

Die Trägheitswelt der Linearen Feldtheorie

Autor(en): **Scherrer, Willy**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **46 (1973)**

Heft 2

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-114482>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Die Trägheitswelt der Linearen Feldtheorie

von **Willy Scherrer**

Bern, Justingerweg 18

(20. I. 73)

Zusammenfassung. Die Entwicklung der linearen Feldtheorie führt zum Schluss, dass die kosmologische Struktur der Welt nicht das Ergebnis von Kräften sein kann, sondern umgekehrt die letzte Voraussetzung dafür bildet, um überhaupt Kräfte definieren zu können.

In diesem Sinne wird daher eine kosmologische Struktur als 'Trägheitswelt' zugrunde gelegt und anschliessend darüber die lineare Feldtheorie aufgebaut.

1. Einleitung

In einer vorausgehenden Arbeit [1] habe ich ausgeführt, dass man den einfachsten Zugang zur linearen Feldtheorie erhält, wenn man von pseudoorthogonalen Koordinaten

$$(y^0, y^1, y^2, y^3) \quad (1)$$

einer Lorentzwelt ausgeht und anschliessend krummlinige Koordinaten-'Parameter'- x^0, x^1, x^2, x^3 gemäss

$$y^\lambda = y^\lambda(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (\lambda = 0, 1, 2, 3) \quad (2)$$

einführt. Dabei bedeutet y^0 die Zeit, falls man die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ setzt.

Den Komplex aller Ableitungen

$$t^{\lambda, \mu} \equiv \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\mu} \quad (3)$$

habe ich als 'Trägheitsmatrix' bezeichnet.

Die Differentialformen

$$dy^\lambda \equiv t^{\lambda, \mu} dx^\mu \quad (4)$$

sind also totale Differentiale.

Die zur Lorentzwelt gehörige metrische Grundform wird gegeben durch

$$ds^2 = e_\alpha dy^\alpha dy^\alpha \quad (5)$$

und geht daher nach (4) über in

$$ds^2 = L_{, \mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (6)$$

mit

$$L_{, \mu\nu} \equiv e_\alpha t^{\alpha, \mu} t^{\alpha, \nu}. \quad (6')$$

Der Leitgedanke der Theorie kann nun wie folgt umschrieben werden: *Primär* werden die totalen Differentialformen (4) durch allgemeine lineare Differentialformen

$$g^{\lambda, \cdot} \equiv g^{\lambda, \cdot}_{\cdot \mu} dx^{\mu} \quad (7)$$

ersetzt. *Sekundär* geht also die Grundform (5) über in

$$ds^2 = e_{\alpha} g^{\alpha, \cdot} g^{\alpha, \cdot}, \quad (8_0)$$

explizit also in

$$ds^2 = G_{, \mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (8)$$

mit

$$G_{, \mu\nu} \equiv e_{\alpha} g^{\alpha, \cdot}_{\cdot \mu} g^{\alpha, \cdot}_{\cdot \nu}. \quad (8')$$

Sekundär wird also eine Riemannmetrik induziert.

Die weitere Entwicklung erfordert, dass man die lineare Gruppe der Formentransformationen (Lorentzgruppe) von der Gruppe aller Parametertransformationen trennt. Die der Formengruppe dienlichen Zeiger stehen links vom Komma, die der Parametergruppe dienlichen rechts.

Die 'Basismatrix' $\|g^{\lambda, \cdot}_{\cdot \mu}\|$, also die Matrix der Formen (7), kann natürlich immer durch den Ansatz

$$g^{\lambda, \cdot}_{\cdot \mu} = t^{\lambda, \cdot}_{\cdot \alpha} h^{\alpha, \cdot}_{\cdot \mu} \quad (9)$$

auf eine nichtsinguläre Trägheitsmatrix zurückgeführt werden. Offenbar muss man bei jeder konkreten Aufgabe zuerst die geeigneten Parameter gemäss (2) einbringen und damit nach (3) auch die Trägheitsmatrix. Die entscheidenden Unbekannten sind daher die Komponenten des Parametertensors $h^{\alpha, \cdot}_{\cdot \mu}$. Dementsprechend habe ich die Matrix

$$\|h^{\alpha, \cdot}_{\cdot \mu}\| \quad (10)$$

als 'Kernmatrix' bezeichnet.

Bedeutet $\Delta_{, \cdot \mu}^{\lambda, \cdot}$ die zum Element $h^{\alpha, \cdot}_{\cdot \mu}$ gehörige Unterdeterminante und Δ die Determinante von (10), so werden durch

$$\bar{h}_{, \lambda}^{\cdot \mu} \equiv \frac{\Delta_{, \cdot \mu}^{\lambda, \cdot}}{\Delta} \quad (10')$$

die Elemente der Transponierten der Inversen von (10) definiert. Die Matrix

$$\|\bar{h}_{, \lambda}^{\cdot \mu}\| \quad (\bar{10})$$

bezeichne ich daher kurz als die 'Transverse' der Kernmatrix (10).

Aus dem Gesagten geht hervor, dass man zuerst die Lorentzwelt mitsamt dem gewünschten Parametersystem vorgeben muss, um dann anschliessend das Feld gemäss (9) in die Lorentzwelt einzubetten.

Für das in [1] beschriebene und in allen meinen früheren Arbeiten mit der einzigen Ausnahme [2] verwendete Modell der linearen Feldtheorie bildet also die Lorentzwelt gleichsam das kosmologische Knochengerüst. Inskünftig werde ich diesen Sachverhalt kurz wie folgt ausdrücken: Die Lorentzwelt ist die 'Trägheitswelt' des beschriebenen Modells.

Die Notwendigkeit dieses Begriffs kann durch folgende Feststellungen belegt werden: Verzichtet man auf die Trägheitsmatrix und operiert also nur mit der Basis-matrix, so kann man auf strenge Lösungen stossen, die ganz unwahrscheinlich verzerrte Räume liefern. Die Vorstellung einer reinen Vakuumdynamik erweckt also erhebliche Bedenken. Mathematisch betrachtet: Durch Differentialgleichungen allein kann man keine globale Entscheidung treffen. Raumverzerrungen kann man vermeiden, wenn man als Grenzbedingung Anpassung an die Trägheitswelt fordert.

Aus der Literatur [3] kann man entnehmen, dass man auch im Bereich der quadratischen Feldtheorie auf unwahrscheinliche Raumverzerrungen gestossen ist. Es wird aber kein Korrektiv erwähnt.

Der Hauptvorteil des beschriebenen Modells beruht offenbar auf der Ebenheit seiner Trägheitswelt. Ihm steht aber der Nachteil gegenüber, dass die unbezweifelbare systematische Rotverschiebung nicht hergeleitet werden kann.

Alle Modelle mit systematischer Rotverschiebung gründen sich auf das Friedman'sche Linienelement, dessen räumlichen Kern die S_3 (3-Sphäre) bildet. Es stellt sich daher die Frage, ob die lineare Feldtheorie auf solche Modelle übertragen werden kann. Einen ersten Beitrag dazu habe ich in [2] geliefert, mich dabei aber ganz auf das Kosmologische beschränkt.

In der vorliegenden Arbeit will ich nun den Gegenstand ausführlicher behandeln und zwar anhand eines Beispiels von ausgezeichneter Symmetrie, nämlich der Desitterwelt. Der dazu passende Titel würde also lauten: *Die Desitterwelt als Trägheitswelt der linearen Feldtheorie*.

Aus diesem Beispiel ist dann zu entnehmen, wie man in anderen Fällen vorgehen kann.

2. Definition der Desitterwelt

Der 'Kegelschnitt'

$$\Omega(y) \equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - y_5^2 = a^2 \quad (1_0)$$

im fünfdimensionalen Euklidischen Raum mit der metrischen Grundform

$$dS^2 \equiv -\Omega(dy) \quad (1_1)$$

ist eine metrisch homogene vierdimensionale Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit einer positiven und drei negativen Dimensionen.

Zwecks Parameterwahl setzen wir vorerst

$$\left. \begin{aligned} y_i &= az_i \cos \tau \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\ y_5 &= a \sin \tau \\ dS &= ads \end{aligned} \right\} \quad (2_0)$$

und erhalten

$$\omega(z) \equiv z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 1 \quad (2_1)$$

und

$$ds^2 \equiv d\tau^2 - \cos^2 \tau \cdot \omega(dz). \quad (2_2)$$

Hierauf führen wir in der $S_3(2_1)$ Polarkoordinaten ein:

$$\left. \begin{aligned} z_1 = x &= \sin \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ z_2 = y &= \sin \rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ z_3 = z &= \sin \rho \cos \vartheta \\ z_4 = u &= \cos \rho. \end{aligned} \right\} \quad (3_0)$$

Die Grundform (2₂) verwandelt sich dadurch in

$$ds^2 \equiv d\tau^2 - \text{Cos}^2 \tau d\sigma^2 \quad (3_1)$$

mit

$$d\sigma^2 \equiv d\rho^2 + \sin^2 \rho (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (3_2)$$

Die Desitterwelt ist damit geometrisch definiert und mit den dimensionslosen Polarparametern τ , ρ , ϑ und φ versehen. Doch das in der Einleitung skizzierte Verfahren kann nicht zum Ziel führen, weil den 5 Koordinaten y nur 4 Parameter zur Verfügung stehen.

Um also die lineare Feldtheorie zu übertragen, muss man sich zuerst 4 lineare Differentialformen der 4 Parameter verschaffen oder – anders ausgedrückt – 4 unabhängige Vektorfelder innerhalb der Desitterwelt. Eines dieser Vektorfelder muss zeitartig sein, die 3 restlichen dagegen raumartig. Offenbar muss man weiter verlangen, dass die raumartigen Vektorfelder in jedem Punkt der 3-Sphäre (S_3) ein reguläres Dreibein liefern oder – wie der Topologe sagt – ‘parallelisierbar’ sind.

Es ist nun ein glücklicher Umstand, dass die S_3 diese überaus seltene Eigenschaft besitzt oder – anschaulich ausgedrückt – wirbelfreie Vektorfelder zulässt.

3. Parallelisierung der S_3

Nach Abschnitt 2(2₁) und (3₀) sind x , y , z , u orthogonale Koordinaten einer S_3 vom Radius 1 in einem vierdimensionalen Euklidischen Raum E_4 .

Wir betrachten nun das Vierbein

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{x} &= (x, \quad y, \quad z, \quad u) \\ \mathfrak{y} &= (y, \quad -x, \quad u, \quad -z) \\ \mathfrak{z} &= (z, \quad -u, \quad -x, \quad y) \\ \mathfrak{u} &= (u, \quad z, \quad -y, \quad -x) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

das offenbar ein orthogonales Einheitssystem in diesem E_4 darstellt.

Wählen wir jetzt u als Radialvektor, so liefern die Vektoren \mathfrak{x} , \mathfrak{y} , \mathfrak{z} ein orthogonales Tangendendreibein, falls man sie parallel mit sich selbst in die Spitze von \dot{u} verschiebt. Um dieses Dreibein vermittle der Parameter innerhalb der S_3 darzustellen, machen wir folgenden Ansatz:

$$\frac{d\mathfrak{u}}{d\sigma_1} = \lambda_1 \mathfrak{x}, \quad (2_1)$$

$$\frac{d\mathfrak{u}}{d\sigma_2} = \lambda_2 \mathfrak{y}, \quad (2_2)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\sigma_3} = \lambda_3 \mathfrak{z}. \quad (2_3)$$

Mit den Abkürzungen

$$\left(\frac{d\rho}{d\sigma_i}, \frac{d\vartheta}{d\sigma_i}, \frac{d\varphi}{d\sigma_i} \right) \equiv (\rho_{i'}, \vartheta_{i'}, \varphi_{i'}) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2')$$

erhalten wir für jeden Index i 4 homogene lineare Gleichungen vom Range 3 für die 4 Unbekannten $\rho_{i'}$, $\vartheta_{i'}$, $\varphi_{i'}$ und λ_i .

Setzen wir $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, so repräsentieren die Lösungen 3 Einheitsvektoren in der S_3 gemäss folgender Zusammenstellung:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{i'} &= p^{i',1} \\ \sin \rho \vartheta_{i'} &= p^{i',2} \\ \sin \rho \sin \vartheta \varphi_{i'} &= p^{i',3} \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (3_0)$$

Die rechten Seiten ergeben miteinander eine orthogonale Einheitsmatrix $\|p^{i',k}\|$, deren Komponenten aus folgender Tabelle zu entnehmen sind.

$$\left. \begin{aligned} p^{1',1} &= \sin \vartheta \cos \varphi \\ p^{1',2} &= \cos \rho \cos \vartheta \cos \varphi + \sin \rho \sin \varphi \\ p^{1',3} &= \sin \rho \cos \vartheta \cos \varphi - \cos \rho \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3_1)$$

$$\left. \begin{aligned} p^{2',1} &= \sin \vartheta \sin \varphi \\ p^{2',2} &= \cos \rho \cos \vartheta \sin \varphi - \sin \rho \cos \varphi \\ p^{2',3} &= \sin \rho \cos \vartheta \sin \varphi + \cos \rho \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3_2)$$

$$\left. \begin{aligned} p^{3',1} &= \cos \vartheta \\ p^{3',2} &= -\cos \rho \sin \vartheta \\ p^{3',3} &= -\sin \rho \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (3_3)$$

Bezeichnen wir auch hier die transverse Matrix mit $\|p_{i',k}\|$ so gilt natürlich die Gleichung

$$p_{i',k} = p^{i',k}. \quad (4_0)$$

Nützlich sind weiter folgende Ableitungsrelationen:

$$\left. \begin{aligned} p^{i',2} &= \cos \rho \frac{\partial p^{i',1}}{\partial \vartheta} - \frac{\sin \rho}{\sin \vartheta} \frac{\partial p^{i',1}}{\partial \varphi} \\ p^{i',3} &= -\frac{\partial p^{i',2}}{\partial \rho}. \end{aligned} \right\} \quad (4_1)$$

Im nächsten Abschnitt benötigen wir die partiellen Ableitungen der $p^{i,k}$ dargestellt als lineare Kombinationen aus den $p^{i,1}$, $p^{i,2}$ und $p^{i,3}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p^{i,1}}{\partial \rho} &= 0 \\ \frac{\partial p^{i,1}}{\partial \vartheta} &= \cos \rho p^{i,2} + \sin \rho p^{i,3} \\ \frac{\partial p^{i,1}}{\partial \varphi} &= \sin \vartheta (-\sin \rho p^{i,2} + \cos \rho p^{i,3}) \end{aligned} \right\} \quad (5_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p^{i,2}}{\partial \rho} &= -p^{i,3} \\ \frac{\partial p^{i,2}}{\partial \vartheta} &= -\cos \rho p^{i,1} \\ \frac{\partial p^{i,2}}{\partial \varphi} &= \sin \rho \sin \vartheta p^{i,1} + \cos \vartheta p^{i,3} \end{aligned} \right\} \quad (5_2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p^{i,3}}{\partial \rho} &= p^{i,2} \\ \frac{\partial p^{i,3}}{\partial \vartheta} &= -\sin \rho p^{i,1} \\ \frac{\partial p^{i,3}}{\partial \varphi} &= -\cos \rho \sin \vartheta p^{i,1} - \cos \vartheta p^{i,2} \end{aligned} \right\} \quad (5_3)$$

Schliesslich rändern wir noch die Matrix der $p^{i,k}$ durch die Festsetzungen

$$p^{0,0} = 1; \quad p^{i,0} = p^{0,k} = 0, \quad (6_0)$$

und erhalten die vierreihige Matrix $\|p^{\lambda,\mu}\|$ mit der Eigenschaft

$$p_{\lambda;\mu} = p^{\lambda,\mu}. \quad (6_1)$$

Damit sind Hilfsmittel bereitgestellt, um für die Desitterwelt eine Trägheitsmatrix zu definieren.

4. Die Trägheitsmatrix

Wir setzen

$$t^{\lambda,\mu} \equiv L_{\mu} p^{\lambda,\mu} \quad (1_0)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} L_0 &= 1 \\ L_1 &= \cos \tau \\ L_2 &= \cos \tau \sin \rho \\ L_3 &= \cos \tau \sin \rho \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (1_1)$$

Dabei ist μ bei L_μ nur ein Begleitzeiger zum Parameterzeiger μ bei p und wird daher bei der Anwendung der Summationsvorschrift nicht mitgezählt.

Als erste Folge ergeben sich

$$t^{0,0} = 1; \quad t^{2,0} = t^{0,k} = 0. \quad (1_2)$$

Weiter folgt

$$t_{\lambda,}{}^\mu \equiv L^\mu p_{\lambda,}{}^\mu \quad (2_0)$$

mit

$$L^\mu = L_\mu^{-1} \quad (2_1)$$

und

$$t_{0,}{}^0 = 1; \quad t_{i,}{}^0 = t_{0,}{}^k = 0. \quad (2_2)$$

Gestützt auf die so festgelegte Trägheitsmatrix definieren wir nun die 'Trägheitsformen' durch

$$t^\lambda \equiv t^\lambda{}_{,\mu} dx^\mu \quad (3_0)$$

und

$$x^0 = \tau; \quad x^1 = \rho; \quad x^2 = \vartheta; \quad x^3 = \varphi. \quad (3_1)$$

Die 'Trägheitsmetrik' ist somit gegeben durch

$$ds^2 \equiv e_\alpha t^\alpha t^\alpha, \quad (4_0)$$

nach (3₀) also durch

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &\equiv L_{,\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma \\ L_{,\rho\sigma} &\equiv e_\alpha t^\alpha{}_{,\rho} t^\alpha{}_{,\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (4_1)$$

Die weitere Berechnung aufgrund von (1₀) ergibt schliesslich

$$\left. \begin{aligned} L_{,00} &= L_0^2; \quad L_{,ii} = -L_i^2; \\ L_{,\rho\sigma} &= 0 \quad (\rho \neq \sigma) \end{aligned} \right\} \quad (4_2)$$

explizit also

$$ds^2 \equiv d\tau^2 - \text{Cos}^2 \tau d\sigma^2, \quad (4_3)$$

d.h. die metrische Grundform der Desitterwelt gemäss Abschnitt 2(3₀), (3₁).

Die Formen (3₀) sind keine totalen Differentiale und eine Aufspaltung der Ableitungen der $t^\lambda{}_{,\mu}$ in $\gamma^\lambda{}_{,\mu\nu}$ und $l^\lambda{}_{,\mu\nu}$ führt nicht zum Ziel.

Es empfiehlt sich daher, alle $\partial t^\lambda{}_{,\mu} / \partial x^\nu \neq 0$ linear aus den $t^\lambda{}_{,\mu}$ zu kombinieren. Gestützt auf Abschnitt 3 (4₁)–(4₃) findet man

$$\frac{\partial t^{i,}{}_{,k}}{\partial x^\lambda} = A^{n,}{}_{k\lambda} t^{i,}{}_{,n}, \quad (5_0)$$

wobei also rechts über n von 1–3 summiert wird. Für die Koeffizienten rechts ergibt sich folgende Zusammenstellung:

$$\Lambda^n{}_{;k0} = \delta^n_k T_{g\tau} \quad (5_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Lambda^1{}_{;22} &= -\sin \rho \cos \rho \\ \Lambda^1{}_{;33} &= -\sin \rho \cos \rho \sin^2 \vartheta \\ \Lambda^2{}_{;33} &= -\sin \vartheta \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (5_2)$$

$$\left. \begin{aligned} \Lambda^2{}_{;12} &= \Lambda^2{}_{;21} = \cotg \rho \\ \Lambda^3{}_{;13} &= \Lambda^3{}_{;31} = \cotg \rho \\ \Lambda^3{}_{;23} &= \Lambda^3{}_{;32} = \cotg \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (5_3)$$

$$\left. \begin{aligned} \Lambda^1{}_{;23} &= -\Lambda^1{}_{;32} = \sin^2 \rho \sin \vartheta \\ \Lambda^2{}_{;31} &= -\Lambda^2{}_{;13} = \sin \vartheta \\ \Lambda^3{}_{;12} &= -\Lambda^3{}_{;21} = \sin^{-1} \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (5_4)$$

Da wir nur die nichtverschwindenden Koeffizienten notiert haben, beachte man in der Gruppe (5₁) die latente Asymmetrie in den unteren Zeigern, nämlich $\Lambda^n{}_{;0k} = 0$.

Mit der Abkürzung

$$t^{\lambda, \mu\nu} \equiv \frac{\partial t^{\lambda, \mu}}{\partial x^\nu} \quad (6_0)$$

definieren wir noch das Symbol

$$t^{\lambda, \mu\nu} \equiv t_{\alpha, \lambda} t^{\alpha, \mu\nu}. \quad (6_1)$$

Seine Auswertung gemäss (5₀) liefert

$$t^{\lambda, \mu\nu} = \Lambda^{\lambda, \mu\nu}. \quad (6_2)$$

5. Die Basismatrix

Gestützt auf die Desitterwelt als Trägheitswelt definieren wir nun eine Basismatrix

$$g^{\lambda, \mu} \equiv t^{\lambda, \alpha} h^{\alpha, \mu} \quad (1_0)$$

die gestattet, einen Energieimpulstensor zu konstruieren.

Dabei bilden, wie schon in der Einleitung erwähnt, die $h^{\lambda, \mu}$ einen gemischten Parametertensor 2. Stufe, den wir 'Kerntensor' nennen wollen.

Aus (1₀) folgt unmittelbar

$$g_{\lambda, \mu} \equiv t_{\lambda, \alpha} \bar{h}^{\alpha, \mu}, \quad (1_1)$$

worin die 'Transverse' $\bar{h}^{\alpha, \mu}$ zu $h^{\lambda, \mu}$ schon durch Abschnitt 1 (10') definiert worden ist.

Der durch die Basis induzierte metrische Tensor wird gegeben durch

$$G_{, \mu\nu} \equiv e_\alpha g^{\alpha, \mu} g^{\alpha, \nu} \quad (2_0)$$

und seine Auswertung liefert

$$G_{,\mu\nu} \equiv L_{,\rho\sigma} h_{,\dot{\rho}}^{\dot{\rho}};_{\dot{\mu}} h_{,\dot{\sigma}}^{\dot{\sigma}};_{\dot{\nu}} \tag{2_1}$$

gemäss Abschnitt 4 (4₁).

Entsprechend folgen aus (1₁)

$$G_{,\mu\nu} \equiv e^{\alpha} g_{\alpha;,\dot{\mu}}^{\dot{\mu}};_{\dot{\nu}} g_{\alpha;,\dot{\nu}}^{\dot{\nu}} \tag{2_2}$$

und

$$G^{,\mu\nu} \equiv L^{,\rho\sigma} \bar{h}_{,\dot{\rho}}^{\dot{\rho}};_{\dot{\mu}} \bar{h}_{,\dot{\sigma}}^{\dot{\sigma}};_{\dot{\nu}} \tag{2_3}$$

Beachtet man nun, dass in den zugrunde gelegten Polarparametern der Tensor $L_{,\rho\sigma}$ sich gemäss Abschnitt 4 (4₂) spezialisiert, so erhält man für den metrischen Tensor die vereinfachten Darstellungen

$$G_{,\mu\nu} \equiv L_{,\rho\rho} h_{,\dot{\rho}}^{\dot{\rho}};_{\dot{\mu}} h_{,\dot{\rho}}^{\dot{\rho}};_{\dot{\nu}} \tag{3_0}$$

und

$$G^{,\mu\nu} \equiv L^{,\rho\rho} \bar{h}_{,\dot{\rho}}^{\dot{\rho}};_{\dot{\mu}} \bar{h}_{,\dot{\rho}}^{\dot{\rho}};_{\dot{\nu}} \tag{3_1}$$

Dabei mögen anschliessend noch die expliziten Koeffizienten $L_{,\rho\rho}$ Platz finden:

$$\left. \begin{aligned} L_{,00} &= 1 \\ L_{,11} &= -\text{Cos}^2 \tau \\ L_{,22} &= -\text{Cos}^2 \tau \sin^2 \rho \\ L_{,33} &= -\text{Cos}^2 \tau \sin^2 \rho \sin^2 \vartheta \end{aligned} \right\} \tag{3_2}$$

und

$$L^{,\rho\rho} = L_{,\rho\rho}^{-1} \tag{3_3}$$

Bezeichnen wir schliesslich die Determinante der Basismatrix mit g und diejenige der Kernmatrix mit $d(h)$ so folgt aus (2₀)

$$g = \sqrt{-G} \tag{4_0}$$

und aus (2₁)

$$g = \sqrt{-L} d(h) \tag{4_1}$$

6. Die Feldstärken

Gestützt auf die Basismatrix $g^{\lambda;,\mu}$ definieren wir jetzt die Feldstärken durch die Identität

$$f^{\lambda;,\dot{\mu}\dot{\nu}} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^{\lambda;,\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g^{\lambda;,\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) \tag{1_0}$$

Diese Definition stimmt formal genau überein mit derjenigen, welche in [1] Abschnitt 2 (12₁) vorgeschlagen worden ist. Dass in den beiden Fällen verschiedene Trägheitswelten zugrunde liegen, tritt also formal nicht in Erscheinung.

Hieraus ergibt sich die wichtige Folgerung, dass alle Relationen, die man allein gestützt auf die Basismatrix herleiten kann, von der zugrunde liegenden Trägheitswelt unabhängig sind. Natürlich muss man dabei stillschweigend voraussetzen, dass in allen Fällen Trägheitsmatrix und Kernmatrix den Rang 4 haben.

Wie in [1] Abschnitt 2 (12₂) definieren wir weiter den Tensor

$$f_{;\mu\nu}^{\lambda;\cdot} \equiv g_{\alpha;\cdot}^{\lambda} l_{;\mu\nu}^{\alpha;\cdot} \quad (1_1)$$

So geschrieben besitzt er auch die eben geschilderten Vorzüge des Tensors (1₀).

Jetzt aber führen wir gemäss Abschnitt 5 (1₀) und (1₁) statt $g_{;\mu}^{\lambda;\cdot}$ explizit $t_{;\mu}^{\lambda;\cdot}$ und $h_{;\mu}^{\lambda;\cdot}$ ein. Vermittels einschlägiger früherer Formeln ergibt sich folgende Darstellung für den Tensor (1₁):

$$f_{;\mu\nu}^{\lambda;\cdot} \equiv \frac{1}{2} \bar{h}_{;\alpha}^{\lambda;\cdot} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_{;\nu}^{\alpha;\cdot}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{;\mu}^{\alpha;\cdot}}{\partial x^{\nu}} \\ + t_{;\beta\mu}^{\alpha;\cdot} h_{;\nu}^{\beta;\cdot} - t_{;\beta\nu}^{\alpha;\cdot} h_{;\mu}^{\beta;\cdot} \end{array} \right\}. \quad (2_0)$$

Darin sind die $t_{;\mu\nu}^{\lambda;\cdot}$ die für eine beliebig vorgegebene Trägheitsmatrix $t_{;\mu}^{\lambda;\cdot}$ durch Abschnitt 4 (6₀) und (6₁) definierten Symbole.

Speziell im Falle der Desitterwelt erhalten wir nach Abschnitt 4 (6₂) statt (2₀) den Tensor

$$f_{;\mu\nu}^{\lambda;\cdot} \equiv \frac{1}{2} \bar{h}_{;\alpha}^{\lambda;\cdot} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_{;\nu}^{\alpha;\cdot}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{;\mu}^{\alpha;\cdot}}{\partial x^{\nu}} \\ + \Lambda_{;\beta\mu}^{\alpha;\cdot} h_{;\nu}^{\beta;\cdot} - \Lambda_{;\beta\nu}^{\alpha;\cdot} h_{;\mu}^{\beta;\cdot} \end{array} \right\}, \quad (2_1)$$

wo nun die Λ -Koeffizienten aus Abschnitt 4 (5₁)–(5₄) zu entnehmen sind.

Da wir im nächsten Paragraphen die Feldgleichungen behandeln, empfiehlt es sich, hier noch die wichtigsten Formeln der Rechentechnik zusammen zu stellen.

Für die Determinante g der Basismatrix gilt

$$\frac{\partial g}{\partial g_{;\mu}^{\lambda;\cdot}} = g g_{;\lambda}^{\lambda;\cdot\mu} \quad (3_0)$$

Durch

$$g_{;\nu}^{\lambda;\cdot} g_{;\mu}^{\nu;\cdot} = \delta_{\mu}^{\lambda} \quad (3_1)$$

resp.

$$g_{;\lambda}^{\nu;\cdot} g_{;\nu}^{\lambda;\cdot} = \delta_{\lambda}^{\mu} \quad (3_2)$$

sind die Zeilen – resp. Spalten – relationen der Basismatrix gegeben.

Weiter gelten die Ableitungsformeln

$$\frac{\partial g_{\alpha;\cdot}^{\beta}}{\partial g_{;\mu}^{\lambda;\cdot}} = -g_{\lambda;\cdot}^{\beta} g_{\alpha;\cdot}^{\mu} \quad (4_0)$$

$$\frac{\partial G_{;\alpha\beta}}{\partial g_{;\mu}^{\lambda;\cdot}} = e_{\lambda} (\delta_{\alpha}^{\mu} g_{;\beta}^{\lambda;\cdot} + \delta_{\beta}^{\mu} g_{;\alpha}^{\lambda;\cdot}) \quad (4_1)$$

$$\frac{\partial G_{;\alpha\beta}}{\partial g_{;\mu}^{\lambda;\cdot}} = -(G_{;\mu\beta} g_{;\lambda;\cdot}^{\alpha} + G_{;\mu\alpha} g_{;\lambda;\cdot}^{\beta}) \quad (4_2)$$

sowie

$$\frac{\partial f_{;\alpha\beta\dot{\gamma}}}{\partial \left(\frac{\partial g^{\lambda;\nu}}{\partial x^\mu} \right)} = \frac{1}{2} g_{\lambda;\alpha} (\delta_\beta^\mu \delta_\gamma^\nu - \delta_\gamma^\mu \delta_\beta^\nu), \tag{5_0}$$

und mit

$$f_{;\alpha} \equiv f_{;\beta\dot{\alpha}\dot{\beta}} \tag{5_1}$$

$$\frac{\partial f_{;\alpha}}{\partial \left(\frac{\partial g^{\lambda;\nu}}{\partial x^\mu} \right)} = \frac{1}{2} (\delta_\alpha^\mu g_{\lambda;\nu} - \delta_\alpha^\nu g_{\lambda;\mu}). \tag{5_2}$$

Weiter mögen noch die Regeln betreffend die Zeigerverschiebungen Platz finden.

Das Herauf- und Herunterschieben der Formenzeiger geschieht mit Hilfe des Eisenhardt'schen Tensors

$$e^{\lambda\mu} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \equiv e_{\lambda\mu} \tag{6_0}$$

für den aber die Abkürzungen

$$e^\lambda = e^{\lambda\lambda} = e_{\lambda\lambda} = e_\lambda \quad (\lambda = 0, 1, 2, 3) \tag{6_0}$$

für die Hauptdiagonale genügen.

Nach den ausreichenden Mustern

$$T^{\lambda,} = e^\lambda T_{\lambda,} \tag{6_1}$$

und

$$T_{\lambda,} = e_\lambda T^{\lambda,} \tag{6_2}$$

ist also keine Summation erforderlich.

Das Herauf- und Herunterschieben der Parameterzeiger geschieht wie in der quadratischen Feldtheorie mittels des metrischen Tensors nach den Mustern

$$T^{\cdot\rho} = G^{\cdot\rho\alpha} T_{\cdot\alpha} \tag{7_1}$$

und

$$T_{\cdot\rho} = G_{\cdot\rho\alpha} T^{\cdot\alpha}. \tag{7_2}$$

Die horizontale Zeigerverschiebung habe ich in [4] Abschnitt 2 beschrieben. Sie ist für die lineare Feldtheorie charakteristisch und soll daher zur Erleichterung des Lesers hier noch einmal erläutert werden.

In einem voll ausgeschriebenen Tensor der linearen Feldtheorie stehen nie zwei Zeiger übereinander. Ein einzelner Zeiger beansprucht daher immer eine zweistufige Spalte, in der er entweder oben oder unten steht. Das Zeigersymbol eines Tensors mit l Formenzeigern und p Parameterzeigern ist also immer eine Zeile von $l + p$ zweistufigen

Spalten, von denen die Formenspalten links, die Parameterspalten rechts vom Komma stehen.

Bei einer einfachen horizontalen Zeigerverschiebung müssen daher immer alle Spalten starr miteinander um eine Stelle entweder nach links oder nach rechts verschoben werden.

Dabei kann man es immer so einrichten, dass die der Kommalücke anliegenden Zeiger auf gleicher Höhe stehen. Man hat dann nur noch den horizontalen Uebergang über das Komma zu definieren. Zu diesem Zweck geüen die folgenden Muster:

$$g_{\lambda;\rho} T_{,\rho\sigma} = T_{\lambda,\sigma} \quad (8_1)$$

$$g^{\lambda;\rho} T_{\lambda,\sigma} = T_{,\rho\sigma} \quad (8_2)$$

$$g^{\lambda;\rho} T_{,\rho\sigma} = T^{\lambda,\sigma} \quad (8^1)$$

$$g_{\lambda;\rho} T^{\lambda,\sigma} = T_{,\rho\sigma} \quad (8_2)$$

7. Die Feldgleichungen

Die wichtigsten Invarianten der linearen Feldtheorie sind drei aus den Feldstärken aufgebaute quadratische Formen, nämlich

$$H_1 \equiv f_{;\alpha\beta\gamma} f_{;\alpha\beta\gamma} \quad (1_1)$$

$$H_2 \equiv f_{;\alpha\beta\gamma} f_{;\gamma\beta\alpha} \quad (1_2)$$

$$H_3 \equiv f_{;\alpha\beta\gamma} f_{;\gamma\alpha\beta} \quad (1_3)$$

Dabei ist die Summationsvorschrift dahin zu interpretieren, dass man die Zeiger α, β, γ unabhängig von einander die Ziffern 0, 1, 2, 3 durchlaufen lässt.

Jede dieser Invarianten besteht daher formal aus 64 Gliedern, von denen aber ein Teil nach Massgabe der durch die Trägheitsmatrix und die gewählte Kernmatrix erzeugten Symmetrien ausgeschieden wird.

Als Wirkungsfunktion für die Gravitation massgebend ist die Kombination.

$$H_I \equiv \frac{1}{2}H_1 + H_2 - 2H_3 \quad (2)$$

Für das Bestehen von kovarianten Energie-Impuls-Gleichungen ausschlaggebend ist lediglich die Voraussetzung, dass eine invariante quadratische Form der Feldstärken vorliegt. Mit anderen Worten, jede lineare Kombination mit konstanten Koeffizienten

$$H \equiv \Lambda_1 H_1 + \Lambda_2 H_2 + \Lambda_3 H_3 \quad (3)$$

liefert Gleichungen der erwähnten Art.

Wir können daher die in [1] Abschnitt 3 (1)–(7) auf die Lorentz- Trägheitswelt gegründeten Entwicklungen formal ungeändert auf die Desitter- Trägheitswelt gründen.

Wir wählen also irgend ein H gemäss (3) als Wirkungsfunktion und notieren die zugeordnete Wirkungsdichte

$$\mathfrak{S} \equiv Hg \quad (4_0)$$

Die zu (4₀) gehörigen Feldgleichungen haben dann folgende Gestalt:

$$\mathfrak{S}_{\lambda;\mu} \equiv \frac{\partial \mathfrak{s}_{\lambda;\mu\nu}}{\partial x^\nu} - \mathfrak{S}_{\lambda;\mu} = 0. \quad (4_1)$$

Dabei bedeuten

$$s_{\lambda; \mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \left(\frac{\partial g^{\lambda, \mu}}{\partial x^\nu} \right)} \tag{4_2}$$

die 'Quellentensor-Dichte' und

$$\mathfrak{S}_{\lambda; \mu} \equiv \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g^{\lambda, \mu}} \tag{4_3}$$

die Energieimpuls-Dichte des Feldes.

Die zu diesen Dichten gehörigen Tensoren sind

$$s_{\lambda; \mu\nu} \equiv \frac{\partial H}{\partial \left(\frac{\partial g^{\lambda, \mu}}{\partial x^\nu} \right)} \tag{4_2'}$$

und

$$S_{\lambda; \mu} \equiv \frac{\partial H}{\partial g^{\lambda, \mu}} + g_{\lambda; \mu} H. \tag{4_3'}$$

Entscheidend für das Bestehen differentieller Erhaltungssätze ist nun die Aussage, dass der Tensor (4_2') und mit ihm die Dichte (4_2) antisymmetrisch sind in den Zeigern μ und ν für jedes H gemäss (3).

Bildet man nämlich die Divergenz von $\mathfrak{S}'_{\lambda; \mu}$, so liefert die Gleichung (4_1)

$$\frac{\partial \mathfrak{S}'_{\lambda; \mu}}{\partial x^\mu} \equiv \frac{\partial^2 s_{\lambda; \mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial \mathfrak{S}_{\lambda; \mu}}{\partial x^\mu} = 0,$$

nach der erwähnten Aussage also.

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_{\lambda; \mu}}{\partial x^\mu} = 0, \tag{5}$$

d.h. den differentiellen Erhaltungssatz.

Notwendig und hinreichend zum Beweis der entscheidenden Aussage ist offenbar der Nachweis, dass diese Aussage für die einzelnen Invarianten H_1, H_2, H_3 zutrifft. Zu diesem Zweck muss man den Tensor (4_2') für jede der genannten Invarianten berechnen, gestützt auf Abschnitt 6, (3_0)-(8^2).

Die Berechnung ergibt

$$\left. \begin{aligned} s_{1 \lambda; \mu\nu} &\equiv -2f_{\lambda; \mu\nu} \\ s_{2 \lambda; \mu\nu} &\equiv g_{\lambda; \alpha} (f^{; \mu\nu \alpha} - f^{; \nu\mu \alpha}) \\ s_{3 \lambda; \mu\nu} &\equiv g_{\lambda; \mu} f^{; \nu} - g_{\lambda; \nu} f^{; \mu} \end{aligned} \right\} \tag{6_1}$$

woraus die behauptete Antisymmetrie unmittelbar ersichtlich ist.

Für die entsprechenden Energie-Impulstensenoren erhält man

$$\left. \begin{aligned} S_{1\lambda}{}^{\mu} &\equiv -4g_{\lambda}{}^{\gamma} f_{;\dot{\alpha}\dot{\beta}} f^{;\alpha\beta\mu} + g_{\lambda}{}^{\mu} H_1 \\ S_{2\lambda}{}^{\mu} &\equiv -2g_{\lambda}{}^{\gamma} f_{;\dot{\alpha}\dot{\beta}} f^{;\mu\beta\alpha} + 2g_{\lambda}{}^{\gamma} f_{;\dot{\alpha}\dot{\beta}} f^{;\beta\mu\alpha} + g_{\lambda}{}^{\mu} H_2 \\ S_{3\lambda}{}^{\mu} &\equiv 2g_{\lambda}{}^{\alpha} f_{;\dot{\alpha}} f^{;\mu\beta} - 2f_{\lambda} f^{;\mu} + g_{\lambda}{}^{\mu} H_3. \end{aligned} \right\} \quad (6_2)$$

Die genaue Uebereinstimmung dieser Identitäten mit den in [1] Abschnitt 3 (6₁) und (6₂) mitgeteilten war zu erwarten. Unsichtbar aber bleibt der wichtige Unterschied, dass in die Basismatrix Abschnitt 5 (1₂) jetzt die Trägheitsmatrix der Desitterwelt an die Stelle derjenigen der Lorentzwelt gesetzt werden muss.

8. Das Grenzfeld

Wählen wir die Einheitsmatrix als Kernmatrix, setzen wir also

$$h_{;\dot{\mu}}{}^{\lambda} \equiv \delta_{\mu}^{\lambda}, \quad (1)$$

so geht die Basismatrix nach Definition Abschnitt 5 (1₀) über in die Trägheitsmatrix der Desitterwelt, explizit also in Abschnitt 4 (1₀) und (1₀).

Die zugehörigen Feldstärken erhält man, wenn man (1) in Abschnitt 6 (2₁) einsetzt:

$$f_{;\dot{\mu}\dot{\nu}}{}^{\lambda} \equiv \frac{1}{2}(A^{\lambda}{}_{;\dot{\nu}\dot{\mu}} - A^{\lambda}{}_{;\dot{\mu}\dot{\nu}}). \quad (2_0)$$

Gestützt auf Abschnitt 4 (5₁)–(5₂) notieren wir nur alle nichtverschwindenden Komponenten und erhalten

$$f_{;\dot{0}\dot{1}}{}^1 \equiv f_{;\dot{2}\dot{0}}{}^2 \equiv f_{;\dot{0}\dot{3}}{}^3 \equiv \frac{1}{2} T g \tau, \quad (2_1)$$

sowie

$$\left. \begin{aligned} f_{;\dot{1}\dot{2}\dot{3}}{}^1 &\equiv -\sin^2 \vartheta \sin \vartheta \\ f_{;\dot{2}\dot{3}\dot{1}}{}^2 &\equiv -\sin \vartheta \\ f_{;\dot{1}\dot{2}}{}^3 &\equiv -\sin^{-1} \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (2_2)$$

Im Gegensatz zu diesem Ergebnis steht die Tatsache, dass in der Lorentzwelt alle aus (2₀) entspringenden Komponenten verschwinden. Zwischen den beiden Welten besteht also ein wichtiger Unterschied, den wir vermittels folgender Definition formulierbar machen wollen:

Das 'Grenzfeld' einer Trägheitswelt ist der Komplex aller nicht verschwindenden Feldstärken. (3)

Ist das Grenzfeld einer Trägheitswelt nicht Null, so gehört es nicht zu einer Lösung der Feldgleichungen, sondern liefert lediglich die Grenzwerte, denen sich die Feldstärken einer Lösung beim Grenzübergang $h_{;\dot{\mu}}{}^{\lambda} \rightarrow \delta_{\mu}^{\lambda}$ nähern müssen.

Es empfiehlt sich daher, den Energie-Impulstensor

$$S_{I\lambda}{}^{\mu} \equiv \frac{1}{2} S_{1\lambda}{}^{\mu} + S_{2\lambda}{}^{\mu} - 2S_{3\lambda}{}^{\mu} \quad (4)$$

des Grenzfeldes für den Fall der Desitterwelt zu berechnen. Vermittels der Identitäten (1), (2₁) und (2₂) muss man also die Invarianten Abschnitt 7 (1₁)–(1₃) und die Tensoren Abschnitt 7 (6₂) spezialisieren und anschliessend die letzteren gemäss (4) kombinieren.

Es ergeben sich folgende Werte:

$$S_{I0};^0 = 3 \quad (5_0)$$

$$S_{I0};^k = 0 \quad (5_1)$$

$$S_{Ii};^0 = 0 \quad (5_2)$$

$$S_{Ii};^k = -t_i;^k \quad (5_3)$$

Der Volumfaktor g spezialisiert sich nach Abschnitt 5 (4₁) auf

$$g = \text{Cos}^3 \tau \sin^2 \rho \sin \vartheta$$

und für die Tensordichten

$$\mathfrak{S}_{I\lambda};^\mu \equiv S_{I\lambda};^\mu g$$

reduzieren sich die differentiellen Erhaltungssätze auf die 3 verschwindenden Divergenzen

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_{Ii};^1}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathfrak{S}_{Ii};^2}{\partial \vartheta} = 0 \quad (6)$$

Die Gleichungen (5₀) und (5₃) gelten nur für die dimensionslose Grundform Abschnitt 2 (3₁) und (3₂), nämlich

$$ds^2 \equiv d\tau^2 - \text{Cos}^2 \tau d\sigma^2. \quad (7_0)$$

Tritt an deren Stelle die absolute Grundform

$$dS^2 \equiv a^2 ds^2, \quad (7_1)$$

so gehen (5₀) und (5₃) über in

$$S_{I0};^0 = \frac{3}{a^2} \quad (8_0)$$

und

$$S_{Ii};^k = \frac{-t_i;^k}{a^2} \quad (8_3)$$

Die kosmologische Konstante der Desitterwelt erscheint also in (8₀) als Grenzenergie-dichte.

Das Vorzeichen der Wirkungsfunktion H_I ist durch Abschnitt 7 (2) so festgelegt, wie es dem Bedürfnis einer reinen Feldtheorie entspricht. Sollte sich aber herausstellen, dass der phänomenologische Energietensor vorderhand unentbehrlich ist – Gründe sprechen dafür – so muss das entgegengesetzte Vorzeichen gewählt werden (vgl. [1] Abschnitt 3).

9. Ergänzende Bemerkungen

Nach dem Vorausgehenden ist klar, dass jede der in [2] angegebenen kosmologischen Lösungen im Prinzip als Trägheitswelt für die lineare Feldtheorie in Betracht gezogen werden kann. Jetzt stellt sich die Frage, ob es möglich ist, diese Lösungen zu

bewerten. Tatsächlich existiert ein Kriterium, das gestattet, die Lösungen *geometrisch* zu qualifizieren.

Dieses Kriterium wird geliefert durch die exakte Darstellung einer elektromagnetischen Welle gemäss folgendem Ansatz. Vom Viererpotential

$$(\phi, \phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3) \quad (1)$$

sei nur die letzte Komponente von Null verschieden und einzig abhängig vom Zeitparameter τ und vom Distanzparameter ρ gemäss

$$\phi_3 \equiv \phi(\tau, \rho). \quad (2)$$

Für eine beliebige Friedman'sche Trägheitswelt tritt nun anstelle von Abschnitte 2 (3₁) und (3₂) die Definition

$$ds^2 \equiv d\tau^2 - R^2(\tau)d\sigma^2 \quad (3_1)$$

mit

$$d\sigma^2 \equiv d\rho^2 + \sin^2 \rho (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi). \quad (3_2)$$

Dabei bedeutet $R(\tau)$ den dimensionslosen Radius der 3-Sphäre. Durch diese Angaben ist die elektromagnetische Welle bestimmt.

Zur Diskussion der Lösung benötigt man noch die Gleichung der Lichtbewegung. Man erhält sie durch Nullsetzen von (3₁) und kann sie wegen des Fehlens von ϑ und φ schreiben in der Gestalt

$$d\tau - R(\tau)d\rho = 0. \quad (4)$$

Die Berechnungen zeigen nun, dass einzig die Desitterwelt im engsten Sinne der Wortes vor allen übrigen Friedmanwelten ausgezeichnet ist durch einen befriedigenden Zusammenhang zwischen den Parametern τ und ρ . Dieser Zusammenhang beruht auf dem Umstand, dass einzig durch die Desitterwelt das Prinzip der konstanten Krümmung auf 4 Dimensionen erweitert wird.

Ich begnüge mich daher, die Lösung für die Desitterwelt anzugeben. Wir setzen jetzt also

$$R(\tau) \equiv \text{Cos } \tau \quad (5_0)$$

und erhalten nach Unterdrückung der Phasenkonstanten die Lösung

$$\phi \equiv C \cos(\nu_0(\text{arc sin}(Tg\tau) - \rho)). \quad (5_1)$$

Hierin ist ν_0 die Frequenz der Lichtwelle im Ursprung $\tau = \rho = 0$, denn für kleine τ und ρ geht (5₁) über in

$$\phi = C \cos(\nu_0(\tau - \rho)). \quad (5_1')$$

Für die Lichtbewegung ergibt sich aus (4) und (5₀)

$$\rho = \text{arctg}(\text{Sin } \tau)$$

und daraus weiter

$$\text{tg } \rho = \text{Sin } \tau$$

$$\cos \rho = \frac{1}{\text{Cos } \tau}$$

$$\sin \rho = Tg \tau$$

also schliesslich

$$\rho = \arcsin(Tg\tau). \quad (5_2)$$

In der nächsten Umgebung desjenigen Weltpunktes, den die Lichtwelle im Zeitpunkt τ erreicht, schreiben wir daher die Lösung in der Gestalt

$$\phi \equiv C \cos(\nu_0(\arcsin(Tg(\tau + \epsilon)) - \arcsin(Tg(\tau + \eta)))). \quad (5_3)$$

Dabei sind ϵ und μ sehr kleine Zahlen.

In erster Näherung aber gelten

$$Tg(\tau + \epsilon) = Tg\tau + \frac{\epsilon}{\cos^2\tau}$$

und

$$\arcsin\left(Tg\tau + \frac{\epsilon}{\cos^2\tau}\right) = \arcsin(Tg\tau) + \frac{\epsilon}{\cos\tau}$$

Wir erhalten daher für ϕ zur Zeit τ die Näherung

$$\phi = C \cos\left(\nu_0 \frac{\epsilon - \eta}{\cos\tau}\right). \quad (5_3')$$

Für die zugehörige Frequenz ν gilt also die Gleichung

$$\nu = \frac{\nu_0}{\cos\tau}, \quad (5_4)$$

in der sich nach *Max von Laue* die *exakte* Deutung der *Hubble'schen* Rotverschiebung ausspricht [5].

Aus der Gleichung (5₂) schliesslich ergibt sich als sehr beachtenswerte Folgerung der Grenzwert

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho(\tau) = \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

Wir richten daher jetzt unsere Aufmerksamkeit auf die räumliche 3-Sphäre, kurz die S_3 , und bezeichnen den Pol $\rho = 0$ mit P , den Aequator $\rho = \pi/2$ mit A und den Gegenpol $\rho = \pi$ mit \bar{P} . Der Aequator teilt also die S_3 in 2 Hälften. Diejenige mit dem Zentrum P heisse H_A , die mit dem Zentrum \bar{P} entsprechend \bar{H}_A .

Aus (6) ergibt sich nun folgende Aussage: Ein Beobachter in P kann mit einem im Moment $\tau = 0$ abgegebenen Lichtsignal in einer endlichen Zeit jede Stelle im Inneren von H_A erreichen, jedoch keine andere Stelle der S_3 .

Entsprechend ergibt sich natürlich das Gegenstück: Ein Beobachter in P kann im Moment $\tau = 0$ von einem Lichtsignal erreicht werden, das vor einer endlichen Zeit an irgend einer Stelle im Inneren von H_A abgegeben worden ist, jedoch nicht an einer anderen Stelle der S_3 .

Von der S_3 bleibt also von P aus eine abgeschlossene Hälfte immer unerreichbar resp. unsichtbar.

Identifiziert man jetzt jeden Punkt P mit seinem Gegenpol \bar{P} , so erhält man die 'projektive S_3 ' und verfügt damit über einen Raum, in dem vom Pol P aus nur der Aequator als Horizont ewig unsichtbar respektive unerreichbar bleibt.

Durch diese sozusagen vollkommene Durchleuchtbarkeit ist also die Desitterwelt allen übrigen Modellen überlegen. Hinzu kommt jetzt, dass sie im Rahmen der linearen Feldtheorie bei einer Belegung durch einen Kerntensor $h^{\lambda}_{\mu} \neq \delta^{\lambda}_{\mu}$ auch nicht mehr leer sein kann.

LITERATUR

- [1] *Der phänomenologische Energietensor im Rahmen der linearen Feldtheorie*, *Helv. Phys. Acta* 44, 530–544 (1971).
- [2] *Die kosmologischen Lösungen der linearen Feldtheorie*, *Z. Astrophysik* 65, 30–44 (1967).
- [3] PASCUAL JORDAN, *Albert Einstein* (Verlag Huber, Frauenfeld (Schweiz) und Stuttgart (1969), insbesondere Kap. IV, § 8.
- [4] *Ueber die Selbstenergie einer geladenen Masse*, *Helv. Phys. Acta* 38, 215–226 (1965), insbesondere § 2.
- [5] MAX VON LAUE, *Die Relativitätstheorie* (zweiter Bd. Die allgemeine Relativitätstheorie) (Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig 1953), insbesondere § 52.