

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 45 (1972)
Heft: 2

Artikel: Über die Isometriegruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit negativer Krümmung
Autor: Huber, Heinz
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-114384>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über die Isometriegruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit negativer Krümmung

Markus Fierz zum 60. Geburtstag

von **Heinz Huber**, Basel

(12. XI. 71)

I.

Kompakte Riemannsche Flächen vom Geschlecht $g > 1$ lassen nur endlich viele konforme Selbstabbildungen zu. Dieses klassische Ergebnis der Funktionentheorie ist, wie die Uniformisierungstheorie lehrt, äquivalent mit dem folgenden differentialgeometrischen Satz: Eine zweidimensionale kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit M mit konstanter negativer Krümmung besitzt nur eine endliche Isometriegruppe $I(M)$. Dieser Satz bleibt aber auch dann bestehen, wenn die Dimension von M grösser als zwei ist. In der Tat: Es gibt auf $I(M)$ eine natürliche Topologie, welche $I(M)$ zu einer kompakten topologischen Transformationsgruppe von M macht ([2], p. 166–169). Daher muss $I(M)$ entweder eine endliche Gruppe oder eine Liesche Transformationsgruppe von M sein ([3], Kap. V). Wäre $I(M)$ eine Lie-Gruppe, so müsste M nicht-triviale infinitesimale Isometrien, sog. Killingsche Vektorfelder, zulassen. S. Bochner [1] hat aber gezeigt, dass es auf M kein nicht-triviales Killingfeld gibt.

Die vorliegende Arbeit bringt einen neuen Beweis der Endlichkeit von $I(M)$, welcher ohne die Theorie der kompakten Transformationsgruppen auskommt und sogar eine obere Schranke für die Ordnung von $I(M)$ liefert. Es wird der folgende Satz bewiesen:

M sei eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$ mit überall konstanter Schnittkrümmung -1 . Es sei δ ihr Durchmesser, $l(p)$ das Infimum der Längen nicht-nullhomotoper Wege mit Anfangs und Endpunkt p auf M , $\lambda = \sup_{p \in M} l(p)$. Dann gilt:

$$\text{Ord } I(M) < [f_n(6\delta + 5\lambda/4 + \log 4(n-1)) / f_n(\lambda/4)]^{n+1},$$

$$f_n(x) = \int_0^x (\sin t)^{n-1} dt.$$

Der Beweis erfolgt in Abschnitt III, nachdem in II einige Hilfssätze über den Poincaréschen Halbraum bereitgestellt worden sind. Die Beweismethode lässt sich so ausbauen, dass sie auch auf Mannigfaltigkeiten mit variabler negativer Schnittkrümmung anwendbar wird; sie liefert dann eine Schranke für die Ordnung von $I(M)$, in der ausser n , δ , λ auch die minimale und die maximale Schnittkrümmung auftreten.

II. Hilfssätze über den Poincaréschen Halbraum

1. Der Halbraum

$$H = \{(u_1, \dots, u_n) \mid u_i \in \mathbb{R}, u_n > 0\}, n \geq 2,$$

mit den Koordinatenfunktionen

$$x_i(u_1, \dots, u_n) = u_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

und dem Masstensor

$$(\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_k) = x_n^{-2} \delta_{ik}, \quad (1)$$

ist eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung -1 . Ist $d(p, q)$ die Distanz der Punkte $p, q \in H$, so gilt:

$$\cos d(p, q) = 1 + \frac{1}{2} x_n^{-1}(p) x_n^{-1}(q) \sum_{i=1}^n (x_i(p) - x_i(q))^2. \quad (2)$$

Daraus ergibt sich leicht das

Lemma 1. *Vor.:* $d(p, q) \leq \delta, \delta > 0$.

Beh.:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_i(p) - x_i(q))^2 < (e^\delta - 1)^2 x_n^2(q).$$

2. Unter einer Geodätischen in H verstehen wir eine Abbildung $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow H$ derart, dass $\dot{\gamma}$ ein Parallelfeld längs γ ist. Dann ist $\|\dot{\gamma}(t)\| = \text{const}$; ist diese Konstante $\neq 0$, so soll γ eine *eigentliche* Geodätische heißen. Ist H_p der Tangentialraum von H im Punkte p und $A \in H_p$, so definieren wir: $\exp A = \mu(1)$, wobei μ die eindeutig bestimmte Geodätische mit $\mu(0) = p, \dot{\mu}(0) = A$ ist. Dann gilt für jede Geodätische γ :

$$\gamma(\tau + t) = \exp t \dot{\gamma}(\tau).$$

Die negative Schnittkrümmung und der einfache Zusammenhang von H sind bekanntlich für folgende Tatsachen verantwortlich:

- $A \rightarrow \exp A$ ist eine bijektive Abbildung von H_p auf H .
- $d(p, \exp A) = \|A\|$.
- Ist $\alpha: [a, b] \rightarrow H$ ein stückweise glatter Verbindungsweg der Punkte p und $\exp A$, dessen Länge gleich der Distanz dieser Punkte ist, so verläuft α ganz auf dem geodätischen Segment $\{\exp tA \mid 0 \leq t \leq 1\}$.

3. Ist γ eine Geodätische und $y_i(t) = x_i(\gamma(t))$, so erfüllen die Funktionen y_1, \dots, y_n ein System von n Differentialgleichungen zweiter Ordnung, insbesondere gilt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{y'_i}{y_n^2} \right) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1. \quad (1)$$

Daraus ergibt sich sofort das

Lemma 2. Ist γ eine Geodätische mit

$$\gamma(0) = p_0 = (0, \dots, 0, 1), \quad \dot{\gamma}(0) = \rho(\partial/\partial x_n)_{p_0},$$

so ist $x_i(\gamma(t)) = 0$ für $i = 1, \dots, n-1$.

Lemma 3. *Vor.:* $A_1, \dots, A_{n-1} \in H_{p_0}$, $\det (x_i(\exp A_k))_{1 \leq i, k \leq n-1} \neq 0$.

Beh.: $A_1, \dots, A_{n-1}, (\partial/\partial x_n)_{p_0}$ sind linear unabhängig.

Beweis: Setzen wir

$$y_{ik}(t) = x_i(\exp tA_k),$$

so gilt für $k = 1, \dots, n-1$:

$$y_{ik}(0) = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad y_{nk}(0) = 1, \quad (2)$$

$$A_k = \sum_{i=1}^n y'_{ik}(0) \cdot (\partial/\partial x_i)_{p_0}. \quad (3)$$

Nach (1) gilt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{y'_{ik}}{y_{nk}^2} \right) = 0, \quad (i, k = 1, \dots, n-1).$$

Daraus und aus (2) ergibt sich:

$$y'_{ik}(t) = y'_{ik}(0) \cdot y_{nk}^2(t).$$

Somit wird für $i, k = 1, \dots, n-1$

$$x_i(\exp A_k) = y_{ik}(1) - y_{ik}(0) = y'_{ik}(0) \cdot \int_0^1 y_{nk}^2(t) dt.$$

Daher folgt aus unserer Voraussetzung:

$$\det (y'_{ik}(0))_{1 \leq i, k \leq n-1} \neq 0.$$

Daraus und aus (3) folgt aber die Behauptung.

4. Ist γ eine eigentliche Geodätische, so ist auch

$$\mu(t) = \gamma(at + b), \quad a \neq 0, \quad (1)$$

eine solche. Zwei Geodätische γ, μ , zwischen denen eine Beziehung (1) besteht, sollen äquivalent heißen: $\gamma \sim \mu$.

Lemma 4. *Vor.:* Es sei T ein Element der Isometriegruppe $I(H)$. γ_1, γ_2 seien eigentliche Geodätische und es gelte:

$$T(\gamma_i(t)) = \gamma_i(t + a_i), \quad (i = 1, 2).$$

Beh.:

- a) Aus $a_1 a_2 = 0$ folgt $a_1 = a_2 = 0$.
- b) Aus $a_1 a_2 \neq 0$ folgt $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

Beweis von a: Nehmen wir etwa $a_1 = 0$ an, so gilt $\forall n \geq 1$:

$$d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = d(T^n \gamma_1(t), T^n \gamma_2(t)) = d(\gamma_1(t), \gamma_2(t + na_2))$$

$$d(\gamma_2(t), \gamma_2(t + na_2)) \leq d(\gamma_2(t), \gamma_1(t)) + d(\gamma_1(t), \gamma_2(t + na_2)),$$

und somit

$$d(\gamma_2(t), \gamma_2(t + na_2)) \leq 2d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \quad \forall n \geq 1. \quad (2)$$

Andererseits ist $\gamma_2(t + na_2) = \exp na_2 \dot{\gamma}_2(t)$ und daher nach 2b:

$$d(\gamma_2(t), \gamma_2(t + na_2)) = n|a_2| \cdot \|\dot{\gamma}_2(t)\|. \quad (3)$$

Aus (2), (3) folgt aber wegen $\|\dot{\gamma}_2(t)\| \neq 0$: $a_2 = 0$.

Beweis von b: Setzen wir $\mu_i(t) = \gamma_i(a_i t)$, so sind μ_1, μ_2 wieder eigentliche Geodätische und es gilt:

$$\gamma_i \sim \mu_i \quad (4)$$

$$T(\mu_i(t)) = \mu_i(t + 1), \quad (i = 1, 2).$$

Daraus folgt

$$\forall n \in \mathbb{Z}: d(\mu_1(t + n), \mu_2(t + n)) = d(T^n \mu_1(t), T^n \mu_2(t)) = d(\mu_1(t), \mu_2(t)). \quad (5)$$

Nun gilt aber der leicht zu beweisende¹⁾ Satz: Sind μ_1, μ_2 eigentliche Geodätische und ist $\mu_1(t_1) \neq \mu_2(t_2) \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, so ist $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\mu_1(t), \mu_2(t)) = \infty$ oder $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\mu_1(t), \mu_2(t)) = \infty$.

Daher folgt jetzt aus (5) die Existenz von t_1, t_2 derart, dass $\mu_1(t_1) = \mu_2(t_2)$. Setzen wir $\nu_i(t) = \mu_i(t_i + t)$, so gilt:

$$\mu_i \sim \nu_i, \quad (6)$$

$$\nu_1(0) = \nu_2(0), \quad (7)$$

$$T(\nu_i(t)) = \nu_i(t + 1), \quad (i = 1, 2). \quad (8)$$

Aus (7) und (8) ergibt sich: $\nu_1(1) = \nu_2(1)$. Daraus und aus (7) folgt aber nach 2a: $\nu_1 = \nu_2$. Somit folgt aus (4), (6) die Behauptung. Ein anderer Beweis von Lemma 4b findet sich in [4].

III. Beweis des Satzes

1. Bekanntlich gibt es eine längentreue Abbildung $\sigma: H \rightarrow M$, welche H zur universellen Überlagerungsmannigfaltigkeit von M macht; es sei $\Sigma \subset I(H)$ die zugehörige Deckgruppe. Mit $U \in I(H)$ ist auch $\pi = \sigma \circ U^{-1}$ eine längentreue Überlagerungsabbildung von H auf M mit der Deckgruppe $\Pi = U\Sigma U^{-1}$. Wir werden nun, ausgehend von σ , eine Abbildung π mit ausgezeichneter Deckgruppe konstruieren:

2. Es gibt eine längentreue Überlagerungsabbildung $\pi: H \rightarrow M$, deren Deckgruppe Π folgende Eigenschaften hat:

a) Es gibt ein Element $T_0 \in \Pi$ und eine eigentliche Geodätische $\gamma_0: \mathbb{R} \rightarrow H$ derart, dass

$$T_0(\gamma_0(t)) = \gamma_0(t + 1), \quad (1)$$

$$\gamma_0(0) = p_0 = (0, \dots, 0, 1), \quad \dot{\gamma}_0(0) = \rho(\partial/\partial x_n)_{p_0}, \quad 0 < \rho \leq \lambda, \quad (2)$$

$$d(T_0 p_0, p_0) = \rho \leq \lambda. \quad (3)$$

b) Zu jedem $p \in H$ gibt es $S \in \Pi$ mit $d(Sp, p_0) \leq \delta$.

¹⁾ Man zeigt, dass $f(t) = d^2(\mu_1(t), \mu_2(t))$ eine überall positive zweite Ableitung besitzt. Dies gilt sogar auf jeder einfach zusammenhängenden vollständigen Mannigfaltigkeit mit überall negativer Schnittkrümmung.

3. Beweis von 2:**3.1.** Wir zeigen zunächst:

Zu $p, q \in H \exists S \in \Sigma$ mit $d(Sp, q) \leq \delta$. (1)

In der Tat: Da M kompakt ist, gibt es ein geodätisches Segment auf M , das $\sigma(q)$ mit $\sigma(p)$ verbindet und dessen Länge $\leq \delta$ ist. Der von q ausgehende Überlagerungsweg dieses Segmentes hat die gleiche Länge und endet in einem Punkt Sp mit $S \in \Sigma$.

3.2. Wir definieren

$$\rho = \inf_{S \in \Sigma', q \in H} d(Sq, q), \quad (\Sigma' = \Sigma - \{id\}), \quad (1)$$

und zeigen:

$$\exists S_0 \in \Sigma', q_0 \in H: d(S_0 q_0, q_0) = \rho \quad (2)$$

$$0 < \rho \leq \lambda. \quad (3)$$

3.3. Beweis: Wir wählen einen festen Punkt $q \in H$ und Folgen $\{p_k\}_{k=1}^\infty \subset H$, $\{S_k\}_{k=1}^\infty \subset \Sigma'$ derart, dass $d(S_k p_k, p_k) \rightarrow \rho$. Dann gibt es nach 3.1(1) $R_k \in \Sigma$ so, dass $d(R_k p_k, q) \leq \delta$. Setzen wir $q_k = R_k p_k$, $S'_k = R_k S_k R_k^{-1}$, so gilt:

$$S'_k \in \Sigma', \quad (1)$$

$$d(S'_k q_k, q_k) \rightarrow \rho, \quad (2)$$

$$d(q_k, q) \leq \delta. \quad (3)$$

Wegen (3) dürfen wir überdies annehmen, dass die Folge $\{q_k\}$ konvergent ist:

$$q_k \rightarrow q_0. \quad (4)$$

Wegen (2), (3) gibt es eine positive Zahl α so, dass $\forall k \geq 1$

$$S'_k q_k \in K_q(\alpha) = \{p \mid d(p, q) \leq \alpha\}.$$

Da andererseits wegen (3) $S'_k q_k \in S'_k(K_q(\delta))$, so folgt:

$$K_q(\alpha) \cap S'_k(K_q(\delta)) \neq \emptyset \quad \forall k \geq 1. \quad (5)$$

Da Σ eigentlich diskontinuierlich auf H wirkt, ist aber

$$\{S \in \Sigma \mid K_q(\alpha) \cap S(K_q(\delta)) \neq \emptyset\}$$

eine endliche Menge. Somit folgt aus (1) und (5): Es gibt eine Teilfolge $\{k_j\}_{j=1}^\infty$ und ein $S_0 \in \Sigma'$ so, dass $S'_{k_j} = S_0 \forall j \geq 1$. Daraus und aus (2), (4) folgt aber die Behauptung 3.2(2). Aus ihr ergibt sich auch $\rho > 0$, denn $S_0 \in \Sigma'$ ist fixpunktfrei. Offenbar gilt:

$$l(\sigma(q)) = \inf_{S \in \Sigma'} d(Sq, q).$$

Daraus folgt nach 3.2(1): $\rho \leq l(\sigma(q)) \leq \lambda$. Damit ist auch 3.2(3) bewiesen.

3.4. Es sei $\mu: \mathbb{R} \rightarrow H$ die eindeutig bestimmte Geodätische mit

$$\mu(0) = q_0, \quad \mu(1) = S_0 q_0.$$

Dann gilt nach II.2 und 3.2(2):

$$\|\dot{\mu}(t)\| = \text{const} = d(S_0 q_0, q_0) = \rho. \quad (1)$$

Wir zeigen:

$$S_0(\mu(t)) = \mu(t+1) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

3.5. Beweis: Sei $\tau \in (0, 1)$. Der Weg

$$t \rightarrow \alpha_\tau(t) = \begin{cases} \mu(t) & \text{für } t \in [\tau, 1] \\ S_0(\mu(t-1)) & \text{für } t \in [1, 1+\tau] \end{cases}$$

ist ein stückweise glatter Verbindungsweg der Punkte $\mu(\tau)$ und $S_0(\mu(\tau))$; er besitzt wegen 3.4(1) die Länge $L(\alpha_\tau) = \rho$. Daher gilt: $\rho = L(\alpha_\tau) \geq d(\mu(\tau), S_0\mu(\tau))$. Andererseits ist aber nach 3.2(1) $\rho \leq d(\mu(\tau), S_0\mu(\tau))$ und somit

$$L(\alpha_\tau) = \rho = d(\mu(\tau), S_0\mu(\tau)). \quad (1)$$

Es sei nun $A \in H_{\mu(\tau)}$ der eindeutig bestimmte Vektor mit

$$\exp A = S_0\mu(\tau); \quad (2)$$

dann gilt nach II.2b und (1):

$$\|A\| = d(\mu(\tau), S_0\mu(\tau)) = \rho. \quad (3)$$

Da die Länge des Verbindungsweges α_τ der Punkte $\mu(\tau)$ und $S_0\mu(\tau)$ gleich der Distanz dieser Punkte ist, so muss α_τ nach II.2c ganz auf dem geodätischen Segment $\{\exp tA \mid 0 \leq t \leq 1\}$ verlaufen. Daher gibt es $t_0 \in [0, 1]$ so, dass

$$\mu(1) = \alpha_\tau(1) = \exp t_0 A. \quad (4)$$

Andererseits gilt

$$\mu(\tau+t) = \exp t\dot{\mu}(\tau), \quad (5)$$

und daher insbesondere

$$\mu(1) = \exp(1-\tau)\dot{\mu}(\tau). \quad (6)$$

Da aber die Abbildung $\exp: H_{\mu(\tau)} \rightarrow H$ injektiv ist (II.2a), so folgt aus (4) und (6):

$$(1-\tau)\dot{\mu}(\tau) = t_0 A, \quad (1-\tau)\|\dot{\mu}(\tau)\| = t_0 \|A\|.$$

Daraus ergibt sich wegen (3) und 3.4 (1): $\dot{\mu}(\tau) = A$. Somit folgt aus (5) und (2):

$$\mu(\tau+1) = S_0(\mu(\tau)), \quad \tau \in (0, 1).$$

Die beiden Geodätischen $\mu_1(t) = \mu(t+1)$ und $\mu_2(t) = S_0(\mu(t))$ stimmen also im Intervall $(0, 1)$ überein und daher auf ganz \mathbb{R} .

3.6. Die beiden Tangentialvektoren

$$\dot{\mu}(0) \in H_{q_0}, \quad \rho(\partial/\partial x_n)_{p_0}, \quad (p_0 = (0, \dots, 0, 1)),$$

haben nach 3.4(1) und II.1(1) die gleiche Norm. Daher gibt es $U \in I(H)$ so, dass

$$U(q_0) = p_0, \quad U_*(\dot{\mu}(0)) = \rho(\partial/\partial x_n)_{p_0}.$$

Nun haben offenbar $\pi = \sigma \circ U^{-1}$, $\Pi = U\Sigma U^{-1}$, $T_0 = US_0 U^{-1}$, $\gamma_0 = U \circ \mu$ die in 2 behaupteten Eigenschaften.

4. Wir kommen jetzt zu einem ganz wesentlichen Punkt unseres Beweises; wir zeigen: Es gibt Elemente $T_1, \dots, T_{n-1} \in \Pi$ und zugehörige eigentliche Geodätische $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ derart, dass

$$T_k(\gamma_k(t)) = \gamma_k(t+1), \quad (k=1, \dots, n-1), \quad (1)$$

$$\det(x_i(\gamma_k(0)))_{1 \leq i, k \leq n-1} \neq 0 \quad (2)$$

$$\gamma_k \text{ nicht äquivalent } \gamma_0 \text{ für } k=1, \dots, n-1, \quad (3)$$

$$d(T_k p_0, p_0) < 4\delta + \lambda + \log 4(n-1), \quad (k=1, \dots, n-1). \quad (4)$$

5. *Beweis:* Wir betrachten die Punkte

$$q_k = (r\delta_{1k}, \dots, r\delta_{n-1,k}, ar) \in H, \quad (k=1, \dots, n-1), \quad (1)$$

$$r = (1+a^2)^{-1/2}, \quad a^{-1} = (n-1)^{1/2}(e^\delta - 1).$$

Nach 2b gibt es $S_1, \dots, S_{n-1} \in \Pi$ so, dass

$$d(S_k^{-1} q_k, p_0) \leq \delta. \quad (2)$$

Dann ist $d(S_k p_0, q_k) \leq \delta$ und somit nach Lemma 1:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_i(S_k p_0) - r\delta_{ik})^2 < (e^\delta - 1)^2 a^2 r^2 = r^2/n - 1,$$

$$\sum_{i,k=1}^{n-1} (x_i(S_k p_0) - r\delta_{ik})^2 < r^2. \quad (3)$$

Daraus folgt aber

$$\det(x_i(S_k p_0))_{1 \leq i, k \leq n-1} \neq 0. \quad (4)$$

Andernfalls gibt es nämlich $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\sum_{k=1}^{n-1} x_i(S_k p_0) \lambda_k = 0, \quad (i=1, \dots, n-1),$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^2 = 1.$$

Daraus ergibt sich:

$$r^2 \lambda_i^2 = \left[\sum_{k=1}^{n-1} (x_i(S_k p_0) - r\delta_{ik}) \lambda_k \right]^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1} (x_i(S_k p_0) - r\delta_{ik})^2,$$

$$r^2 \leq \sum_{i,k=1}^{n-1} (x_i(S_k p_0) - r\delta_{ik})^2,$$

ein Widerspruch zu (3).

Setzen wir jetzt

$$T_k = S_k T_0 S_k^{-1}, \quad \gamma_k = S_k \circ \gamma_0, \quad (k=1, \dots, n-1),$$

so folgt 4(1) aus 2(1), 4(2) aus (4) und 2(2). Wäre eine der Geodätischen γ_k , ($k=1, \dots, n-1$), äquivalent γ_0 , so wäre wegen 2(2) und Lemma 2 $x_i(\gamma_k(0)) = 0$ für $i=1, \dots,$

$n - 1$. Das widerspricht aber der schon bewiesenen Behauptung 4(2). Damit ist auch 4(3) nachgewiesen. Mit 2(3) und (2) ergibt sich:

$$\begin{aligned} d(T_k p_0, p_0) &= d(S_k T_0 S_k^{-1} p_0, p_0) = d(T_0 S_k^{-1} p_0, S_k^{-1} p_0) \\ &\leq d(T_0 S_k^{-1} p_0, T_0 p_0) + d(T_0 p_0, p_0) + d(p_0, S_k^{-1} p_0) \\ &= 2d(S_k^{-1} p_0, p_0) + d(T_0 p_0, p_0) \leq 2d(S_k^{-1} p_0, p_0) + \lambda \\ d(S_k^{-1} p_0, p_0) &\leq d(S_k^{-1} p_0, S_k^{-1} q_k) + d(S_k^{-1} q_k, p_0) \leq d(p_0, q_k) + \delta \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$d(T_k p_0, p_0) \leq 2\delta + \lambda + 2d(p_0, q_k). \quad (5)$$

Aus (1) ergibt sich nach II.1(2):

$$\begin{aligned} \cos d(p_0, q_k) &= (1 + a^{-2})^{1/2} = [1 + (n-1)(e^\delta - 1)^2]^{1/2} < (n-1)^{1/2} e^\delta, \\ e^{d(p_0, q_k)} &< 2 \cos d(p_0, q_k) < 2(n-1)^{1/2} e^\delta, \\ 2d(p_0, q_k) &< 2\delta + \log 4(n-1). \end{aligned}$$

Somit folgt aus (5) die Behauptung 4 (4).

6. Aus $R \in I(H)$ und $RT_k = T_k R$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$ folgt: $R = id$.

7. *Beweis:* Wegen 2(1) und 4(1) gilt für $k = 0, 1, \dots, n-1$:

$$R(\gamma_k(t+1)) = RT_k(\gamma_k(t)) = T_k R(\gamma_k(t)). \quad (1)$$

Für die eigentliche Geodätische $\mu_k = R \circ \gamma_k$ gilt somit:

$$\mu_k(t+1) = T_k(\mu_k(t)), \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Daraus und aus 2(1), 4(1) folgt aber nach Lemma 4b: $\mu_k \sim \gamma_k$. Daher gibt es Zahlen a_k, b_k so, dass

$$R(\gamma_k(t)) = \gamma_k(a_k t + b_k), \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (2)$$

Setzen wir dieses in (1) ein, so kommt

$$\gamma_k(a_k t + a_k + b_k) = T_k \gamma_k(a_k t + b_k) = \gamma_k(a_k t + b_k + 1).$$

Daraus folgt, da $\gamma_k: \mathbb{R} \rightarrow H$ injektiv ist: $a_k = 1$. Somit folgt aus (2):

$$R(\gamma_k(t)) = \gamma_k(t + b_k), \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (3)$$

Daraus und aus 4(3) folgt jetzt nach Lemma 4b: $b_k b_0 = 0$, und daher nach Lemma 4a: $b_k = b_0 = 0$ für $k = 1, \dots, n-1$. Somit folgt aus (3):

$$R(\gamma_k(t)) = \gamma_k(t), \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (4)$$

Daraus ergibt sich zunächst für $k = 0$ wegen 2(2):

$$R(p_0) = p_0, \quad R_*((\partial/\partial x_n)_{p_0}) = (\partial/\partial x_n)_{p_0}. \quad (5)$$

Für $k = 1, \dots, n-1$ sei $A_k \in H_{p_0}$ der eindeutig bestimmte Vektor mit

$$\exp A_k = \gamma_k(0). \quad (6)$$

Da wegen $R \in I(H)$

$$\exp R_*(A) = R(\exp A) \quad \forall A \in H_{p_0}, \quad (7)$$

so folgt mit (6) und (4): $\exp R_*(A_k) = \exp A_k$. Da $\exp: H_{p_0} \rightarrow H$ injektiv ist, ergibt sich daraus

$$R_*(A_k) = A_k, \quad (k = 1, \dots, n-1). \quad (8)$$

Wegen (6) und 4(2) gilt:

$$\det (x_i(\exp A_k))_{1 \leq i, k \leq n-1} \neq 0.$$

Daher bilden die n Vektoren

$$A_1, \dots, A_{n-1}, \quad (\partial/\partial x_n)_{p_0}$$

nach Lemma 3 eine Basis von H_{p_0} . Somit folgt aus (5) und (8), dass R_* auf H_{p_0} die Identität ist. Daraus folgt aber wegen (7) und II.2a: $R = id$.

8. Es gibt einen Punkt $p_1 \in H$ mit

$$d(p_0, p_1) \leq \delta \quad (1)$$

derart, dass gilt:

$$\text{Aus } S \in \Pi, \quad d(Sp_1, p_1) < \lambda \text{ folgt: } S = id. \quad (2)$$

9. *Beweis:* Offensichtlich gilt

$$l(\pi(p)) = f(p) \quad (1)$$

mit

$$f(p) = \inf_{S \in \Pi'} d(Sp, p), \quad (\Pi' = \Pi - \{id\}). \quad (2)$$

Aus

$$d(Sq, q) \leq d(Sq, Sp) + d(Sp, p) + d(p, q) = d(Sp, p) + 2d(p, q)$$

folgt: $f(q) \leq f(p) + 2d(p, q)$. Vertauschung von p mit q ergibt: $|f(p) - f(q)| \leq 2d(p, q)$. Daher nimmt f auf dem Kompaktum $K_{p_0}(\delta)$ ein Maximum an: Es gibt einen Punkt p_1 mit $d(p_0, p_1) \leq \delta$ derart, dass $f(p) \leq f(p_1)$ für alle $p \in K_{p_0}(\delta)$. Daraus folgt wegen (1):

$$l(\pi(p)) \leq l(\pi(p_1)) \quad \forall p \in K_{p_0}(\delta). \quad (3)$$

Nach 2(b) ist aber $\pi(K_{p_0}(\delta)) = M$. Somit folgt aus (3): $l(\pi(p_1)) = \lambda$. Daher ist wegen (1) $f(p_1) = \lambda$. Daraus und aus (2) ergibt sich aber die Behauptung.

10. Wir betrachten nun den Normalisator

$$\Pi^* = \{U \in I(H) \mid U\Pi U^{-1} = \Pi\} \quad (1)$$

und die Abbildung $U \rightarrow \hat{U}$ von Π^* in $I(M)$, welche folgendermassen definiert ist:

$$\hat{U}(p) = \pi(U(q)), \quad q \in \pi^{-1}(p), \quad p \in M.$$

Diese Abbildung ist ein Homomorphismus von Π^* auf $I(M)$ mit dem Kern Π . Daher wird

$$\text{Ord } I(M) = [\Pi^* : \Pi], \quad (2)$$

und wir haben nun diesen Gruppenindex abzuschätzen.

11. Zu diesem Zwecke betrachten wir das kartesische Produkt

$$\mathfrak{H} = H^{n+1} = \{p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \mid p_i \in H\}.$$

Wir machen \mathfrak{H} zu einem metrischen Raum, indem wir die Distanz der Punkte $p = (p_1, \dots, p_{n+1})$, $q = (q_1, \dots, q_{n+1})$ definieren durch

$$d^*(p, q) = \max_{1 \leq i \leq n+1} d(p_i, q_i). \quad (1)$$

Die Kugeln dieses Raumes sind kartesische Produkte:

$$\mathfrak{L}_p(r) = \{q \in \mathfrak{H} \mid d^*(p, q) < r\} = B_{p_1}(r) \times \dots \times B_{p_{n+1}}(r) \quad (2)$$

$$B_p(r) = \{q \in H \mid d(p, q) < r\}.$$

Es sei m das bezüglich $I(H)$ invariante Mass auf H :

$$dm = x_n^{-n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Dann gilt:

$$m(B_p(r)) = c_n f_n(r), \quad (3)$$

wobei c_n eine nur von n abhängige positive Konstante ist und

$$f_n(r) = \int_0^r (\sin t)^{n-1} dt. \quad (4)$$

Das Mass m auf H induziert ein Mass m^* auf dem kartesischen Produkt $\mathfrak{H} = H^{n+1}$. Wegen (2), (3) gilt:

$$m^*(\mathfrak{L}_p(r)) = \prod_{i=1}^{n+1} m(B_{p_i}(r)) = c_n^{n+1} f_n^{n+1}(r). \quad (5)$$

12. Es sei jetzt h eine natürliche Zahl $\leq [\Pi^* : \Pi]$. Dann gibt es Elemente $V_1, \dots, V_h \in \Pi^*$ derart, dass

$$V_i \neq V_j \quad \text{für } i \neq j, \quad (1)$$

$$d(V_i p_0, p_0) \leq \delta. \quad (2)$$

In der Tat: Wir wählen zunächst $U_1, \dots, U_h \in \Pi^*$ derart, dass $U_i U_j^{-1} \notin \Pi$ für $i \neq j$. Nach 2(b) gibt es $S_i \in \Pi$ so, dass $d(S_i(U_i p_0), p_0) \leq \delta$. Die Elemente $V_i = S_i U_i$ haben dann die gewünschten Eigenschaften.

Nun betrachten wir die Punkte

$$p_0 = (p_0, \dots, p_0) \in \mathfrak{H} \quad (3)$$

$$p_i = (V_i p_1, V_i T_0 p_1, V_i T_1 p_1, \dots, V_i T_{n-1} p_1), \quad (i = 1, \dots, h).$$

Dann ist nach 11(1)

$$d^*(p_0, p_i) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{d(p_0, V_i p_1), d(p_0, V_i T_k p_1)\}. \quad (4)$$

Wegen (2) und 8(1) gilt:

$$\begin{aligned} d(p_0, V_i p_1) &\leq d(p_0, V_i p_0) + d(V_i p_0, V_i p_1) \\ &= d(p_0, V_i p_0) + d(p_0, p_1) \leq 2\delta. \end{aligned} \quad (5)$$

Ferner gilt für $k = 0, 1, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} d(p_0, V_i T_k p_1) &\leq d(p_0, V_i p_0) + d(V_i p_0, V_i T_k p_0) + d(V_i T_k p_0, V_i T_k p_1) \\ &= d(p_0, V_i p_0) + d(p_0, T_k p_0) + d(p_0, p_1) \\ &\leq 2\delta + d(p_0, T_k p_0). \end{aligned}$$

Daraus folgt nach 2(3) und 4(4):

$$\begin{aligned} d(p_0, V_i T_0 p_1) &\leq 2\delta + \lambda, \\ d(p_0, V_i T_k p_1) &< 6\delta + \lambda + \log 4(n-1), \quad (k = 1, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (6)$$

Aus (4), (5), (6) ergibt sich nun:

$$d^*(p_0, p_i) < 6\delta + \lambda + \log 4(n-1), \quad (i = 1, \dots, h). \quad (7)$$

Setzen wir

$$R_{ij} = V_i^{-1} V_j, \quad 1 \leq i, j \leq h, \quad (8)$$

so gilt wegen $T_0, T_1, \dots, T_{n-1} \in \Pi$, $R_{ij} \in \Pi^*$:

$$T_k^{-1} R_{ij}^{-1} T_k R_{ij} \in \Pi, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (9)$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} d(T_k^{-1} R_{ij}^{-1} T_k R_{ij} p_1, p_1) &= d(T_k R_{ij} p_1, R_{ij} T_k p_1) \\ &\leq d(T_k R_{ij} p_1, T_k p_1) + d(T_k p_1, R_{ij} T_k p_1) \\ &= d(R_{ij} p_1, p_1) + d(T_k p_1, R_{ij} T_k p_1) \\ &= d(V_j p_1, V_i p_1) + d(V_i T_k p_1, V_j T_k p_1). \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen (3) und 11(1):

$$d(T_k^{-1} R_{ij}^{-1} T_k R_{ij} p_1, p_1) \leq 2d^*(p_i, p_j), \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (10)$$

Damit zeigen wir nun:

$$d^*(p_i, p_j) \geq \lambda/2 \quad \text{für } i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq h. \quad (11)$$

In der Tat: Aus $d^*(p_i, p_j) < \lambda/2$ folgt wegen (10) und (9) nach 8(2): $R_{ij} T_k = T_k R_{ij}$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$. Daraus folgt aber nach 6: $R_{ij} = id$. Somit muss wegen (8) und (1) $i = j$ sein.

Die Ungleichungen (11) besagen aber, dass die Kugeln

$$\mathcal{Q}_{p_i}(\lambda/4), \quad 1 \leq i \leq h,$$

paarweise disjunkt sind. Andererseits sind diese Kugeln wegen (7) enthalten in der Kugel $\mathfrak{Q}_{p_0}(6\delta + 5\lambda/4 + \log 4(n-1))$. Daher gilt:

$$\sum_{i=1}^h m^*(\mathfrak{Q}_{p_i}(\lambda/4)) < m^*(\mathfrak{Q}_{p_0}(6\delta + 5\lambda/4 + \log 4(n-1))).$$

Daraus folgt nach 11(5):

$$h < [f_n(6\delta + 5\lambda/4 + \log 4(n-1))/f_n(\lambda/4)]^{n+1}.$$

Da nun diese Ungleichung für jede natürliche Zahl $h \leq [\Pi^*:\Pi]$ gilt, so schliessen wir, dass $[\Pi^*:\Pi]$ endlich ist und sogar

$$[\Pi^*:\Pi] < [f_n(6\delta + 5\lambda/4 + \log 4(n-1))/f_n(\lambda/4)]^{n+1}.$$

Wegen 10(2) ist damit unser Satz bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] S. BOCHNER, *Vector Fields and Ricci-Curvature*, Bull. A.M.S. 52, 776–797 (1946).
- [2] S. HELGASON, *Differential Geometry and Symmetric Spaces* (Academic Press, New York and London 1962).
- [3] D. MONTGOMERY and L. ZIPPIN, *Topological Transformation Groups* (Interscience Publishers, New York and London 1955).
- [4] A. PREISSMANN, *Quelques propriétés globales des espaces de Riemann*, Comment. math. helvet. 15, 175–221 (1942/43).