

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 44 (1971)
Heft: 3

Artikel: Zur magnetischen Diffusion in Zylindergeometrie
Autor: Herlach, Fritz
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-114284>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur magnetischen Diffusion in Zylindergeometrie

von **Fritz Herlach**

Illinois Institute of Technology, Department of Physics, Chicago, Ill. 60616

(13. XI. 70)

Abstract. The diffusion of magnetic flux in conductors is discussed with a view to cylindrically imploding megagauss generators. Simple analytical expressions are developed which are adequate for a precise analysis of most experiments. It is shown that in many cases a suitable plane approximation can be used instead of the exact cylindrical solution. For the field at the surface of the conductor, an exponential field rise is assumed. Deviations from this in actual experiments are treated by a superposition of the basic exponential solutions. The change of the resistivity due to Joule heating is discussed in terms of Bryant's solution of the nonlinear diffusion equation. The concept of the flux diffusion speed is developed, and it is shown that the diffusion of magnetic flux into the conductor depends essentially on the resistivity at the surface. The partition of the energy flow into magnetic and Joule energy is analyzed, and a differential equation is derived which governs field distributions with equipartition between these energies. Applications are discussed and practical examples are given.

1. Einleitung

Magnetfelder von der Grössenordnung Megagauss können zurzeit nur in Form sehr schnell ansteigender Impulse erzeugt werden [1]. Dabei treten in elektrisch leitenden Materialien magnetische Diffusionserscheinungen auf, die den Gang der Experimente wesentlich beeinflussen. In einem Flusskompressionsexperiment [2] wird dies zur Felderzeugung ausgenützt: magnetischer Fluss kann durch mechanische Deformation eines geschlossenen Leiterkreises komprimiert werden, wenn die Kompression schneller erfolgt als der Fluss nach aussen diffundiert. Die höchsten Felder erhält man in einer zylindersymmetrischen Anordnung durch Kompression eines metallischen Hohlzylinders mittels Sprengstoff.

Bezeichnen wir mit r_i den Innenradius des Zylinders, mit H_i das komprimierte Feld und mit ϕ_i den vom Kreis mit Radius r_i eingeschlossenen Fluss, so gilt für die Feldverstärkung von einem beliebig gewählten Anfangszustand, den wir mit dem Index 0 bezeichnen:

$$\frac{H_i}{H_{i0}} = \left(\frac{r_{i0}}{r_i} \right)^2 \frac{\phi_i}{\phi_{i0}}. \quad (1)$$

Entsprechend zerfällt die theoretische Behandlung der Flusskompression in zwei Teile: Dynamik und Diffusion.

Die Dynamik umfasst die anfängliche Beschleunigung des Zylinders, die Geschwindigkeitszunahme der Innenfläche infolge der Konvergenz, die Abbremsung durch den magnetischen Druck und die Beschränkung der Energieübertragung durch die endliche Schallgeschwindigkeit im Zylindermaterial [3, 4]. Das höchste Feld, das mit einer gegebenen Versuchseinrichtung erzielt werden kann [5], ist durch eine Gleichgewichtsbedingung zwischen Dynamik und Diffusion bestimmt: die Feldverstärkung hört auf, wenn die Geschwindigkeit der Innenfläche kleiner wird als diejenige Geschwindigkeit, mit der der Fluss in das Zylindermaterial hineinströmt.

Die Diffusion bestimmt dahingegen den Radius, bei dem dies eintritt, im Verhältnis zum anfänglich eingeschlossenen Fluss. In der Praxis ist dies ebenso wichtig wie die absolute Begrenzung durch die Dynamik, weil für praktische Zwecke das Endfeld in einem bestimmten Volumen benötigt wird, und weil die Erzeugung des Anfangsflusses einen beträchtlichen technischen Aufwand erfordert.

2. Diffusion und Flussverlust

Der Flussverlust kann direkt aus dem Induktionsgesetz und dem Ohmschen Gesetz berechnet werden. Er ist deshalb unabhängig vom Koordinatensystem und dessen Bewegungszustand, solange die Geschwindigkeiten gegenüber der Lichtgeschwindigkeit klein sind. Bezeichnen wir mit E das elektrische Feld, mit ϱ den spezifischen Widerstand und mit i die Stromdichte, so gilt für den magnetischen Fluss innerhalb jeder zylindrischen Strombahn

$$\frac{1}{2\pi r} \frac{d\phi}{dt} = E = \varrho i = \varrho \frac{\partial H}{\partial r} \quad (2)$$

d.h. der Flussverlust ist von der Feldverteilung im Metall abhängig. Insbesondere verknüpft Gleichung (2) $d\phi_i/dt$ mit der Stromdichte am Innenradius. Die Differentialgleichung für die Feld- und Stromverteilung folgt aus den Maxwellschen Gleichungen für quasistationäre Vorgänge (MKS-Einheiten, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am):

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial}{\partial r} \varrho r \frac{\partial H}{\partial r} \quad (3)$$

Die Lösung dieser Gleichung wird dadurch erschwert, dass der spezifische Widerstand infolge der Jouleschen Erwärmung des Metalls ansteigt und deshalb zeit- und ortsabhängig wird. Eine vollständige numerische Lösung von Gleichung (3), kombiniert mit den hydrodynamischen Differentialgleichungen, ist von Kidder [7] und Steinberg [8] ausgearbeitet worden. Somon [6] gibt eine vereinfachte numerische Lösung für konstante Geschwindigkeit der Innenfläche eines unendlich dicken Zylinders. Der Hauptnachteil der numerischen Methoden besteht darin, dass jede einzelne Lösung für einen gegebenen Parametersatz ganz durchgerechnet werden muss, und dass dies einen grossen Rechenaufwand erfordert. Eine analytische Näherungslösung ist nicht nur numerisch einfacher zu handhaben, sie hat auch den zusätzlichen Vorteil, dass sie einen Einblick in das Zusammenwirken der verschiedenen Prozesse geben kann, die den Ablauf des Experiments bestimmen. Die meisten bisherigen Arbeiten in dieser Richtung nehmen eine konstante Stromverteilung an, in einer Schicht, die an der Innenfläche des Zylinders anliegt und deren Dicke a in Anlehnung an den Skineffekt

abgeschätzt wird [9–11]. Eine Ausnahme bildet die Arbeit von Paton und Millar [12], in der das Diffusionsproblem für ebene Geometrie und konstante Kompressionsgeschwindigkeit mit Hilfe von Laplace-Transformationen gelöst wird.

Ausser der bekannten Lösung von Gleichung (3) für die Sinusschwingung gibt es noch eine einfache Lösung für den leitenden Halbraum und einen exponentiellen Feldanstieg bei ortsunabhängiger Leitfähigkeit:

$$H(t, x) = H_0 e^{\nu t} e^{-x/a}, \quad a = \sqrt{\frac{\varrho}{\mu_0 \nu}}. \quad (4)$$

x ist die von der Grenzfläche aus gemessene Lagekoordinate, die zugehörige Differentialgleichung lautet

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\varrho}{\mu_0} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \quad (3')$$

Die vereinfachende Annahme der konstanten Stromdichte ist gar nicht nötig; die Lösung (4) lässt sich vollständig durchrechnen [13] und ergibt für den Flussverlust

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \frac{2\pi r_i \varrho}{a l} \left(1 + \frac{a}{2r_i}\right) I = R_a I. \quad (5)$$

Hierbei wurde der Zylinder als ebene Platte der Breite $2\pi(r_i + a/2)$ angenähert. l ist die axiale Länge des Zylinders, I der Gesamtstrom und R_a der Widerstand einer Schicht der Dicke a . Der teilweise Erfolg der vereinfachten Rechnung mit homogener Stromverteilung ist dem Zufall zuzuschreiben, dass diese in der Tat den gleichen Flussverlust ergibt wie die korrekte Lösung (4). Für die Joulesche Erwärmung und die magnetische Energie führt die Annahme konstanter Stromdichte jedoch zu einem falschen Ergebnis.

Eine zu (4) analoge Lösung für eine endlich dicke Platte lässt sich ebenfalls vollständig entwickeln und ist mit Erfolg zur Auswertung von Kompressionsexperimenten verwendet worden [13]. Erfreulicherweise ist in den meisten Experimenten der Feldanstieg annähernd exponentiell; den Abweichungen von der exponentiellen Form kann man bei der punktweisen Auswertung dadurch Rechnung tragen, dass für jeden Messpunkt

$$\nu = \frac{1}{H} \frac{dH}{dt} \quad (6)$$

neu bestimmt wird. Der Erfolg dieser Näherung hängt davon ab, wie schnell und wie gut sich die Feldverteilung im Metall nach einer Änderung von ν an die gerechnete Lösung anpassen wird. Hierzu betrachten wir die natürliche Ausbreitungsgeschwindigkeit einer exponentiellen Verteilung,

$$v_f = a \nu = \frac{\varrho}{\mu_0 a} = \sqrt{\frac{\varrho \nu}{\mu_0}}. \quad (7)$$

Für das Zeitintervall, in dem die neue Lösung die vorangehende etwa überdecken wird, folgt $\Delta t = a/v_f = 1/\nu$.

Die Geschwindigkeit v_f ist zugleich das exakte Mass für das Einströmen des magnetischen Flusses in das Leitermaterial, vergleiche (7) und (4):

$$v_f = \frac{E}{B} = - \frac{r_i}{2} \frac{1}{\phi_i} \frac{d\phi_i}{dt} . \quad (8)$$

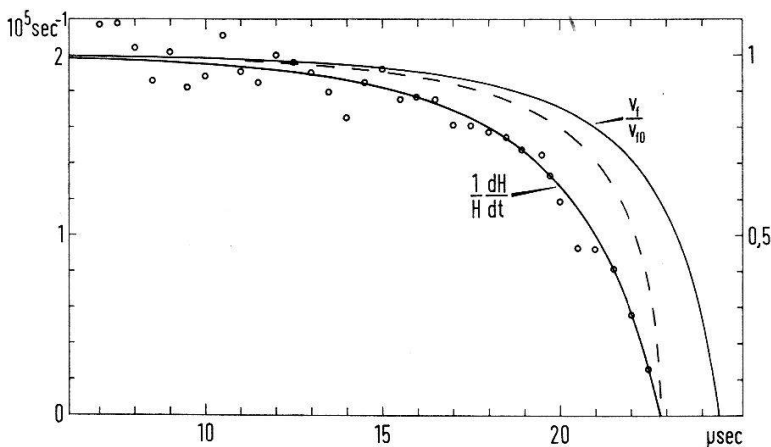
Für die Flussdiffusionsgeschwindigkeit in Zylindergeometrie folgt daraus, in der zu (5) analogen Näherung,

$$v_f(r_i) = \frac{\varrho}{\mu_0 a} \left(1 + \frac{a}{2 r_i} \right) . \quad (7')$$

Diese einfachen Formeln werden dann ungültig, wenn die Ausdehnungsgeschwindigkeit der nach (4) berechneten Eindringtiefe a mit der Diffusionsgeschwindigkeit v_f vergleichbar wird. Dieser Fall tritt gegen Ende des Experimentes ein, wenn die Innenfläche des Zylinders durch den magnetischen Druck abgebremst wird und dH/dt gegen Null strebt. Der Lösung (4) wird dadurch die stützende Randbedingung entzogen; die Feldverteilung wird dann frei weiterlaufen und sich allmählich an die aus der Theorie der Wärmeleitung bekannte Form

$$t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mu_0}{4\varrho} \frac{x^2}{t}}$$

anpassen.



Figur 1

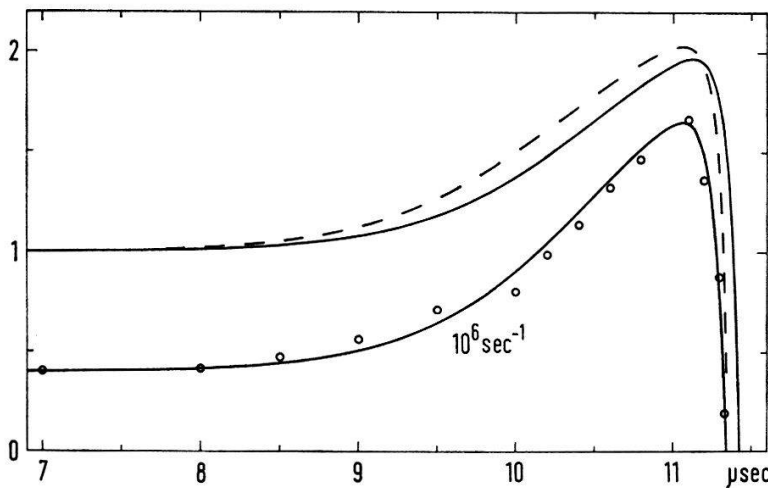
Feldanstieg und Flussdiffusionsgeschwindigkeit für ein Flusskompressions-Experiment mit langsamer Implosion [22]. Die Zeitskala ist vom Beginn der Implosion gemessen. Die linke Skala gilt für $v = 1/H \, dH/dt$; die Kreise sind Messpunkte vom Experiment, die durchgezogene Kurve ist die Anpassung gemäss Gleichung (9). Die hieraus berechnete Flussdiffusionsgeschwindigkeit ist in Einheiten von $v_{f0} = \sqrt{\varrho_0 \nu_0 / \mu_0}$ aufgetragen, mit $\nu_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-1}$ (rechte Skala). Die gestrichelte Kurve gibt die Flussdiffusionsgeschwindigkeit bei Vernachlässigung der Korrektur für die Zeitabhängigkeit von ν , d.h. $v_f' = \sqrt{\varrho_0 \nu / \mu_0}$.

Dieser Übergangsprozess ist in mathematischer Strenge schwierig zu erfassen. In vielen Fällen kann jedoch der zeitliche Verlauf des Magnetfeldes durch eine Summe von Exponentialfunktionen, z. B.

$$H = H_0 (e^{\nu_0 t} + \delta_1 e^{\nu_1 t} - \delta_2 e^{\nu_2 t}) \quad (9)$$

in guter Annäherung beschrieben werden. Die Parameter ν_k und δ_k bestimmt man mit Vorteil in einem $\nu(t)$ -Diagramm, z. B. mit einer elektronischen Tischrechenmaschine (Hewlett Packard 9100 A usw.) mit Kurvenschreiber. Die zu (9) gehörige Lösung lässt sich als Superposition von Lösungen (4) ohne Schwierigkeiten berechnen. In Figur 1

und 2 zeigen wir Beispiele der Anpassung an experimentelle Daten. Im Hinblick auf die Variation von v stellen die beiden Experimente Grenzfälle dar. Der ohnehin nicht grosse Unterschied zwischen der vereinfachten Lösung (4) und der genaueren Lösung (9) wird bei den meisten Experimenten noch geringer sein als in diesen Beispielen. Im Einklang mit der Vorstellung der in das Metall hineinlaufenden Feldverteilung bleibt die Diffusionsgeschwindigkeit der genaueren Lösung zeitlich hinter der einfachen Näherungslösung (7) um einen kleinen Betrag zurück. Diese kleine Zeitverschiebung hat erst kurz vor der Feldumkehr eine grössere Abweichung in der Diffusionsgeschwindigkeit zur Folge, nämlich wenn dv/dt sehr gross wird.



Figur 2

Feldanstieg und Flussdiffusionsgeschwindigkeit in einem Experiment mit schneller Implosion (Nr. 4 in Ref. [13]). Die Bezeichnungen sind die Gleichen wie in Figur 1.

3. Exakte Lösung mit Besselfunktionen

Für einen exponentiellen Feldanstieg und konstante Leitfähigkeit wird Gleichung (3) durch die modifizierten (hyperbolischen) Besselfunktionen $K_0(r/a)$ und $I_0(r/a)$ [14] gelöst: für den unendlich ausgedehnten Hohlzylinder mit Innenradius r_i ,

$$H(r, t) = H_0 e^{vt} \frac{K_0(r/a)}{K_0(r_i/a)}, \quad r \geq r_i, \quad (10)$$

und für den Hohlzylinder endlicher Wandstärke mit Aussenradius r_a ,

$$H(r, t) = H_0 e^{vt} \left\{ \frac{K_0(r/a)}{K_0(r_a/a)} - \frac{I_0(r/a)}{I_0(r_a/a)} \right\} A, \quad r_a \geq r \geq r_i, \quad (11)$$

mit

$$A \equiv \left\{ \frac{K_0(r_i/a)}{K_0(r_a/a)} - \frac{I_0(r_i/a)}{I_0(r_a/a)} \right\}^{-1}.$$

Für den Flussverlust folgt hieraus, gemäss Gleichung (2) und (8),

$$v_f = \frac{\rho}{\mu_0 a} \frac{K_1(r/a)}{K_0(r_i/a)} \quad (12)$$

und, für einen Zylinder endlicher Wandstärke,

$$v_f = \frac{\varrho}{\mu_0 a} \left\{ \frac{K_1(r/a)}{K_0(r/a)} - \frac{I_1(r/a)}{I_0(r/a)} \right\} A. \quad (13)$$

Die Abweichung der Näherungslösung (7') von der exakten Lösung (12) ist in Tabelle I dargestellt. Die Näherungslösung ergibt einen grösseren Flussverlust als die exakte Lösung; der Unterschied ist jedoch so klein, dass in den meisten praktischen Fällen die Anwendung der Näherungslösung voll gerechtfertigt ist. Für Zylinder endlicher Wandstärke sind die Abweichungen naturgemäss noch kleiner.

Tabelle 1
Korrekturfaktoren für die exponentielle Lösung in Zylindergeometrie

r/a	$(1 + a/2r)$	K_1/K_0	$(K_1/K_0)^2$	$\bar{\alpha}_K$	I_1/I_0	$(I_1/I_0)^2$	$\bar{\alpha}_I$
0,1	6,0	4,0600	16,484	4,066	0,0499	0,0025	0,0010
0,2	3,50	2,7249	7,4252	3,188	0,0995	0,0099	0,0045
0,5	2,00	1,7919	3,2108	2,235	0,2425	0,0588	0,0294
1	1,50	1,4296	2,0438	1,738	0,4464	0,1993	0,113
2	1,25	1,2280	1,5081	1,417	0,6978	0,4869	0,358
5	1,10	1,0958	1,2007	1,184	0,8934	0,7981	0,770
10	1,05	1,0489	1,1001	1,096	0,9486	0,8998	0,894
20	1,025	1,0247	1,0500	1,049	0,9747	0,9500	0,949
50	1,01	1,0100	1,0200	1,020	0,9900	0,9800	0,980
∞	1	1	1	1	1	1	1

4. Joulesche Erwärmung und Energieströmung

Aus einem Koeffizientenvergleich der Diffusionsgleichung (3) mit der Wärmeleitungsgleichung folgt, dass die Wärmeleitung im Verhältnis zur Geschwindigkeit der magnetischen Diffusion vernachlässigt werden kann. Für die Erwärmung des leitenden Materials können wir daher schreiben

$$w_J = \int \varrho i^2 dt = \int S d\vartheta \sim S \vartheta. \quad (14)$$

ϑ ist die Temperaturerhöhung und S die spezifische Wärme pro Volumeneinheit, w_J ist die Joulesche Energiedichte. Solange das Feld ansteigt, strömt elektromagnetische Energie in das leitende Material hinein. Aus der Energieströmung (Poynting-Vektor)

$$|\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \varrho H \frac{\partial H}{\partial x} = v_f \mu_0 H^2 \quad (15)$$

berechnet sich die Zunahme der Energiedichte w in ebener Geometrie wie folgt:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \varrho H \frac{\partial H}{\partial x} = \varrho \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + H \frac{\partial}{\partial x} \varrho \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial w_J}{\partial t} + \frac{\partial w_H}{\partial t}. \quad (16)$$

An Hand dieser Gleichung kann man die Aufteilung der Energie in Joulesche Wärme (1. Term) und magnetische Energie (2. Term) verfolgen. Insbesondere erhellt aus dem 2. Term, dass bei konstanter Leitfähigkeit die Zunahme der magnetischen Energiedichte zur zweiten Ableitung der Feldverteilung proportional ist. Hieraus geht eindeutig hervor, dass eine homogene Stromverteilung nur im Zusammenhang mit

statischen Feldern existieren kann, mit einer Feldänderung ist sie prinzipiell unveränderbar. Für die exponentielle Feldverteilung (4) folgt aus (16) Gleichverteilung zwischen Joulescher Wärme und magnetischer Energie:

$$\rho i^2 = \rho \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 = \rho H \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) . \quad (17)$$

Exakte Gleichverteilung, wie sie bei der exponentiellen Feldverteilung im leitenden Halbraum vorliegt, ist ein Ausnahmefall. Meistens liegt Gleichverteilung jedoch annähernd vor [12], so lange die Leiterdimension in Richtung der Felddiffusion im Verhältnis zur Eindringtiefe gross ist. Wenn die Leiterdicke mit der Eindringtiefe vergleichbar wird, verschiebt sich die Verteilung zu Gunsten der thermischen Energie beim einseitig ans Feld grenzenden Leiter [13] und zu Gunsten der magnetischen Energie beim ins Feld eingebetteten Leiter. Abweichungen vom exponentiellen Feldanstieg haben auch eine Störung der Gleichverteilung zur Folge; diese kann ebenfalls mit Hilfe von (9) näherungsweise berechnet werden.

Beim Übergang zu Zylindergeometrie ändert sich in (16) nur der Term für die magnetische Energie:

$$\frac{\partial w_H}{\partial t} = \frac{H}{r} \frac{\partial}{\partial r} \rho r \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\rho}{a^2} \frac{K_0^2(r/a)}{K_0^2(r_i/a)} H_0^2 e^{2vt} , \quad (18)$$

$$\frac{\partial w_J}{\partial t} = \mu_0 v \frac{K_1^2(r/a)}{K_0^2(r_i/a)} = \frac{\rho}{a^2} \frac{K_1^2(r/a)}{K_0^2(r_i/a)} H_0^2 e^{2vt} . \quad (19)$$

Gleichverteilung wird für grosse r/a annähernd erreicht, da für $r/a \rightarrow \infty$ die Funktionen K_1 und K_0 gegen den gleichen Grenzwert streben. Die Abweichung von der Gleichverteilung beschreiben wir in Anlehnung an Lewin und Smith [9] durch einen (zeitunabhängigen) Faktor α :

$$\alpha = \frac{w_J}{w_H} = \frac{K_1^2(r/a)}{K_0^2(r/a)} . \quad (20)$$

Dieser Faktor gilt für die Energiedichte; einen Verteilungsfaktor für die Gesamtenergie erhält man durch Integration:

$$\bar{\alpha} = \frac{W_J}{W_H} = \frac{\int_{r_i/a}^{\infty} \frac{r}{a} K_1^2 \left(\frac{r}{a} \right) d \left(\frac{r}{a} \right)}{\int_{r_i/a}^{\infty} \frac{r}{a} K_0^2 \left(\frac{r}{a} \right) d \left(\frac{r}{a} \right)} = \frac{\int w_J dV}{\int w_H dV}$$

Numerische Beispiele sind der Tabelle I beigelegt. Im Hinblick auf experimentelle Fehlergrenzen und anderweitige Unsicherheiten lässt sich in der Tat in den meisten praktischen Fällen die Anwendung der ebenen Näherung rechtfertigen.

Zur Berechnung der Dynamik aus der Energiebilanz braucht man nur die Gesamtenergie zu kennen, die in den Leiter einströmt. Diese ist durch Gleichung (15) gegeben und kann vorteilhaft durch die Diffusionsgeschwindigkeit v_f ausgedrückt werden. Für die Summe W_L der magnetischen und Jouleschen Energie im Leitermaterial folgt aus (15):

$$\frac{dW_L}{dt} = 4 \frac{v_f}{r_i} W_i, \quad W_i = \pi r_i^2 \frac{1}{2} \mu_0 H_i^2. \quad (21)$$

Durch Differenzieren von W_i und (1) nach der Zeit folgt

$$\frac{dW_i}{dt} = 4 \frac{W_i}{r_i} \left(\frac{1}{2} v_i - v_f \right); \quad (22)$$

Die Gesamtenergie W , die vom implodierenden Zylinder an das Magnetfeld und die damit verbundene Joulesche Erwärmung abgegeben wird, folgt dann aus der einfachen und nützlichen Beziehung

$$\frac{dW}{dt} = 2 v_i \frac{W_i}{r_i}. \quad (23)$$

Es ist bemerkenswert, dass die Zunahme der gesamten Energie von der Diffusionsgeschwindigkeit und somit von der Leitfähigkeit des Zylindermaterials nicht explizit abhängig ist.

5. Einfluss der temperaturabhängigen Leitfähigkeit

Bei Gleichverteilung zwischen thermischer und magnetischer Energiedichte gilt eine einfache Faustregel für die Erwärmung des Leitermaterials:

$$\frac{\vartheta}{H^2} \sim 1000^\circ\text{C}/\text{MG}^2.$$

Im Megagaussgebiet wird demnach die Temperatur so stark ansteigen, dass die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit in keinem Fall ganz vernachlässigt werden kann. Für die meisten Metalle lässt sich der spezifische Widerstand zwischen Zimmertemperatur und Schmelzpunkt durch die folgende Näherung beschreiben:

$$\varrho = \varrho_0 (1 + k \vartheta). \quad (24)$$

Beim Übergang in den flüssigen Zustand springt der Widerstand auf den etwa doppelten Wert. Da die Schmelzwärme einem Sprung in der thermischen Energie entspricht, erhält man eine weit über den Schmelzpunkt hinaus gültige Näherungsformel, indem man den spezifischen Widerstand als Funktion der thermischen Energiedichte ansetzt:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = 1 + \frac{k}{S} w_J = 1 + \alpha \left(\frac{H}{H_c} \right)^2, \quad H_c = \sqrt{\frac{2S}{\mu_0 k}}. \quad (25)$$

Bei Gleichverteilung ist $\alpha = 1$, siehe (20). Alle Konstanten sind im «charakteristischen Feld» H_c zusammengefasst [9].

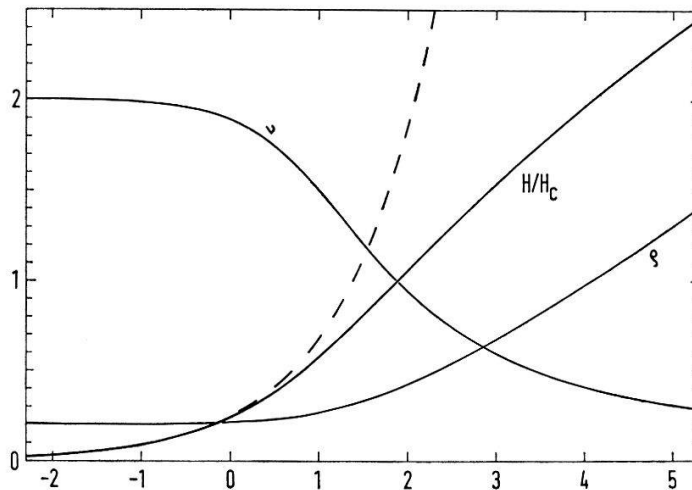
Bryant [15] hat für die spezielle Form (25) des spezifischen Widerstandes mit $\alpha = 1$ eine analytische Lösung von Gleichung (3) in ebener Geometrie abgeleitet:

$$H e^{\frac{1}{2} \left(\frac{H}{H_c} \right)^2} = H_0 e^{v_0 t} e^{-x/a_0}, \quad a_0 = \sqrt{\frac{\varrho_0}{\mu_0 v_0}}. \quad (26)$$

Sie folgt durch direkte Integration aus der Bedingung, dass die Diffusionsgeschwindigkeit $v_f = a_0 v_0$ konstant bleiben soll. Dies setzt eine sehr spezielle Form des Feldanstieges voraus, gemäss

$$\nu = \frac{1}{H_i} \frac{dH_i}{dt} = \frac{\nu_0}{1 + (H_i/H_c)^2} = \frac{\varrho_0 \nu_0}{\varrho} . \quad (27)$$

Von Experimenten wird diese Bedingung im Allgemeinen nicht erfüllt, vgl. Figur 1 und 2 mit Figur 3. Eine Anpassung an Experimente durch Superposition von Lösungen (26) ist wegen der durch ϱ eingeführten Nichtlinearität leider nicht möglich.



Figur 3

Die Zeitabhängigkeit verschiedener Parameter der Bryantschen Lösung, Gleichungen (26) und (27), aufgetragen über der Ordinate $\nu_0 t$. Die gestrichelte Kurve ist die entsprechende Exponentialfunktion zum Vergleich.

Die Bryantsche Lösung hat jedoch interessante Eigenschaften, die eine nähere Untersuchung der Mühe Wert machen. Sie lässt sich ohne weiteres differenzieren und erfüllt die Bedingung (16), d. h. es besteht exakte Gleichverteilung und der Ansatz (25) mit $\alpha = 1$ ist damit nachträglich voll gerechtfertigt. Die Feldverteilung $H(x)$ ist, abgesehen vom Masstab, ein Spiegelbild der Funktion $H(t)$ und behält beim Fortschreiten ins Metall ihre Form bei. (Da H als Funktion von t durch Gleichung (26) nicht explizit gegeben ist, muss man zur numerischen Behandlung t als Funktion von H ausrechnen.) Wir wollen nun die Flussdiffusionsgeschwindigkeit näher betrachten. Vorausschickend sei bemerkt, dass die einfache Lösung (4) auch für zeitabhängiges ϱ gültig ist (a wird dann zeitabhängig), so lange ϱ ortsunabhängig bleibt. Wir können z. B. (26) und (4) vergleichen, indem wir den speziellen Widerstand in (4) im ganzen Leiter demjenigen an der Innenfläche in (26) gleichsetzen. In der direkten Näherung ergeben beide Lösungen dann die gleiche Flussdiffusionsgeschwindigkeit; da (26) jedoch den speziellen Feldanstieg (27) voraussetzt, müssen wir zum genaueren Vergleich in (4) die Korrektur für die Variation von ν anbringen. Mit Hilfe von (9) lässt sich diese im Bereich $H \lesssim H_c$ annähernd berechnen. Wie zu erwarten, ergibt die Annahme $\varrho(x) \equiv \varrho_i$ einen grösseren Flussverlust, die Abweichung geht bei $H \sim 0,9 H_c$ durch ein Maximum und bleibt immer kleiner als 5%. Die Flussdiffusionsgeschwindigkeit ist somit im Wesentlichen durch den spezifischen Widerstand an der Innenfläche des Leiters bestimmt.

In einer früheren Arbeit des Autors [13] war zur Bestimmung des Flussverlustes ein gewogener Mittelwert des Widerstandes verwendet worden. Im Lichte der vorangegangenen Diskussion ist dies keine gute Näherung. Die numerischen Resultate in dieser speziellen Arbeit werden hiervon jedoch nur wenig berührt: Einerseits ist der

spezifische Widerstand von rostfreiem Stahl nach oben beschränkt und H bleibt deshalb immer kleiner als H_c , und ausserdem ergibt die Annahme des gemittelten Widerstandes unter diesen Umständen eine Korrektur, die grössenordnungsmässig mit derjenigen für die Variation von ν übereinstimmt.

6. Anwendungen und Schlussbetrachtung

Zur Auswertung eines Flusskompressionsexperimentes wird man von der Lösung (4) als Basis ausgehen und dann nach Bedarf die verschiedenen Korrekturfaktoren anbringen: für endliche Wandstärke des Leiters, für die Abweichung vom exponentiellen Feldanstieg, für die Ortsabhängigkeit des spezifischen Widerstandes und für die Zylindergeometrie. Die Überlagerung der verschiedenen Korrekturen ist dadurch gerechtfertigt, dass jede einzelne Korrektur relativ klein ist. Mit dieser einfachen Methode ist es möglich, den Flussverlust und die Erwärmung des Leitermaterials mit einer Genauigkeit auszurechnen, die der erreichbaren Messgenauigkeit von einigen Prozent durchaus angemessen ist.

Der Flussverlust kann aus dem gemessenen Magnetfeld und dessen Ableitung (die mit induktiven Sonden direkt messbar ist) berechnet werden; der innere Radius folgt dann aus dem Feld und dem berechneten Fluss. Da der Flussverlust auch vom Radius abhängt, kann diese Rechnung nicht direkt ausgeführt werden. Man muss den Radius zunächst extrapolieren; die korrekten Werte erhält man dann durch wechselseitige Berechnung von Radius und Fluss in rascher Konvergenz [13].

Bei der Diskussion der Bryantschen Lösung haben wir gezeigt, dass der spezifische Widerstand an der Innenfläche des Leiters für den Flussverlust in erster Linie massgebend ist. Wir müssen somit nur die Temperatur an der Innenfläche berechnen; diese ist gemäss (2) direkt mit dem Flussverlust verknüpft. Die magnetische Widerstandsänderung wird – bei Gültigkeit der Kohlerschen Regel – bei den hohen Temperaturen vernachlässigbar sein; jedoch kann der magnetische Druck den Widerstand um einen beträchtlichen Faktor ($\sim 2 \div 5$) vermindern. Die Druckabhängigkeit des spezifischen Widerstandes ist eine Funktion der Temperatur [16], die für hohe Temperaturen noch nicht gemessen worden ist. Ausserdem ist zu bedenken, dass die Erwärmung in einer sehr kurzen Zeitspanne stattfindet. Im Hinblick auf die Natur des Schmelz- und Verdampfungsvorganges ist anzunehmen, dass das Leitermaterial eine Zeitlang im überhitzten Zustand verbleiben wird; entsprechend wird der spezifische Widerstand hinter dem «normalen» Wert zurückbleiben.

Bei gleichzeitiger Kenntnis von Radius und Feld könnte der spezifische Widerstand als einzige zurückbleibende Unbekannte aus dem Flusskompressionsexperiment selbst bestimmt werden. Die erreichbare Genauigkeit und Sicherheit der Interpretation von optischen Messungen [17, 18] ist jedoch bei weitem nicht ausreichend zu einer experimentellen Bestimmung des Flussverlustes. Es bleibt die Möglichkeit, den Radius aus der Dynamik des implodierenden Zylinders zu berechnen. Mit Integration von (23) kann man die Energiebilanz zwischen der kinetischen Energie des implodierenden Zylinders und der gesamten abgegebenen Energie aufstellen; r_i folgt dann durch Integration aus der Geschwindigkeit. Dies setzt voraus, dass der Zylinder als

Ganzes abgebremst wird, d.h. dass das Zylindermaterial inkompressibel ist. Diese Bedingung ist in der Tat über einen grossen Teil der Kompression (etwa die ersten drei Viertel) erfüllt. Dieser erste Teil der Implosion ist aber gewissermassen trivial, da praktisch keine Energieübertragung stattfindet. Erst ganz am Ende des Experimentes nimmt die Energieübertragung sehr rasch zu und wird dann ganz von der Kompressibilität dominiert: nur die Innenfläche des Zylinders wird abgebremst, ein beträchtlicher Energieanteil geht in Kompressionsenergie über, und es wird sich im Zylindermaterial eine Schockwelle bilden. Dieser komplizierte Prozess unterliegt partiellen Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typ, deren Lösung einen grossen Rechenaufwand erfordert [4]. In einer früheren Arbeit des Autors [13] wurde der Effekt der endlichen Schallgeschwindigkeit mit Hilfe einer graphischen Annäherung der Charakteristiken berücksichtigt. Eine einfache analytische Näherung ist von Speight [19] und unabhängig von Shearer et al. [20] vorgeschlagen worden. Diese Autoren identifizieren die Geschwindigkeitszunahme der Oberfläche eines festen Körpers, auf den ein Druckimpuls ausgeübt wird, mit der Teilchengeschwindigkeit in der zu diesem Druck gehörigen Schockwelle. Über den Zusammenhang zwischen Druck, Schockgeschwindigkeit und Teilchengeschwindigkeit sind genaue Daten erhältlich [21] (vgl. Tabelle II). Auch hier ist zu bemerken, dass diese bei Zimmertemperatur (als Anfangstemperatur) gemessen wurden, und dass die zusätzliche Joule-Aufheizung im Flusskompressionsexperiment Abweichungen zur Folge haben kann.

Tabelle II

Teilchengeschwindigkeit in einer durch ein Magnetfeld verursachten Schockwelle, in km/sec, in verschiedenen Metallen.

B(MG)	Al	Cu	AISI 304 ^a)	W
0,5	0,07	0,03	0,03	0,01
1	0,25	0,11	0,11	0,05
2	0,88	0,39	0,39	0,20
5	3,54	1,71	1,75	0,99
10	8,51	4,30	4,48	2,76
20	18,73	9,69	10,20	6,66

^a) 18-8 rostfreier Stahl.

Nach dieser Aufzählung von Unsicherheitsfaktoren kann kein Zweifel darüber bestehen, dass an eine genaue Bestimmung des spezifischen Widerstandes nicht zu denken ist, umsomehr als der Widerstand nur einen geringen Einfluss auf die experimentell messbaren Werte hat. Wir können dies illustrieren durch Auflösung von Gleichungen (1) und (7) nach dem spezifischen Widerstand. Aus Differenziation von (1) folgt

$$v = \frac{2}{r_i} (v_i - v_f), \quad v_i = - \frac{dr_i}{dt}, \quad (28)$$

und Kombination mit (7) ergibt

$$Q = \mu_0 \frac{(v_i - r_i v/2)^2}{v \kappa^2}. \quad (29)$$

Die verschiedenen Korrekturfaktoren sind in κ zusammengefasst:

$$v_f = \kappa \sqrt{\frac{\rho v}{\mu_0}}. \quad (30)$$

Der Faktor κ ist von der Grössenordnung 1, mit Ausnahme vom Ende der Kompression, wenn v gegen 0 und κ gegen ∞ strebt. Im Prinzip würde Gleichung (29) die Bestimmung von ρ zu jedem Zeitpunkt der Kompression ermöglichen, doch ist es offensichtlich, dass diese Gleichung sowohl auf Messfehler als auch auf die theoretischen Korrekturfaktoren extrem empfindlich ist. Unabhängig von (29) kann man eine obere Grenze für den Mittelwert von ρ aus der Kenntnis des inneren Radius im Moment der Sondenzerstörung ableiten [13]. Aus einem Vergleich vieler Experimente hat sich ergeben, dass der spezifische Widerstand von rostfreiem Stahl (AISI 304) den Wert $\bar{\rho}_{lim} \cong 100 \mu\Omega\text{cm}$ nicht wesentlich überschreitet. Mit Röntgenblitzaufnahmen, die eine genauere Radiusbestimmung zu einem beliebigen Zeitpunkt der Implosion ermöglichen [5], kann der Wert für ρ_{lim} noch etwas enger eingeschachtelt werden.

Während somit eine genaue Bestimmung von ρ nicht möglich erscheint, so ist umgekehrt zur Diskussion und zur Planung von Flusskompressionsexperimenten auch keine genauere Kenntnis von ρ notwendig. Zur Illustration der Auswertung von Experimenten sollen die numerischen Beispiele in Tabelle III dienen. Der Innenradius und die Geschwindigkeit des implodierenden Zylinders wurden aus dem als Funktion der Zeit gemessenen Magnetfeld bestimmt wie zu Anfang dieses Abschnittes beschrieben. Für ρ_{lim} wurde der Wert $120 \mu\Omega\text{cm}$ angenommen, der in einer früheren Arbeit [13] gute Übereinstimmung mit verschiedenen Experimenten ergeben hatte. Die Berechnung der Flussdiffusionsgeschwindigkeit ermöglicht nun einen weiteren unabhängigen Test: Am Feldmaximum muss die Flussdiffusionsgeschwindigkeit mit der Geschwindigkeit der Zylinderinnenfläche übereinstimmen. Im Rahmen der Mess- und Rechengenauigkeit ist dies in der Tat bei allen drei Experimenten in Tabelle III der Fall.

Tabelle III
Auswertung von Flusskompressionsexperimenten.

Experiment		BMV [22]	FR-1 [13]	FR-4 [13]
Figur		1	—	2
Anfangswerte				
Feld	kG	117	82	66
Innenradius	mm	42,0	36,5	38,5
Ende der Beschleunigungsphase				
Innenradius	mm	30	26	18
Geschwindigkeit	km/sec	1,7	1,7	3,9
relativer Feldanstieg	μsec^{-1}	0,2	0,14	0,4
Feldmaximum				
Feld	MG	1,18	2,0	5,5
Innenradius	mm	9,9	3,4	2,2
Geschwindigkeit	km/sec	$0,30 \pm 0,05$	$0,5 \pm 0,1$	$1 \pm 0,3$
Flussdiffusionsgeschwindigkeit	km/sec	0,30	0,61	1,1
Bessel-Faktor	K_1/K_0	1,17	1,27	1,23

Abschliessend sei bemerkt, dass die im vierten Abschnitt hergeleiteten Gleichungen auch zur Diskussion der Erwärmung leitender Proben in rasch ansteigenden Magnetfeldern nützlich sind. Für eine zylindrische Probe im axialen Magnetfeld haben wir

$$H(r) = \frac{I_0(r/a)}{I_0(r_a/a)} H_0 e^{vt} ; \quad (31)$$

numerische Werte für die entsprechenden Faktoren sind der Tabelle I beigelegt.

Diese Arbeit wurde am Stanford Linear Accelerator Center fertiggestellt und von der National Science Foundation und dem U.S. Army Research Office, Durham, teilweise unterstützt.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] F. HERLACH, Rep. Progr. Phys. *31*, 341 (1968).
- [2] C. M. FOWLER, W. B. GARN and R. S. CAIRD, J. appl. Phys. *31*, 588 (1960).
- [3] G. LEHNER, J. G. LINHART and J. P. SOMON, Nucl. Fusion *4*, 362 (1964).
- [4] Proc. Conf. on Megagauss Magnetic Field Generation by Explosives and Related Experiments, Frascati, September 1965, EURATOM EUR 2750.e (1966): J. P. SOMON, p. 67.
- [5] F. HERLACH and J. KENNEDY, to be published.
- [6] J. P. SOMON, p. 235 in Ref. [4].
- [7] R. KIDDER, p. 37 in Ref. [4].
- [8] D. STEINBERG, UCRL-14931, Livermore (1966).
- [9] J. D. LEWIN and P. F. SMITH, Rev. Sci. Instr. *35*, 541 (1964).
- [10] M. COWAN, JR., p. 167 in Ref. [4].
- [11] A. D. SAKHAROV, Usp. Fiz. Nauk *88*, 725 (Sov. Phys.-Uspekhi *9*, 294 (1966)).
- [12] A. PATON and W. MILLAR, J. appl. Phys. *35*, 1141 (1964).
- [13] F. HERLACH, J. appl. Phys. *39*, 5191 (1968).
- [14] M. ABRAMOWITZ and I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York 1965).
- [15] A. R. BRYANT, p. 183 in Ref. [4].
- [16] P. W. BRIDGMAN, *The Physics of High Pressure* (Bell, London 1949).
- [17] F. HERLACH, H. KNOEPFEL, D. NENCINI and J. VAN MONTFOORT, Proc. 7th Int. Congress on High-speed Photography (Helwich, Darmstadt 1967), p. 157.
- [18] J. E. BESANCON, Thèse de Doctorat d'Etat es-sciences physiques à la Faculté des Sciences de Paris, 1970.
- [19] C. S. SPEIGHT, Atomic Weapons Research Establishment, Foulness, Rep. 0-71/67 (1967).
- [20] J. W. SHEARER et al., J. appl. Phys. *39*, 2102 (1968).
- [21] R. G. MCQUEEN and S. P. MARSH, J. appl. Phys. *31*, 1253 (1960).
- [22] J. BESANCON, J. MORIN and J. VEDEL, C. R. Acad. Sc. Paris *267*, 1319 (1968).