,785
13	7,608	3,393
14	8,020	2,441
15	8,287	1,780
16	8,461	1,313
17	8,577	0,980
18	8,654	0,739
19	8,707	0,562

Tabelle 1 zeigt die numerische Änderung der Resonanzparameter mit  $R$ . Das Abschneiden des Coulombpotentials hat zur Folge, daß die Resonanzenergie kleiner und die Resonanz breiter wird. Will man die Dominanz der Resonanz erhalten, darf man  $R$  also nicht zu klein wählen.

## 2.2. Bemerkungen zur Off-Shell-Amplitude

In die Faddejev-Gleichungen geht die Off-Shell-Zweiteilchenstreumatrix  $\langle \vec{q} | T(z) | \vec{q}' \rangle$  ein. Dafür gilt die Partialwellenentwicklung

$$\langle \vec{q} | T(z) | \vec{q}' \rangle = t(q, q'; z) + \sum_{l=2}^{\infty} (2l+1) t_l(q, q'; z) P_l(\hat{q} \cdot \hat{q}') \quad (2.13)$$

Da wir nur die  $s$ -Welle berücksichtigen wollen, lassen wir in (2.13) die höheren Terme weg:

$$\langle \vec{q} | T(z) | \vec{q}' \rangle = t(q, q', z) \quad (2.14)$$

Durch die aus dem Experiment bekannte Phase  $\delta(k; R)$  wird nur die On-Shell Amplitude bestimmt:

$$t(k, k; k^2 + i\epsilon) = -\frac{4\pi}{k} e^{i\delta} \sin \delta \quad (2.15)$$

Im übrigen verweisen wir bezüglich theoretischer Einzelheiten auf [22]. Das Problem der Ermittlung von (2.14) aus dem direkt bekannten (2.15) wird uns im folgenden immer wieder beschäftigen.

### 3. Die Faddejev-Gleichung

Die Faddejev-Gleichung für einen gebundenen Zustand aus drei identischen Bosonen mit Spin 0 lautet im Schwerpunktssystem (s. z.B. [22]).

$$\Psi(\vec{q}, \vec{p}; s) = \frac{2}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{s - q^2 - \frac{3}{4}p^2} \int d^3 k \langle \vec{q} | T(s - \frac{3}{4}p^2) | \vec{k} + \frac{1}{2}\vec{p} \rangle \Psi(\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{k}, \vec{k}; s) \quad (3.1)$$

Dabei ist  $\langle \vec{q} | T(s) | \vec{q}' \rangle$  die in (2.13) definierte Off-Shell-Streuamplitude. Gesucht sind die negativen reellen Werte  $s$  für welche (3.1) Lösungen hat. Diese  $s$ -Werte sind die Energien der gebundenen Zuständen des Dreiteilchensystems.  $\Psi(\vec{q}, \vec{p}; s)$  hängt eng mit der Wellenfunktion des Dreiteilchensystems zusammen [22]. Wir brauchen jedoch darauf hier nicht weiter einzugehen.

Wir beschränken uns in der Partialwellenzerlegung der Off-Shell-Streuamplitude auf den Zustand mit Drehimpuls 0 (s. Einleitung). Es ist also (s. auch 2.14)

$$\langle \vec{q} | T(s - \frac{3}{4}p^2) | \vec{k} + \frac{1}{2}\vec{p} \rangle = t(q, |\vec{k} + \frac{1}{2}\vec{p}|; s - \frac{3}{4}p^2) \quad (3.2)$$

Dann ist es konsequent, sich bei der Suche nach gebundenen Zuständen des Dreiteilchensystems auf solche Konfigurationen zu beschränken, in denen der relative Bahndrehimpuls von zwei Teilchen sowie der Drehimpuls der Relativbewegung des dritten Teilchens bezüglich des Schwerpunktes der beiden andern Teilchen verschwindet. Daraus folgt, daß der Gesamtdrehimpuls ebenfalls verschwindet (s. z.B. [22]).  $\Psi$  hängt dann nur noch von den Beträgen der Impulse ab:

$$\Psi(\vec{q}, \vec{p}; s) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(q, p; s) \quad (3.3)$$

Einsetzen von (3.3) und (3.2) in (3.1) gibt mit einer elementaren Variablentransformation:

$$\psi(q, p; s) = \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{p} \int_0^\infty k dk \int_{|p-\frac{1}{2}k|}^{p+\frac{1}{2}k} y dy \frac{t(q, \sqrt{y^2 + \frac{3}{4}(k^2 - p^2)}; s - \frac{3}{4}p^2)}{s - (y^2 + \frac{3}{4}k^2)} \cdot \psi(y, k; s) \quad (3.4)$$

Gleichung (3.4) ist eine Integralgleichung in zwei Variablen, welche nur mit großem numerischen Aufwand und für ein einfaches Potential gelöst wurde [6]. Man benutzt deshalb zweckmäßigerweise die Tatsache, daß nach Meetz [23] und Weinberg [13] die Funktion  $t(q, p; s)$  für  $s < 0$  in eine Summe separabler Terme entwickelt werden kann:

$$t(q, p; s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(s) g_n(q; s) \cdot g_n(p; s) \quad (3.5)$$

Für ein separables Zweiteilchen-Potential bleibt von der Summe (3.5) nur der erste Term übrig. Dasselbe gilt, wie Lovelace [2] gezeigt hat, wenn die Streuphase nur in der

Nähe einer Resonanz wichtig ist. Diese Tatsache hat verschiedene Autoren, insbesondere Harrington veranlaßt, das  $^{12}\text{C}$  versuchsweise mit einem separablen Yamaguchi-Potential zu lösen. Dies ist aber nicht gerechtfertigt; denn obschon die s-Welle der  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung von der  $^8\text{Be}$ -Resonanz bei ca. 92 keV beherrscht wird, ist doch der genaue Verlauf der Streuphase bei höheren Energien für die Berechnung der Bindungsenergie des  $^{12}\text{C}$  wichtig. Insbesondere wird durch Harringtons Ansatz der Hard-core überhaupt nicht berücksichtigt. Andererseits besteht jedoch die berechtigte Hoffnung, daß die Reihe (3.5) rasch konvergiert, so daß die Berücksichtigung eines zweiten Summanden schon eine bedeutend bessere Näherung ist.

Entsprechend (3.5) macht man für  $\psi(q, p; s)$  den Ansatz:

$$\psi(q, p; s) = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(s - \frac{3}{4}p^2) g_n(q; s - \frac{3}{4}p^2) f_n(p; s) \quad (3.6)$$

Mit (3.5) und (3.6) wird (3.4) ein gekoppeltes System von Integralgleichungen in einer Variablen für die Funktionen  $f_n(p)$

$$f_n(p; s) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n'=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dk K_{nn'}(p, k; s) \cdot f_{n'}(k; s) \quad (3.7)$$

mit

$$K_{nn'}(p, k; s) = \int_{|p-\frac{1}{2}k|}^{p+\frac{1}{2}k} y dy \frac{g_n(\sqrt{y^2 + \frac{3}{4}(k^2 - p^2)}; s - \frac{3}{4}p^2) \cdot \tau_{n'}(s - \frac{3}{4}k^2) \cdot g_{n'}(y; s - \frac{3}{4}k^2)}{s - (y^2 + \frac{3}{4}k^2)} \quad (3.8)$$

Die Gleichungen (3.7) und (3.8) bilden die Grundlage für alle weiteren Rechnungen. Die Information aus den  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuexperimenten geht in die Funktionen  $\tau_n(s)$  und  $g_n(p; s)$  ein. Dabei sind nun zwei verschiedene Wege möglich:

- 1) Man nimmt für die  $\alpha$ - $\alpha$ -Wechselwirkung ein lokales Potential an, welches die Streudaten möglichst gut wiedergibt. Dadurch ist die Off-Shell-Streuamplitude bestimmt und damit auch die Entwicklung (3.8). Diese Methode wird in Abschnitt 4 benutzt.
- 2) Man sucht aus der bekannten On-Shell-Streuphase direkt eine Off-Shell-Entwicklung (3.8). Diesen Weg behandelt Abschnitt 5.

#### 4. Benutzung vorgegebener, lokaler Potentiale

Die in diesem Abschnitt angewandten Methoden erweitern und verbessern die Arbeiten [11], [12], [14] und [15]. Soweit sich die Ausführungen auf die  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung beziehen, beschränken wir uns stets auf die s-Welle ( $l = 0$ ).

##### 4.1. Die verwendeten Potentiale

Es wurden das Haefner-Potential, das Darriulat-Potential, sowie das Benn-Scharf-Potential benutzt. In unserer Rechnung müssen diese Potentiale natürlich bei  $r = R$  abgeschnitten werden.

Das Haefner-Potential  $V_H(r)$  wird von Experimentalphysikern bevorzugt, weil es sich teilweise analytisch behandeln lässt.

$$\begin{aligned} V_H(r) &= \frac{10,42}{r^2} g^2 - D \quad r \leq r_0 \\ V_H(r) &= \frac{4e^2}{r} \quad r > r_0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die gemessene s-Wellen-Resonanz lässt sich durch folgende Wahl der Parameter wiedergeben:

$$g^2 = 30 \quad D = 27,08 \text{ MeV} \quad r_0 = 4,5 \text{ F} \quad (4.2)$$

Das in [12] benutzte Darriulat-Potential  $V_D(r)$  hat folgende Form

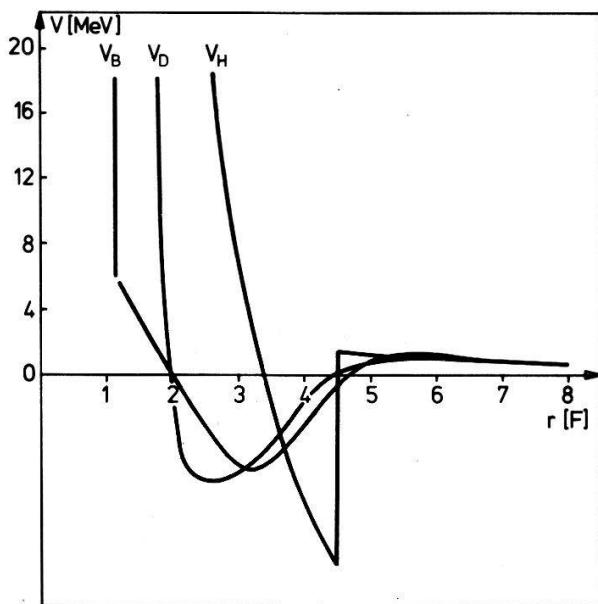
$$V_D = U_1 \{1 + \exp([r - r_1]/a_1)\}^{-1} - U_2 \{1 + \exp([r - r_2]/a_2)\}^{-1} + \frac{4e^2}{r} \quad (4.3)$$

Die gemessene  $\alpha-\alpha$ -Streuung lässt sich durch folgende Wahl der Parameter wiedergeben.

$$\begin{aligned} U_1 &= 150 \text{ MeV} \quad a_1 = 0,1 \text{ F} \quad r_1 = 1,65 \text{ F} \\ U_2 &= 9,2 \text{ MeV} \quad a_2 = 0,4 \text{ F} \quad r_2 = 3,72 \text{ F} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Das von Benn und Scharf [5] durch Lösen des 'Umkehrproblems' berechnete phänomenologische Potential  $V_B(r)$  lässt sich nicht in geschlossener Form angeben. Da es ohne Rückgriff auf einen willkürlichen Ansatz zustande kommt, halten wir es für das verlässlichste Potential. Es zeigt einen Hard-core, welcher den anderen Potentialen fehlt. Den Einfluß des Hard-core werden wir ausführlich untersuchen.

Figur 2 gibt eine Vorstellung vom Verlauf der Potentiale mit der angegebenen Wahl der Parameter.



Figur 2  
Haefner-Potential ( $V_H$ ), Darriulat-Potential ( $V_D$ ) und Benn-Scharf-Potential ( $V_B$ ).

#### 4.2. Entwicklung von $t(p, q; s)$ nach Sturm'schen Funktionen für Potentiale ohne Hard-core

Bei gegebenem Zweiteilchenpotential  $V(r)$  definiert man

$$V(p, p') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4\pi}{pp'} \int_0^\infty dr V(r) \sin(pr) \sin(p'r) \quad (4.5)$$

dann gilt für  $t(p, q; s)$  folgende Integralgleichung (s. z.B. [22]).

$$t(p, q; s) = V(p, q) - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp' \frac{p'^2 V(p, p') t(p', q; s)}{p'^2 - s - i\epsilon} \quad (4.6)$$

Für  $s < 0$  und Potentiale endlicher Reichweite ohne Hard-core ist der Kern der Integralgleichung (4.6) vom Hilbert-Schmidt-Typ. Man kann dann  $t(p, q; s)$  in eine Summe von separablen Termen entwickeln. Das Resultat ist (s. z.B. [22]).

$$t(p, q; s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\lambda_n(s)}{1 - \lambda_n(s)} \varphi_n(p; s) \varphi_n(q; s) \quad (4.7)$$

In (4.7) sind die Eigenfunktionen der homogenen Lippmann-Schwinger-Gleichung und  $\lambda_n$  die zugehörigen Eigenwerte:

$$\lambda_n(s) \varphi_n(p; s) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp' \frac{p'^2 V(p, p')}{p'^2 - s} \cdot \varphi_n(p'; s) \quad (4.8)$$

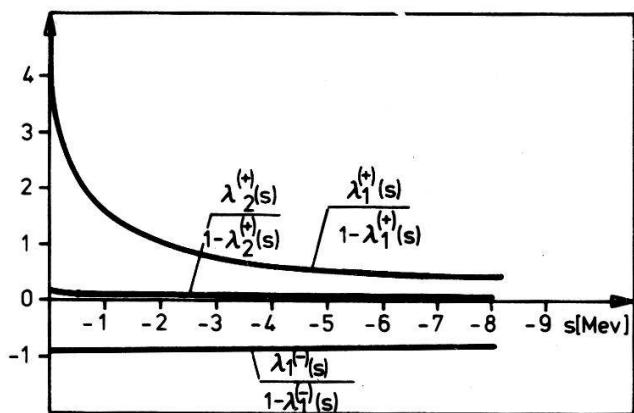
und es wurde folgende Normierung gewählt.

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp' \frac{p'^2}{p'^2 - s} \varphi_n(p'; s) \varphi_m(p'; s) = \delta_{mn} \quad (4.9)$$

Mit (4.7) hat man die in (3.5) gegebene Entwicklung explizit, wenn ein lokales Potential vorgegeben ist.

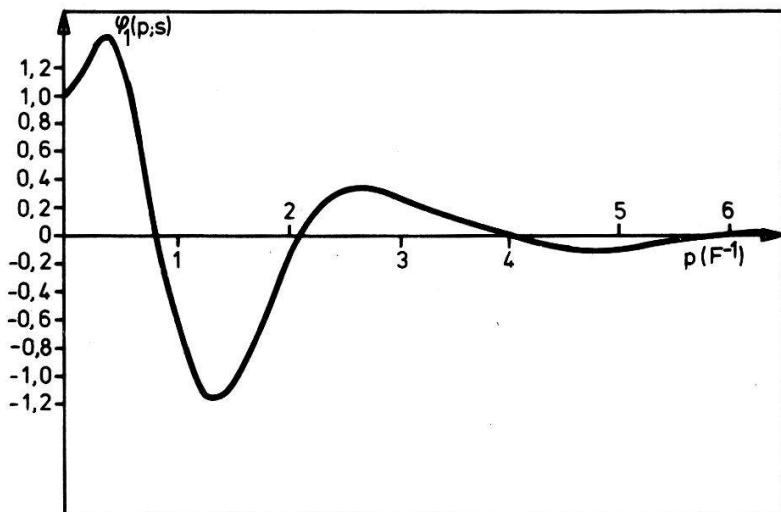
Für rein anziehende Potentiale ist  $\lambda_n(s) > 0$ . Der Punkt 0 tritt dabei als Häufungspunkt auf. In unserem Fall, d.h. keine gebundenen Zweiteilchenzustände, ist ferner  $\lambda_n(s) < 1$  und absteigende Werte von  $\lambda_n(s)$  liefern in der Entwicklung (4.7) offensichtlich immer kleinere Beiträge. In [11] wurde gezeigt, daß für übliche Potentiale bereits 2 bis 3 Terme eine gute Näherung liefern.

Hat das Potential einen abstoßenden Teil, kommen auch negative Eigenwerte vor. Eine Entwicklung nach absteigenden Werten von  $\lambda_n(s)$  wird dann nicht gut sein, da dadurch gerade die großen negativen Eigenwerte vernachlässigt würden. Der in [12] angegebene Wert für die mithilfe von  $V_D$  berechnete Bindungsenergie des  $^{12}\text{C}$  ist deshalb unrichtig, da in der Rechnung gerade die großen negativen Beiträge in der Entwicklung verfehlt wurden.



Figur 3

$\frac{1 - \lambda_n^{(-)}(s)}{\lambda_n^{(+)}(s)}$  für das Darriulat-Potential.



Figur 4

Eigenfunktion  $\varphi_1(p; s)$ ,  $s = -1,2$  MeV,  $R = 11,0$  F, Darriulat-Potential.

Um die Trennung in positive und negative Eigenwerte  $\lambda_n(s)$  explizit zu machen, schreiben wir (4.7) in folgender Form:

$$t(p, q; s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\lambda_n^{(+)}(s)}{1 - \lambda_n^{(+)}(s)} \varphi_n^{(+)}(p; s) \varphi_n^{(+)}(q; s) + \frac{\lambda_n^{(-)}(s)}{1 + \lambda_n^{(-)}(s)} \varphi_n^{(-)}(p; s) \varphi_n^{(-)}(q; s) \right] \quad (4.10)$$

$$\lambda_n^{(-)}(s) < 0 \leq \lambda_n^{(+)} < 1 \quad (4.11)$$

Die Figuren 3 und 4 zeigen typische numerische Ergebnisse für die Eigenwerte und Eigenfunktionen der homogenen Lippmann-Schwinger-Gleichung für  $V_D$ .

#### 4.3. Berücksichtigung des Hard-core

Wie bereits (4.5) zeigt, gilt die Herleitung von (4.10) nur für Potentiale  $V(r)$ , die für  $r \rightarrow 0$  nicht zu schnell wachsen. Für Potentiale mit Hard-core müssen deshalb die

Gleichungen modifiziert werden. Auch für Potentiale mit Hard-core existiert die Streumatrix und kann in eine Summe separabler Terme entwickelt werden. Allerdings wird die numerische Behandlung ganz erheblich kompliziert. Im folgenden geben wir die Ergebnisse von Fuda [14], [15] an, welche für numerische Rechnungen besonders geeignet sind.

Sei  $V_{\text{HC}}(r)$  ein ‘reines Hard-core Potential’, d.h.

$$\begin{aligned} V_{\text{HC}}(r) &= \infty & r \leq R_{\text{HC}} \\ V_{\text{HC}}(r) &= 0 & r > R_{\text{HC}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Den zugehörigen Anteil der  $s$ -Welle an der Streumatrix (s. z.B. (2.14)) bezeichnen wir mit  $t_{\text{HC}}(\rho, q; s)$ . Nach [15] läßt sich  $t_{\text{HC}}$  in folgende Summe separabler Terme entwickeln (n.b.  $s < 0$ !)

$$\begin{aligned} t_{\text{HC}}(\rho, q; s) &= -8\pi \frac{\sqrt{|s|} \exp(\sqrt{|s|} R_{\text{HC}})}{\exp(-\sqrt{|s|} R_{\text{HC}}) - \exp(\sqrt{|s|} R_{\text{HC}})} \frac{\sin(\rho \cdot R_{\text{HC}})}{\rho} \frac{\sin(q \cdot R_{\text{HC}})}{q} \\ &\quad + 4\pi R_{\text{HC}} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\rho; s) g_n(q; s) [z_n^2(s) - s R_{\text{HC}}^2] \frac{4z_n(s) \sin^2 z_n(s)}{2z_n(s) - \sin 2z_n(s)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

wobei

$$g_n(\rho; s) = \frac{\rho \cdot \cos(\rho \cdot R_{\text{HC}}) + \sqrt{|s|} \sin(\rho \cdot R_{\text{HC}})}{\rho(z_n^2(s) - \rho^2 R_{\text{HC}}^2)} \frac{\exp(-\sqrt{|s|} R_{\text{HC}}) + \exp(\sqrt{|s|} R_{\text{HC}})}{\exp(-\sqrt{|s|} R_{\text{HC}}) - \exp(\sqrt{|s|} R_{\text{HC}})} \quad (4.14)$$

$z_n$  sind die positiven, reellen Lösungen der Gleichung

$$z_n \operatorname{ctg} z_n = -\sqrt{|s|} R_{\text{HC}} \frac{\exp(-\sqrt{|s|} R_{\text{HC}}) + \exp(\sqrt{|s|} R_{\text{HC}})}{\exp(-\sqrt{|s|} R_{\text{HC}}) - \exp(\sqrt{|s|} R_{\text{HC}})} \quad (4.15)$$

Wie in [15] gezeigt wird, dürften im allgemeinen 2 bis 3 Terme dieser Entwicklung genügen, um eine für numerische Anwendungen genügende Genauigkeit zu erreichen.

Es sei nun

$$V = V_{\text{HC}} + V_0 \quad (4.16)$$

und der  $s$ -Wellenanteil der zu  $V$  gehörigen Streumatrix sei  $t(\rho, q; s)$ . In [14] wurde gezeigt, daß sich auch  $t - t_{\text{HC}}$  in eine Summe separabler Terme entwickeln läßt.

$$t(\rho, q; s) - t_{\text{HC}}(\rho, q; s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{(+)}}{1 - \lambda_n^{(+)}} \psi_n^{(+)}(\rho) \psi_n^{(+)}(q) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{(-)}}{1 - \lambda_n^{(-)}} \psi_n^{(-)}(\rho) \psi_n^{(-)}(q) \quad (4.17)$$

wobei

$$\begin{aligned} \psi_n^{(+)}(p) &= \cos(pR_{\text{HC}}) \varphi_n^{(+)}(p; s) \\ &+ \frac{2}{\pi} \frac{\sin(pR_{\text{C}})}{p} \left\{ \int_0^\infty dp' p'^2 \varphi_n^{(+)}(p'; s) \frac{1}{p'^2 - s} \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{P} \int_0^\infty dp' p'^2 \varphi_n^{(+)}(p; s) \frac{1}{p'^2 - p^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

In (4.17) und (4.18) sind  $\lambda_n$  und  $\varphi_n$  die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen der homogenen Lippmann-Schwinger-Gleichung für das ins Zentrum verschobene äußere Potential  $V_0(r + R_{\text{HC}})$ . Die Summation über positive bzw. negative Eigenwerte wurde wie in (4.10) wieder getrennt ausgeführt. Für  $R_{\text{HC}} = 0$  geht (4.17) mit (4.18) selbstverständlich in (4.10) über.

In (4.13) und (4.17) haben wir die für die weitere Rechnung benutzte separable Entwicklung von  $t(p, q; s)$ .

#### 4.4. Numerische Ergebnisse

In der Tabelle 2 sind die errechneten Bindungsenergien für die beiden Potentiale ohne Hard-core sowie für das Benn-Scharf-Potential nach Abzug des Hard-core zusammengestellt. Tabelle 3 zeigt die entsprechenden Werte für das Benn-Scharf-Potential mit Hard-core.

Tabelle 2

Theoretische Bindungsenergie für das Haefner-, das Darriulat- und das Benn-Scharf-Potential ohne Hard-core in Abhängigkeit von der Anzahl berücksichtigter positiver ( $N^+$ ) und negativer ( $N^-$ ) Terme in (4.10) sowie des Coulombabschneideradius  $R$

$R$ [F]	$E_B$ [MeV]		$E_B$ [MeV]		$E_B$ [MeV]		$E_B$ [MeV]	
	$N^{(+)} = 1$	$N^{(-)} = 1$	$N^{(+)} = 1$	$N^{(-)} = 1$	$N^{(+)} = 2$	$N^{(-)} = 0$	$N^{(+)} = 2$	$N^{(-)} = 1$
11	$V_H$	$V_D$	$V_B$	$V_H$	$V_D$	$V_B$	$V_D$	$V_B$
11	2,1	1,28	2,53	1,0	0,06	2,44	1,29	2,53
13	2,1	1,28	2,53	1,0	0,05	2,44	1,28	2,53
15	2,1	1,28	2,53	1,0	0,05	2,44	1,28	2,53

Es ist zu beachten, daß nur der  $s$ -Wellen-Anteil der  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung berücksichtigt wurde. Die Berücksichtigung der  $d$ -Welle ergibt offensichtlich eine Erhöhung der Bindungsenergie, wie man aus [12] entnehmen kann. Der dort angegebene Beitrag von 0,59 MeV ist jedoch sicherlich zu groß, und zwar aus demselben Grund wie der  $s$ -Wellen-Beitrag zu groß ist. Nimmt man realistischerweise die Hälfte, bekommt man für die Bindungsenergie des  $^{12}\text{C}$  einen Wert von 0,6 MeV. Die Beiträge mit  $l > 2$  dürften völlig zu vernachlässigen sein. Schätzt man den Einfluß aller gemachter Näherungen pessimistisch ein, ist doch zweifellos die folgende Aussage richtig:

3 strukturlose  $\alpha$ -Teilchen, die nur via lokale Zweiteilchenpotentiale wechselwirken, haben einen gebundenen Zustand, dessen Bindungsenergien kleiner als 1 MeV ist.

Es dürfte interessant sein, die Resultate für das Benn-Scharf-Potential mit und ohne Hard-core zu vergleichen. (6. Spalte in Tabelle 2 und 5. Spalte in Tabelle 3). Aus

diesem Vergleich sieht man, daß der harte  $\alpha$ -Kern die 3- $\alpha$ -Bindungsenergie um ca. 2 MeV verringert.

Tabelle 3

Theoretische Bindungsenergie für das Benn-Scharf-Potential mit Hard-core in Abhängigkeit von der Anzahl berücksichtigter Terme in (4.13) ( $N_{HC}$ ) und (4.17) ( $N_P$ ) sowie des Coulombanschneideradius  $R$

$R$ [F]	$E_B$ [MeV]				
	$N_P^{(+)} = 1$	$N_P^{(+)} = 1$	$N_P^{(+)} = 1$	$N_P^{(+)} = 1$	$N_P^{(\pm)} = 1$
	$N_P^{(-)} = 0$	$N_P^{(-)} = 0$	$N_P^{(-)} = 0$	$N_P^{(-)} = 1$	$N_P^{(-)} = 1$
	$N_{HC} = 0$	$N_{HC} = 1$	$N_{HC} = 2$	$N_{HC} = 2$	$N_{HC} = 3$
11	1,84	0,60	0,58	0,30	0,30
13	1,84	0,60	0,58	0,30	0,30
15	1,84	0,60	0,58	0,30	0,30

Ein weiteres Resultat von Interesse erhält man, wenn man vom Benn-Scharf-Potential den Coulombanteil subtrahiert. Für das so bestimmte reine Kern-Potential finden wir:

$$E_B = -4,5 \text{ MeV mit Hard-core}$$

$$E_B = -7,3 \text{ MeV ohne Hard-core}$$

Für die Coulombabstößung ergibt sich somit

$$4,2 \text{ MeV mit Hard-core}$$

$$4,9 \text{ MeV ohne Hard-core}$$

## 5. Off-Shell Zweiteilchenstreumatrix ohne Potentialmodell

### 5.1. Einleitung

Im vorigen Abschnitt wurde die einschränkende Annahme gemacht, daß sich die  $\alpha$ - $\alpha$ -Wechselwirkung durch ein lokales Potential beschreiben läßt. Es ist jedoch wünschenswert, eine Methode zur Lösung der Faddejev-Gleichungen zu haben, welche vom Potentialbegriff unabhängig ist.

Die in diesem Abschnitt hergeleitete Reihenentwicklung für die  $T$ -Matrix verwendet nur die bekannten analytischen Eigenschaften sowie zusätzlich die Tatsache, daß die niederenergetische Streuung von einer scharfen Resonanz dominiert wird.

Bekanntlich kann man für jede gemessene Streuphase eine ganze Klasse 'elastisch äquivalenter Potentiale' finden, von denen im allgemeinen jedes zu einer anderen Off-Shell Fortsetzung führt. Es ist deshalb von vornherein klar, daß durch die gemessene Streuphase die Off-Shell Fortsetzung nicht eindeutig bestimmt ist. Auch die Methoden dieses Abschnittes sind deshalb in gewisser Weise willkürlich. An Stelle der Lokalität des Potentials müssen andere Annahmen gemacht werden. Diese werden im Abschnitt 5.2 eingehend beschrieben. Die in Gleichung (5.20) angegebene Entwicklung ist trotzdem aus zwei Gründen nützlich:

Erstens ermittelt man mit ihrer Hilfe die  $^{12}\text{C}$ -Bindungsenergie auf einem ganz anderen Wege als in Abschnitt 4 und erhält somit einen Hinweis über den Einfluß, welchen die Voraussetzung spezieller Potentiale auf die Bindungsenergie hat.

Zweitens kann (5.20) auf alle Dreikörpersysteme angewandt werden, deren – als bekannt vorausgesetzte – Streuphasen von einer niederenergetischen Resonanz beherrscht werden. Letzteres ist aber keine besondere Einschränkung, da sonst ein gebundener Dreikörperzustand gar nicht zu erwarten ist.

Es sei noch erwähnt, daß im Gegensatz zu einer in [18] angegebenen Entwicklung die in der vorliegenden Arbeit hergeleitete Gleichung (5.18) auch anwendbar ist, wenn man sich für die Parametrisierung der Streuphase *nicht* auf die Effective-range-Näherung beschränkt.

Der Hard-core Anteil der Phase wird im folgenden weggelassen (s. 2.11)). Dies ist notwendig, da die Rechnungen nur für Phasen gelten, welche für  $k \rightarrow \infty$  endlich bleiben. Die nachträgliche Berücksichtigung des Hard-core bietet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, erhöht den numerischen Aufwand aber erheblich. Wir führen dies deshalb nicht explizit durch, sondern entnehmen den numerischen Wert des Hard-core Anteils der  $^{12}\text{C}$ -Bindungsenergie den Ergebnissen von Abschnitt 4.

Im übrigen bezieht sich alles wiederum auf die s-Welle der Zweiteilchenstreuung.

## 5.2. Herleitung der Entwicklung für die Streuamplitude

Die Streuphase kann (nach Abspaltung des Hard-core Anteils) entsprechend (2.12) folgendermaßen geschrieben werden:

$$\delta(k, R) = -kR + \arctg \frac{F_0(\eta, kR)}{\dot{F}_0(\eta, kR)} + \arctg \frac{\Gamma_0 \frac{k}{2k_c}}{k_0^2 - k^2} + \Lambda(k, R) \quad (5.1)$$

In (5.1) kann  $\Lambda(k, R)$  für sehr kleine Energien vernachlässigt werden (s. z.B. [5]). Oberhalb 200 keV trägt er aber merklich bei.

Im folgenden werden wir von der Hypothese ausgehen, daß der Resonanzanteil der Phase den Hauptanteil zur Bindungsenergie liefert und der Rest als Korrektur betrachtet werden kann. Als Resonanzphase definieren wir:

$$\delta_{\text{res}}(k) = \arctg \frac{\Gamma_0 \frac{k}{2k_c}}{k_0^2 - k^2} - \arctg \frac{\tilde{\Gamma} \frac{k}{2\tilde{k}}}{\tilde{k}^2 - k^2} \quad (5.2)$$

Durch den zweiten Term in (5.2) wird erreicht, daß  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_{\text{res}}(k) = 0$ . Der erste Term allein strebt bekanntlich in diesem Grenzfall gegen  $\pi$ .  $\tilde{\Gamma}$  und  $\tilde{k}$  sind in gewissen Grenzen frei wählbar, jedoch müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Für Energien unterhalb 200 keV soll der zweite Term in (5.2) nicht wesentlich beitragen, damit das reine Resonanzverhalten gewahrt bleibt.
- $\delta_{\text{res}}(k)$  soll als Funktion von  $k$  bei einigen  $F^{-1}$  bereits sehr klein werden.
- Die Kausalitätsbedingung für Potentiale mit endlicher Reichweite  $D$  soll erfüllt sein (s. z.B. [24] S. 353):

$$\frac{d\delta_{\text{res}}(k)}{dk} > -\left(D + \frac{1}{2k}\right)$$

a)–c) sind erfüllt mit der Wahl:

$$\tilde{k} = 0,7 \text{ F}^{-1}$$

$$\tilde{\Gamma} = \frac{4\tilde{k}}{D + \frac{1}{2}\tilde{k}}$$

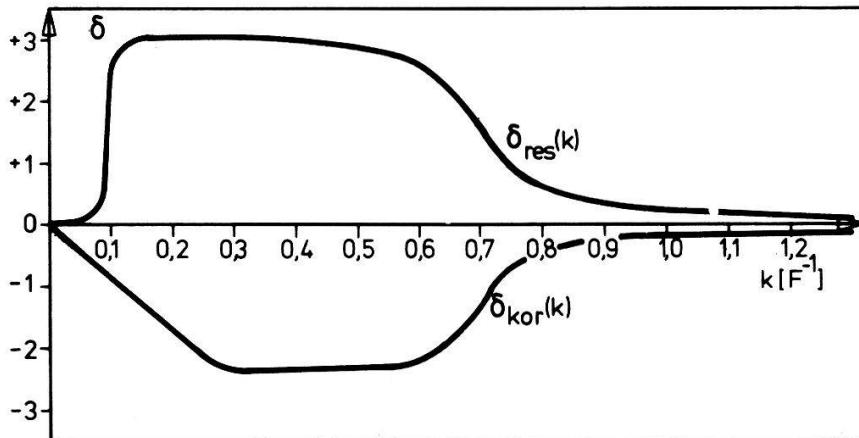
Definieren wir ferner die Korrekturphase durch

$$\delta_{\text{korr}}(k) = -kR + \arctg \frac{F_0(\eta, kR)}{F_0(\eta, kR)} + \Lambda(k, R) + \arctg \frac{\tilde{\Gamma} \frac{k}{2\tilde{k}}}{\tilde{k}^2 - k^2} \quad (5.3)$$

so wird

$$\delta(k) = \delta_{\text{res}}(k) + \delta_{\text{korr}}(k) \quad (5.4)$$

Figur 5 zeigt das Verhalten beider Summanden.



Figur 5  
Resonanzphase  $\delta_{\text{res}}(k)$  und Korrekturphase  $\delta_{\text{korr}}(k)$ .  $R = 15 \text{ F}$ ,  $\tilde{k} = 0,7 \text{ F}^{-1}$ .

Der Aufteilung (5.4) der Streuphase entspricht eine Aufteilung der Streuamplitude auf der Energieschale:

$$t(k, k; k^2 + i\epsilon) = -\frac{4\pi}{k} \exp[i\delta(k)] \sin \delta(k) = t_{\text{res}}(k, k; k^2 + i\epsilon) + t'_{\text{korr}}(k, k; k^2 + i\epsilon) \quad (5.5)$$

mit

$$t_{\text{res}}(k, k; k^2 + i\epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{4\pi}{k} \exp[i\delta_{\text{res}}(k)] \sin \delta_{\text{res}}(k) \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} t'_{\text{korr}}(k, k; k^2 + i\epsilon) &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{4\pi}{k} \exp[2i\delta_{\text{res}}(k) + i\delta_{\text{korr}}(k)] \sin \delta_{\text{korr}}(k) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \exp[2i\delta_{\text{res}}(k)] t_{\text{korr}}(k, k; k^2 + i\epsilon) \end{aligned} \quad (5.7)$$

$t_{\text{korr}}(k, k; k^2 + i\epsilon)$  ist also die zu  $\delta_{\text{korr}}(k)$  gehörige Streuamplitude.

Der Übergang zur Off-Shell-Amplitude geschieht im folgenden für beide Anteile getrennt. Nach [2] kann man  $t_{\text{res}}(p, q; k^2 + i\epsilon)$  folgendermaßen faktorisieren:

$$t_{\text{res}}(p, q; k^2 + i\epsilon) = \frac{g_{\text{res}}(p) \cdot g_{\text{res}}(q)}{D_{\text{res}}(k^2 + i\epsilon)} \quad (5.8)$$

wobei

$$D_{\text{res}}(z) = -\frac{1}{4\pi} \exp \left( -\frac{2z}{\pi} \int_0^\infty \frac{\delta_{\text{res}}(k')}{k'(k'^2 - z)} dk' \right) \quad (5.9)$$

Aus (5.6), (5.8) und (5.9) ergibt sich:

$$g_{\text{res}}(p) = \left[ \frac{\sin \delta_{\text{res}}(p)}{p} \exp \left( -\frac{2p^2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\delta_{\text{res}}(p')}{p'(p'^2 - p^2)} dp' \right) \right]^{1/2} \quad (5.10)$$

Mit (5.8), (5.9) und (5.10) haben wir den Resonanzanteil der Off-Shell Streumatrix.

Um für  $t'_{\text{korr}}$  ebenfalls eine separable Off-Shell Fortsetzung zu finden, behandeln wir zuerst  $t_{\text{korr}}$ . Es ist nach (5.7):

$$t_{\text{korr}}(k, k; k^2 + i\epsilon) = -\frac{4\pi}{k} \exp[i\delta_{\text{korr}}(k)] \sin \delta_{\text{korr}}(k) \quad (5.11)$$

Ohne auf weitere Einzelheiten einzugehen, wollen wir annehmen, daß  $t_{\text{korr}}(p, q; s)$  sich in folgender Form darstellen läßt:

$$t_{\text{korr}}(p, q; s) = \frac{F_{\text{korr}}(p, q; s)}{D_{\text{korr}}(s)} \quad (5.12)$$

mit

$$D_{\text{korr}}(s) = \exp \left( -\frac{2s}{\pi} \int_0^\infty \frac{\delta_{\text{korr}}(k')}{k'(k'^2 - s)} dk' \right) \quad (5.13)$$

Dabei soll  $F_{\text{korr}}$  für positive  $p$  und  $q$  keine Singularitäten für  $\text{Re}s < 0$  haben. Diese Darstellungsmöglichkeit für  $t_{\text{korr}}(p, q; s)$  besteht für eine große Klasse von Potentialen (s. z.B. [2], [18]).<sup>2)</sup> Wegen der einfachen analytischen Eigenschaften von  $F_{\text{korr}}$  und in Ermangelung besserer Kenntnis der  $s$ -Abhängigkeit setzen wir an:

$$F_{\text{korr}}(p, q; s) = \frac{1}{p^2 + \mu^2} \cdot \frac{1}{q^2 + \mu^2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left( \frac{p^2}{p^2 + \mu^2} \right)^n \left( \frac{q^2}{q^2 + \mu^2} \right)^n \quad (5.14)$$

<sup>3)</sup> Es ist stets zu beachten, daß wir das Coulombpotential bei endlicher Reichweite  $R$  'abschneiden'. Die in diesem Abschnitt verwandten Phasen hängen also noch von  $R$  ab. In der Bezeichnungsweise haben wir das nicht zum Ausdruck gebracht.

Eine eventuelle  $s$ -Abhängigkeit der Koeffizienten  $C_n$  ist vernachlässigt. Zur näheren Begründung von (5.14) s. z.B. [18]. Wir möchten noch einmal ausdrücklich betonen, daß  $F_{\text{korr}}$  nur in das Korrekturglied eingeht und deshalb die genaue Form von  $F_{\text{korr}}$  numerisch keine große Rolle spielen sollte. Der Parameter  $\mu$  hat einen numerischen Wert, welcher etwa der Reichweite der Wechselwirkung entspricht. Aus (5.11), (5.12), (5.13) ergibt sich nun

$$F_{\text{korr}}(k, k; k^2 + i\epsilon) = -\frac{4\pi \sin \delta_{\text{korr}}(k)}{k} \exp\left(-\frac{2k^2}{\pi} \mathcal{D} \int_0^\infty \frac{\delta_{\text{korr}}(k')}{k'(k'^2 - k^2)} dk'\right) \quad (5.15)$$

Die  $C_n$  und  $\mu$  ermittelt man durch Einsetzen von (5.14) in (5.15): Mit der Methode der kleinsten Quadrate werden diese Parameter an die bekannte Phase  $\delta_{\text{korr}}(k)$  angepaßt.

Nachdem wir in (5.12), (5.13), (5.14) nun eine separable Entwicklung für  $t_{\text{korr}}$  haben, müssen wir eine solche auch für  $t'_{\text{korr}}$  (s. (5.7)) angeben. Mit dem Ansatz

$$t'_{\text{korr}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; s) = \sum_{n=0}^N C_n \frac{\varphi_n(\mathbf{p}; s) \varphi_n(\mathbf{q}; s)}{D_{\text{korr}}(s)} \quad (5.16)$$

kann man das erreichen, wenn die  $\varphi_n$  folgende Bedingungen erfüllen:

$$\text{a)} \quad \varphi_n(k; k^2) = \exp[i\delta_{\text{res}}(k)] g_n(k) \quad (5.17)$$

$$g_n(k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k^2 + \mu^2} \left( \frac{k^2}{k^2 + \mu^2} \right)^n \quad (5.18)$$

- b)  $\varphi_n(k; s)$  ist reell für  $s < 0$ .
- c)  $\varphi_n(k; s)$  ist als Funktion von  $s$  analytisch bis auf einen Schnitt entlang der positiven, reellen Halbachse.

a)–c) kann man durch folgenden Ansatz erfüllen:

$$\varphi_n(\mathbf{p}; s) = \exp[i\delta_{\text{res}}(\mathbf{p})] g_n(\mathbf{p}) - \frac{1}{\pi} \frac{\sin \delta_{\text{res}}(\mathbf{p})}{\mathbf{p}} \int_0^\infty p'^2 d\mathbf{p}' g_n(\mathbf{p}') \left[ \frac{1}{p'^2 - \mathbf{p}^2 - i\epsilon} - \frac{1}{p'^2 - s} \right] \quad (5.19)$$

(5.16) und (5.19) geben die separable Entwicklung des Korrekturterms. Damit haben wir nach (5.5) die angestrebte separable Entwicklung von  $t$ :

$$t(\mathbf{p}, \mathbf{q}; s) = \frac{g_{\text{res}}(\mathbf{p}) g_{\text{res}}(\mathbf{q})}{D_{\text{res}}(s)} + \sum_{n=0}^N C_n \frac{\varphi_n(\mathbf{p}; s) \varphi_n(\mathbf{q}; s)}{D_{\text{korr}}(s)} \quad (5.20)$$

Mit (5.20) kann (3.8) ermittelt und (3.7) gelöst werden.

### 5.3. Numerische Ergebnisse

In Tabelle 4 sind zum Vergleich neben der mit dem Ansatz (5.20) errechneten  $^{12}\text{C}$ -Bindungsenergien noch einmal die entsprechenden Werte für das Benn-Scharf-Potential – bester Kandidat unter den lokalen Potentialen – ohne Hard-core aufgetragen. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung recht gut. Wir werden im Schlußkapitel

darauf zurückkommen. Im übrigen rechtfertigen die Resultate die Annahme, daß der Hauptbeitrag zur Bindungsenergie, wenn man vom Hard-core Anteil absieht, vom Resonanzterm herrührt.

Tabelle 4

Theoretische  $^{12}\text{C}$ -Bindungsenergie ohne Vorgabe eines lokalen Potentials in Abhängigkeit des Coulombabschneideradius  $R$  und der Anzahl  $N + 1$  berücksichtigter Terme in der Entwicklung (5.20) (Hard-core subtrahiert)

$R$ [F]	$E_B$ [MeV] ohne $t'_{\text{korr}}$	$E_B$ [MeV] $N = 0$	$E_B$ [MeV] $N = 1$	$E_B$ [MeV] $N = 2$	$E_B$ [MeV] B-S-Potential
11	2,7	2,0	2,2	2,2	2,45
13	2,6	2,0	2,1	2,2	2,45
15	2,6	1,9	2,2	2,2	2,45

Ferner geht aus der Tabelle die schwache Abhängigkeit von der Wahl des Abschneideradius  $R$  hervor, sofern dieser nur groß genug gewählt ist.

## 6. Zusammenfassung und Diskussion der Resultate

Die Veröffentlichungen zur Frage der Bindungsenergie des  $^{12}\text{C}$ -Kerns ergeben ein widersprüchliches Bild (s. Tabelle 5). Die Ergebnisse differieren derart, daß die Frage ungeklärt erscheint, ob das  $3-\alpha$ -Modell eine einigermaßen brauchbare Beschreibung des  $^{12}\text{C}$ -Kerns liefert oder nicht.

Vergleicht man in Tabelle 5 Input und Bindungsenergie, ergibt sich folgender Zusammenhang:

separables Potential 1 Term:  $E_B \approx 7$  MeV

separables Potential 2 Terme:  $E_B \approx 1$  MeV

lokales Potential:  $0 < E_B < 1$  MeV

Elastische Streuphase:  $0 < E_B < 1$  MeV

Aus den Resultaten der vorliegenden Arbeit kann man die folgenden Schlüsse ziehen:

- Das  $3-\alpha$ -Modell des  $^{12}\text{C}$ -Kerns, welches ein lokales phänomenologisches  $\alpha$ - $\alpha$ -Potential annimmt, ergibt eine Bindung für den  $^{12}\text{C}$ -Kern. Die so berechnete Bindungsenergie ist aber um eine Größenordnung kleiner als die gemessene.
- Die Resultate von Abschnitt 5 mit einem potentialunabhängigen Ansatz für die Off-Shell-Streuamplitude drängen den Schluß auf, daß auch durch eine allgemeinere  $\alpha$ - $\alpha$ -Wechselwirkung die experimentelle  $^{12}\text{C}$ -Grundzustandsenergie nicht mit der elastischen  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuphase in Übereinstimmung zu bringen ist. Die Erweiterung der  $T$ -Matrix über die Energieschale hinaus ist zwar nicht eindeutig, und der Ansatz (5.18) ist nur einer von vielen möglichen. Die Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Abschnitt 4 ist aber so gut, daß es ausgeschlossen erscheint, eine mit den Analytizitätseigenschaften der Streuamplitude verträgliche Abänderung zu finden, welche eine viel größere Bindungsenergie ergibt. Das bedeutet, daß der  $^{12}\text{C}$ -Kern durch das  $3-\alpha$ -Teilchen Modell nicht zu beschreiben ist.
- Die von einigen Autoren errechnete Übereinstimmung von Experiment und  $3-\alpha$ -Teilchenmodell beruht im wesentlichen darauf, daß die von diesen Autoren

Tabelle 5  
Theoretisch errechnete  $^{12}\text{C}$ -Bindungsenergien relativ zu 3 freien  $\alpha$ -Teilchen unter Zugrundelegung des 3- $\alpha$ -Modells

Autor	Jahr	Ref.	Input	Methode	$E_B$ [MeV]
Harrington	1966	8	sep. Potential Yamaguchi + Coulomb klassisch	Faddejev	7,4
Duck	1966	16	sep. Potential Yamaguchi + Hard- core	Faddejev	kein Bindung
Hebach, Henneberg	1968	10	2 Term sep. Potential + 1 Term f. d-Welle Coulomb als Störung	Faddejev	1,5
Fulco, Wong	1968	12	lokales Potential Darriulat	Faddejev	2,8
Leung, Park	1969	9	sep. Potential Tabakin + Coulomb klassisch	Wellen- Funktion	5,4
Abdul-Magd	1969	19	lokales Potential Spuy-Piennar	Variation	$-1 < E_B$
Osman	1970	25	sep. Potential Yamaguchi + Coulomb klassisch	Faddejev	6.08
Noble	1970	20	lokales Potential Kenmode	Variation	$0,9 < E_B < 3,0$
Lim	1970	21	lokales Potential Ali, Bodmer	Variation	$-1 < E_B$
Diese Arbeit	1974		lokales Potential Heafner	Faddejev	1,1
Diese Arbeit			lokales Potential Darriulat	Faddejev	0,1
Diese Arbeit			lokales Potential Benn-Scharf inkl. Hard-core	Faddejev	0,30
Diese Arbeit			elastische – Streu- phase (ohne Hard- core)	Faddejev	2,2

verwendeten separablen Potentiale nur einen anziehenden Term enthalten und die sicher vorhandene Abstoßung für kleine Abstände gar nicht berücksichtigen.

4. Die Ergebnisse von Abschnitt 4 erlauben eine Aufteilung der 3- $\alpha$ -Bindungsenergie auf die 3 verschiedenen Potential-Anteile Kernpotential, Coulombpotential und Hard-core. Diese Aufteilung ergibt:

für Kernpotential ohne Coulomb, ohne Hard-core:  $E_B = 7,3$  MeV  
 für Kernpotential ohne Coulomb, mit Hard-core:  $E_B = 4,5$  MeV  
 für Kernpotential mit Coulomb, ohne Hard-core:  $E_B = 2,45$  MeV  
 für Kernpotential mit Coulomb, mit Hard-core:  $E_B = 0,30$  MeV

5. Alle Resultate legen den Schluß nahe, daß im Grundzustand des  $^{12}\text{C}$ -Kerns der mittlere Abstand der 3  $\alpha$ -Teilchen so klein ist, daß zusätzliche Austauscheffekte ein recht starkes, scheinbares 3- $\alpha$ -Potential erzeugen. Das bedeutet: der Grundzustand des  $^{12}\text{C}$ -Kerns ist ein Gebilde, welches kaum Ähnlichkeit mit einem System von drei strukturlosen  $\alpha$ -Teilchen hat.

## Verdankung

Ich bin Herrn Prof. Rasche von Institut für Theoretische Physik der Universität Zürich zu großem Dank verpflichtet. Ohne seine Anregungen und seine Hilfestellungen wäre diese Arbeit nicht entstanden. Im weiteren möchte ich Fräulein Carmen Niemeyer von der Universität Bremen für die mühsame Arbeit des Manuskript-Schreibens danken. Finanziell wurde die Arbeit durch den Schweizerischen Nationalfonds ermöglicht.

## ANHANG

### Numerische Methoden

Alle numerischen Rechnungen in dieser Arbeit wurden auf der IBM-360 bzw. IBM-370 des Rechenzentrums der Universität Zürich durchgeführt. In diesem Anhang werden einige der dabei angewendeten Methoden kurz erläutert.

Zur Berechnung der Coulomb-Wellen-Funktion (s. Abschnitt 2) wurde die in [26] (S. 538, Gleichungen 14.1.3 bis 14.1.23) angegebene Reihen-Entwicklung verwendet.

Die Reihe erweist sich gut brauchbar im Gebiet:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \eta &\leq 10. \\ \rho &\leq 20. \end{aligned} \tag{A1}$$

mit

$$\rho = kR$$

$$\eta = \frac{0,276}{k} \tag{A2}$$

ist (A1) erfüllt für  $R \leq 15$  F und  $k \leq 1,3$  F<sup>-1</sup>.

Die Reihe konvergiert allerdings sehr verschieden schnell je nach dem Wert von  $\rho \cdot \eta$ . Für  $\rho \cdot \eta \geq 5$  braucht man ca. 40 Terme, um die Funktion besser als auf 1% anzunähern.

Für  $\rho > 20$  und  $\eta < 0,5$  kann man die asymptotische Entwicklung (s. [26] S. 540 Gleichungen 14.5.1 bis 14.5.8) verwenden.

Alle Integrale wurden nach der Methode von Gauss-Legendre berechnet. Die Integralgleichungen wurden mit der Gauss-Legendre-Methode in algebraische Gleichungen verwandelt und diese mit Standardmethoden gelöst.

Die Stabilität der Lösungen gegenüber einer Änderung der Schrittängen wurde in typischen Fällen geprüft. Am kritischsten erweist sich dabei die Lösung der Integralgleichung (4.8).

Einerseits erfordert die genaue Ermittlung der Eigenfunktionen kleine Schrittängen (s. Figur 4). Zum anderen erhöht sich durch eine Vermehrung der Stützpunkte die Rechenzeit sehr stark.

In einem typischen Fall (Darriulat-Potential,  $R = 11$  F,  $N^+ = 1$ ,  $N^- = 0$ ) ergibt sich folgende Abhängigkeit der errechneten Bindungsenergie von der Anzahl Stützpunkte:

$$\begin{aligned} \text{Anzahl Stützpunkte} &= 16 \quad E_B = 1,19 \text{ MeV} \\ &= 24 \quad E_B = 1,278 \text{ MeV} \\ &= 32 \quad E_B = 1,282 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Die Ergebnisse in Tabelle 2 sind alle mit 32 Stützpunkten berechnet, diejenigen in Tabelle 3 mit 24.

Zur Lösung der Gleichung (3.7) haben sich in allen Fällen 12 Stützpunkte als hinreichend erwiesen. Versuchsweise Erhöhung auf 16 Stützpunkte ergab Abweichungen von weniger als 1%.

## LITERATUR

- [1] L. D. FADDEJEV, *Mathematical Problems of Quantum Theory of Scattering for a Three-Particle System* (Harwell 1964).
- [2] C. LOVELACE, Phys. Rev. **135B**, 1225 (1964).
- [3] J. BENN et al., Phys. Lett. **20**, 43 (1966); W. REICHART et al., Phys. Lett. **20**, 40 (1966).
- [4] J. FURNISH, *Alpha-Alpha Elastic Scattering: A Bibliography*, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-4011-MS UC-34, Physics TID-4500.
- [5] J. BENN und G. SCHAFER, Helv. Phys. Acta **40**, 271 (1967).
- [6] T. A. OSBORN, SLAC-PUB 361 (1967).
- [7] K. M. WATSON und J. NUTTALL, *Topics in Several Particle Dynamics* (Holden-Day 1967).
- [8] D. R. HARRINGTON, Phys. Rev. **147**, 685 (1966).
- [9] C. C. H. LEUNG und S. C. PARK, Phys. Rev. **187**, 1239 (1969).
- [10] H. HEBACH und J. HENNEBERG, Z. für Phys. **216**, 204 (1968).
- [11] J. S. BALL und D. WONG, Phys. Rev. **169**, 1362 (1968).
- [12] J. R. FULCO und D. WONG, Phys. Rev. **172**, 1062 (1968).
- [13] S. WEINBERG, Phys. Rev. **131**, 440 (1963).
- [14] M. G. FUDA, Phys. Rev. **178**, 1682 (1969).
- [15] M. G. FUDA, Phys. Rev. **186**, 1078 (1969).
- [16] J. DUCK, Nucl. Phys. **84**, 586 (1966).
- [17] V. MEYER und H. H. STAUB, Helv. Phys. Acta **31**, 205 (1958).
- [18] D. Y. WONG und G. ZAMBOTTI, Phys. Rev. **154**, 1540 (1967).
- [19] A. Y. ABDUL-MAGD, Nucl. Phys. **A129**, 610 (1969).
- [20] J. V. NOBLE, Phys. Lett. **B31**, 253 (1970).
- [21] T. K. LIM, Nucl. Phys. **A158**, 385 (1970).
- [22] A. G. SITENKO, *Lectures in Scattering Theory* (Pergamon Press 1971).
- [23] K. MEETZ, J. Math. Phys. **3**, 690 (1961).
- [24] R. G. NEWTON, *Scattering Theory of Waves and Particles* (McGraw-Hill 1966).
- [25] A. OSMAN, Phys. Rev. **C4**, 302 (1971).
- [26] M. ABRAMOWITZ und I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover 1965).