Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 44 (1971)
Heft: 4

Artikel: Sur une question de calcul de variations sous contraintes
Autor: Poncet, J. / Stueckelberg de Breidenbach, E.C.G. / Scheurer, P.B.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-114299

Sur une question de calcul de variations sous contraintes

par **J. Poncet**

Institut de Mathématiques, Université de Lausanne,

E. C. G. Stueckelberg de Breidenbach et **P. B. Scheurer**

Institut de Physique Théorique, Université de Genève

(29 I 71)

Abstract. This is a mathematical complement to [2]. We prove theorems 3.1 and 3.2 below, which state that for a functional F representing an extensive quantity which is maximal under constraints defined by conserved quantities of the same density type, the condition $\delta_c^1 F = 0, \dots,$ $\delta_c^{2k-1} F = 0$, $\delta_c^{2k} F \geq 0$ for *admissible* variations, is equivalent to the condition $\delta^1 \psi = 0, \dots,$ $\delta^{2k-1} \psi = 0$, $\delta^{2k} \psi \geq 0$ for arbitrary variations, where ψ is the Lagrange functional $F + \vartheta_a G^a$ with the multipliers ϑ_a, the existence of which is also proved under our condition D).

1. Introduction et notations

Dans un travail [2] de deux des auteurs [E. C. G. St. de B. et P. B. Sch.], on a considéré un système physique Σ décrit par des grandeurs continues. Les grandeurs extensives sont représentées par des fonctionnelles dites de type densité. Nous allons énoncer dans ce cadre les principes de la thermodynamique, en plaçant le deuxième principe avant le premier, car c'est du deuxième principe que découle l'existence d'une direction du temps (cf. p. 888 de [2]).

2e principe

a) principe d'évolution: si le système est adiabatiquement fermé ($\Sigma = \Sigma_0$), il existe une grandeur $S(t)$ (l'entropie de Σ) qui est fonction monotone non décroissante du temps t:

$$\frac{dS(t)}{dt} \geq 0 \quad ;$$

b) principe d'équilibre: si le système est isolé ($\Sigma = \Sigma_{00}$) l'entropie atteint un maximum fini quand le temps t tend vers $+\infty$ (ce qui donne la flèche du temps), maximum désigné par $\lim S(t \to \infty) = S_{max} < \infty$.

1er principe: pour un système substantiel isolé ($\Sigma = \Sigma_{00}$) qui a les propriétés d'homogénéité dans le temps et l'espace, son énergie H, sa quantité de mouvement $\overleftarrow{\Pi} = \{\Pi_i\}$ et son moment cinétique $\overrightarrow{M} = \{M_{ik}\}$, ainsi que la masse inerte totale M sont conservées.

S, H, $\overleftarrow{\Pi}$, $\overrightarrow{M}$, M sont toutes des grandeurs extensives, et S est donc une certaine fonctionnelle qui atteint un maximum ($= S_{max}$) sous les contraintes $H = H'$, $\overleftarrow{\Pi} = \overleftarrow{\Pi}'$, $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M}'$, $M = M'$ (cf. 0.36 et 0.37 de [2]).

Dans le présent travail, nous avons cherché sous quelles conditions mathématiques le problème posé dans [2] peut être formulé avec précision.

Nous considérons des fonctionnelles de la forme

$$F = F[\xi(\,)] = \int_V f(\xi(x), x)\, dV .$$

V est un ouvert connexe de $\mathbf{R}^d$ muni de la mesure ordinaire dV, $\xi = \xi(x)$ est mis pour $(\xi^1, \dots \xi^\omega)$, où $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x)$ sont des fonctions continues de $x = (x^1, \dots x^d)$ sur V. La fonction $f(\zeta, x)$ des $\omega + d$ variables réelles $\zeta^1, \dots \zeta^\omega, x^1, \dots x^d$, qu'on appellera la *densité* de F, est définie et continue de (ζ, x) sur un ouvert $W \times V$, W ouvert dans $\mathbf{R}^\omega$, ainsi que les dérivées partielles

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \frac{\partial^k f}{\partial \zeta^{\alpha_1} \dots \partial \zeta^{\alpha_k}}$$

La fonctionnelle $F[\xi(\,)]$ est supposée définie sur un ensemble E de fonctions continues sur V soumis aux deux conditions:

a) toute ξ dans E satisfait à *m contraintes* $G^a = G'^a$, $a = 1, \dots m$, où G'^a est une constante et $G^a = G^a[\xi(\,)]$ une fonctionnelle de même type que F, de densité $g^a = g^a(\zeta, x)$ définie et continue de (ζ, x) sur $W \times V$ ainsi que les dérivées partielles $g^a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$;

b) si ξ est dans E, si $\delta\xi = \delta\xi(x) = (\delta\xi^1, \dots \delta\xi^\omega)$ est une variation continue et à support compact dans V telle que $\xi + \delta\xi$ satisfasse aux contraintes, alors $\xi + \delta\xi$ est dans E.

Les fonctions de E seront dites *admissibles*. Si η est dans E, et $\delta\eta$ telle que $\eta + \delta\eta$ soit dans E ($\delta\eta$ pas nécessairement de support compact) on dira que $\delta\eta$ est une *variation admissible* de η, ou qu'elle satisfait aux contraintes, et on la notera $\delta_c\eta$. La variation ΔF correspondante de F sera notée $\Delta_c F$. Si η et $\delta\eta = \delta_c\eta$ sont admissibles, on a $\Delta G^a = \Delta_c G^a = 0$. Si $\delta\eta$ est à support compact, la norme $\|\delta\eta\|$ sera le plus grand des maxima des fonctions $|\delta\eta^1|, |\delta\eta^2| \dots |\delta\eta^\omega|$.

Notre hypothèse générale sur les densités f et g^a sera, pour η dans E, que

$$\Delta f = f(\eta + \delta\eta, x) - f(\eta, x) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} f_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \delta\eta^{\alpha_1} \dots \delta\eta^{\alpha_k} ,$$

$$\Delta g^a = g^a(\eta + \delta\eta, x) - g^a(\eta, x) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} g^a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \delta\eta^{\alpha_1} \dots \delta\eta^{\alpha_k} ,$$

(on écrit $f_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \delta\eta^{\alpha_1} \dots \delta\eta^{\alpha_k}$ pour $\sum_{\alpha_1 \dots \alpha_k \leq \omega} f_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \delta\eta^{\alpha_1} \dots \delta\eta^{\alpha_k}$) pour toute variation $\delta\eta$ de *support compact donné* et de norme $\|\delta\eta\|$ assez petite, et que, pour $\|\delta\eta\|$ assez petite,

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_k \leq \omega} |f_{\alpha_1 \dots \alpha_k}| \, \|\delta\eta\|^k,$$

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_k \leq \omega} |g^a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}| \, \|\delta\eta\|^k$$

convergent uniformément en x dans le support de $\delta\eta$.

Donc pour de telles variations,

$$\Delta F = \sum_k \delta^k F\,, \qquad \Delta G^a = \sum_k \delta^k G^a$$

où

$$\delta^k F = \frac{1}{k!} \int_V f_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}\ \delta\eta^{\alpha_1} \ldots \delta\eta^{\alpha_k}\, dV\,,$$

$$\delta^k G^a = \frac{1}{k!} \int g^a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}\, \delta\eta^{\alpha_1} \ldots \delta\eta^{\alpha_k}\, dV$$

et les fonctionnelles F et G^a sont *différentiables*, autrement dit: si

$$\Delta F = \delta^1 F + \ldots \delta^k F + \varepsilon \, \|\delta\eta\|^k$$

alors $\varepsilon \to 0$ pour $\|\delta\eta\| \to 0$ (le support compact de $\delta\eta$ restant fixe), de même pour ΔG^a.

Si ξ est dans E, et $\delta_c\xi$ de support compact et de norme assez petite, alors

$$\Delta G^a = \Delta_c G^a = \sum_k \delta^k G^a = 0$$

mais il n'est pas évident qu'il existe une telle $\delta_c\xi$ non identiquement nulle sur un support compact donné. Cependant si les G^a satisfont à une certaine condition d'indépendance (condition D du n⁰ 2), il existe toujours des variations $\delta_c\xi$ de ξ de norme $\|\delta_c\xi\| \neq 0$ arbitrairement petite, et de support donné (voir le n⁰ 2).

Si F a un maximum relatif pour ξ, la condition (D) entraîne aussi l'existence des multiplicateurs de Lagrange que nous avons démontrée pour être complet. Mais notre question principale était la démonstration du théorème 3.2 (qui n'est pas vrai généralement pour d'autres fonctionnelles).

Nous tenons à remercier ici le Fond national suisse pour son aide financière.

2. Existence des multiplicateurs de Lagrange

Supposons que F ait un maximum relatif pour $\xi = \xi_0(x)$ sous les contraintes $G^a = G'^a$, ce qui doit signifier: quel que soit K compact, si $\delta_c\xi$ est une variation admissible de ξ_0, de support dans K, et si $\|\delta_c\xi\|$ est assez petit, alors la variation correspondante $\Delta_c F$ est $\leqslant 0$.

Dans la suite, nous ne considérons que des $\xi_0(x)$ pour lesquelles la condition suivante (D) d'*indépendance des contraintes* est vérifiée:

(D) *pour toute direction* $u = (u^1, \ldots u^\omega)$ *et tout ouvert* V_0 *de* V (V *est dans* R^d *et supposé connexe) il existe* m *points* $x_1, \ldots x_m$ *dans* V_0 *tels que la matrice de coefficients* $\gamma^a_b = g^u_a(\xi_0(x_b), x_b)$, $(a, b = 1, \ldots m)$ *soit inversible,* $g^a_u(\xi_0(x_b), x_b)$ *étant mis pour*

$$g^a_\alpha(\xi_0(x_b), x_b)\, u^\alpha\,.$$

Considérons m fonctions positives et continues $F_1(x), \ldots F_m(x)$, dont les supports sont compacts, et contenus dans des boules ouvertes disjointes, respectivement $B_1, \ldots B_m$ dans V_0. On suppose encore que le support de $F_b(x)$ contient le point x_b de la condition (D).

Soit $\hat{F}$ la matrice de coefficients

$$\hat{F}^a_b = \int g^a_u(\xi_0(x), x)\, F_b(x)\, dV\,.$$

Par le théorème de la moyenne, on a

$$\hat{F}^a_b = g^a_u(\xi_0(x^a_b), x^a_b) \int F_b(x)\ dV$$

où x_b^a est un point dans la boule B_b.

Si donc les supports des $F_b(x)$ sont assez petits, les points x_b^a sont assez proches de x_b pour que $\hat{F}$ devienne inversible en vertu de la condition (D).

Soient maintenant $u = (u^1, \dots u^\omega)$, $v = (v^1, \dots v^\omega)$ deux directions de $\mathbf{R}^\omega$, V_1 une boule ouverte de V, $\delta\xi$ une variation de ξ_0 de la forme

$$\delta\xi = \varepsilon(x)\, u + \zeta(x)\, v$$

avec

$$\varepsilon(x) = \sum_{i \leq m} s^i\, L_i(x)\,, \qquad \zeta(x) = \sum_{i \leq m} t^i\, M_i(x)\,,$$

s^i, t^i réels, et $L_i(x)$, $M_i(x)$ étant $2\,m$ fonctions continues, positives, de supports compacts, disjoints, contenus dans V_1.

On suppose s^i, t^j, L_i, M_j tels que

a) les matrices $\hat{L}$, $\hat{M}$ de coefficients

$$\hat{L}_b^a = \int g_u^a\, L_b\, dV\,,$$

$$\hat{M}_b^a = \int g_v^a\, M_b\, dV$$

soient inversibles;

b) $\delta\xi$ est admissible et $\neq 0$, et $\|\delta\xi\|$ est assez petit pour que

$$\Delta F = \Delta_c F = \sum_k \delta^k F\,,$$

$$\Delta G^a = 0 = \Delta_c G_a = \sum_k \delta^k G^a$$

(pour simplifier, on a supprimé les arguments de g_u^a, g_v^a, L_b, M_b).

D'après ce qui précède, a) est possible. Pour satisfaire à b), il suffit de montrer que le système

$$0 = \Delta G^a = \delta^1 G^a + \cdots = \sum_j s^j\, \hat{L}_j^a + t^j\, \hat{M}_j^a + \cdots$$

a des solutions s^j, t^k non toutes nulles, et arbitrairement petites, ce qui est possible, car si on se donne les t^k assez petits, ce système détermine les s^j par le théorème des fonctions implicites, $\hat{L}$ étant inversible, et si $(t^1, \dots t^m)$ tend vers $(0, \dots 0)$, $(s^1, \dots s^m)$ tend aussi vers $(0, \dots 0)$.

Désignons par $\Delta F(s^j, t^k)$, $\Delta G^a(s^j, t^k)$ les expressions en les variables s^j, t^k des variations ΔF, ΔG^a qui correspondent aux variations de la forme $\delta\xi = \varepsilon(x)\, u + \zeta(x)\, v$.

Comme F a un maximum relatif sous les contraintes pour $\xi = \xi_0$, $\Delta F(s^j, t^k)$ a un maximum relatif ($= 0$) pour $s^j = t^k = 0$ sous les contraintes $\Delta G^a(s^j, t^k) = 0$. Mais par la théorie des maxima sous contraintes d'une fonction d'un nombre fini de variables, comme $\hat{L}$ et $\hat{M}$ sont inversibles, il existe des multiplicateurs de Lagrange $\vartheta_a = \vartheta_a(u, v, L_j, M_k)$ correspondant aux contraintes $\Delta G^a(s^j, t^k) = 0$, d'où

$$\int f_u\, L_j\, dV + \vartheta_a \int g_u^a\, L_j\, dV = 0\,,$$

$$\int f_v\, M_k\, dV + \vartheta_a \int g_v^a\, M_k\, dV = 0\,.$$

Le premier de ces systèmes montre que ϑ_a ne dépend pas de v et des M_k, le deuxième que ϑ_a ne dépend pas de u et des L_j. Donc ϑ_a ne dépend que de a, et est évidemment unique puisque $\hat{L}$ est inversible. On peut encore supposer que les supports des L_j contiennent des points donnés (par la condition (D)) dans un ouvert de V_1 et deviennent arbitrairement petits sans que les L_j cessent de remplir les conditions a), b) (les M_k restant fixes) donc il existe des points x (appliquer le théorème de la moyenne au premier système ci-dessus) dans tout ouvert de V_1 en lesquels

$$f_u(\xi_0(x), x) + \vartheta_a\, g_u^a(\xi_0(x), x) = 0$$

donc en tout point de V_1 et de V (qu'on a supposé connexe). Nous voyons que:

(2.1) *si F a un maximum relatif pour $\xi = \xi_0$ sous les contraintes $G^a = G'^{\,a}$ il existe*

$$\Psi = F + \vartheta_a\, G^a$$

de densité $\Psi = f + \vartheta_a\, g^a$ telle que

$$\delta^1\Psi = \int_V \psi_\alpha\, \delta\xi^\alpha\, dV = 0$$

pour toute variation $\delta\xi$ de ξ_0. Autrement dit, ξ_0 est une extrémale de Ψ.

Si on définit $\delta_c^k F$ par

$$\delta_c^k F = \delta^k F + \vartheta_a\, \delta^k G^a$$

pour toute variation admissible $\delta_c\xi$ de ξ_0 (pour laquelle les intégrales $\delta^k F$ et $\delta^k G^a$ sont supposées exister), on a donc

$$\delta_c^k F = \delta^k\Psi\,, \qquad \delta_c^1 F = 0$$

et si $\delta_c\xi$ est de support compact et $\|\delta_c\xi\|$ assez petit,

$$\Delta_c F = \sum_{k \geq 2} \delta_c^k F$$

par les hypothèses générales du n⁰ 1.

3. Le signe de δ_c^{2k}F et de $\delta^{2k}\Psi$

Pour simplifier la notation, nous n'écrirons plus les arguments $(\xi_0(x), x)$.

Si la condition (D) est satisfaite pour ξ_0, on a l'énoncé suivant:

3.1. a) *Pour que $\delta_c^{2k} F = 0$ pour toute variation admissible, il faut et suffit que $\delta^{2k}\Psi = 0$ pour toute variation.*

b) *Pour que $\delta_c^{2k} F$ soit $\leqslant 0$ pour toute variation admissible, et soit $\not\equiv 0$, il faut et suffit que $\delta^{2k}\Psi$ soit $\leqslant 0$ pour toute variation, et $\not\equiv 0$.*

Pour démontrer 3.1, nous considérons des variations admissibles $\delta_c\xi$ de ξ_0 de la forme $\varepsilon(x)\, u + \zeta(x)\, v$ (voir n⁰ 2), de support dans une boule ouverte V_1, mais nous prenons $u = v$, $t^1 \neq 0$, $t^2 = t^3 \ldots = t^m = 0$.

Soit donc

$$\delta_c\xi = \big(\varepsilon(x) + \zeta(x)\big)\, u = \theta(x)\, u$$

où

$$\theta(x) = s^i\, L_i(x) + t^1\, M_1(x)\,.$$

On a

$$(2\ k)!\ \delta_c^{2k} F = \int \psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2k}} u^{\alpha_1} \ldots u^{\alpha_{2k}} \theta^{2k}\, dV\ .$$

Si $\delta^{2k}\Psi \equiv 0$ pour toute variation, on a évidemment $\delta_c^{2k} F \equiv 0$ pour toute variation admissible.

Si $\delta_c^{2k} F \equiv 0$, soit V_1 assez petite pour que, u étant fixée,

$$\psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2k}} u^{\alpha_1} \ldots u^{\alpha_{2k}}$$

ne change pas de signe ou soit nulle sur V_1: en prenant $\delta_c \xi = \theta(x)\ u$ on voit que

$$\psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2k}} u^{\alpha_1} \ldots u^{\alpha_{2k}} = 0$$

sur V_1, donc aussi dans V, et $\delta^{2k}\Psi \equiv 0$ pour toute variation de ξ_0, ce qui démontre 3.1.a.

Si $\delta^{2k}\Psi \leqslant 0$ on a évidemment $\delta_c^{2k} F \leqslant 0$, et si $\delta^{2k}\Psi \not\equiv 0$, alors $\delta_c^{2k} F \not\equiv 0$ par 3.1.a. Enfin, si $\delta_c^{2k} F \leqslant 0$, on voit en prenant de nouveau $\delta_c \xi = \theta(x)\ u$ que

$$\psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2k}} u^{\alpha_1} \ldots u^{\alpha_{2k}} \leqslant 0$$

en tout point de V, d'où $\delta^{2k}\Psi \leqslant 0$ pour toute variation, et si $\delta_c^{2k} F \not\equiv 0$ il en est évidemment de même pour $\delta^{2k}\Psi$.

Les fonctionnelles F satisfont au théorème 3.2 suivant, qui n'est pas vrai généralement pour des fonctionnelles d'un autre type.

3.2. *Si F a un maximum relatif pour $\xi = \xi_0$ sous les contraintes, alors*

a) *le plus petit entier n_1 (s'il existe)* tel que *$\delta_c^{n_1} F$ soit $\not\equiv 0$ (pour des variations admissibles $\delta_c \xi$ de ξ_0) est pair, et $\delta_c^{n_1} F \leqslant 0$;*

b) *le plus petit entier n_2 (s'il existe) tel que $\delta^{n_2}\Psi \not\equiv 0$ (pour des variations arbitraires) est égal à n_1, et $\delta^{n_1}\Psi$ est $\leqslant 0$.*

En tenant compte de 3.1., il suffit de démontrer 3.2.a, et de vérifier que $\delta_c^N F \equiv 0$ entraîne $\delta^N \Psi \equiv 0$ pour tout $N \geqslant 2$.

Démontrons 3.2.a. Soit $u = (u^1, \ldots u^\omega)$ une direction fixée, et soit $\delta_c \xi$ une variation admissible de $\xi_0(x)$ de la même forme que dans la démonstration de 3.1:

$$\delta_c \xi = \theta\ u = \Big(\sum_{i \leq m} s^i\ L_i + t\ M\Big)\ u$$

et nous supposons que le support de θ est dans la boule ouverte V_1.

Les s^i sont considérés comme fonctions de t, définies pour t assez petit par le théorème des fonctions implicites (voir n^0 2). Par ce même théorème, la limite

$$l^i = \lim_{t \to 0} \frac{s^i}{t} = \left.\frac{ds^i}{dt}\right|_{t=0}$$

existe, donc $\|\delta_c \xi\|/t$ reste borné pour $t \to 0$, car

$$\|\delta_c \xi\| \leqslant \sum_{i \leq m} |s^i| \max L_i + |t| \max M\ .$$

Soit d'abord n le plus petit entier > 0 tel que

$$\delta_c^n F \not\equiv 0\ .$$

On a

$$\Delta_c F = \delta_c^n F + \varepsilon^{(n)} \|\delta_c \xi\|^n$$

où $\varepsilon^{(n)} \to 0$ si $t \to 0$, donc

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Delta_c F}{t^n} = \lim_{t\to 0} \frac{\delta_c^n F}{t^n} = \frac{1}{n!} \int\limits_{V_1} \psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} u^{\alpha_1} \ldots u^{\alpha_n} (\sum_{i\leq m} l^i L_i + M)^n \, dV .$$

Si $n = 2k + 1$, comme $\Delta_c F \leqslant 0$ par hypothèse pour t assez petit, cette dernière limite doit être nulle, d'où

$$\text{(H)} \quad 0 = l^{1n} \int\limits_{V_1} \psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} u^{\alpha_1} \ldots u^{\alpha_n} L_1^n \, dV + \ldots$$

$$+ \, l^{mn} \int\limits_{V_1} \psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} u^{\alpha_1} \ldots u^{\alpha_n} L_m^n \, dV$$

$$+ \int\limits_{V_1} \psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} u^{\alpha_1} \ldots u^{\alpha_n} M^n \, dV$$

(remarquer que $(\sum_{i\leq m} l^i L_i + M)^n = \sum_{i\leq m} l^{in} L_i^n + M^n$).

On peut supposer V_1 assez petite pour que

$$\psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} u^{\alpha_1} \ldots u^{\alpha_n}$$

soit $\equiv 0$ ou ait un signe constant sur V_1.

Le système qui définit s^i comme fonction de t (voir n° 2) s'écrit aussi

$$0 = \int\limits_{V_1} g_u^a \, \theta \, dV + \varepsilon'^{\,a} \|\delta_c \xi\|$$

avec $\varepsilon'^{\,a} \to 0$ si $t \to 0$, d'où, en divisant par t et faisant $t \to 0$:

$$\sum_{i\leq m} l^i \int\limits_{V_1} g_u^a \, L_i \, dV = - \int\limits_{V_1} g_u^a \, M \, dV$$

et comme on peut supposer

$$\hat{L}_b^a = \int\limits_{V_1} g_u^a \, L_b \, dV$$

inversible par (D):

$$l^b = - \int\limits_{V_1} \gamma_u^b \, M \, dV$$

où

$$\gamma_b^u = \sum_a (\hat{L}^{-1})_a^b \, g_a^u$$

Les L_i étant fixés, l^b peut être considérée maintenant comme une fonctionnelle linéaire $l^b[M]$ sur une boule V_2 dans V_1. La relation (H) s'écrit alors

$$\text{(H')} \quad 0 = \sum_{b\leq m} \lambda_b \, (l^b[M])^n + \int\limits_{V_2} \psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} u^{\alpha_1} \ldots u^{\alpha_n} M^n \, dV$$

avec

$$\lambda_b = \int_{V_1} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n} u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_n} L_b^n \, dV .$$

Mais (H') entraîne que

$$\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n} u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_n}$$

est nulle, car si on divise à gauche et à droite de (H') par

$$\int_{V_2} M^n \, dV$$

et si on fait tendre le support de M vers un point y de V_2 tout en faisant varier M convenablement, on obtient

$$0 = \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(y) \, u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_n}$$

du fait que $n > 1$, comme on le voit facilement en prenant une boule fermée B centrée en y (dont le rayon tend vers 0) comme support de M, et pour M une fonction à valeurs comprises entre 0 et 1 dont l'intégrale soit assez proche du volume de B. Comme V_2 est une boule quelconque dans V_1, la même expression est nulle dans V_1, ce qui contredit $n = 2\,k + 1$.

Soit donc $n = 2\,k$. La limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Delta_c F}{t^{2k}} = \lim_{t \to 0} \frac{\delta_c^{2k} F}{t^{2k}} = \frac{1}{(2\,k)!} \int_{V_1} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{2k}} (l^i L_i + M)^{2k} \, dV$$

est $\leqslant 0$, et on en déduit immédiatement que $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{2k}}$ est $\leqslant 0$ partout dans V, ce qui achève de démontrer 3.2.a.

Reste à montrer que $\delta_c^N F \equiv 0$ entraîne $\delta^N \Psi \equiv 0$ pour $N \geqslant 2$. Mais si $\delta_c^N F \equiv 0$ on a aussi

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{\delta_c^N F}{t^N}$$

(pour la même variation admissible de la forme $\delta_c \xi = \theta\, u$), d'où une relation identique à (H), ce qui entraîne, par le même raisonnement, que $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_N} u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_N}$ est nul dans V_1, d'où $\delta^N \Psi \equiv 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. C. G. Stueckelberg de Breidenbach, *Relativistic Thermodynamics III: Velocity of Elastic Waves and Related Problems*, Helv. phys. Acta *35*, 568 (1962).

[2] E. C. G. Stueckelberg de Breidenbach et P. B. Scheurer, *Phenomenological Thermodynamics V: The 2nd Law Applied to Extensive Functionals with the Use of Lagrange Multipliers*, Helv. phys. Acta *40*, 887 (1967).