

Zeitschrift:	Helvetica Physica Acta
Band:	45 (1972)
Heft:	4
Artikel:	Das Einschwingen eines zylindrischen Plasmas in magnetoakustischer Resonanz
Autor:	Appert, K. / Hoegger, B. / Schneider, H.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-114395

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Das Einschwingen eines zylindrischen Plasmas in magnetoakustischer Resonanz¹⁾

von K. Appert, B. Hoegger, H. Schneider und E. Weise

Institut für Physik der Universität Freiburg i. Ue.

(14. X. 71)

Abstract. The transient behaviour of an oscillating plasma cylinder is studied near magneto-acoustic resonance. Appropriate nonlinear magnetohydrodynamic equations are solved as an initial value problem and the results are compared with experiments. The energy absorbed in the plasma is found to be strongly dependent on transient effects.

1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist eine Weiterführung der Untersuchungen von Cantieni et al. [1], Faessler et al. [2] und Hoegger et al. [3]. Diese und andere Autoren [4] studieren die magnetoakustische Resonanz eines zylindrischen Plasmas unter der Annahme, dass sich die angeregte Schwingung im stationären Zustand befindet. In einem Grossteil der experimentellen Anordnungen spielen jedoch Einschwingeffekte eine wesentliche Rolle. Stationäre Theorien sagen dann vor allem zu grosse Energieabsorption voraus. In der vorliegenden Arbeit werden diese transienten Effekte experimentell und theoretisch untersucht.

Ein zylindrisches Glasrohr enthält ein Argonplasma in einem stabilisierenden konstanten Magnetfeld in Achsenrichtung. Das Rohr ist von einer leitenden Berandung umgeben, die als einwindige Spule Teil eines R-C-L-Serieschwingkreises ist. Die Frequenz des ersten radialen magnetoakustischen Modus der Plasmasäule wird durch Verändern des Gasdruckes im Bereich der Eigenfrequenz des Schwingkreises variiert. Es interessiert die Reaktion des Plasmas auf eine Entladung im Schwingkreis. Die Theorie, die das Problem linear und nicht linear behandelt, ist zum Teil analytischer, zum Teil numerischer Natur. Das theoretische Verhalten von Magnetfeld und Dichte wird mit dem experimentellen verglichen. Die gefundene gute Uebereinstimmung erlaubt theoretische Aussagen über den Wirkungsgrad einer gepulsten Entladung für die Plasmaheizung.

2. Theorie

2.1. Grundgleichungen

Das zu untersuchende Argonplasma hat folgende charakteristische Parameter: Dichte der schweren Teilchen $n \sim 10^{15} - 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, Plasmaradius $R_p \sim 3-4 \text{ cm}$,

¹⁾ Diese Arbeit wurde durch die finanzielle Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds ermöglicht.

Temperatur $T \sim 1,4 - 2,0$ eV und stabilisierendes axiales Magnetfeld $B_0 \sim 4-6$ kGauss. Die Frequenz der magnetoakustischen Resonanz hat dann die Größenordnung von einem Megahertz. Der angegebene Temperatur- und Dichtebereich entspricht nach der Saha-Eggert-Gleichung [5] einem Ionisationsgrad n_e/n von etwa 0,6 bis 1,6. Exakt würde das zu untersuchende Plasma also durch die Gleichungen des vierkomponentigen Gases e, A, A^+, A^{++} beschrieben. Es soll nun aber auf heuristische Art gezeigt werden, dass sich die Gleichungen mit kleinem Fehler auf die Bewegungsgleichungen einer leitenden einkomponentigen Flüssigkeit [6] reduzieren lassen. Es seien $\rho = nM$ und \mathbf{v} die Massendichte bzw. die Massengeschwindigkeit der schweren Teilchen. Dann gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Ebenso gilt bei Annahme von Quasineutralität und unter Vernachlässigung von viskosen Kräften die folgende einfache Bewegungsgleichung für \mathbf{v} :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \mathbf{grad} p \quad (2)$$

wo \mathbf{j} die Stromdichte, \mathbf{B} das Magnetfeld und p den Plasmadruck bezeichnen. Im magnetoakustischen Bereich ist der Verschiebungsstrom gegenüber \mathbf{j} vernachlässigbar. Die Maxwellschen Gleichungen schreiben sich daher

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (5)$$

\mathbf{E} ist das elektrische Feld. Das Gleichungssystem (1) bis (5) muss noch durch das Ohmsche Gesetz und eine Gleichung für p ergänzt werden. Das Ohmsche Gesetz

$$\mathbf{j} = \vec{\sigma} \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad (6)$$

kann in linearer Approximation aus den Gleichungen für das Vierkomponentensystem hergeleitet werden. Es folgt, dass im Falle der magnetoakustischen Resonanz wesentlich nur die Wechselwirkung der Elektronen mit den Ionen für die elektrische Leitung verantwortlich ist, und dass sich die Leitfähigkeit $\vec{\sigma}$ des vierkomponentigen Systems von derjenigen des einfachen Zweikomponentenplasmas nur dadurch unterscheidet, dass an die Stelle der Stossfrequenz ν_{e1} die Stossfrequenz $\nu_e = \nu_{e1} + \nu_{e2}$ tritt. Hier bedeuten ν_{e1} und ν_{e2} die Stossfrequenzen der Elektronen mit A^+ bzw. A^{++} .

Mit dem idealen Gasgesetz

$$p = (n_n + n_1 + n_2 + n_e) T \quad (7)$$

ist der Druck durch die Temperatur [in erg] und die Teilchendichten von A, A^+, A^{++} und e gegeben. Die Temperatur, die auch wesentlich in $\vec{\sigma}$ eingeht, muss nun mit dem Energierhaltungssatz für ein Volumenelement der Flüssigkeit berechnet werden. Hier

spielt es nun eine grosse Rolle, dass man es mit einem System zu tun hat, in dem Ionisation und Rekombination vorkommen. Eine Temperaturerhöhung zieht immer Ionisation nach sich. Mit der Berücksichtigung von Ionisation und Rekombination ergeben sich also kleinere Temperaturänderungen als ohne. Die totale Ionisationsenergie pro Volumelement ist anschaulich

$$n_e E_i \equiv n_e E_1 + n_2 (E_2 - E_1) \quad (8)$$

wenn $E_1 = 15,76$ eV und $E_2 = 27,62$ eV die ersten zwei Ionisationspotentiale von Argon bezeichnen. Der Energieerhaltungssatz [7] lässt sich dann unter Berücksichtigung der Ionisation wie folgt schreiben

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{3}{2} p + \frac{1}{8\pi} B^2 + n_e E_i \right) + \operatorname{div} \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{5}{2} p \right) \mathbf{v} + \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} + n_e E_i \mathbf{v} \right] = 0. \quad (9)$$

Hier sind Diffusion, thermische Kräfte, Wärmeleitung und Viskosität vernachlässigt worden. Abschätzungen [8] zeigen, dass im diskutierten Parameterbereich ausser durch Diffusionseffekte im Vierkomponentenplasma keine Fehler entstehen. (9) lässt sich mit Hilfe von (1), (2), (3), (4) und (6) in die Bewegungsgleichung für p umformen:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{3}{2} \operatorname{div} p \mathbf{v} + \frac{\partial n_e E_i}{\partial t} + \operatorname{div} n_e E_i \mathbf{v} + p \operatorname{div} \mathbf{v} = \vec{\chi} : (\mathbf{j}; \mathbf{j}). \quad (10)$$

Hier bedeutet $\vec{\chi} = \vec{\sigma}^{-1}$.

Mit den Beziehungen zwischen Temperatur [in eV] und Dichten (siehe Anhang)

$$i \equiv \frac{n_e}{n} = 1,92 T - 1,98, \quad (11)$$

$$\frac{n_2}{n} = 3(T - 1,4)^2, \quad (12)$$

$$n = n_e + n_1 + n_2 \quad (13)$$

lässt sich (10) weiter umformen in die gesuchte Bewegungsgleichung für T :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{3}{2} n (1 + i) + \frac{3}{2} n T \frac{di}{dT} + n \frac{di E_i}{dT} \right] \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} T \right] \\ & = -n (1 + i) T \operatorname{div} \mathbf{v} + \vec{\chi} : (\mathbf{j}; \mathbf{j}) \end{aligned} \quad (14)$$

Die Gleichungen (1) bis (6), (8) und (11) bis (14) beschreiben das Verhalten des Plasmas vollständig. Sie sollen nun für das vorliegende zylindersymmetrische Problem ($\partial/\partial\varphi = \partial/\partial z = 0$) spezialisiert werden. Dabei werden \mathbf{j} und \mathbf{E} mit Hilfe von (3) und (6) eliminiert. (5) ist mit $B_r = 0$ automatisch erfüllt. Unter den weiteren Voraussetzungen, dass erstens zur Zeit $t = 0$ kein Strom in Achsenrichtung fliesst, und dass zweitens die das Plasma umgebende Senderspule einen rein azimutalen Strom führt, genügen die Bewegungsgleichungen der Grössen ρ , $v = v_r$, $B = B_z$ und T zur Beschreibung der Phänomene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v) \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{4\pi \rho} \frac{B}{\rho} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (16)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \chi_{\perp} \frac{\partial B}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rvB) \quad (17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -v \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\frac{c^2}{(4\pi)^2} \frac{\chi_{\perp}}{n} \left(\frac{\partial B}{\partial r} \right)^2 - (1+i)T \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} rv}{\frac{3}{2}(1+i) + \frac{3}{2}T \frac{di}{dT} + \frac{diE_i}{dT}}. \quad (18)$$

χ_{\perp} ist im Anhang zu finden. Die Gleichungen (7), (8) und (11) bis (13) können unverändert übernommen werden. Abschätzungen zeigen, dass die Druckkraft in (16) bei den vorliegenden Temperaturen und Dichten gegenüber der magnetischen Kraft vernachlässigt werden kann. Das System (15) bis (18) ist dann ausser dem 'Ionisationsnennner' in (18) identisch mit dem in [9]. Die Vernachlässigung der Druckkraft in (16) hat zur Folge, dass die hydrodynamische Randbedingung mit der elektrodynamischen zusammenfällt [1, 2, 3, 9]:

$$B(r = R_p, t) = B_0 + B_{ex}(t). \quad (19)$$

R_p bezeichnet den Plasmaradius. B_0 ist das stabilisierende statische Magnetfeld. $B_{ex}(t)$ ist das Magnetfeld, das von der das Plasma umgebenden einwindigen Spule des Senderkreises erzeugt wird:

$$B_{ex}(t) = \frac{4\pi}{c} \frac{I(t)}{l} \quad (20)$$

Hier ist l die Länge der einwindigen Spule. $I(t)$ bezeichnet den Strom im Senderkreis. Er ist durch die Differentialgleichung eines Serieschwingkreises bestimmt:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{LC} Q - \frac{W}{L} I - \frac{2\pi}{c} \frac{1}{L} \int_0^{R_p} \frac{\partial B}{\partial t} r dr, \quad (21)$$

$$\frac{dQ}{dt} = I. \quad (22)$$

$Q(t)$ ist die elektrostatische Ladung auf dem Kondensator der Kapazität C . L ist der totale Selbstinduktionskoeffizient des Kreises, wenn die Fläche der anregenden Spule um die Plasmafläche (Radius R_p) verkleinert wird. W ist der ohmsche Widerstand im Kreis.

Das Gleichungssystem (8), (11) bis (13), (15) bis (22) hat eine eindeutige Lösung, falls man noch die Randbedingungen angibt:

$$\begin{aligned} \rho(r, t = 0) &= \rho_0 & T(r, t = 0) &= T_0 \\ v(r, t = 0) &= 0 & I(t = 0) &= 0 \\ B(r, t = 0) &= B_0 & Q(t = 0) &= Q_0 \end{aligned} \quad (23)$$

2.2. Lösungsmethoden

Es ist evident, dass das vorstehende Gleichungssystem nur näherungsweise gelöst werden kann. Ein möglicher Lösungsweg ist der von [2], [9] benutzte. Er besteht in einer Störungsrechnung mit dem Ansatz $B = B_0 + B^{(1)} + B^{(2)} + \dots$, der Voraussetzung $B^{(1)}/B_0 \ll 1$ und der Annahme $B^{(n+1)}/B^{(n)} \sim B^{(1)}/B_0$. Diese Störungsrechnung erlaubt analytische Lösungen des Problems, da bei der sukzessiven Bestimmung der unbekannten Funktionen nur lineare Differentialgleichungen auftreten. Einen andern Weg zur Lösung bietet die numerische Integration mit endlichen Differenzen. Bei keinem der beiden Lösungswege kann zum voraus gesagt werden, ob er zum Ziel führt: Es lässt sich weder beweisen, dass die Störungsreihen konvergieren, noch dass die Lösung der Differenzengleichungen bei kleiner werdenden Differenzen gegen die Lösung der Differentialgleichungen strebt. Der Vorteil der Störungsrechnung gegenüber dem Differenzenverfahren ist der, dass dank der Analytizität der Lösungen der Einfluss nicht linearer Terme in den Differentialgleichungen explizit studiert werden kann. Das Differenzenverfahren seinerseits ist der Störungsrechnung in seiner mathematischen Einfachheit überlegen.

In dieser Arbeit soll als erstes ein vereinfachtes physikalisches Problem in der linearen Näherung der Störungsrechnung behandelt werden. Die Vereinfachung besteht darin, dass die Temperatur als konstant angenommen wird, und dass der anregende Schwingkreis nicht vom Plasma beeinflusst wird. Das dann verbleibende Gleichungssystem (25), (26) ist abgesehen vom Einfluss der Neutralteilchen identisch mit dem in [1], wo auch seine stationäre Lösung angegeben wird. Die nicht stationäre Behandlung dieses einfachen Problemes rechtfertigt sich durch den Einblick, der in die Vorgänge des Einschwingens gewonnen werden kann.

Als zweites wird das gleiche lineare System numerisch mit endlichen Differenzen gelöst. Ein Vergleich mit der analytischen Lösung fällt überraschend gut aus.

Im dritten Teil der Arbeit wird nochmals das vereinfachte physikalische Problem behandelt jedoch mit einbezug der Nichtlinearitäten. Die numerische Lösung kann nach dem Einschwingen mit der stationären Lösung [2], die mit Störungsrechnung bis zur zweiten Ordnung erhalten wurde, verglichen werden. Die Übereinstimmung ist bei nicht zu hohen Feldern ($B - B_0 \lesssim 0,2 B_0$) gut. Bei höherer Anregung genügt die quadratische Näherung der Störungsrechnung nicht mehr.

Im vierten und letzten Teil wird sodann das vollständige physikalische Problem numerisch behandelt. Hier kann die Lösung nur noch mit Hilfe von integralen Erhaltungssätzen getestet werden, da eine analytische Lösung nicht vorhanden ist. Die Erfüllung der Erhaltungssätze und der Erfolg der numerischen Lösung in den vorher besprochenen Problemen lassen aber vermuten, dass auch hier das Verfahren der endlichen Differenzen nahe an die Lösung der Differentialgleichung führt. Der Vergleich mit dem Experiment bestätigt diese Vermutung.

2.3. Analytische Lösung des physikalisch vereinfachten linearen Systems

Hier wird die Temperatur als konstant angenommen. Das hat zur Folge, dass die Gleichungen (8), (11) bis (13) und (18) unnötig werden. Weiterhin sollen die Selbstinduktivität L und der Widerstand W des Senderkreises so gross sein, dass das Plasma den Kreis nicht zu verstimmen vermag. Mit andern Worten heisst das: W und L sollen so gross sein, dass der letzte Term in (21), der den Einfluss des Plasmas auf den Kreis

beschreibt, vernachlässigbar wird. (20) wird dann bei kleiner Dämpfung $\delta/\omega \ll 1$ ersetzt durch

$$\frac{B_{ex}(t)}{B_0} = \xi e^{-\delta t} \sin \omega t \quad (24)$$

ξ , δ und ω sind bestimmt durch die Kreisdaten C , L , W und Q .

Die Gleichungen (15), (16) und (17) werden nun mit dem in 2.2 besprochenen Störungsansatz linearisiert. Dabei ergibt sich, dass nur noch die Bewegungsgleichungen für v (16) und B (17) gekoppelt sind:

$$\frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \frac{B_0}{\rho_0} \frac{\partial B^{(1)}}{\partial r} \quad (25)$$

$$\frac{\partial B^{(1)}}{\partial t} = \chi_{\perp} \frac{c^2}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial B^{(1)}}{\partial r} - \frac{B_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v^{(1)}. \quad (26)$$

Ohne zusätzliche Annahmen muss der Plasmaradius R_p als zeitabhängig verstanden und in einer Störungsreihe angesetzt werden. Die Randbedingung (19) schreibt sich dann zusammen mit (24) in linearer Näherung:

$$\frac{B^{(1)}(r = R_p^{(0)}, t)}{B_0} = \xi e^{-\delta t} \sin \omega t. \quad (27)$$

In der Lösung von (25)–(27) erhält man $v^{(1)}(r = R_p^{(0)}, t) \neq 0$, was bedeutet, dass der Plasmaradius R_p um den konstanten Radius $R_p^{(0)}$ oszilliert. Zum gleichen Schluss gelangt man [10], wenn das Gleichungssystem (15) bis (17) in Lagrange-Koordinaten formuliert und linearisiert wird. Dieses lineare Lagrange-System hat exakt die gleiche Form wie (25) und (26). In den späteren nicht linearen Lösungen sollte also R_p weiterhin als zeitabhängig genommen werden, das heisst, es sollte die Lösung in Lagrange-Koordinaten gesucht werden. Darauf wird aus verschiedenen Gründen verzichtet. Erstens ist die Behandlung in Eulerschen Koordinaten durchsichtiger, zweitens berücksichtigt die erwähnte nicht lineare Theorie [2], die als ein wesentlicher Test für die numerische Lösung benutzt wird, den Randeffekt nicht, und drittens lässt sich der Fehler, der durch die Vernachlässigung des Randeffektes entsteht, in der numerischen Lösung mit Erhaltungssätzen abschätzen. Er ist nicht grösser als die experimentellen Unsicherheiten in den Ausgangsparametern. In allem weiteren soll also R_p konstant sein und den mittleren Plasmaradius während der Schwingung bezeichnen.

Im Hinblick auf die spätere numerische Behandlung des Gleichungssystems (25) bis (27) ist es angezeigt, alle Variablen und Funktionen analog zu [9] dimensionslos darzustellen. Es sei

$$\begin{aligned} r' &= \frac{r}{R_p}, & t' &= \frac{C_A}{R_p} t, & B' &= \frac{B^{(1)}}{B_0}, & v' &= \frac{v^{(1)}}{C_A} \\ \omega' &= \frac{R_p}{C_A} \omega, & \delta' &= \frac{R_p}{C_A} \delta, \end{aligned} \quad (28)$$

wo $C_A = B_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$ die Alfvén-Geschwindigkeit bezeichnet. Der Index 0 bezeichnet immer eine Grösse zur Zeit 0. Damit schreiben sich die Gleichungen (25) bis (27) unter Weglassung des Striches (')

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial r} \quad (29)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v \quad (30)$$

$$B(r = 1, t) = \xi e^{-\delta t} \sin \omega t \quad (31)$$

wo $a = c^2 \chi_{\perp 0} / (4\pi R_p C_A)$ den Leitfähigkeitsparameter bedeutet. Es wird nun die Lösung des Gleichungssystems (29)–(31) mit Laplacetransformationen gesucht.

Es sei

$$g(r, q) = \int_0^\infty e^{-qt} B(r, t) dt \quad (32)$$

$$h(r, q) = \int_0^\infty e^{-qt} v(r, t) dt. \quad (33)$$

Das transformierte Gleichungssystem schreibt sich unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $B(r, t = 0) = v(r, t = 0) = 0$:

$$qh = -\frac{\partial g}{\partial r} \quad (34)$$

$$qg = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r h \quad (35)$$

$$g(1, q) = \frac{\xi}{2i} \left[\frac{1}{q - i(\omega + i\delta)} - \frac{1}{q + i(\omega - i\delta)} \right]. \quad (36)$$

Elimination von $h(r, q)$ aus (34) und (35) ergibt

$$\left(k^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right) g(r, q) = 0 \quad (37)$$

wo

$$k^2 = -\frac{q^2}{1 + aq} \quad (38)$$

bedeutet. (37) ist die Besselsche Gleichung nullter Ordnung. Die Neumannsche Funktion wird aus physikalischen Gründen wegen ihrer Divergenz im Ursprung als Lösung verworfen, und es gilt

$$g(r, q) = C(q) J_0(kr). \quad (39)$$

Die Funktion $C(q)$ ist mit der Randbedingung (36) bestimbar. Deshalb folgt aus (39):

$$g(r, q) = \frac{i\xi}{2} \frac{J_0(kr)}{J_0(k)} \left[\frac{1}{q - \Omega} - \frac{1}{q - \Omega^*} \right] \quad (40)$$

wo $\Omega = -i\omega - \delta$ und $(*)$ das Konjugiert-Komplexe bezeichnet. Es bleibt nun die Aufgabe $g(r, q)$ in den (r, t) -Raum zurückzutransformieren:

$$B(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{y-i\infty}^{y+i\infty} e^{qt} g(r, q) dq. \quad (41)$$

Für die Integration ist das reelle y so zu wählen, dass alle Singularitäten von $g(r, q)$ links vom Integrationsweg liegen. Zur Auswertung kann der Residuensatz verwendet werden:

$$B(r, t) = \sum_i \mathbf{R}_{q=q_i} \{e^{qt} g(r, q)\} \quad (42)$$

wo q_i die Pole der Funktion $g(r, q)$ und $\mathbf{R}_{q=q_i} \{\dots\}$ ihr Residuum an dieser Stelle bezeichnet. $g(r, q)$ hat folgende Pole:

- a) $q = \Omega$ und $q = \Omega^*$,
- b) Nullstellen von $J_0(k)$: γ_n . Aus $k = \gamma_n$ folgt mit (38)

$$q = -\frac{a\gamma_n^2}{2} \pm \gamma_n \sqrt{\frac{a^2\gamma_n^2}{4} - 1} \equiv p_n^\pm. \quad (43)$$

Hier hat man die zwei Fälle $a\gamma_n > 2$ und $a\gamma_n \leq 2$ zu unterscheiden. Sei für $n \leq m$ $a\gamma_n \leq 2$, dann ist

$$p_n^+ = -\delta_n + i\omega_n = (p_n^-)^*, \quad n \leq m \quad (44)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} \delta_n &= \frac{a\gamma_n^2}{2} \\ \omega_n &= \gamma_n \sqrt{1 - \frac{a^2\gamma_n^2}{4}} \end{aligned} \right\} n \leq m. \quad (45)$$

- c) $n > m$

$$p_n^\pm = -\delta_n \pm \omega_n, \quad n > m \quad (46)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} \delta_n &= \frac{a\gamma_n^2}{2} \\ \omega_n &= \gamma_n \sqrt{\frac{a^2\gamma_n^2}{4} - 1} \end{aligned} \right\} n > m. \quad (47)$$

Es gibt zwei Häufungspunkte von Polen:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n^- = -\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} p_n^+ = -\frac{1}{a}. \end{array} \right\} \quad (48)$$

Die Anwendung des Residuensatzes zur Berechnung von (41) ist also nicht ohne weiteres erlaubt. Seine formale Anwendung führt aber trotzdem zu einer gleichmässig konvergenten Reihe, von der gezeigt werden kann, dass sie die gesuchte Lösung von (29)–(31) ist, und dass sie die Anfangsbedingungen erfüllt.

Es sollen nun die einzelnen Residuen berechnet werden.

a) Mit der Definition

$$J_0(z) = s(z) e^{i\varphi(z)} \quad (49)$$

wo $s(z)$ und $\varphi(z)$ beide reell sind, ergibt sich

$$\mathcal{R}_{q=\Omega} \{e^{qt} g(r, q)\} + \mathcal{R}_{q=\Omega^*} \{e^{qt} g(r, q)\} = \xi \frac{s(k_0 r)}{s(k_0)} \sin[\omega t - \varphi(k_0 r) + \varphi(k_0)] e^{-\delta t} \quad (50)$$

wo k_0 durch (38) gegeben ist, wenn man $q = \Omega$ setzt. Hier wurde vorausgesetzt, dass Ω nicht mit einer 'Eigenfrequenz' p_n^\pm zusammenfällt.

b) Zur Berechnung des Residuums an einer Stelle $q = p_n^+$ braucht man die Entwicklung von $J_0(k)$ in Termen von $(q - p_n^+)$:

$$J_0(k) = \left[\frac{dJ_0(k)}{dk} \frac{dk}{dq} \right]_{q=p_n^+} (q - p_n^+) + \dots \quad (51)$$

Aus (38) erhält man nach einigen Umformungen

$$\frac{dk}{dq} = \frac{k}{2q} \left(1 - \frac{k^2}{q^2} \right) \quad (52)$$

und damit aus (51)

$$J_0(k) = -J_1(\gamma_n) \frac{\gamma_n}{2p_n^+} \left(1 - \frac{\gamma_n^2}{p_n^{+2}} \right) (q - p_n^+) + \dots \quad (53)$$

und somit

$$\mathcal{R}_{q=p_n^+} \{e^{qt} g(r, q)\} = \frac{i\xi}{2} \frac{J_0(\gamma_n r)}{\gamma_n J_1(\gamma_n)} \frac{2p_n^{+3}}{\gamma_n^2 - p_n^{+2}} \left[\frac{1}{p_n^+ - \Omega} - \frac{1}{p_n^+ - \Omega^*} \right] e^{p_n^+ t}. \quad (54)$$

(54) gilt für beliebiges n . Die analoge Formel gilt auch für p_n^- . Es soll nun für $n < m$ spezialisiert werden. Dort gilt

$$\mathcal{R}_{q=p_n^+} \{e^{qt} g(r, q)\} = \left[\mathcal{R}_{q=p_n^-} \{e^{qt} g(r, q)\} \right]^*. \quad (55)$$

Die Summe der Residuen bei p_n^+ und p_n^- ist demnach durch zweimal den Realteil von $\mathbf{R}_{q=p_n^+} \{e^{qt} g(r, q)\}$ gegeben. Ihren Wert erhält man unter Verwendung von (44), (45) und (54) mit einiger Algebra:

$$\xi \frac{J_0(\gamma_n r)}{\gamma_n J_1(\gamma_n)} \frac{2\omega}{\omega_n} \frac{e^{-\delta_n t}}{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \times [(\alpha_n \epsilon_n - \beta_n \zeta_n) \cos \omega_n t + (\alpha_n \zeta_n + \beta_n \epsilon_n) \sin \omega_n t]. \quad (56)$$

Hier sind folgende Abkürzungen benutzt:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_n = (\delta_n - \delta)^2 + \omega^2 - \omega_n^2 \\ \beta_n = 2\omega_n(\delta - \delta_n) \\ \epsilon_n = 2\delta_n \omega_n \\ \zeta_n = \omega_n^2 - \delta_n^2. \end{array} \right\} \quad (57)$$

c) Im Fall von $n > m$ müssen die Beiträge von p_n^+ und p_n^- getrennt berechnet werden. Mit (46) und (47) ergibt sich für p_n^\pm aus (54):

$$\mp \xi \frac{J_0(\gamma_n r)}{\gamma_n J_1(\gamma_n)} \frac{\omega}{\omega_n} \lambda_n^\pm e^{(-\delta_n \pm \omega_n)t} \quad (58)$$

mit der Abkürzung

$$\lambda_n^\pm = \frac{(\omega_n \mp \delta_n)^2}{(\omega_n \mp \delta_n \pm \delta)^2 + \omega^2}. \quad (59)$$

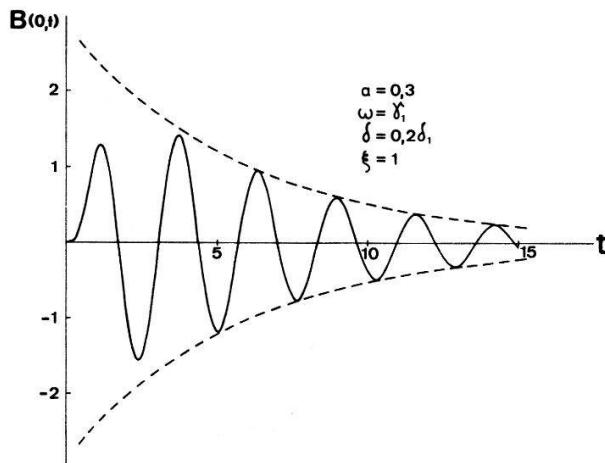
Mit den Resultaten (50), (56) und (58) lässt sich das gesuchte Magnetfeld anschreiben:

$$\begin{aligned} B(r, t) = & \xi \frac{s(k_0 r)}{s(k_0)} \sin[\omega t - \varphi(k_0 r) + \varphi(k_0)] e^{-\delta t} \\ & + \xi \sum_{n=1}^m \frac{J_0(\gamma_n r)}{\gamma_n J_1(\gamma_n)} \frac{2\omega}{\omega_n} \frac{e^{-\delta_n t}}{\alpha_n^2 + \beta_n^2} [(\alpha_n \epsilon_n - \beta_n \zeta_n) \cos \omega_n t + (\alpha_n \zeta_n + \beta_n \epsilon_n) \sin \omega_n t] \\ & + \xi \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_n r)}{\gamma_n J_1(\gamma_n)} \frac{\omega}{\omega_n} [\lambda_n^+ e^{-(\delta_n + \omega_n)t} - \lambda_n^- e^{(-\delta_n + \omega_n)t}]. \end{aligned} \quad (60)$$

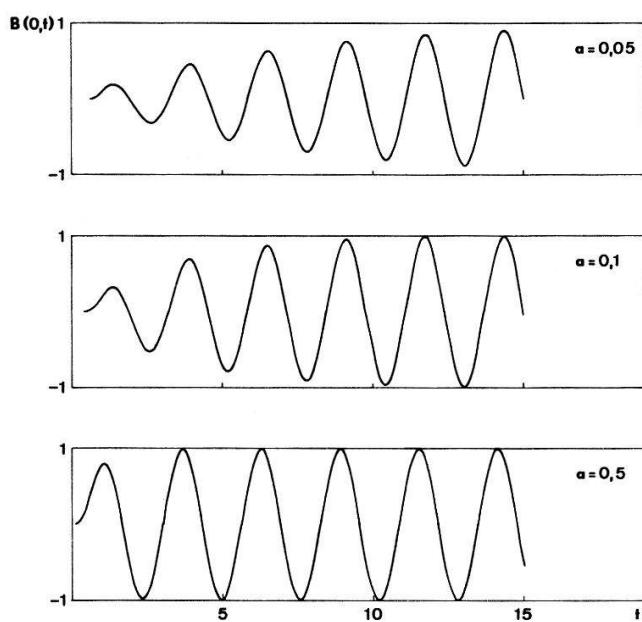
Die unendliche Summe konvergiert gleichmässig mit $1/n^{5/2}$. Mit Hilfe von (29) könnte nun noch $v(r, t)$ berechnet werden und gezeigt werden, dass die Differentialgleichung (30) erfüllt ist. Wegen des grossen algebraischen Aufwandes wird hier darauf verzichtet. Mit dem gleichen Argument wird hier auch darauf verzichtet, die Erfüllung der Anfangsbedingung zu zeigen. Dass die Randbedingung (31) erfüllt ist, ist offensichtlich.

Der erste Term in (60) stellt die erzwungene Schwingung dar, alle andern sind Eigenschwingungen des Systems. Die erzwungene Schwingung allein schon ist Lösung der Differentialgleichungen (29) und (30), und sie befriedigt die Randbedingung (31). Mit $\delta = 0$ ist sie identisch mit Cantienis [1] stationärer Lösung. Wenn $\delta \ll \delta_1$ ist, sind nach einer gewissen Zeit alle Eigenschwingungen gegenüber der erzwungenen vernachlässigbar, und es kann von einem eingeschwungenen System gesprochen werden (Fig. 1). Offensichtlich bestimmt wesentlich der Leitfähigkeitsparameter $a = c^2 \chi_{\perp 0}/$

$(4\pi R_p C_A)$ das Einschwingverhalten, da er linear in die δ_n eingeht. Zur Illustration sind in Figur 2 die Achsenmagnetfelder $B(r = 0, t)$ bei stationärer Anregung ($\delta = 0$) in der Nähe der 1. Resonanz ($\omega = \gamma_1$) für verschiedene α angegeben. Dabei sind die ξ so gewählt, dass im eingeschwungenen Zustand die Amplituden gleich hoch sind.



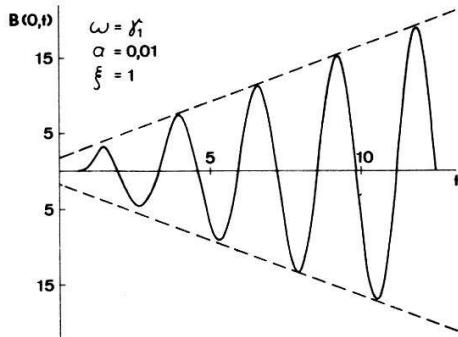
Figur 1
Annäherung des Feldes auf der Achse $B(0, t)$ (—) an die Enveloppe der reinen erzwungenen Schwingung (----). B und t sind dimensionslos gemäss Gleichung (28).



Figur 2
Abhängigkeit des Einschwingverhaltens vom Leitfähigkeitsparameter α für das Magnetfeld $B(0, t)$ auf der Achse im Resonanzfall $\omega = \gamma_1 \approx 2,4$.

Es soll nun noch kurz das Problem der 'komplexen' Resonanz besprochen werden. Unter 'komplexer' Resonanz wird der bei der Auswertung der Residuen ausgeschlossene Fall $\Omega = \rho_l^\pm$ verstanden. Hier geschieht also die Anregung mit einer Eigenfrequenz $\omega = \omega_l$ und der zugehörigen Dämpfung $\delta = \delta_l$. In der Formel (60) divergieren der erste Term ($k_0 \rightarrow \gamma_l$) und in der Summe der Term mit $n = l$. Um die Modifikation von (60) für den Fall $\Omega = \rho_l^\pm$ zu bekommen, ist es einfacher, direkt den Pol zweiter Ordnung bei $\Omega = \rho_l^\pm$ auszuwerten als in (60) den Limes auszurechnen. Auf

der Achse ($r = 0$) werden Terme der Art $t \sin \omega_l t \exp(-\delta_l t)$ gefunden. Das Verhältnis von Achsenfeld zu Randfeld nimmt also mit der Zeit linear zu. Das ist das typische Verhalten eines einschwingenden Systemes, das in einer Resonanz angeregt wird, für welche die stationäre Theorie eine unendliche Resonanzamplitude vorhersagt. Im Falle der



Figur 3

Säkulare Annäherung des Feldes auf der Achse $B(0,t)$ an eine 'unendliche' Resonanzamplitude.

magnetoakustischen Resonanz findet sich diese Erscheinung zum Beispiel dann, wenn bei grossen Temperaturen ($\chi \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$) stationär ($\delta = 0$) angeregt wird (Fig. 3).

2.4. Numerische Lösung des physikalisch vereinfachten linearen Systems

In diesem Abschnitt soll das Problem von Abschnitt 2.3 numerisch mit endlichen Differenzen [11] behandelt werden. Dies dient erstens dazu, die Transformation der Differentialgleichungen in Differenzengleichungen zu zeigen, und zweitens dazu, durch einen Vergleich mit der analytischen Lösung einen Begriff von der Genauigkeit der numerischen Methode zu vermitteln.

Den anzugebenden Differenzengleichungen sei folgende Diskretisierung der Variabelnebene $0 \leq r \leq 1, 0 \leq t$ zu Grunde gelegt:

$$\begin{aligned} r: 0 = r_0, \dots, r_i, \dots, r_n = 1, \quad & \text{wo } r_i - r_{i-1} = h \\ t: 0 = t_0, \dots, t_j, \dots \quad & \text{wo } t_j - t_{j-1} = g. \end{aligned} \quad (61)$$

Im weitern soll $A_{ij} = A(r_i, t_j)$ bedeuten, wo A für irgendeine Funktion steht. Raum-differentialquotienten werden in folgender Art durch Differenzenquotienten ersetzt:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)_{ij} &= \frac{A_{i+1j} - A_{i-1j}}{2h} + O(h^2) \\ \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \right)_{ij} &= \frac{A_{i+1j} - 2A_{ij} + A_{i-1j}}{h^2} + O(h^2). \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Hier bedeutet $O(h^2)$, dass Terme, die mit h^2 und höheren Potenzen von h gehen, vernachlässigt worden sind. Mit dem gleichen Fehler lassen sich auch Produkte von Differentialquotienten und ähnliche Größen mit den entsprechenden Differenzenquotienten approximieren. Zum Beispiel ist:

$$\left[A \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 \right]_{ij} = A_{ij} \left(\frac{A_{i+1j} - A_{i-1j}}{2h} \right)^2 + O(h^2). \quad (63)$$

Sei

$$\frac{\partial A}{\partial t} = D[A] \quad (64)$$

eine symbolische Schreibweise für Gleichungen der Art (15)–(18) oder (29) und (30). Diese Gleichungen sollen wie folgt approximiert werden:

$$\frac{A_{ij+1} - A_{ij}}{g} = \theta D_{ij+1}[A] + (1 - \theta) D_{ij}[A] + O(h^2) + O(g), \quad \text{wo } 0 \leq \theta \leq 1. \quad (65)$$

Hier steht $D_{ij}[A]$ für den durch Differenzen nach (62) und (63) approximierten Ausdruck $D[A]$.

Das am einfachsten zu lösende Differenzensystem erhält man offensichtlich mit $\theta = 0$, wo die gesuchten A_{ij+1} ($i = 1, \dots, n$) in (65) explizit durch die bekannten A_{ij} ($i = 1, \dots, n$) gegeben sind. Dieses einfache System hat aber den grossen Nachteil, nur für durch h^2 beschränkte g stabil zu sein. Die beste Approximation ergibt sich mit $\theta = \frac{1}{2}$ (Crank–Nicolson). Dort ist der Fehler nur von der Größenordnung $O(h^2) + O(g^2)$. In diesem System ergeben sich auch bei den nicht linearen Gleichungen (15)–(18) und grossen g stabile Lösungen. Es hat den Nachteil, dass es die A_{ij+1} in (65) nur implizit bestimmt. Systeme mit $\theta > \frac{1}{2}$ zeigen gleiche Stabilitätseigenschaften wie $\theta = \frac{1}{2}$. Variationen von θ können gleicherweise wie Variationen von g und h dazu dienen, die Verlässlichkeit der numerischen Lösungen von (64) zu überprüfen. Es ist noch zu bemerken, dass die Zeitableitung $\partial A / \partial t$ nicht gleich wie die Raumableitung $\partial A / \partial r$ (62) approximiert werden kann. Das Differenzensystem, das so entstehen würde, ist instabil.

Nach den vorangehenden Bemerkungen lassen sich nun die Gleichungen (29) und (30) in Differenzen darstellen:

$$v_{ij+1} = -\frac{g\theta}{2h} (B_{i+1j+1} - B_{i-1j+1}) + \varphi_{ij} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} B_{ij+1} = & \frac{ag\theta}{2ih^2} (B_{i+1j+1} - B_{i-1j+1}) + \frac{ag\theta}{h^2} (B_{i+1j+1} - 2B_{ij+1} + B_{i-1j+1}) \\ & - \frac{g\theta}{ih} v_{ij+1} - \frac{g\theta}{2h} (v_{i+1j+1} - v_{i-1j+1}) + \beta_{ij}. \end{aligned} \quad (67)$$

Diese Gleichungen gelten für $1 \leq i \leq n - 1$. Die Abkürzungen φ_{ij} und β_{ij} bezeichnen Größen der Zeit t_j :

$$\varphi_{ij} = v_{ij} - \frac{g(1 - \theta)}{2h} (B_{i+1j} - B_{i-1j}) \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \beta_{ij} = & B_{ij} + \frac{ag(1 - \theta)}{2ih^2} (B_{i+1j} - B_{i-1j}) + \frac{ag(1 - \theta)}{h^2} (B_{i+1j} - 2B_{ij} + B_{i-1j}) \\ & - \frac{g(1 - \theta)}{ih} v_{ij} - \frac{g(1 - \theta)}{2h} (v_{i+1j} - v_{i-1j}). \end{aligned} \quad (69)$$

Es fehlen noch die Gleichungen auf der Achse $i = 0$ und am Rand $i = n$. Auf der Achse ist wegen der Zylindersymmetrie:

$$\left. \begin{aligned} v_{0j} &= 0, & \left(\frac{v}{r} \right)_{0j} &= \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_{0j} = \frac{v_{1j}}{h}, \\ \left(\frac{\partial B}{\partial r} \right)_{0j} &= 0, & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r} \right)_{0j} &= \left(\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right)_{0j} = 2 \frac{B_{1j} - B_{0j}}{h^2}. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Damit ergibt sich aus (29) und (30)

$$\begin{aligned} v_{0j+1} &= 0 \\ B_{0j+1} &= \frac{4ag\theta}{h^2} (B_{1j+1} - B_{0j+1}) - \frac{2g\theta}{h} v_{1j+1} + \beta_{0j} \end{aligned} \quad (71)$$

wo

$$\beta_{0j} = B_{0j} + \frac{4ag(1-\theta)}{h^2} (B_{1j} - B_{0j}) - \frac{2g(1-\theta)}{h} v_{1j}. \quad (72)$$

Am Rand ist B mit (31) gegeben:

$$B_{nj+1} = \xi \exp(-\delta t_{j+1}) \sin(\omega t_{j+1}). \quad (73)$$

v_{nj+1} wird mit der bis auf Fehler $O(h^2)$ richtigen linearen Extrapolation $2v_{n-\frac{1}{2}j+1} - v_{n-1j+1}$ erhalten:

$$v_{nj+1} = -\frac{g\theta}{2h} (3B_{nj+1} - 4B_{n-1j+1} + B_{n-2j+1}) + \varphi_{nj}. \quad (74)$$

Hier ist

$$\varphi_{nj} = v_{nj} - \frac{g(1-\theta)}{2h} (3B_{nj} - 4B_{n-1j} + B_{n-2j}). \quad (75)$$

Die $2n + 2$ linearen Gleichungen (66), (67), (71), (73) und (74) bestimmen die $2n + 2$ Unbekannten v_{ij+1} , B_{ij+1} ($i = 0, \dots, n$). Zur Lösung könnte ein iteratives Näherungsverfahren, wie es im nächsten Abschnitt zur Lösung der nicht linearen Gleichungen verwendet wird, benutzt werden. Das durch die Elimination von v in (67) und (71) mit Hilfe von (66) und (71) entstehende Gleichungssystem für B_{ij+1} ($i = 0, \dots, n - 1$) zusammen mit (73) und (74) ist aber von so einfacher Bau, dass ein Eliminationsverfahren schneller zur Lösung führt als ein Näherungsverfahren. Das Gleichungssystem hat die Form:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & s_0 & w_0 & u & & & & \eta_0 & \\
 & x_1 & s_1 & w_1 & u & & & \eta_1 & \\
 u & x_2 & s_2 & w_2 & u & 0 & & \eta_2 & \\
 u & x_3 & s_3 & w_3 & u & & & \eta_3 & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\
 u & x_{n-3} & s_{n-3} & w_{n-3} & u & & B_{n-3j+1} & \eta_{n-3} & \\
 u & x_{n-2} & s_{n-2} & w_{n-2} & 0 & & B_{n-2j+1} & \eta_{n-2} & \\
 0 & & u & x_{n-1} & s_{n-1} & w_{n-1} & & B_{n-1j+1} & \eta_{n-1} \\
 & & -\frac{1}{4}x_n & x_n & s_n & & v_{nj+1} & \eta_n & \\
 \end{array} = \begin{array}{c}
 B_{0j+1} \\
 B_{1j+1} \\
 B_{2j+1} \\
 B_{3j+1} \\
 \cdot \\
 B_{n-3j+1} \\
 B_{n-2j+1} \\
 B_{n-1j+1} \\
 v_{nj+1}
 \end{array} = \begin{array}{c}
 \eta_0 \\
 \eta_1 \\
 \eta_2 \\
 \eta_3 \\
 \cdot \\
 \eta_{n-3} \\
 \eta_{n-2} \\
 \eta_{n-1} \\
 \eta_n
 \end{array}$$

(76)

Die Elemente der quadratischen Matrix sind Ausdrücke in den Parametern a, g, h und θ , diejenigen der Spaltenmatrix η enthalten neben diesen Parametern die Größen β_{ij} und φ_{ij} (68), (69), (72) und (75). Zur Lösung werden schrittweise von oben nach unten die Elemente links der Diagonalen in der grossen Matrix eliminiert. Das entstehende System hat die Form:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & w'_0 & y_0 & & & & & \eta'_0 & \\
 1 & w'_1 & y_1 & & 0 & & & \eta'_1 & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot & \\
 1 & w'_{n-3} & y_{n-3} & & & & B_{n-3j+1} & \eta'_{n-3} & \\
 0 & & 1 & w'_{n-2} & 0 & & B_{n-2j+1} & \eta'_{n-2} & \\
 & & 1 & w'_{n-1} & & & B_{n-1j+1} & \eta'_{n-1} & \\
 & & 1 & & & & v_{nj+1} & \eta'_n & \\
 \end{array} = \begin{array}{c}
 B_{0j+1} \\
 B_{1j+1} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 B_{n-3j+1} \\
 B_{n-2j+1} \\
 B_{n-1j+1} \\
 v_{nj+1}
 \end{array} = \begin{array}{c}
 \eta'_0 \\
 \eta'_1 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \eta'_{n-3} \\
 \eta'_{n-2} \\
 \eta'_{n-1} \\
 \eta'_n
 \end{array}$$

(77)

In der untersten Zeile steht die Lösung für v_{nj+1} . Sie kann bei $n-1$ eingesetzt werden, um B_{n-1j+1} zu berechnen. Dieses Prozedere kann von unten nach oben fortgesetzt werden, und man erhält die Lösung für alle B_{ij+1} . Die v_{ij+1} wiederum können dann mit (66) berechnet werden.

Die beschriebene Lösungsmethode wurde in FORTRAN programmiert und auf einer UNIVAC-U-III benutzt. Zur Prüfung wurde diese Lösung mit der analytischen von Abschnitt 2.3 für verschiedene Maschen g, h (61) verglichen. Es hat sich herausgestellt, dass $h = 0,1$ einen guten Wert für den Raumschritt darstellt: Fehler und Rechenzeit bleiben in erträglichem Rahmen. Des weiteren hat sich gezeigt, dass g

Tabelle 1 Vergleich zwischen analytischer und numerischer Rechnung (Extrema von Fig. 1)

a) Analytische Lösung (60)		Lösung mit endlichen Differenzen											
		b) $h = g = \frac{1}{10}, \theta = \frac{1}{2}$			c) $h = g = \frac{1}{10}, \theta = \frac{1}{2}$			d) $h = g = \frac{1}{7}, \theta = \frac{1}{2}$			e) $h = \frac{1}{10}, g = 0.07, \theta = 0.8$		
t	$B(0, t)$	t	$B(0, t)$	t	$B(0, t)$	t	$B(0, t)$	t	$B(0, t)$	t	$B(0, t)$	t	$B(0, t)$
1,16	1,290	1,19	1,276	1,20	1,262	1,14	1,243	1,12	1,177				
2,42	-1,568	2,44	-1,557	2,40	-1,541	2,43	-1,526	2,45	-1,382				
3,73	1,418	3,75	1,408	3,70	1,391	3,71	1,377	3,71	1,215				
5,04	-1,179	5,06	-1,171	5,10	-1,157	5,00	-1,135	5,04	-0,995				
6,35	0,954	6,38	0,947	6,40	0,939	6,43	0,925	6,37	0,798				
7,66	-0,764	7,69	-0,759	7,70	-0,753	7,71	-0,745	7,70	-0,636				
8,97	0,611	9,00	0,606	9,00	0,602	9,00	0,595	8,96	0,507				
10,28	-0,487	10,31	-0,483	10,30	-0,480	10,29	-0,474	10,29	-0,405				
11,59	0,388	11,63	0,385	11,60	0,383	11,57	0,376	11,62	0,323				
12,90	-0,310	12,94	-0,307	12,90	-0,305	13,00	-0,298	12,88	-0,257				
14,21	0,248	14,22	0,245	14,20	0,243	14,29	0,240	14,21	0,205				

bei festem $h = 0,1$ und $\theta = \frac{1}{2}$ so klein sein muss, dass pro Periode $2\pi/\omega$ mindestens 25–30 Zeitschritte gemacht werden, andernfalls werden die Fehler zu gross. Zur Illustration sind in Tabelle 1 für die physikalischen Parameter von Figur 1 die aufeinanderfolgenden Extrema des Achsenfeldes mit ihren Zeiten angegeben. In Kolonne a) ist die exakte analytische Lösung angegeben. Die Kolonnen b), c) und d) sind mit der besten Approximation $\theta = \frac{1}{2}$ (65) gerechnet worden. Zum Vergleich ist in Kolonne e) eine Rechnung mit $\theta = 0,8$ angegeben, die wesentlich grössere Differenzen gegenüber der exakten Lösung als c) zeigt. Um für $\theta = 0,8$ mit c) vergleichbare Exaktheit zu erhalten, müsste der Zeitschritt g noch weiter verkleinert werden.

2.5. Numerische Lösung des physikalisch vereinfachten nicht linearen Systems

Es werden hier die gleichen Annahmen wie in 2.3 gemacht, was die Temperatur, den Druck, den Plasmaradius und die Nicht-Verstimmbarkeit des äusseren Kreises betrifft. Zu lösen ist also das Gleichungssystem (15)–(17) zusammen mit der Randbedingung (24). Es soll gleich wie (29) und (30) dimensionslos dargestellt werden. Zu diesem Zwecke müssen die zu (28) analogen Relationen bekannt sein:

$$1 + B' = \frac{B}{B_0}, \quad v' = \frac{v}{C_A}, \quad 1 + \rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \chi' = \frac{\chi_\perp}{\chi_{\perp 0}}. \quad (78)$$

Für r' , t' , ω' und δ' gilt weiterhin (28). In den gestrichenen Grössen heisst das Gleichungssystem (15)–(17), wenn man den Strich wieder weglässt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [v(1 + \rho)r] \quad (79)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1 + B}{1 + \rho} \frac{\partial B}{\partial r} \quad (80)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\chi \frac{\partial B}{\partial r} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rv(1 + B)]. \quad (81)$$

Die Übersetzung in endliche Differenzen geschieht gleich wie im vorhergehenden Abschnitt nach (62), (63) und (65). Bei $r = 0$ ist zu beachten, dass ρ die gleichen Bedingungen erfüllt wie B (70). Am Rand werden ρ und v mit einer kubischen Extrapolation

$$A_{n,j} = \Gamma_j(A) \equiv -A_{n-4,j} + 4A_{n-3,j} - 6A_{n-2,j} + 4A_{n-1,j} \quad (82)$$

berechnet. Es sind Programmtests notwendig, um einzusehen, dass eine Extrapolation von so hohem Grade genommen werden muss. Eine lineare Extrapolation (74) liefert ja schon die hinreichende Genauigkeit $0(h^2)$ (65). Die zweimalige Extrapolation macht aber gerade den Rand zum kritischen Gebiet der Rechnung. Tests mit der expliziten Methode ($\theta = 0$) haben ergeben, dass die kubische Extrapolation am ehesten vor Unsinn am Rand schützt.

Mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} d_{i,j}^{(1)} A &\equiv A_{i+1,j} - A_{i-1,j} \\ d_{i,j}^{(2)} A &\equiv A_{i+1,j} + \frac{2}{i} A_{i,j} - A_{i-1,j} \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

lauten die Differenzengleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{0j+1} &= \frac{\psi_{0j}(\theta) - \frac{2g\theta}{h} v_{1j+1}}{1 + \frac{2g\theta}{h} v_{1j+1}}, \\ \rho_{ij+1} &= \frac{\psi_{ij}(\theta) - \frac{g\theta}{2h} (d_{ij+1}^{(2)} v + v_{ij+1} d_{ij+1}^{(1)} \rho)}{1 + \frac{g\theta}{2h} d_{ij+1}^{(2)} v} \\ \rho_{nj+1} &= \Gamma_{j+1}(\rho), \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

$$\left. \begin{aligned} v_{0j+1} &= 0, \\ v_{ij+1} &= \frac{\varphi_{ij}(\theta) - \frac{g\theta}{2h} \cdot \frac{1 + B_{ij+1}}{1 + \rho_{ij+1}} d_{ij+1}^{(1)} B}{1 + \frac{g\theta}{2h} d_{ij+1}^{(1)} v} \\ v_{nj+1} &= \Gamma_{j+1}(v) \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{0j+1} &= \frac{\beta_{0j}(\theta) + \frac{4ag\theta}{h^2} \chi_{0j+1} B_{1j+1} - \frac{2g\theta}{h} v_{1j+1}}{1 + \frac{4ag\theta}{h^2} \chi_{0j+1} + \frac{2g\theta}{h} v_{1j+1}} \\ B_{ij+1} &= \frac{\beta_{ij}(\theta) + \frac{ag\theta}{h^2} \left\{ \chi_{ij+1} \left(\frac{1}{2i} d_{ij+1}^{(1)} B + B_{i+1j+1} + B_{i-1j+1} \right) + \frac{1}{4} (d_{ij+1}^{(1)} \chi) (d_{ij+1}^{(1)} B) \right\}}{1 + \frac{2ag\theta}{h^2} \chi_{ij+1} + \frac{g\theta}{2h} d_{ij+1}^{(2)} v} \\ &\quad - \frac{\frac{g\theta}{2h} (d_{ij+1}^{(2)} v + v_{ij+1} d_{ij+1}^{(1)} B)}{1 + \frac{2ag\theta}{h^2} \chi_{ij+1} + \frac{g\theta}{2h} d_{ij+1}^{(2)} v} \\ B_{nj+1} &= \xi e^{-\delta t_{j+1}} \sin \omega t_{j+1}. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Hier sind folgende Größen der Zeit t_j benutzt:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{0j}(\theta) &= \rho_{0j} - \frac{2g(1-\theta)}{h} (1 + \rho_{0j}) v_{1j} \\ \psi_{ij}(\theta) &= \rho_{ij} - \frac{g(1-\theta)}{2h} \{ (1 + \rho_{ij}) d_{ij}^{(2)} v + v_{ij} d_{ij}^{(2)} \rho \} \\ \psi_{nj}(\theta) &= \Gamma_j(\psi(\theta)) \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{ij}(\theta) &= v_{ij} - \frac{g(1-\theta)}{2h} \left(v_{ij} d_{ij}^{(1)} v + \frac{1 + B_{ij}}{1 + \rho_{ij}} d_{ij}^{(1)} B \right) \\ \varphi_{nj}(\theta) &= \Gamma_j(\varphi(\theta)) \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_{0j}(\theta) &= B_{0j} + \frac{4ag(1-\theta)}{h^2} \chi_{0j} (B_{1j} - B_{0j}) - \frac{2g(1-\theta)}{h} v_{ij} (1 + B_{0j}) \\ \beta_{ij}(\theta) &= B_{ij} + \frac{ag(1-\theta)}{h^2} \left\{ \chi_{ij} \left(\frac{1}{2i} d_{ij}^{(1)} B + B_{i+1j} - 2B_{ij} + B_{i-1j} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (d_{ij}^{(1)} \chi) (d_{ij}^{(1)} B) \right\} - \frac{g(1-\theta)}{2h} \{ d_{ij}^{(2)} v (1 + B_{ij}) + v_{ij} d_{ij}^{(1)} B \}. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Der Widerstandstensor χ hängt allgemein von T , ρ und B ab, wobei die Abhängigkeit von T weitaus die stärkste ist ($\sim T^{-\frac{3}{2}}$). Die Abhängigkeit von B und ρ wurde in linearer Näherung bei konstantem T aus der allgemeinen Formel für χ_{\perp} (Anhang) berechnet:

$$\chi_{ij} = c_B B_{ij} - c_{\rho} \rho_{ij} + 1. \quad (90)$$

Die Konstanten c_B und c_{ρ} sind Ausdrücke in ρ_0 , B_0 und T_0 . Es wird hier wegen ihrer Länge darauf verzichtet, sie anzugeben. In unserem Parameterbereich haben sie die Größenordnung 0,3. Die Lösungen von (84) bis (86) sind nicht sensitiv darauf, ob man für χ_{ij} (90) verwendet oder einfach $\chi_{ij} = 1$ setzt. Das hängt damit zusammen, dass B und ρ mit ungefähr gleicher Amplitude und Phase variieren. Quantitativ ergibt sich zum Beispiel eine Differenz in den Lösungen von 2% bei Feldamplituden von 0,3 auf der Achse.

Das nicht lineare Gleichungssystem (84)–(86) bestimmt mit $\theta \neq 0$ implizit die Unbekannten ρ , v und B . Zur Lösung muss ein iteratives Verfahren benutzt werden. Als Alternative bietet sich das die Unbekannten explizit bestimmende System mit $\theta = 0$ ($\rho_{0j+1} = \psi_{0j}(\theta = 0)$ usw.) an, das aber den aus 2.4 bekannten Nachteil eines beschränkten Zeitschrittes aufweist. Es erhebt sich nun die Frage, ob es ein so rasch konvergierendes iteratives Verfahren gibt, dass der Vorteil eines grossen Zeitschrittes mit $\theta = \frac{1}{2}$ nicht durch viele Iterationen zunichte gemacht wird. Es konnte ein Verfahren gefunden werden, das die Rechenzeiten mit $\theta = \frac{1}{2}$ einen Faktor 3 kleiner macht als diejenigen mit $\theta = 0$.

Das anzugebende iterative Verfahren steht und fällt damit, dass sehr gute Anfangswerte für die Unbekannten gegeben werden können. Als Anfangswerte ('nullte' Approximation) werden gerade die expliziten Ausdrücke ($\theta = 0$) für die Größen ρ_{ij+1} , v_{ij+1} und B_{ij+1} genommen: $\psi_{ij}(\theta = 0)$, $\varphi_{ij}(\theta = 0)$ und $\beta_{ij}(\theta = 0)$. Die erste Approximation erhält man dann analog zur Gauss-Seidel-Iteration für lineare Gleichungssysteme [11], indem man das System (84)–(86) von unten nach oben durchgeht und rechts des Gleichungszeichens die nullten und, wo schon bekannt, die ersten Approximationen einsetzt. Die erste Approximation für ρ_{0j+1} zum Beispiel wird also mit der ersten für v_{1j+1} berechnet, weil sie schon bekannt ist. Weitere Approximationen erhält man analog. Nach jeder Approximation $A_{ij+1}^{(l-1)}$ werden die Differenzen zur letzten $A_{ij+1}^{(l-1)}$ überprüft:

$$e = \frac{\sum (A_{ij+1}^{(l)} - A_{ij+1}^{(l-1)})^2}{\sum (A_{ij+1}^{(l)})^2}. \quad (91)$$

Die Summen erstrecken sich über $A = B, v, \rho$ und $i = 1, \dots, n$. Wenn eine vorgeschriebene Genauigkeit für e erreicht ist, wird der Iterationsprozess abgebrochen und zum nächsten Zeitschritt t_{j+1} weitergegangen.

Das mathematische System (84)–(86) lässt wegen der Konstanz des Plasmaradius eine variable totale Teilchenzahl zu. Man vergleiche hierzu die Bemerkungen, die im Anschluss an Gleichung (26) gemacht worden sind. Solange diese totale Teilchenzahl kein säkulares Verhalten zeigt und nur mit nicht zu grosser Amplitude um den Wert von $t = 0$ schwingt, darf (84)–(86) als ein gutes Modell für die physikalische Realität bezeichnet werden. Mit dem später noch oft benutzten Symbol

$$\sum_{i=0}^n A_i \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^2}{2} [iA_i + (i+1)A_{i+1}] = \int_0^1 A(r) r dr + O(h^2) \quad (92)$$

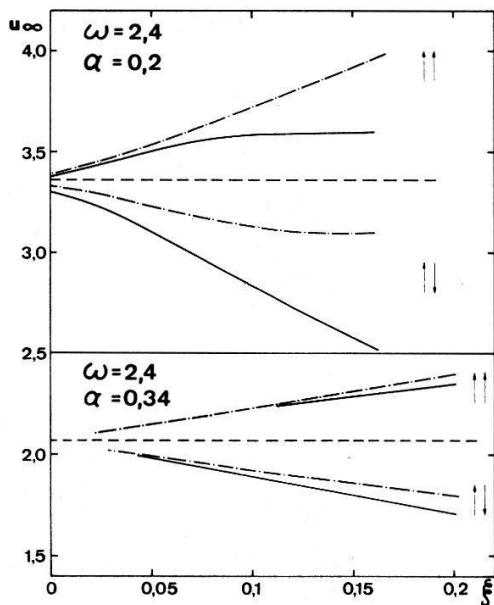
ist die relative Schwankung der Teilchenzahl

$$2 \int_0^1 \rho(r, t_j) r dr \approx 2 \sum_{i=0}^n \rho_{ij}. \quad (93)$$

Es zeigt sich, dass sie etwa die gleiche Amplitude hat wie das vorgeschriebene Randfeld B_{nj} (86).

Zur Prüfung der numerischen Lösung können deren eingeschwungene Magnetfeldamplituden mit der mit Störungsrechnung behandelten stationären Theorie [2] verglichen werden. In Figur 4 ist $u_\infty = B_{\text{Achse}}/B_{\text{Rand}}$, das Verhältnis der eingeschwungenen Amplituden des Magnetfeldes auf der Achse und am Rand, gegen die relative Anregung $\xi = B_{\text{Rand}}/B_0$ aufgetragen. Es muss unterschieden werden zwischen den zum statischen Magnetfeld B parallelen ($\uparrow\uparrow$) und antiparallelen ($\downarrow\uparrow$) Wellenfeldamplituden. Es ist der Resonanzfall $\omega = \gamma_1$ für zwei verschiedene Leitfähigkeitsparameter a gezeigt. Wie es zu erwarten ist, ist die Uebereinstimmung zwischen [2] und der numerischen Lösung für kleinere Magnetfelder besser als für grössere, da die quadratische Näherung der Störungsrechnung für höhere Felder ungenügend werden kann. Die numerisch Lösung ihrerseits erhält die Teilchenzahl nicht mehr. So ist zum Beispiel ihre eingeschwungene Amplitude im Falle $a = 0,2$ mit $\xi = 0,16$ schon mit einem Fragezeichen zu versehen, da die Dichte bis zur vierten Periode um 8% abnimmt, nach

den nächsten zwei Perioden plötzlich ansteigt und bewirkt, dass die Gauss-Seidel-Iteration nicht mehr konvergiert. Bei $\alpha = 0,2$ unterhalb $\xi = 0,13$ und bei $\alpha = 0,34$ unterhalb $\xi = 0,18$ zeigt sich jedoch kein säkulares Verhalten der Dichte und die Iteration (91) konvergiert bei $e = 10^{-6}$ im Durchschnitt in 3 bis 4 Schritten. Die Uebereinstimmung der numerischen Lösung mit [2] ist bei anderen als der Resonanzfrequenz von ähnlicher Güte. Sie ist bei kleineren Frequenzen besser als bei grösseren.



Figur 4

Stationäre Amplitudenüberhöhungen u_{∞} in Resonanz ($\omega = 2,4$) in Funktion der relativen Anregung ξ für zwei verschiedene Leitfähigkeitsparameter α nach der linearen stationären Theorie [1] (-----), nach der quadratischen stationären Theorie [2] (-·-·-) und nach der numerischen Lösung (—). ↑↑ und ↑↓ bezeichnen die dem statischen Feld B_0 parallelen bzw. antiparallelen Amplituden.

2.6. Numerische Lösung des vollständigen Systems

Auf dem Weg zur Lösung des vollständigen Systems könnte in einem ersten Schritt die Voraussetzung der konstanten Temperatur fallengelassen werden und erst im zweiten Schritt auch jene der Nichtverstimmbarkeit des äusseren Kreises. Nach dem ersten Schritt bietet sich ein Vergleich mit einer neueren Arbeit von Vaclavik [9] an, wo unter Vernachlässigung der Ionisation, aber unter Berücksichtigung der Nichtlinearitäten, die Temperaturerhöhung bei stationärer Anregung mit Störungsrechnung berechnet wird. Bei diesem Vergleich erhält man aber nicht mehr als ein Uebereinstimmen der allgemeinen Tendenz, nämlich, dass die Temperaturerhöhung bei Einbezug der Nichtlinearitäten kleiner wird als mit einer linearen Theorie [3]. Für das schlechte Uebereinstimmen gibt es zwei Gründe. Erstens ist die Störungsreihe, wenn überhaupt, nur schwach konvergent, und zweitens setzt Vaclavik zu Beginn seiner stationären Aufheizung eine homogene Temperaturverteilung voraus, wohingegen bei der numerischen Lösung nach dem Einschwingen schon eine beträchtliche Temperaturinhomogenität besteht.

Aus diesen Gründen wird darauf verzichtet, das zu lösende System schrittweise zu vervollständigen. Es werden direkt die Temperatur $T(r, t)$ und der äussere Kreis miteinbezogen. Die Gleichungen für ρ , v und B (84)–(86) gelten weiterhin. Nur die Gleichung

für das Randfeld B_{nj+1} muss durch die Kopplung (19), (20) an den Kreis ersetzt werden. Zudem muss in χ_{ij} (90) die Temperaturabhängigkeit berücksichtigt werden. Bevor dies ausgeführt wird, sollen die in (28) und (78) noch fehlenden Transformationen in dimensionslose Größen angegeben werden:

$$\left. \begin{aligned} 1 + T' &= \frac{T}{T_0}, & E'_\nu &= \frac{E_\nu}{T_0} (\nu = i, 1, 2), & I' &= \frac{I}{2\pi B_0 R_p C_A}, & W' &= cW, \\ Q' &= \frac{Q}{2\pi B_0 R_p^2}, & C' &= \frac{C_A}{cR_p} C, & L' &= \frac{cC_A}{R_p} L, & \beta &= \frac{8\pi n_0 T_0}{B_0^2}, \\ \gamma &= 8\pi^2 \frac{C_A R_p}{cl}. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Damit lässt sich (19), (20) für das Randfeld wieder unter Weglassung des Striches schreiben:

$$B_{nj+1} = \gamma I_{j+1}. \quad (95)$$

Der Strom I_{j+1} ist durch die Differenzengleichungen, die aus (21) und (22) folgen, bestimmt:

$$I_{j+1} = \frac{1}{1 + \frac{(g\theta)^2}{LC} + \frac{g\theta W}{L}} \left(\nu_j(\theta) - \frac{g\theta}{LC} \mu_j(\theta) - \frac{1}{L} \sum_{i=0}^n B_{ij+1} \right) \quad (96)$$

$$Q_{j+1} = \mu_j(\theta) + g\theta I_{j+1}. \quad (97)$$

Die Größen der Zeit t_j sind:

$$\nu_j(\theta) = I_j - \frac{g(1-\theta)}{LC} Q_j - \frac{g(1-\theta)W}{L} I_j + \frac{1}{L} \sum_{i=0}^n B_{ij} \quad (98)$$

$$\mu_j(\theta) = Q_j + g(1-\theta) I_j. \quad (99)$$

Der spezifische Widerstand ist

$$\chi_{ij} = \frac{1}{(1 + T_{ij})^{3/2}} \approx 1 - \frac{5}{3} T_{ij} + \frac{5}{3} T_{ij}^2 \quad (100)$$

Die Approximation gilt im Bereich $-0,2 \leq T_{ij} \leq 0,4$ mit einem maximalen Fehler von 4,5%. Für fast alle auszuführenden Rechnungen ist sie genügend. Die Abhängigkeit von B und ρ (90) ist vernachlässigbar.

Es bleibt nun noch die Aufgabe, die Temperaturgleichung (18) in eine Differenzengleichung zu transformieren. In der dimensionslosen Temperatur schreiben sich (11) und (8)

$$i = c_1 T + c_2$$

$$iE_i = c_1 E_1 T + c_2 E_1 + c_3 (T + c_4)^2 (E_2 - E_1)$$

$$c_1 = 1,92 T_0, \quad c_2 = c_1 - 1,98, \quad c_3 = 3 T_0^2, \quad c_4 = \frac{T_0 - 1,4}{T_0}. \quad (101)$$

Damit wird der Ionisationsnennner in (18) $U_1 + U_2 T$, wo

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{3}{2}(1 + c_1 + c_2) + c_1 E_1 + 2c_3 c_4(E_2 - E_1) \\ U_2 &= 3c_1 + 2c_3(E_2 - E_1). \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

Mit (101), (102) und der weiteren Abkürzung

$$w_1 = 1 + c_2, \quad w_2 = 1 + c_1 + c_2 \quad (103)$$

und unter Berücksichtigung der Symmetrie von T bezüglich der Achse lässt sich (18) in Differenzengleichungen transformieren:

$$\left. \begin{aligned} T_{0j+1} &= \tau_{0j}(\theta) - \frac{2g\theta}{h} v_{1j+1} \frac{w_1 + w_2 T_{0j+1} + c_1 T_{0j+1}^2}{U_1 + U_2 T_{0j+1}} \\ T_{ij+1} &= \tau_{ij}(\theta) - \frac{g\theta}{2h} v_{ij+1} d_{ij+1}^{(1)} T + \\ &\quad \frac{a}{\beta} \frac{g\theta}{2h^2} \frac{\chi_{ij+1}}{1 + \rho_{ij+1}} (d_{ij+1}^{(1)} B)^2 - \frac{g\theta}{2h} (w_1 + w_2 T_{ij+1} + c_1 T_{ij+1}^2) d_{ij+1}^{(2)} v \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

$$T_{nj+1} = \Gamma_{j+1}(T)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{0j}(\theta) &= T_{0j} - \frac{2g(1 - \theta)}{h} v_{ij} \frac{w_1 + w_2 T_{0j} + c_1 T_{0j}^2}{U_1 + U_2 T_{0j}} \\ \tau_{ij}(\theta) &= T_{ij} - \frac{g(1 - \theta)}{2h} v_{ij} d_{ij}^{(1)} T + \\ &\quad \frac{ag(1 - \theta)}{\beta 2h^2} \frac{\chi_{ij}}{1 + \rho_{ij}} (d_{ij}^{(1)} B)^2 - \frac{g(1 - \theta)}{2h} (w_1 + w_2 T_{ij} + c_1 T_{ij}^2) d_{ij}^{(2)} v \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

$$\tau_{nj}(\theta) = \Gamma_j(\tau(\theta)).$$

Zwischen den Gleichungen (104) und den Gleichungen für ρ , v und B (84)–(86) besteht noch ein wesentlicher Unterschied. In den Gleichungen (84)–(86) kommt die Grösse, die links des Gleichheitszeichens steht, rechts nicht vor. Gerade das ist aber eine Bedingung für gute Konvergenz im benutzten iterativen Lösungsverfahren. Im Unterschied zu (84)–(86) kommt in (104) die zu bestimmende Grösse in der sie bestimmenden Gleichung quadratisch vor. Symbolisch lässt sich die T_{ij+1} bestimmende Gleichung (104) schreiben:

$$T_{ij+1}^2 + 2K_1 T_{ij+1} + K_2 = 0. \quad (106)$$

Hier sind K_1 und K_2 Ausdrücke in den andern Unbekannten v , ρ , B , T_{i+1j+1} und T_{i-1j+1} .

Zur Lösung im iterativen Verfahren wird die linearisierte Form von (106) verwendet:

$$T_{ij+1}^{(l)} = -\frac{K_2}{2K_1 + T_{ij+1}^{(l-1)}}. \quad (107)$$

l bezeichnet die l . Approximation (91).

Das Gleichungssystem (84)–(86), (96), (97), (100) und (107) beschreibt nun zusammen mit den Anfangsbedingungen (23) das eingangs dieser Arbeit gestellte physikalische Problem vollständig. Zur Lösung wird das in 2.5 besprochene iterative Verfahren verwendet. Obschon Gleichung (107) die Bedingung, dass T_{ij+1} nur links des Gleichheitszeichens vorkommen sollte, nicht erfüllt, konvergiert das Verfahren für nicht zu grosse Zeitschritte gut.

g ist hier anders als beim linearen Problem nicht nur durch die Periodenlänge, sondern auch absolut beschränkt. g soll bei einer Genauigkeit $e = 10^{-6}$ (91) und $h = 0,1$ einerseits so klein sein, dass etwa 30–35 Zeitschritte pro Periode $2\pi/\omega$ gemacht werden, und andererseits soll es nicht grösser als 0,08 sein. Wird die eine der beiden Schranken überschritten, so stellt sich kein weiterer Gewinn an Rechenzeit ein, weil die Anzahl der Iterationen pro Zeitschritt zunimmt. Bei den angegebenen Werten von g , h und e sind bei Achsenfeldern B von 0,5 in Resonanz ($\omega \approx \gamma_1$) etwa sechs Iterationen nötig, bei Feldern von 0,25 etwa vier und bei 0,1 noch drei.

Die Glaubwürdigkeit der numerischen Lösung kann mit integralen Erhaltungssätzen überprüft werden. Es wurde die Teilchen- und die Energieerhaltung benutzt. Der Ausdruck für die relative Schwankung der Teilchenzahl findet sich in (93). Die zur Zeit $t = 0$ als thermische im Plasma und als elektrostatische auf dem Kondensator vorhandene Energie tritt während der Entladung auch als magnetische, als kinetische und als Ionisationsenergie auf. Zudem geht die ohmsche Wärme des Kreises dem Gesamtsystem verloren. In den ungestrichenen Quantitäten schreibt sich diese zu erhaltende Gesamtenergie:

$$\epsilon(t) = \frac{1}{2C} Q^2 + \frac{1}{2} L I^2 + \int_0^t W I^2 dt + \int_{\text{Plasma}} d\tau \left\{ \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{3}{2} n(1+i) T + \frac{1}{8\pi} B^2 + i n E_i \right\} \quad (108)$$

Es wird hier darauf verzichtet (108) in endlichen Differenzen anzugeben, da der Ausdruck unübersichtlich wird. Die Transformation ist einfach durchzuführen. Die Energieschwankung ist dann durch $(\epsilon(t) - \epsilon(0))/\epsilon(0)$ gegeben.

Im weiteren interessiert die totale ohmsche Wärme, die das Plasma bis zur Zeit t absorbiert hat. Sie wird direkt berechnet:

$$\epsilon_{Pl}(t) = \int_{\text{Plasma}} d\tau \int_0^t dt \chi j^2. \quad (109)$$

Auf die Transformation in endliche Differenzen wird ihrer Einfachheit wegen ebenfalls verzichtet. Es sei nur bemerkt, dass j mit Hilfe von (3) durch B ausgedrückt wird.

Bei dem im nächsten Kapitel folgenden Vergleich zwischen Theorie und Experiment werden die Teilchen- und die Energieschwankung angegeben. Gleichung (109) wird nach der Überprüfung der Theorie durch das Experiment zu theoretischen Aussagen über die Energieabsorption verwendet.

3. Vergleich zwischen Theorie und Experiment

3.1. Apparatur und Messungen

Die verwendete Apparatur ist im Detail in [3] beschrieben. Die Anregung bei $B_0 = 5400$ Gauss und $T_0 = 1,5$ eV erfolgte mit zwei verschiedenen Kreisen. Sie haben bei gleicher Eigenfrequenz $\omega = 2,1 \cdot 10^6$ sec $^{-1}$ verschiedene Kapazitäten bzw. Induktivitäten. Kreis 1 ($C = 1,5 \mu\text{F}$, $L = 1,5 \cdot 10^{-7}$ H, $W = 36 \text{ m}\Omega$) kann bezüglich der Frequenz als vom Plasma nicht beeinflussbar angesehen werden. Kreis 2 ($C = 7,5 \mu\text{F}$, $L = 3,0 \cdot 10^{-8}$ H, $W = 8,7 \text{ m}\Omega$) wird vom Plasma verstimmt. L wurde aus C und der Kenntnis der Frequenz ohne Plasma ('Vakuumsignal') errechnet. W ergibt sich aus der Dämpfung des Vakuumsignals:

$$\delta = \frac{W}{2L}. \quad (110)$$

Kreis 1 wurde mit einer elektrostatischen Energie von 4 Joule zur linearen Anregung des Plasmas benutzt. Die Anregung darf als linear bezeichnet werden, weil das maximale Magnetfeld auf der Achse in Resonanz den Wert 0,04 (relative zu B_0) nicht überschritten hat. Kreis 2 dagegen wurde mit 44 Joule geladen. Das auftretende maximale Achsenfeld von 0,3 hat zur Folge, dass nicht lineare Effekte berücksichtigt werden müssen.

Es wurden simultan am Rande und auf der Achse des Plasmazyliners Magnetfeldmessungen mit Miniatursonden durchgeführt. Von den gefundenen Signalen der Art von Figur 1 wurden die Zeiten t_k^R (Rand) bzw. t_k^A (Achse) der aufeinanderfolgenden Extrema und ihre Höhe B_k^R bzw. B_k^A für $k = 1, \dots, 6$ ausgewertet. Der Zeitnullpunkt wurde in den beginnenden Anstieg des Randsignals gelegt. Die Messreihen bestanden aus 16–18 Messungen bei verschiedenen Gasdrucken im Resonanzbereich.

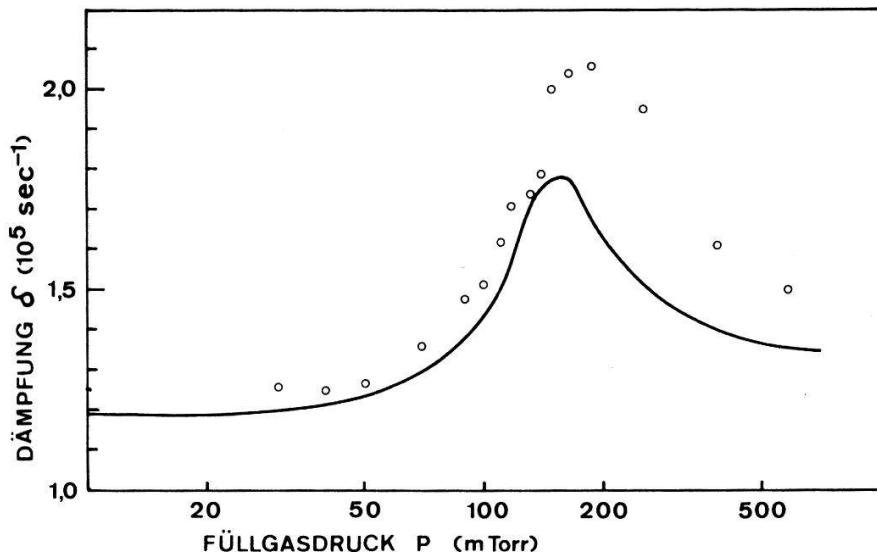
Im weiteren wurde die Erhöhung der Elektronendichte in Abhängigkeit vom Radius mit einem Laserinterferometer mit bewegtem Spiegel gemessen. Die Apparatur ist ebenfalls die gleiche wie in [3]. Hier konnte aber eine Zeitauflösung von 0,4 μsec erreicht werden. Der apparative Aufbau erlaubte eine Dichtemessung bis zum Radius 2,5 cm. Der in die Rechnung eingehende Plasmaradius wurde aus der Lage der magnetoakustischen Resonanz zu $R_p = 3,1$ cm bestimmt.

In den folgenden drei Abschnitten werden die in dieser Arbeit entwickelten theoretischen Modelle an Hand der erwähnten Messungen auf ihre Brauchbarkeit geprüft.

3.2. Randsignale

Die Größen t_k^R , B_k^R der Randsignale geben Aufschluss über den Senderkreis, da das Randfeld dem Strom im Kreis direkt proportional ist (20). Die Signale müssen unbedingt der Anregungsstärke mit der vollständigen Theorie 2.6 verglichen werden, da nur dort der Kreis als nicht unabhängig vom Plasma behandelt wird.

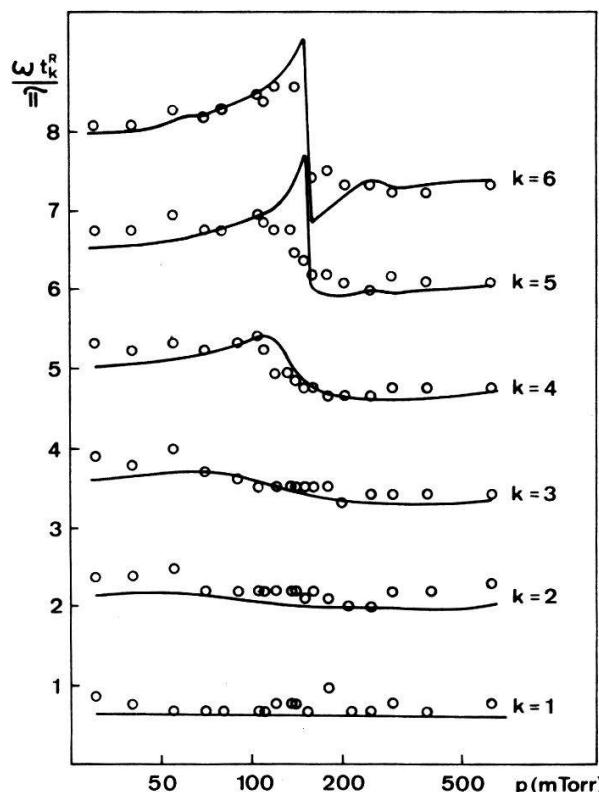
Im Falle des bezüglich der Frequenz nicht verstimmten Kreises 1 genügt es, die Dämpfung δ (24) zu vergleichen, die theoretisch trotz dem Einschwingen im Plasma keine Zeitabhängigkeit zeigt. In Figur 5 ist das Resonanzverhalten von δ gezeigt. Die theoretischen Werte der vom Plasma herrührenden Dämpfung liegen etwa 30% tiefer als die experimentellen. Diese Diskrepanz ist vor allem durch die nicht lineare Funktionsweise der zur Zündung der Kondensatoren benutzten Funkenstrecken bei



Figur 5
Dämpfung δ im Kreis 1 gemäss der Theorie 2.6 (—) und dem Experiment (○○○) in Funktion des Gasdruckes p .

kleinen Energien bedingt. Ihr Widerstand ist vom Strom abhängig. Ein Vergleich mit früheren δ -Messungen bei höheren Anregungsenergien [3] zeigt, dass zwei Drittel der Differenz zwischen Theorie und Experiment durch die Funkenstrecken bedingt ist.

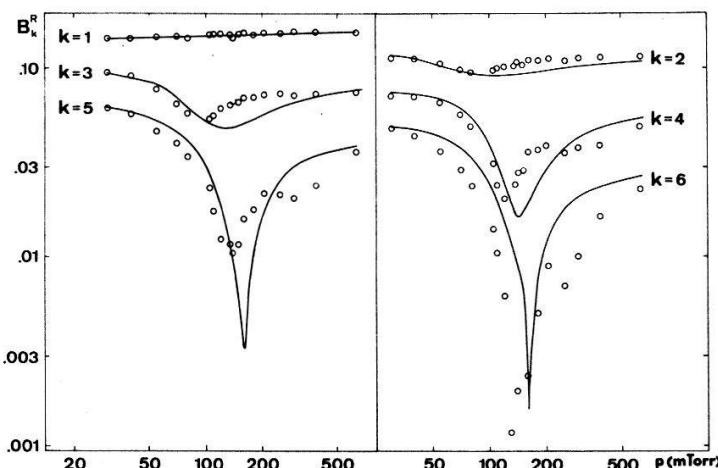
Im Falle des Kreises 2 müssen sowohl die Zeiten t_k^R der Extrema (Fig. 6) wie auch deren Höhe B_k^R (Fig. 7) verglichen werden. Die Verstimmbarkeit des Kreises 2 zeigt



Figur 6
Zeiten t_k^R der ersten sechs Extrema k des Randfeldes bei Anregung mit Kreis 2 in Funktion des Gasdruckes. Theorie (—) und Experiment (○○○).

sich am schönsten im Resonanzcharakter der Zeitkurven (Fig. 6), die im unverstimmten Fall äquidistante horizontale Geraden sind. Die Diskrepanzen in Figur 6 und 7 röhren von den Funkenstrecken und der Zeitabhängigkeit des Plasmaradius R_p her.

Da sich die grössten Abweichungen sowohl beim Kreis 1 wie beim Kreis 2 am Ende des Signals (hohe k) zeigen, wo praktisch schon die gesamte Energie absorbiert worden ist, wiegen sie nicht schwer: Sie sind immer kleiner als 10% der Maximalamplitude ($k = 1$). Die im Kreis absorbierte Energie wird somit von der Theorie mit einem Fehler, der kleiner als 20% ist, wiedergegeben.



Figur 7
Höhe B_k^R der ersten sechs Extrema k des Randfeldes bei Anregung mit Kreis 2 in Funktion des Gasdruckes. Theorie (—) und Experiment (○○○).

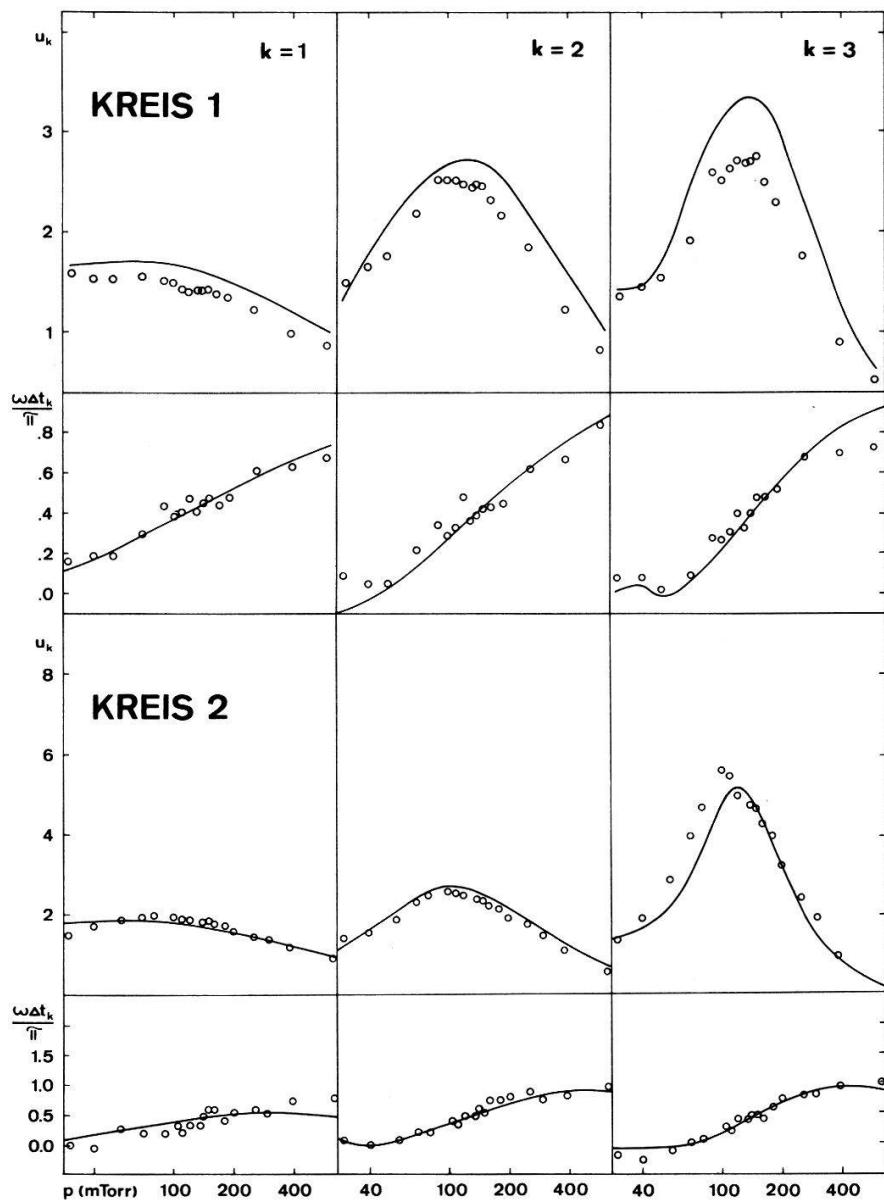
3.3. Phasendifferenz und Amplitudenüberhöhung

In Figur 8 werden Phasendifferenz Δt_k und Amplitudenüberhöhung u_k verglichen.

$$\left. \begin{aligned} \Delta t_k &= t_k^A - t_k^R \\ u_k &= \frac{B_k^A}{B_k^R} \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Sie geben Aufschluss über den zeitlichen Verlauf des Feldes bzw. des heizenden Stromes im Plasma. Das Experiment mit dem Kreis 1 kann dank seiner kleinen Anregungsenergie mit der linearen analytischen Lösung 2.3 verglichen werden. Der Einfluss des Kreises wird ausgeklammert, indem man die experimentellen Dämpfungen δ (Fig. 5) für die Rechnung benutzt. Das Experiment mit Kreis 2 dagegen kann wegen der hohen Anregung und der Beeinflussbarkeit des Kreises nur mit der vollständigen Theorie 2.6 beschrieben werden.

Bei den Rechnungen mit der Theorie 2.6 hat das iterative Lösungsverfahren nach der Gauss-Seidel-Methode bei einer Genauigkeit von $\epsilon = 10^{-6}$ (91) im Durchschnitt vier bis fünf Schritte benötigt. Die Schwankungen von Dichte (93) und Energie (108) haben säkulare Anteile gezeigt, die nicht grösser waren als 1%, mit einer Ausnahme: Bei hohem Füllgasdruck, $p = 630$ mTorr, fehlen am Schluss 6% der Gesamtenergie. Beim gleichen Druck zeigt sich in der ersten Halbperiode auch die grösste



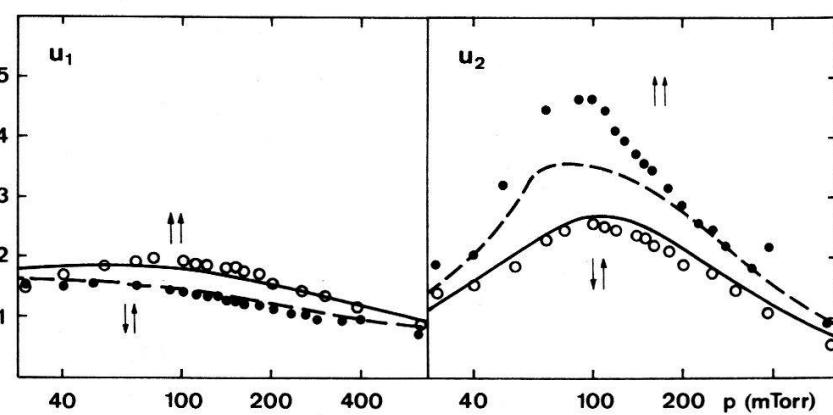
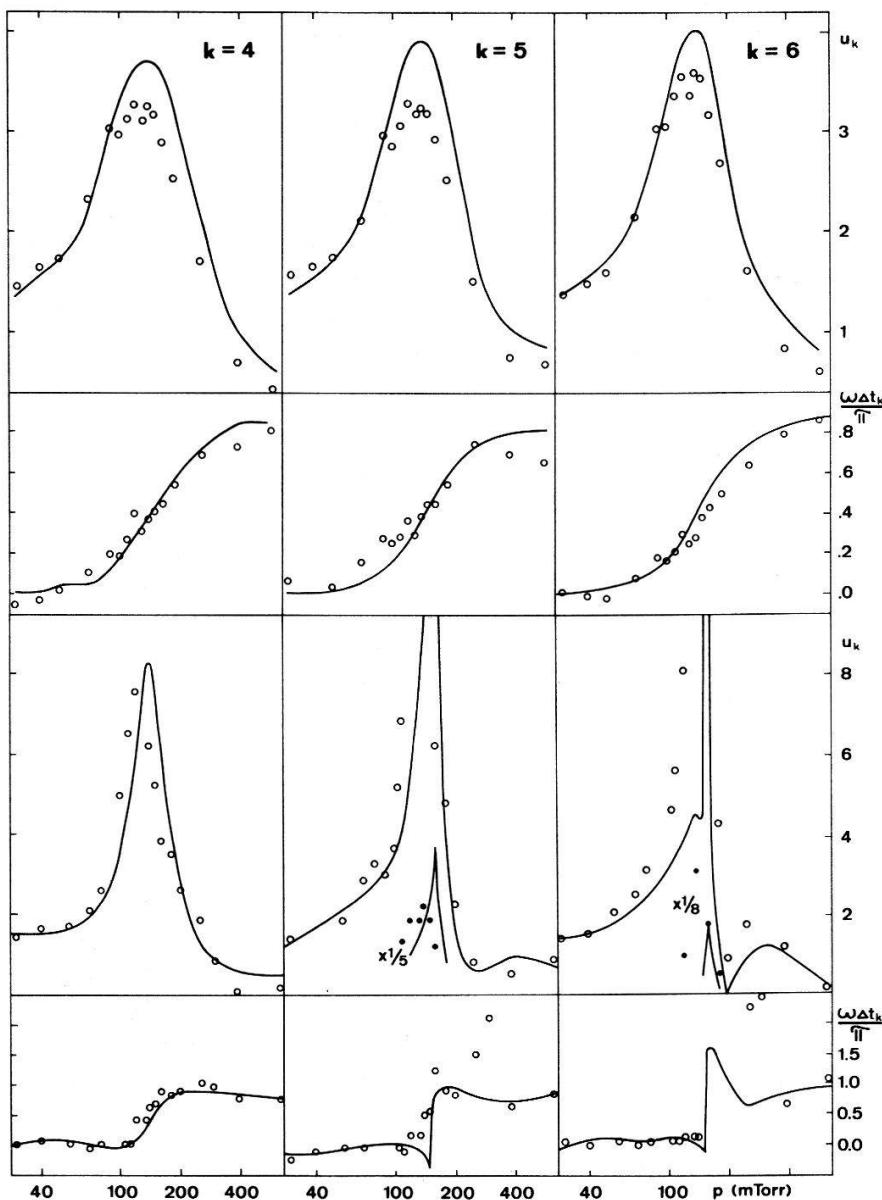
Figur 8

Amplitudenüberhöhung u_k und Phasendifferenz Δt_k zwischen Achse und Rand für die ersten sechs Extrema k der Magnetfeldschwingung nach der Theorie (—) und dem Experiment (○○○).

Amplitude der Energieschwankung (30%). Diese Maximalamplitude nimmt mit fallendem Druck ab. In Resonanz tritt sie während der zweiten Halbperiode auf (18%), bei $p = 30$ mTorr ist sie nurmehr 4%. Die Dichteschwankung hat ihre grösste Amplitude immer in der ersten Halbperiode. Sie nimmt von 19% bei 30 mTorr mit steigendem Druck ab und ist bei 630 mTorr noch 8% hoch.

In den in Figur 8 gezeigten Messwerten des Kreises 2 war die erste Halbperiode des Magnetfeldes parallel zum statischen. In einer zweiten Messreihe mit dem Kreis 2 wurde dann die umgekehrte Polarität gewählt. Ein Vergleich der ersten zwei Halbperioden der beiden Messreihen (Fig. 9) zeigt den Einfluss der Nichtlinearitäten.

Die Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment in Figur 8 und 9 ist wieder den Funkenstrecken und dem veränderlichen Plasmaradius zuzuschreiben. Da die Abweichungen die Grenze von 25% nicht übersteigen, darf das Resultat als befriedigend bezeichnet werden.

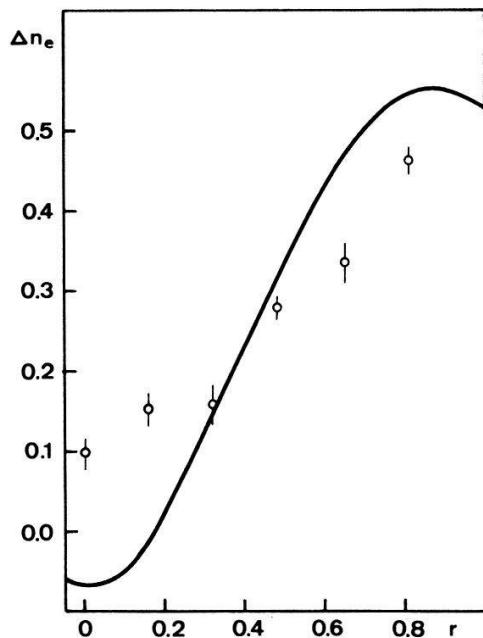


Figur 9

Einfluss der Nichtlinearitäten auf die Amplitudenüberhöhung u_k der ersten zwei Extrema der Magnetfeldschwingung bei Anregung mit Kreis 2. 1. Halbperiode parallel (— Theorie, ○ Experiment), 1. Halbperiode antiparallel (---- Theorie, ● Experiment).

3.4. Erhöhung der Elektronendichte

Als drittes wird die totale Dichteerhöhung Δn_e in Abhängigkeit vom Radius verglichen. Da im vorliegenden Temperaturbereich mehr als 80% der im Plasma absorbierten Energie als Ionisationsenergie erscheint, was sich aus (108) und den Angaben im Anhang leicht zeigen lässt, gibt die Dichtemessung guten Aufschluss über die



Figur 10

Die durch eine gepulste Entladung bewirkte Erhöhung der Elektronendichte Δn_e in relativen Einheiten bezüglich der Ausgangsdichte in Abhängigkeit vom Radius.

Energieabsorption. Es wurde der Resonanzfall beim Kreis 2 mit $p = 140$ mTorr und $Q_0^2/2C = 44$ J gewählt. Δn_e ist auf die Ausgangsdichte $n_{e0} = 4,1 \cdot 10^{15}$ cm⁻³ normiert, r auf den Plasmaradius $R_p = 3,1$ cm. Aus Figur 10 ist ersichtlich, dass integral über die Plasmafläche Theorie und Experiment weniger als 20% voneinander abweichen. Das ist wesentlich besser, als was aus den maximalen Fehlern beim Magnettfeld geschlossen werden könnte (mindestens 50%).

Es zeigt sich also, dass das benutzte physikalische Modell das Experiment als ganzes innerhalb Grenzen von etwa 20% beschreibt. Die theoretischen Unsicherheiten sind somit nicht grösser als die experimentellen.

4. Energieabsorption

Die gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment erlaubt es nun, rein theoretische Aussagen über die Energieabsorption im Plasma bei einer gepulsten Anregung im Bereich der magnetoakustischen Resonanz zu machen. Der Wirkungsgrad X ist das Verhältnis der total im Plasma absorbierten Energie $\epsilon_{pl}(t = \infty)$ (109) zur elektrostatischen zur Zeit $t = 0$:

$$X = \frac{\epsilon_{pl}(\infty)}{\frac{Q_0^2}{2C}} \quad (112)$$

X ist wesentlich vom ohmschen Widerstand W des Kreises abhängig. Die theoretischen Resultate zeigen, dass die Abhängigkeit von W angenähert durch die einleuchtende Gleichung

$$X \approx \frac{W_p}{W + W_p} \quad (113)$$

beschrieben wird. W_p ist durch die Parameter des Plasmas, die Art der Anregung und durch das Einschwingverhalten bestimmt. Bei stationärer Anregung geht W_p in den in [3] definierten Plasmawiderstand über. Im Falle von Kreis 1 ist das mit (112) und (113) definierte W_p einen Faktor 2.5 kleiner als der stationäre Plasmawiderstand.

Aus den Rechnungen mit verschiedenen Kreisen ergibt sich, dass X bei gepulster Anregung nicht von deren Stärke abhängt und nur schwach von den Kreisdaten L und C : Kreis 2 gibt zum Beispiel 49% seiner Energie aus Plasma in Resonanz ab. Ein noch stärker verstimmbarer Kreis mit gleichem Widerstand und doppelter Kapazität verliert in etwas verschobener Resonanz immer noch 43%. Für die Plasmaheizung wird der kleine Verlust an Wirkungsgrad durch die doppelte Kapazität mehr als wettgemacht.

Wie stark die Energieabsorption vom Einschwingen abhängt, soll am Beispiel des Kreises 2 gezeigt werden. Er verbraucht während der ersten Periode selbst 45% seiner Energie, während das Plasma in der gleichen Zeit nur 19% aufnimmt. Der Rest wird dann wesentlich anders verteilt. 6% bleiben im Kreis und 30% gehen ins Plasma. Bei gleichen physikalischen Bedingungen im Plasma und stationärer Anregung absorbiert das Plasma in der zweiten Periode dreimal mehr Energie als in der ersten.

Die theoretische Analyse der Energieabsorption bestätigt also die triviale Forderung nach möglichst kleinem ohmschen Widerstand für einen das Plasma heizenden Kreis. Weiter zeigt sie, dass die Verstimmbarkeit des Kreises keinen wesentlichen Einfluss auf den Wirkungsgrad hat, so dass die Kapazität möglichst gross bzw. die Induktivität möglichst klein gewählt werden soll, immer natürlich unter Beibehaltung der Resonanzfrequenz des Plasmas. Und zuletzt zeigt die Analyse, dass der Wirkungsgrad einer solchen Kreisentladung für die Plasmaheizung nur unter Berücksichtigung der Einschwingvorgänge berechnet werden kann.

Die in dieser Arbeit beschriebene Theorie ist anwendbar, solange Anregung und Plasmatemperatur so klein sind, dass Druck- und viskose Kräfte gegenüber den magnetischen vernachlässigbar sind. Im speziellen soll kein Schock auftreten.

Wir danken Herrn Prof. Dr. O. Huber für seine Unterstützung und für sein Interesse an dieser Arbeit. Herrn Dr. W. Lindt gilt unser Dank für seinen Hinweis auf die Nützlichkeit numerischer Methoden, Herrn Dr. H. R. Schwarz für seine in jene Methoden einführenden wertvollen Ratschläge und Literaturangaben. Grosser Dank gebührt auch Herrn Dr. J. Vaclavik vor allem für seine Hilfe bei der analytischen Behandlung des Problems und für die Überlassung des Rechenprogrammes zur Berechnung der nicht linearen stationären Lösung [2]. Herrn Dr. K. Fässler danken wir für seine weitgehende Hilfe beim Experiment und seiner Auswertung. Dank gebührt auch Herrn Prof. Dr. E. S. Weibel für seine kritischen Bemerkungen zur Theorie. Den Herren M. Gasser und V. Ionesco danken wir für die Zeit, die sie zum Rechnen unserer Programme am Computer aufgewendet haben.

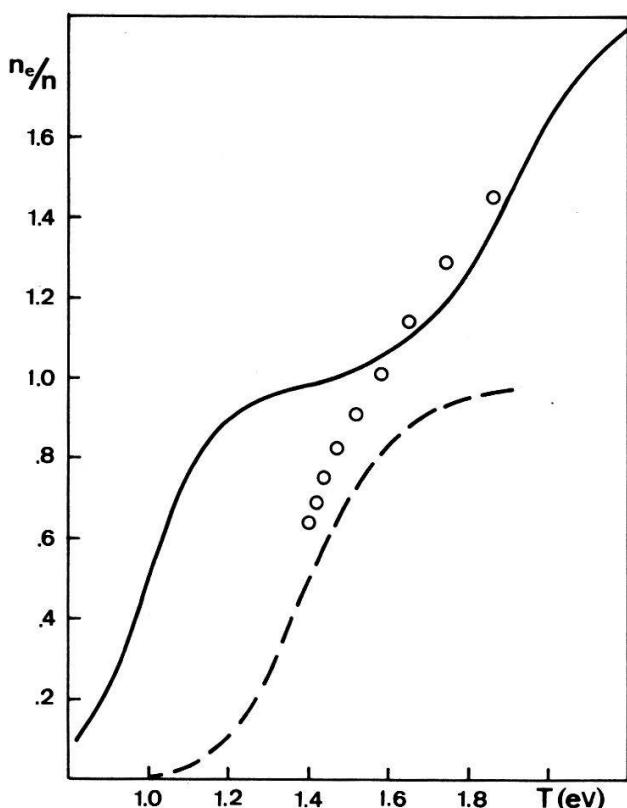
Anhang

Temperatur, Ionisationsgrad und spezifischer Widerstand

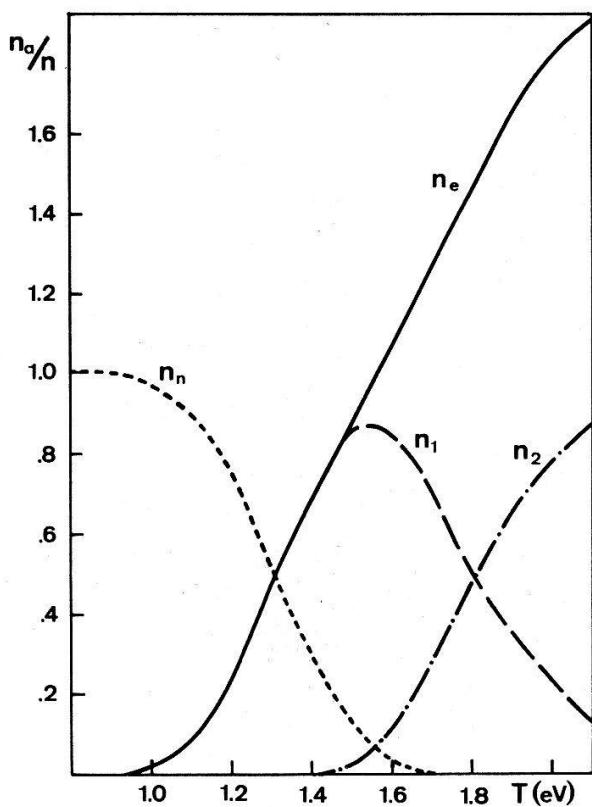
In lokalem thermodynamischem Gleichgewicht beschreibt die Saha-Eggert-Gleichung [5] den Zusammenhang zwischen Temperatur und Elektronen- bzw. Ionendichte. Um sie benutzen zu können, müssen die Ionenzustandssummen bekannt sein, welche für freie Ionen und Atome divergieren. In Plasmen haben sie auf Grund der Ionisationspotentialerniedrigung ΔE , die von Mikrofeldern herrührt, endliche, von ΔE abhängige Werte. Im Parameterbereich der vorliegenden Arbeit ist ΔE sehr klein. Werte verschiedener Theorien schwanken zwischen 0,02 eV und 0,2 eV für die ersten zwei Ionisationspotentiale. Diese Unsicherheit verlangt einen Vergleich zwischen der Saha-Eggert-Gleichung mit $\Delta E = 0,1$ eV, einer Saha ähnlichen Gleichung von Cantieni [1], die für Argon unterhalb etwa 1,5 eV gilt und dem Experiment (Fig. 11). Alle Dichten sind auf $n = 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ normiert. In der vorliegenden Arbeit wurde eine Kombination der zwei Theorien gewählt, die den experimentellen Zusammenhang wiedergibt (Fig. 12). Sie vernachlässigt die schwache Abhängigkeit vom Ausgangsdruck.

Die Kurven in Figur 12 wurden im Bereich $1,3 \text{ eV} \leq T \leq 1,9 \text{ eV}$ durch einfache Ausdrücke approximiert:

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_e}{n} &= 1,92T - 1,98 \\ \frac{n_2}{n} &= 3(T - 1,4)^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$



Figur 11
Abhängigkeit der Elektronendichte n_e von der Temperatur. Saha-Eggert-Gleichung (—), Theorie nach [1] (---) und Experiment (○ ○ ○).



Figur 12

In dieser Arbeit benutzte Abhängigkeit der Teilchendichten von der Temperatur.

Der spezifische Widerstand ist durch die Stossfrequenz der Elektronen $1/\tau_e \equiv \nu_e = \nu_{e1} + \nu_{e2}$ bestimmt. Im isotropen Fall ($x \ll 1$, $x \equiv \Omega_e \tau_e$, $\Omega_e = eB/m_e c$) ist er ungefähr

$$\chi \approx \frac{m_e \nu_e}{2e^2 n_e}. \quad (\text{A.2})$$

Im anisotropen Fall ($x \gtrsim 1$) ist er von x abhängig. Die x abhängigen Korrekturfunktionen [7] für die Stösse $e - A^+$ und $e - A^{++}$ werden in guter Näherung additiv benutzt:

$$\left. \begin{aligned} \chi_{\perp} &= \frac{m_e}{e^2 n_e} (\nu_{e1} f_1(x) + \nu_{e2} f_2(x)) \\ f_k(x) &= 1 - \frac{\alpha'_1 x^2 + \alpha'_0}{x^4 + \delta_1 x^2 + \delta_0}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

Die Konstanten α'_1 , α'_0 , δ_1 und δ_0 sind für $k = 1, 2$ in [7] zu finden.

LITERATUR

- [1] E. CANTIENI und H. SCHNEIDER, Helv. phys. Acta **36**, 993 (1963).
- [2] K. FAESSLER et al., Helv. phys. Acta **42**, 23 (1969).
- [3] B. HOEGGER et al., Helv. phys. Acta **44**, 321 (1971).
- [4] R. C. CROSS, Can. J. Phys. **48**, 2888 (1970).
- [5] D. W. DRAWIN und P. FELENBOK, *Data for Plasmas in Local Thermodynamic Equilibrium* (Gauthier-Villars, Paris 1965).
- [6] N. G. VAN KAMPEN und B. U. FELDERHOF, *Theoretical Methods in Plasma Physics* (N.H.P.C., Amsterdam 1967).

- [7] S. I. BRAGINSKI, Rev. Plasma Phys. 1 (Ed. Acad. M. A. Leontovich) (Consultants Bureau, New York 1965).
- [8] K. APPERT und L. KRLIN, *Wellen- und Temperaturgleichungen für die magnetoakustische Resonanz*, Interner Bericht, Universität Freiburg i. Ue., Plasma FR 102 (1970).
- [9] J. VACLAVIK, Helv. phys. Acta 44, 359 (1971).
- [10] J. VACLAVIK, private Mitteilung.
- [11] G. D. SMITH, *Numerical Solutions of Partial Differential Equations* (Oxford University Press, London 1969).