Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 47 (1974)

Heft: 1

Artikel: Quelques paramètres importants des milieux multiplicateurs de neutrons selon le modèle binodal

Autor: Tai, A.S.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-114559

Helvetica Physica Acta
Vol. 47, 1974. Birkhäuser Verlag Basel

Quelques Paramètres Importants des Milieux Multiplicateurs de Neutrons Selon le Modèle Binodal

par **A. S. Tai**

Laboratoire de Génie Atomique de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

(2. XI. 73)

Abstract. Considering a neutron multiplication medium of two zones as one system composed of two point cores between which exists a coupling (the binodal model), we have established the relations for some important parameters of the system, such as multiplication coefficient, reactivity, effective delayed neutron fraction, neutron life-time. The expressions giving the time evolution of the system in the presence of pulsed neutron sources are also derived.

L'idée de remplacer un système comprenant des zones multiplicatrices de neutrons par un système de 'cœurs ponctuels', entre lesquels existent des couplages, a été à la base de différents travaux dans les dix dernières années. Au cours d'un colloque, organisé aux Etats-Unis [1], des modèles très divers ont été présentés à ce sujet[1]).

Dans le présent article, nous considérons le cas du modèle binodal, qui se rapporte à un système formé de deux cœurs ponctuels reliés par un couplage.

I. Multiplication Apparente

Dans le cas d'un système sous-critique, stationnaire, en présence de sources de neutrons, le modèle binodal permet d'écrire les équations suivantes:

$$(k_1 - 1)\frac{N_1}{l_1} + k_{21}\frac{N_2}{l_2} + S_1 = 0 \tag{1a}$$

$$k_{12}\frac{N_1}{l_1} + (k_2 - 1)\frac{N_2}{l_2} + S_2 = 0 \tag{1b}$$

---

[1]) Une liste de références bibliographiques et un excellent résumé des différents modèles de la cinétique des réacteurs couplés existants ont été présentés par F. T. Adler lors de ce colloque, voir pages 521–556 de [1].

Les indices 1 et 2 numérotent les zones.

N: Nombre total de neutrons
S: Source de neutrons
k: Coefficient de multiplication
l: Temps de vie
k_{12}: Coefficient de transfert de neutrons de la zone 1 vers la zone 2, correspond à la probabilité qu'un neutron ayant quitté la zone 1 arrive à la zone 2.

Nous appellerons la grandeur $K = k_{12}k_{21}$ coefficient de couplage[2]). La résolution des équations (1) donne:

$$\frac{N_1}{l_1} = \frac{1}{D}[(1-k_2)S_1 + k_{21}S_2] \tag{2}$$

où

$$D = (1-k_1)(1-k_2) - K, \quad (D > 0 \text{ ici}).$$

Mettons (2) sous la forme:

$$\frac{N_1}{l_1} = \frac{1}{1-\left(k_1 + \dfrac{K}{1-k_2}\right)}(S_1 + S_{21}) = \frac{1}{1-k_1'}S_1' = \mu_1 S_1' \tag{2'}$$

où nous avons posé:

$S_{21} = \dfrac{k_{21}S_2}{1-k_2}$: contribution en neutrons par la source S_2 à la population de neutrons de la zone 1

$S_1' = S_1 + S_{21}$: source apparente de la zone 1, en présence de la zone 2

$k_1' = k_1 + \dfrac{K}{1-k_2}$: coefficient de multiplication de 1, en présence de la zone 2

$\mu_1 = \dfrac{1}{1-k_1'}$: multiplication apparente de 1, en présence de la zone 2.

Nous remarquons que:

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{m_1} - m_2 K \tag{3}$$

où $m_1 = (1-k_1)^{-1}$ est la multiplication apparente propre à la zone 1. Les grandeurs relatives à la zone 2 s'obtiennent en permutant les indices 1 et 2.

---

[2]) Certains auteurs appellent k_{ij} coefficient de couplage [1]; Comme $k_{ij} \neq k_{ji}$ en général, nous préférons réserver à K cette terminologie.

Dans le cas où une seule source est présente (soit $S_1 \neq 0$, $S_2 = 0$), nous pouvons tirer de (1b):

$$k_{12} = \frac{1}{m_2} \frac{l_1}{l_2} \left(\frac{N_2}{N_1}\right) \tag{4}$$

Le coefficient de transfert k_{12} pourra donc être déduit d'une mesure de distribution de neutrons (ou de flux) des deux zones, connaissant m_2 et l_1/l_2.

II. Coefficient de Multiplication et Réactivité

Ecrivons les équations statiques avec $1/k$ comme paramètre:

$$\begin{aligned} \left(\frac{k_1}{k} - 1\right) \frac{N_1}{l_1} + k_{21} \frac{N_2}{l_2} &= 0 \\ k_{12} \frac{N_1}{l_1} + \left(\frac{k_2}{k} - 1\right) \frac{N_2}{l_2} &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Les équations (5) admettent une solution non triviale en N_1, N_2 si:

$$\left(\frac{k_1}{k} - 1\right)\left(\frac{k_2}{k} - 1\right) - K = 0$$

D'où (avec $k_1 k_2 \neq 0$):

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^2 - 4\,\frac{1-K}{k_1 k_2}\right]^{1/2} \tag{6}$$

Le signe – étant nécessaire afin que N_1 et N_2 soient non négatifs.

Il en résulte que la réactivité ρ du système s'écrit:

$$\rho = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^2 - 4\,\frac{1-K}{k_1 k_2}\right]^{1/2} \tag{7}$$

ou, en posant $\rho_i = 1 - 1/k_i$:

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \left[\left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\right)^2 + K(1 - \rho_1)\,(1 - \rho_2) - \rho_1 \rho_2\right]^{1/2} = \bar{\rho} + \rho_c \tag{7'}$$

La réactivité ρ globale est donc la somme d'une réactivité moyenne des deux zones $\bar{\rho} = (\rho_1 + \rho_2)/2$ et d'un terme (ρ_c), toujours positif, que nous appellerons réactivité de couplage.

III. Equations Cinétiques

Le modèle binodal, pour le cas à un groupe d'énergie, et à un groupe de neutrons différés, permet d'écrire [2]:

$$\begin{aligned} \dot{n}_1(t) &= -\alpha_1 n_1(t) + \alpha_{21} n_2(t) + \lambda_1 c_1(t) + s_1(t) \\ \dot{n}_2(t) &= \alpha_{12} n_1(t) - \alpha_2 n_2(t) + \lambda_2 c_2(t) + s_2(t) \\ \dot{c}_i(t) &= \alpha_i^d n_i(t) - \lambda_i c_i(t) \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \tag{8}$$

où nous avons posé:

$$\alpha_i = \frac{1 - k_i(1-\beta_i)}{l_i}, \quad \alpha_i^d = \frac{\beta_i k_i}{l_i}, \quad \alpha_{ij} = \frac{k_{ij}}{l_i}$$

n_i est le nombre total de neutrons de la zone i; c_i le nombre de précurseurs, dont β_i est la fraction effective totale et λ_i la constante moyenne de désintégration.

Les conditions de criticité peuvent être déduites des équations (8): criticité différée

$$(1 - k_1)(1 - k_2) = K \tag{9}$$

ou

$$\rho_1 \rho_2 = K(1-\rho_1)(1-\rho_2) \tag{9'}$$

criticité prompte

$$[1 - k_1(1-\beta_1)][1 - k_2(1-\beta_2)] = K \tag{10}$$

ou

$$(\beta_1 - \rho_1)(\beta_2 - \rho_2) = K(1-\rho_1)(1-\rho_2) \tag{10'}$$

IV. Fraction Effective

Remplaçant K dans les expressions (6) et (7) par sa valeur tirée de (9) et (9'), on vérifie que $k = 1$ et $\rho = 0$ à la criticité différée: et remplacant K dans (7') par sa valeur tirée de (10'), on obtient la réactivité à la criticité prompte, que l'on pose égale, par analogie avec le modèle ponctuel, à la fraction effective β_e des neutrons différés du système:

$$\beta_e = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \left[\left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\right)^2 - \rho_1 \rho_2 + (\beta_1 - \rho_1)(\beta_2 - \rho_2)\right]^{1/2} \tag{11}$$

ou

$$\beta_e = \bar{\rho} + \sqrt{\bar{\rho}^2 - \beta_1 \rho_2 - \beta_2 \rho_1 + \beta_1 \beta_2} \tag{11'}$$

β_e est toujours positif et a une valeur comprise entre β_1 et β_2.

V. Temps de Vie et Temps de Génération

Se référant à la méthode utilisée dans [2] pour l'obtention du temps de vie global l, on obtient de même, à l'état critique (pour lequel le temps de vie l et le temps de génération g ont la même valeur):

$$l = g = \frac{l_1(1-k_2) + l_2(1-k_1)}{k_1(1-k_2) + k_2(1-k_1)} \tag{12}$$

ou (si $k_1 k_2 \neq 0$):

$$l = g = \frac{g_1 \rho_2 + g_2 \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \tag{12'}$$

avec $g_i = l_i / k_i$.

VI. Cas de Sources de Neutrons Pulsées

La résolution des équations (8) donne, en supposant $s_1(t) = S_1 \delta(t)$, $s_2(t) = S_2 \delta(t)$, où $\delta(t)$ est la fonction de Dirac:

$$n_i(t) = \sum_{j=1}^{4} A_j^i \exp(-\gamma_j t) \quad (i = 1, 2) \tag{13}$$

Si les deux zones forment un système sous-critique, les γ_j sont des constantes positives qui peuvent être rangées par ordre de grandeur décroissante:

γ_1: constante de décroissance prompte courte
γ_2: constante de décroissance prompte longue
γ_3: constante de décroissance différée courte
γ_4: constante de décroissance différée longue

Ces constantes sont reliées aux paramètres neutroniques des zones par les relations suivantes:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 + \lambda_2 \tag{14a}$$

$$\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_3 \gamma_4 + (\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_3 + \gamma_4) = \alpha_1 \alpha_2 + \lambda_1 \lambda_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1 \alpha_1^d - \lambda_2 \alpha_2^d - \alpha_{12} \alpha_{21} \tag{14b}$$

$$\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_3 + \gamma_4) + (\gamma_1 + \gamma_2) \gamma_3 \gamma_4 = (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_{12} \alpha_{21})(\lambda_1 + \lambda_2) + (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1^d - \alpha_2^d) \lambda_1 \lambda_2 - \alpha_1 \alpha_2^d \lambda_2 - \alpha_2 \alpha_1^d \lambda_1 \tag{14c}$$

$$\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1^d \alpha_2^d - \alpha_1^d \alpha_2 - \alpha_2 \alpha_1^d - \alpha_{12} \alpha_{21}) \lambda_1 \lambda_2 \tag{14d}$$

En faisant l'approximation $\lambda_1 \cong \lambda_2 \cong 0$, $\gamma_3 \cong \gamma_4 \cong 0$, les relations (13) et (14) se simplifient:

$$n_i(t) = A_i \exp(-\gamma_1 t) + B_i \exp(-\gamma_2 t) + C_i, \quad (i = 1, 2) \tag{15}$$

Avec

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \tag{16a}$$

$$\gamma_1 \gamma_2 = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_{12} \alpha_{21} \tag{16b}$$

ou

$$\gamma_{1,2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)^2 - \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_{12} \alpha_{21}} \tag{16c}$$

On retrouve des relations semblables à celles établies par Kistner pour un assemblage réfléchi [3]. On pose:

$$\gamma_{1,2} = \bar{\alpha} \pm \alpha_c \tag{16d}$$

où

$\bar{\alpha} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$: constante de décroissance prompte moyenne des deux zones, et
α_c: constante de décroissance de couplage.

Les amplitudes A_i et B_i de (15) peuvent être calculées:

$$A_i = \frac{(\alpha_i - \gamma_2) S_i - \alpha_{ji} S_j}{\gamma_1 - \gamma_2}, \qquad B_i = \frac{(\gamma_1 - \alpha_i) S_i + \alpha_{ji} S_j}{\gamma_1 - \gamma_2} \tag{17}$$

où S_i est le nombre de neutrons injectés dans la zone i au temps $t = 0$. α_1, α_{21} pourront donc être tirés du rapport A_1/B_1 en annulant respectivement S_2, S_1.

VII. Cas d'un Système Symétrique

Pour un système formé de deux zones identiques, on a:

$$k_1 = k_2 = \bar{k}, \quad \beta_1 = \beta_2 = \bar{\beta}, \quad l_1 = l_2 = \bar{l}, \quad g_1 = g_2 = \bar{g},$$
$$k_{12} = k_{21} = k_t \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \bar{\alpha}, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_c$$

les relations (6), (7), (9), (10), (11) et (12) deviennent alors:

Coefficient de multiplication et réactivité:

$$k = \frac{\bar{k}}{1 - k_t} \tag{18}$$

$$\rho = \frac{\bar{k} - 1 + k_t}{\bar{k}} = \bar{\rho} + \frac{k_t}{\bar{k}} \tag{19}$$

Conditions de criticité différée et prompte:

$$1 - \bar{k} = k_t \tag{20}$$

$$1 - \bar{k}(1 - \bar{\beta}) = k_t \tag{20'}$$

Fraction effective, temps de vie et temps de génération:

$$\beta_e = \bar{\beta} \tag{21}$$

$$l = \bar{l}/\bar{k} = \bar{g} = g \tag{22}$$

En présence d'une source stationnaire de neutrons dans la zone 1, l'équations (4) devient:

$$k_t = (1 - \bar{k}) \frac{N_2}{N_1} \tag{23}$$

Une valeur de k_t peut être déduite du rapport des flux moyens des deux zones.

En présence de sources pulsées, avec l'approximation $\lambda_1 \cong \lambda_2 \cong 0$, l'évolution temporelle neutronique est décrite par (équations 15 et 16):

$$n_i(t) = A_i \exp(-\gamma_1 t) + B_i \exp(-\gamma_2 t) + C_i, \quad (i = 1, 2) \tag{24}$$

où

$$\gamma_1 = \bar{\alpha} + \alpha_c, \quad \gamma_2 = \bar{\alpha} - \alpha_c \tag{25}$$

γ_2 peut être mis sous la forme:

$$\gamma_2 = \frac{\beta_e - \rho}{g} \tag{26}$$

d'où

$$\rho = \beta_e - g\gamma_2 \tag{27}$$

En posant ${\gamma_2}^c = \beta_e/g$, valeur de γ_2 à la criticité différée, la réactivité en $\$$ s'écrit:

$$\rho_{\$} = \frac{\rho}{\beta_e} = 1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_2^c} \tag{28}$$

On retrouve une relation tout à fait analogue à celle de Simmons–King en modèle ponctuel [4], [5].

D'autre part, les valeurs de $\bar{\alpha}$ et α_c peuvent être déduites (relations (25)) directement des valeurs de γ_1 et γ_2, déterminables par expérience:

$$\bar{\alpha} = \tfrac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2), \quad \alpha_c = \tfrac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2) \tag{29}$$

Un programme expérimental comprenant des systèmes à deux zones multiplicatrices dissemblables est actuellement en cours au Laboratoire de Génie Atomique de l'EPF-Lausanne, dans le but de préciser la validité du modèle.

REFERENCES

[1] *Proceedings of the ANS Meeting on Coupled Reactor Kinetics, Texas, A-M University* (1967).
[2] C. E. Cohn, Nucl. Sci. Engng. *13*, 12–17 (1962).
[3] G. Kistner, Nukleonik *7*, 106–109 (1965).
[4] B. E. Simmons et J. S. King, Nucl. Sci. Engng. *3*, 595–608 (1958).
[5] U. Farinelli et N. Pacilio, Nucl. Sci. Engng. *36*, 39–46 (1969).