

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 43 (1970)  
**Heft:** 6-7

**Artikel:** Etude des atomes  $\Lambda$ -mésoniques au moyen des longueurs de diffusion  
**Autor:** Lambert, E.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-114190>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Etude des atomes $\pi^-$ -mésoniques au moyen des longueurs de diffusion<sup>1)2)</sup>

par **E. Lambert**<sup>3)</sup>

Institut de Physique, Université de Neuchâtel

(11 V 70)

*Summary.* From pionic atoms measurements the  $\pi$ -nucleus experimental scattering lengths are determined. These  $s$  and  $p$  scattering lengths are then connected to those of the  $\pi$ -N elementary process through a multiple scattering theory. The binding of the nucleons is neglected and the nuclear structure introduced in a simple way using the independent particle model. The absorption is treated phenomenologically by taking complex values for the  $\pi$ -N scattering parameters. A set of these parameters is then adjusted to the experimental results and discussed.

## I. Introduction

Dans l'étude de l'interaction forte  $\pi$ -noyau aux basses énergies, l'importance des atomes  $\pi^-$ -mésoniques, à côté d'expériences de diffusion, n'est plus à souligner.

Le processus de capture d'un  $\pi^-$  lent par un atome est compliqué et encore assez peu clair aujourd'hui. On suppose que le pion est d'abord capturé sur une orbite de Bohr par le champ coulombien au niveau de la couche électronique. Ceci correspond pour le pion à un nombre quantique principal de l'ordre de 16 ( $\sqrt{\mu/m_e} \simeq 16$ ). Par effet Auger et émission de rayons X cet atome se désexcite ensuite, amenant le pion sur des orbites hydrogènoïdes basses avec une forte probabilité de peuplement pour celles de moment orbital maximum ( $l = n - 1$ ). Le rayon de Bohr très faible de ces orbites

$$R_n^B \simeq \frac{200}{Z} n^2 \quad (\text{fm.})$$

permet expérimentalement la mise en évidence de l'interaction forte malgré sa courte portée. Elle se manifeste sur la position et la largeur du niveau en question, ainsi que sur la probabilité de transition d'un niveau à l'autre. Ces deux derniers effets sont intimement liés à la partie absorptive de cette interaction.

Dans le but de relier les résultats de diffusion  $\pi$ -noyau aux résultats d'expériences d'atomes  $\pi^-$ -mésoniques, une paramétrisation de ces derniers à l'aide d'un développe-

<sup>1)</sup> Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel pour l'obtention du grade de docteur ès sciences.

<sup>2)</sup> Travail financé par le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique.

<sup>3)</sup> Adresse actuelle: Laboratory for Nuclear Science, M.I.T., Cambridge, Mass. 02139, USA.

ment de portée effective nous a semblé s'imposer [1]. Les propriétés d'analyticité en  $k^2$  de ce développement assurent en effet ce passage.

La relation entre le déplacement énergétique d'un niveau  $s$  d'atome mésonique, sous l'influence d'une interaction supplémentaire, et la longueur de diffusion  $\pi^-$ -noyau (effets coulombiens soustraits) est connue depuis longtemps (Deser et coll. [2]). C'est plutôt de l'article de Trueman [3] que nous nous sommes inspirés dans notre précédent travail [1] en utilisant une méthode permettant la généralisation immédiate à tout niveau  $(n, l)$  d'atome  $\pi^-$ -mésonique. Ce cheminement est plus direct que celui de Seki et Cromer [4] par le fait qu'il n'introduit pas de forme particulière pour le potentiel d'interaction forte.

Après un bref rappel de la situation expérimentale nous passons, au chapitre III du présent travail, à la détermination de cette fonction de portée effective  $Z^c(l, k^2)$ . La connaissance de l'énergie de l'état lié correspondant, dans les seuls potentiels coulombien et d'interaction forte, est nécessaire pour cela. Ce calcul est fait de façon habituelle à partir de l'énergie expérimentale de la transition  $X$  amenant à ce niveau.

Au chapitre IV nous relierons, par l'intermédiaire d'une théorie de diffusion multiple, les longueurs de diffusion  $s$  et  $p$  ainsi obtenues à celles du processus élémentaire  $\pi$ -N. La philosophie de ce calcul est, grossièrement, celle de Moyer et Koltun [5] étendue aux longueurs de diffusion  $p$ . Nous négligeons cependant la liaison des nucléons dans le noyau, traité à l'aide du modèle des particules indépendantes, et nous limitons aux processus de diffusion simple et double. Nous introduisons l'absorption phénoménologiquement en admettant des valeurs complexes pour les paramètres de diffusion  $\pi$ -N. Un ensemble de ces paramètres est ensuite ajusté aux résultats expérimentaux et discuté.

## II. Situation expérimentale

Les grandeurs immédiatement accessibles par une expérience d'atome  $\pi^-$ -mésonique sont énergie, largeur et intensité des transitions radiatives. De ces quantités nous avons à extraire le déplacement en énergie et la largeur des niveaux sous l'influence de l'interaction forte. La courte portée de cette interaction diminue son effet, dans un atome donné, d'un facteur de l'ordre de  $10^{-3}$  en passant d'un niveau  $(n, l)$  à son supérieur  $(n + 1, l + 1)$ . Ce seul fait exclut la possibilité d'extraire des mesures actuelles, malgré leur haute précision, le déplacement et la largeur de plus d'un niveau par atome. Ce niveau sera le plus profond pour autant qu'il ne corresponde pas à une probabilité d'absorption du pion (largeur du niveau) telle qu'elle rende l'observation impossible.

Ainsi on mesure  $(E_{2p-1s}, I_{2p-1s})$  jusqu'à Na,  $(E_{3d-2p}, I_{3d-2p})$  de Al à Zn,  $(E_{4f-3d}, I_{4f-3d})$  de Y à Pr et  $(E_{5g-4f}, I_{5g-4f})$  de Ta à Pu.

Ces résultats, tirés des mesures des groupes de Berkeley [6], du CERN [7, 8, 9] et de Williamsburg [10], sont donnés dans les tables 1 à 4 pour lesquelles nous avons sélectionné les mesures les plus précises.

Une méthode expérimentale indirecte permet encore de déterminer la largeur des niveaux supérieurs des transitions données ci-dessus. En bref, cette méthode revient

à calculer les probabilités de transition dipolaire  $W_X$  et Auger  $W_A$ . Connaissant d'autre part expérimentalement l'intensité  $Y$  de la transition et la population  $P$  du niveau supérieur (déterminée comparativement à l'atome muonique correspondant) on obtient la largeur du niveau en question  $\Gamma = \hbar W_a$  à l'aide de la relation [11]

$$Y = \frac{W_X P}{W_X + W_A + W_a}$$

où  $W_a$  est la probabilité d'absorption par interaction forte. Nous n'utiliserons cependant pas ces résultats dans ce présent travail.

Table 1  
Longueurs de diffusion  $s$  expérimentales.

Réf.	Noyau	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ [fm]	$E_{2p \rightarrow 1s}^{\text{exp}}$ [keV]	$\Gamma_{1s}^{\text{exp}}$ [keV]	$\text{Re}(A_0^c)^a)$ [fm]	$\text{Re}(A_0^c)^b)$ [fm]	$\text{Im}(A_0^c)^{a)b})$ [fm]
[10]	$^6\text{Li}$	2,51	$24,18 \pm 0,06$	$0,15 \pm 0,05$	$0,178 \pm 0,031$	0,209	$-0,039 \pm 0,013$
[10]	$^7\text{Li}$	2,39	$24,06 \pm 0,06$	$0,19 \pm 0,05$	$0,284 \pm 0,031$	0,314	$-0,049 \pm 0,013$
[10]	$^9\text{Be}$	2,42	$42,32 \pm 0,05$	$0,58 \pm 0,05$	$0,354 \pm 0,011$	0,390	$-0,064 \pm 0,005$
[10]	$^{10}\text{B}$	2,45	$65,79 \pm 0,11$	$1,68 \pm 0,12$	$0,323 \pm 0,012$	0,373	$-0,095 \pm 0,007$
[10]	$^{11}\text{B}$	2,42	$65,00 \pm 0,11$	$1,72 \pm 0,15$	$0,424 \pm 0,013$	0,473	$-0,099 \pm 0,009$
[10]	$^{12}\text{C}$	2,42	$95,19 \pm 0,12$	$3,25 \pm 0,15$	$0,381 \pm 0,008$	0,438	$-0,109 \pm 0,005$
[7]	$^{14}\text{N}$	2,46	$124,74 \pm 0,15$	$4,48 \pm 0,30$	$0,415 \pm 0,006$	0,484	$-0,096 \pm 0,006$
[7]	$^{16}\text{O}$	2,75	$159,95 \pm 0,25$	$7,56 \pm 0,50$	$0,429 \pm 0,007$	0,526	$-0,111 \pm 0,007$
[7]	$^{18}\text{O}$	2,77	$155,01 \pm 0,25$	$8,67 \pm 0,70$	$0,579 \pm 0,008$	0,681	$-0,132 \pm 0,011$
[7]	$^{19}\text{F}$	2,85	$195,9 \pm 0,5$	$9,4 \pm 1,5$	$0,505 \pm 0,011$	0,623	$-0,100 \pm 0,016$
[7]	$^{23}\text{Na}$	2,94	$276,2 \pm 1,0$	$10,3 \pm 4,0$	$0,585 \pm 0,013$	0,744	$-0,065 \pm 0,025$

a) Interaction forte seule.

b) Interaction forte + effet de charge étendue du noyau.

Les erreurs sur  $\text{Re}(A_0^c)^b)$  sont les mêmes que celles de  $\text{Re}(A_0^c)^a)$ .

Table 2  
Longueurs de diffusion  $p$  expérimentales.

Réf.	Noyau	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ [fm]	$E_{3d \rightarrow 2p}^{\text{exp}}$ [keV]	$\Gamma_{2p}^{\text{exp}}$ [keV]	$\text{Re}(A_1^c)^a)$ [fm <sup>3</sup> ]	$\text{Re}(A_1^c)^b)$ [fm <sup>3</sup> ]	$\text{Im}(A_1^c)^{a)b})$ [fm <sup>3</sup> ]
[8]	$^{27}\text{Al}$	3,03	$87,40 \pm 0,10$	$0,11 \pm 0,08$	$-16,3 \pm 13,0$	-15,8	$-7,1 \pm 5,2$
[8]	Si	3,06	$101,58 \pm 0,15$	$0,18 \pm 0,08$	$-26,0 \pm 13,0$	-25,4	$-7,9 \pm 3,4$
[8]	$^{31}\text{P}$	3,14	$116,78 \pm 0,10$	$0,20 \pm 0,08$	$-24,3 \pm 6,3$	-23,6	$-6,3 \pm 2,5$
[8]	$^{32}\text{S}$	3,24	$133,06 \pm 0,10$	$0,79 \pm 0,15$	$-24,8 \pm 4,6$	-23,9	$-18,0 \pm 3,4$
[8]	Cl	3,32	$150,55 \pm 0,15$	$0,89 \pm 0,25$	$-27,1 \pm 5,0$	-26,1	$-14,9 \pm 4,2$
[8]	K	3,44	$188,77 \pm 0,18$	$1,45 \pm 0,15$	$-27,9 \pm 3,5$	-26,8	$-13,9 \pm 1,4$
[8]	$^{40}\text{Ca}$	3,46	$209,66 \pm 0,18$	$2,00 \pm 0,25$	$-29,4 \pm 2,7$	-28,1	$-14,8 \pm 1,9$
[8]	Ti	3,59	$253,98 \pm 0,20$	$2,89 \pm 0,25$	$-21,0 \pm 1,8$	-19,4	$-13,3 \pm 1,1$
[8]	$^{51}\text{V}$	3,58	$277,85 \pm 0,20$	$3,66 \pm 0,25$	$-18,7 \pm 1,5$	-17,1	$-13,5 \pm 0,9$
[8]	Cr	3,66	$302,75 \pm 0,25$	$4,46 \pm 0,35$	$-16,8 \pm 1,5$	-15,0	$-13,3 \pm 1,0$
[8]	$^{55}\text{Mn}$	3,71	$329,12 \pm 0,25$	$6,38 \pm 0,40$	$-16,8 \pm 1,2$	-14,9	$-15,4 \pm 1,0$
[8]	Fe	3,72	$356,43 \pm 0,30$	$8,65 \pm 0,60$	$-16,0 \pm 1,2$	-14,0	$-17,2 \pm 1,2$
[8]	$^{59}\text{Co}$	4,01	$384,74 \pm 0,35$	$7,37 \pm 0,70$	$-15,2 \pm 1,2$	-12,6	$-12,4 \pm 1,2$
[8]	Ni	3,81	$415,23 \pm 0,70$	$12,7 \pm 3,0$	$-16,7 \pm 1,9$	-14,5	$-17,4 \pm 4,1$
[8]	Cu	3,88	$446,1 \pm 2,0$	$15,9 \pm 4,0$	$-16,1 \pm 4,6$	-13,6	$-18,3 \pm 4,6$
[8]	Zn	3,94	$478,2 \pm 3,0$	$16,8 \pm 6,0$	$-15,7 \pm 5,8$	-13,0	$-16,3 \pm 5,8$

a)b) Voir table 1.



### III. Fonction de portée effective et longueurs de diffusion expérimentales

#### a) Fonction de portée effective

Dans le cas de la diffusion sur un potentiel  $V(r)$  modifié par la présence d'un potentiel coulombien nous avons vu [1] qu'une fonction de portée effective nous était donnée par:

$$Z^c(l, k^2) = \frac{p_l(\alpha)}{2\alpha(2l+1)} k^{2l+1} [C_0^2(\alpha) \cotg \delta_l^c(k) + 2\alpha h(\alpha)] \quad (3.1)$$

$\delta_l^c(k)$  est le déphasage produit par  $V(r)$  et défini comme étant le complément du déphasage coulombien au déphasage total. Dans le cas  $\pi^-$ -noyau:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\beta}{2k}, \quad \beta = -\frac{2\tilde{\mu} Z e^2}{\hbar^2}, \quad p_l(\alpha) = \frac{2\alpha 2^{2l}}{(2l)!(2l+1)!} \prod_{s=1}^l (s^2 + \alpha^2), \\ C_0^2(\alpha) &= \frac{2\pi\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1}, \quad h(\alpha) = \frac{1}{2} [\psi(i\alpha) + \psi(-i\alpha)] - \ln(-\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$\psi$ : fonction di-gamma

où  $k$  représente l'impulsion du pion dans le centre de mass,  $\tilde{\mu}$  la masse réduite du pion et  $Z$  la charge du noyau.

Soulignons que cette fonction de portée effective, de même que le déphasage  $\delta_l^c$ , est caractéristique de  $V(r)$  en présence du potentiel coulombien. La façon dont elle tend vers sa limite non coulombienne ( $\beta \rightarrow 0$ )

$$Z(l, k^2) = \frac{k^{2l+1} \cotg \delta_l(k)}{[(2l+1)!!]^2}$$

est difficile à évaluer sans modèle précis pour  $V(r)$ . Pourtant la connaissance de cette limite est importante pour nous car, en toute rigueur, c'est elle qui sera comparable aux résultats théoriques du chapitre IV. Nous négligeons ce point ici et y reviendrons dans un travail subséquent.

Mentionnons encore le caractère non univoque du calcul nous ayant conduit à (3.1). En principe toute fonction méromorphe en  $k^2$  possédant la même limite non coulombienne conviendrait également comme fonction de portée effective. Ce ne sont que des arguments de simplicité qui ont guidé notre choix.

Soit maintenant  $(n, l)$  un état lié du système correspondant à une impulsion  $k_{n,l}$ . A ce moment  $\cotg \delta_l^c(k_{n,l}) = i$  et il vient par définition de la longueur de diffusion  $A_l^c$  et de la portée effective  $R_l^c$ :

$$\begin{aligned} Z^c(l, k_{n,l}^2) &= \frac{p_l(\alpha_{n,l})}{2\alpha_{n,l}(2l+1)} k_{n,l}^{2l+1} [i C_0^2(\alpha_{n,l}) + 2\alpha_{n,l} h(\alpha_{n,l})] \\ &= -\frac{1}{A_l^c} + \frac{R_l^c}{2} k_{n,l}^2 + O(k_{n,l}^4) \end{aligned} \quad (3.3)$$

les indices supérieurs  $c$  signifiant que ces grandeurs sont toujours relatives au potentiel  $V(r)$  en présence du potentiel coulombien. Dans le domaine d'énergie où nous nous trouvons

$$|k_{1s}| \simeq \frac{Z}{200} \text{ (fm}^{-1}\text{)}$$

il est certainement justifié de négliger les termes de  $O(k_{1s}^2)$  dans le développement (3.3). Nous vérifierons en effet à posteriori que:

$$|Z^c(1, k_{1s}^2)| \gg \left| \frac{1}{2} R_1^c k_{1s}^2 \right| \simeq 10^{-5} Z^{7/3} \text{ (fm}^{-1}\text{)} \quad (3.4)$$

si l'on admet  $R_1^c$  de l'ordre de grandeur du noyau. Cette hypothèse sera également faite pour les états supérieurs  $n \geq 2$ .

Une approximation supplémentaire revenant à développer  $Z^c(l, k_{n,l}^2)$  au voisinage de l'état lié purement coulombien correspondant et à se limiter au premier ordre conduit à la relation [1]

$$\frac{\Delta E_{n,l}}{E_{n,l}^c} = \frac{1}{[(2l+1)!!]^2} \frac{4}{n} \prod_{s=1}^l \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{n^2} \right) \left( \frac{\beta}{2} \right)^{2l+1} A_l^c \quad (3.5)$$

où  $E_{n,l}^c$  est l'énergie de l'état lié purement coulombien et  $\Delta E_{n,l}$  le déplacement de cette énergie dû au potentiel additionnel. La simplicité de cette relation est à souligner. Ericson [12] l'obtient de façon très directe en calculant l'amplitude de diffusion et  $\Delta E_{n,l}$  en première approximation de Born.

Le passage de (3.3) à (3.5) revient essentiellement à se limiter au premier ordre en  $A_l^c/(R_n^B)^{2l+1}$  ce qui n'est pas suffisant pour  $l=0$ . C'est donc de la première de ces relations que nous partirons pour la détermination des longueurs de diffusion.

#### b) Détermination des longueurs de diffusion

L'énergie  $E_{n,l}$  à introduire dans (3.3) est une énergie non relativiste puisque la théorie conduisant à cette relation est basée sur l'équation de Schrödinger. Sa valeur se calcule à partir de l'énergie non relativiste du niveau purement coulombien  $E_{n,l}^{\text{Sch}}$  en ajoutant le déplacement et la largeur du niveau correspondant produits par l'interaction forte. Pour la détermination de ce déplacement nous procédons de façon standard à partir de l'énergie expérimentale de la transition  $E_{(n+1, l+1) \rightarrow (n, l)}^{\text{exp}}$ : nous négligeons l'influence de l'interaction forte sur le niveau supérieur et corrigeons les énergies de Klein-Gordon des niveaux des effets de la polarisation du vide et de la charge étendue du noyau.

Ainsi:

$$\begin{aligned} \Delta E_{n,l}^{\text{int. forte}} &= (E_{n+1, l+1}^{\text{KG}} - E_{n,l}^{\text{KG}}) + (\Delta E_{n+1, l+1}^{\text{PV}} - \Delta E_{n,l}^{\text{PV}}) \\ &+ (\Delta E_{n+1, l+1}^{\text{CE}} - \Delta E_{n,l}^{\text{CE}}) - E_{(n+1, l+1) \rightarrow (n, l)}^{\text{exp}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

et

$$E_{n,l} = E_{n,l}^{\text{Sch}} + \Delta E_{n,l}^{\text{int. forte}} - i \frac{\Gamma_{n,l}}{2}. \quad (3.7)$$

D'autre part, et de façon à obtenir des longueurs de diffusion directement comparables à celles issues d'expériences de diffusion  $\pi^-$ -noyau où l'influence d'un potentiel coulombien ponctuel a été soustraite, nous avons fait un second calcul en incluant l'effet de charge étendue à celui de l'interaction forte.

Les corrections mentionnées ci-dessus ont été traitées indépendamment ce qui correspond à un premier ordre de perturbation. Krell et Ericson [13] justifient cette

approximation pour l'effet de la polarisation du vide en regard de celui de l'interaction forte. D'autre part, les résultats de Pustovalov [14] montrent une influence négligeable de la charge étendue sur la polarisation du vide pour les atomes en question compte tenu de l'actuelle précision expérimentale.

Pour le calcul de la correction de polarisation du vide relative à une charge ponctuelle, nous avons utilisé et étendu à  $n = 4,5$  la méthode de Pustovalov. Cette dernière revient, en bref, à traiter en approximation de Born le potentiel issu des corrections radiatives.

Quant à l'effet de charge étendue, il en a été tenu compte en résolvant exactement l'équation de Schrödinger pour une densité de charge constante.

### c) Résultats

Les valeurs des longueurs de diffusion ainsi extraites de l'expérience sont données dans les tables 1 à 4. Sur les figures 1 et 2 nous les avons représentées pour  $l = 0, 1$ . Les signes des parties réelles traduisent le caractère répulsif dans l'état  $s$  et attractif pour  $l \geq 1$  de l'interaction forte.

Avec Krell [13] nous remarquons une dépendance en isospin bien marquée et une croissance assez régulière des longueurs de diffusion  $s$ .

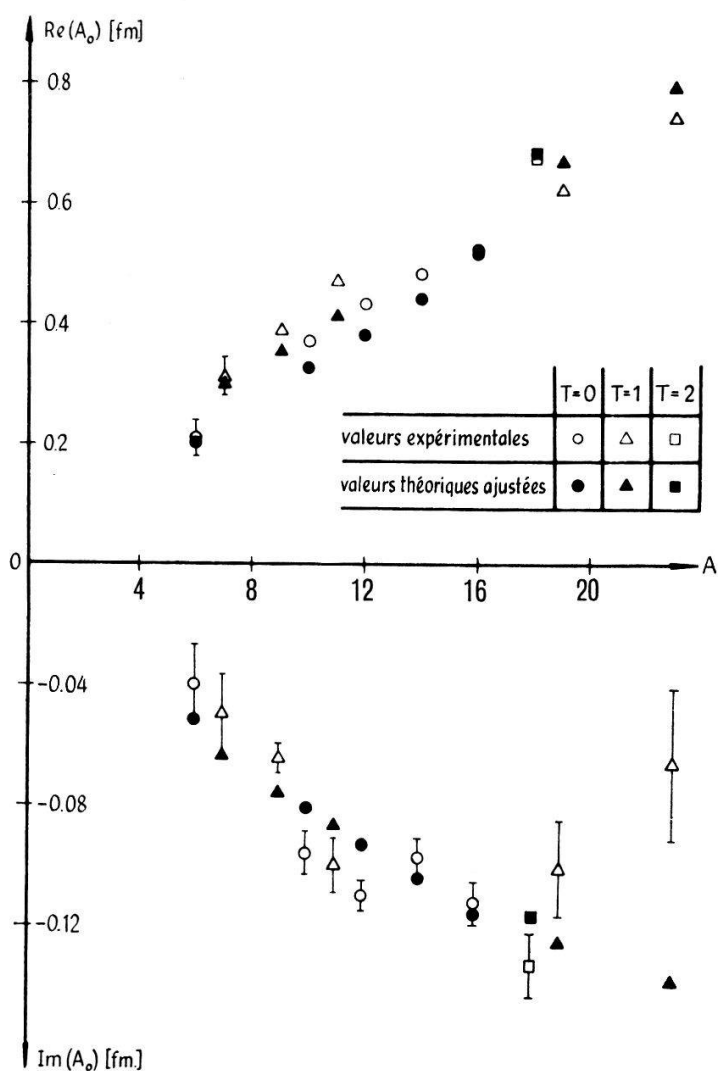


Figure 1  
Longueurs de diffusion  $s$  théoriques et expérimentales, effet de charge étendue inclus.

Pour de grands  $A$  les longueurs de diffusion  $p$  ont tendance à devenir positives. En première analyse deux causes peuvent être invoquées pour expliquer ce fait:

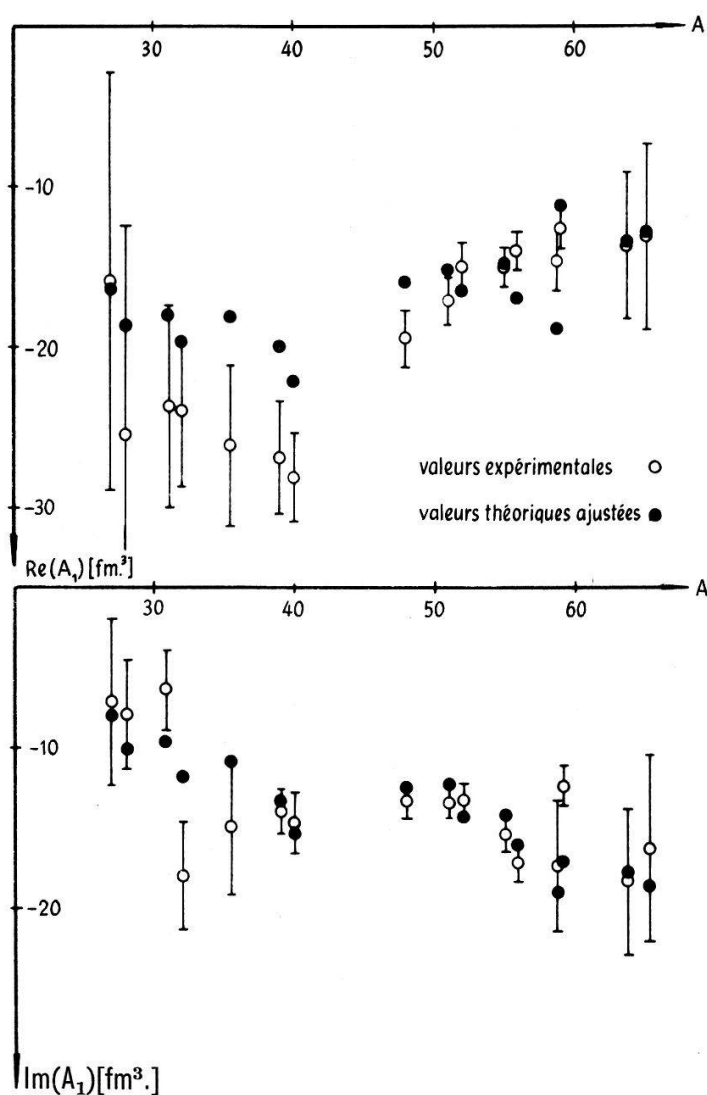


Figure 2  
Longueurs de diffusion  $p$  théoriques et expérimentales, effet de charge étendue inclus.

1. Microscopiquement le pion dans un état  $p$  par rapport au noyau paraîtra, lorsque la taille de ce dernier augmente, dans un état relatif  $s$  pour un nombre croissant de nucléons. Ainsi on peut s'attendre à une certaine «contribution  $s$ » (positive) aux longueurs de diffusion  $p$  pour des noyaux étendus.
2. De tels noyaux ayant un fort excès de neutrons on peut attendre une contribution positive importante de l'isospin dans cette région, en regard de son effet sur les longueurs de diffusion  $s$ .

Pour des  $l$  plus élevés, la variation relative du nombre de nucléons est faible dans les domaines explorés. L'importance des barres d'erreur est d'autre part telle que nous ne pouvons pas nous livrer à des considérations de ce type. Les valeurs indiquées dans les tables 3 et 4 doivent être plutôt considérées comme des ordres de grandeur et nous ne les analyserons pas par la suite.

Table 3  
Longueurs de diffusion  $d$  expérimentales.

Réf.	Noyau	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ [fm]	$E_{4f \rightarrow 3d}^{\text{exp}}$ [keV]	$\Gamma_{3d}^{\text{exp}}$ [keV]	$10^{-3} \cdot \text{Re}(A_2^c)^a$ [fm <sup>5</sup> ]	$10^{-3} \cdot \text{Re}(A_2^c)^b$ [fm <sup>5</sup> ]	$10^{-3} \cdot \text{Im}(A_2^c)^{a)b}$ [fm <sup>5</sup> ]
[6]	<sup>89</sup> Y	4,29	278,2 ± 0,3	0,8 ± 0,6	-4,4 ± 2,0	-4,4	-2,6 ± 2,0
[6]	<sup>93</sup> Nb	4,35	307,6 ± 0,3	0,6 ± 0,4	-2,8 ± 1,4	-2,7	-1,4 ± 0,9
[6]	<sup>103</sup> Rh	4,50	370,9 ± 0,4	1,2 ± 0,6	-0,9 ± 1,0	-0,8	-1,5 ± 0,7
[9]	In	4,58	442,9 ± 0,5	2,6 ± 0,6	-3,6 ± 0,7	-3,5	-1,7 ± 0,4
[6]	<sup>116</sup> Sn	4,61	460,9 ± 0,6	1,9 ± 1,2	-2,7 ± 0,7	-2,6	-1,1 ± 0,7
[6]	<sup>117</sup> Sn	4,62	460,4 ± 0,6	2,1 ± 1,2	-2,1 ± 0,7	-2,0	-1,2 ± 0,7
[6]	<sup>118</sup> Sn	4,63	460,4 ± 0,6	2,5 ± 1,2	-2,1 ± 0,7	-2,0	-1,5 ± 0,7
[6]	<sup>119</sup> Sn	4,65	460,3 ± 0,6	1,9 ± 1,2	-2,0 ± 0,7	-1,9	-1,1 ± 0,7
[6]	<sup>120</sup> Sn	4,66	460,5 ± 0,6	2,7 ± 1,2	-2,2 ± 0,7	-2,1	-1,6 ± 0,7
[6]	<sup>122</sup> Sn	4,68	460,3 ± 0,6	2,0 ± 1,2	-1,9 ± 0,7	-1,8	-1,2 ± 0,7
[6]	<sup>124</sup> Sn	4,71	460,2 ± 0,6	2,3 ± 1,2	-1,8 ± 0,7	-1,7	-1,3 ± 0,7
[9]	<sup>127</sup> I	4,75	520,8 ± 0,8	4,4 ± 1,5	-3,6 ± 0,6	-3,5	-1,7 ± 0,6
[9]	<sup>133</sup> Cs	4,82	562,0 ± 1,5	3,3 ± 1,5	-3,4 ± 0,9	-3,3	-1,0 ± 0,4
[9]	La	4,85	604,9 ± 2,0	6,2 ± 2,0	-3,1 ± 0,9	-3,0	-1,4 ± 0,5
[6]	<sup>140</sup> Ce	4,90	626,1 ± 2,0	5,8 ± 3,8	-2,6 ± 0,8	-2,5	-1,2 ± 0,8
[9]	<sup>141</sup> Pr	4,88	648,1 ± 2,0	5,4 ± 2,5	-2,4 ± 0,7	-2,3	-1,0 ± 0,5

a)b) Voir table 1.

Table 4  
Longueurs de diffusion  $f$  expérimentales.

Réf.	Noyau	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ [fm]	$E_{5g \rightarrow 4f}^{\text{exp}}$ [keV]	$\Gamma_{4f}^{\text{exp}}$ [keV]	$10^{-5} \cdot \text{Re}(A_3^c)^a$ [fm <sup>7</sup> ]	$10^{-5} \cdot \text{Re}(A_3^c)^b$ [fm <sup>7</sup> ]	$10^{-5} \cdot \text{Im}(A_3^c)^{a)b}$ [fm <sup>7</sup> ]
[9]	<sup>181</sup> Ta	5,47	453,90 ± 0,20	0,5 ± 0,2	-8,1 ± 1,9	-8,0	-2,4 ± 1,0
[9]	Pt	5,52	519,34 ± 0,24	1,8 ± 1,0	-5,7 ± 1,3	-5,6	-4,8 ± 2,7
[9]	<sup>197</sup> Au	5,43	533,16 ± 0,20	1,1 ± 0,3	-6,1 ± 1,0	-6,1	-2,4 ± 0,7
[9]	Hg	5,47	547,14 ± 0,25	1,4 ± 0,5	-6,4 ± 1,1	-6,3	-3,0 ± 1,1
[9]	Tl	5,48	561,67 ± 0,25	1,0 ± 0,2	-7,9 ± 1,0	-7,8	-1,9 ± 0,4
[9]	<sup>206</sup> Pb	5,49	575,62 ± 0,30	1,2 ± 0,4	-6,4 ± 1,0	-6,3	-2,1 ± 0,7
[9]	Pb	5,49	575,56 ± 0,25	1,1 ± 0,3	-6,2 ± 0,9	-6,1	-1,9 ± 0,5
[9]	Bi	5,52	590,06 ± 0,30	1,7 ± 0,5	-6,1 ± 0,9	-6,0	-2,6 ± 0,8
[6]	<sup>232</sup> Th	5,71	698,0 ± 0,6	6,0 ± 0,9	-6,6 ± 0,9	-6,5	-4,4 ± 0,7
[6]	<sup>238</sup> U	5,75	731,4 ± 1,1	6,1 ± 1,0	-7,3 ± 1,3	-7,2	-3,7 ± 0,6
[6]	<sup>239</sup> Pu	5,76	766,2 ± 1,6	9,1 ± 2,5	-8,2 ± 1,6	-8,1	-4,6 ± 1,3

a)b) voir table 1.

#### IV. Théorie microscopique des longueurs de diffusion $\pi$ -noyau

Soit  $F(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$  l'amplitude de diffusion élastique  $\pi^-$ -noyau dans le centre de masse où  $\mathbf{k}_i$  et  $\mathbf{k}_f$  représentent les impulsions initiale et finale du pion dans ce système. Développée en ondes partielles cette amplitude s'écrit:

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) &= \sum_l \frac{2l+1}{k} e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\hat{\mathbf{k}}_f \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \\
 &= \sum_l \frac{(2l+1) k^{2l}}{[(2l+1)!!]^2 Z(l, k^2) - i k^{2l+1}} P_l(\hat{\mathbf{k}}_f \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \\
 &= -A_0 + i k A_0^2 - \frac{1}{3} A_1 \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_f + A_0^2 \left( A_0 - \frac{R_0}{2} \right) k^2 + O(k^3) \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les définitions

$$\frac{k^{2l+1} \cotg \delta_l}{[(2l+1)!!]^2} = Z(l, k^2) = -\frac{1}{A_l} + \frac{1}{2} R_l k^2 + O(k^4).$$

(4.1) nous montre la façon d'extraire les longueurs de diffusion  $\pi$ -noyau  $s$  et  $p$ , puisque seules celles-ci nous intéressent ici, de l'amplitude. Ce sont en effet les coefficients, à un facteur près, des termes constant et en  $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_f$ .

En approximation non relativiste cette amplitude est liée à la matrice  $T$  par [15]:

$$T(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\mu + M}{\mu \cdot M} F(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i). \quad (4.2)$$

Cherchant à relier cette matrice à la diffusion  $\pi$ -nucléon, rappelons quelques aspects de cette dernière. Aux basses énergies et dans le centre de masse du système cette diffusion élastique est très bien décrite par l'amplitude

$$f(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = b_0 + b_1 \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau} + (c_0 + c_1 \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau}) \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_f + i (d_0 + d_1 \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{k}_i \wedge \mathbf{k}_f) \quad (4.3)$$

où  $\mathbf{t}$  est l'opérateur d'isospin du pion,  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\tau}$  les opérateurs de spin et d'isospin du nucléon. Cette expression s'obtient aisément à partir du développement limité aux ondes partielles  $s$  et  $p$  en projetant sur les états de moment angulaire total et d'isospin total définis puisque ces valeurs sont conservées.

Les paramètres de (4.3) sont liés aux longueurs de diffusion  $\pi$ -nucléon

$$a_{2T, 2J}^l = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{e^{i\delta_{2T, 2J}^l} \sin \delta_{2T, 2J}^l}{k^{2l+1}}.$$

On a [16] les relations et les valeurs expérimentales suivantes:

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{3} (a_{11}^0 + 2 a_{31}^0) = (-0,012 \pm 0,004) \mu^{-1} \\ b_1 &= \frac{1}{3} (a_{31}^0 - a_{11}^0) = (-0,097 \pm 0,007) \mu^{-1} \\ c_0 &= \frac{1}{3} (a_{11}^1 + 2 a_{31}^1 + 2 a_{13}^1 + 4 a_{33}^1) = (0,208 \pm 0,008) \mu^{-3} \\ c_1 &= \frac{1}{3} (-a_{11}^1 + a_{31}^1 - 2 a_{13}^1 + 2 a_{33}^1) = (0,180 \pm 0,005) \mu^{-3} \\ d_0 &= \frac{1}{3} (a_{11}^1 - a_{13}^1 + 2 a_{31}^1 - 2 a_{33}^1) = (-0,193 \pm 0,005) \mu^{-3} \\ d_1 &= \frac{1}{3} (-a_{11}^1 + a_{13}^1 + a_{31}^1 - a_{33}^1) = (-0,060 \pm 0,004) \mu^{-3} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

L'élément de matrice  $t$  lié à cette amplitude est donné, de façon semblable à (4.2), par:

$$t(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\mu + m}{\mu \cdot m} f(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i). \quad (4.5)$$



Retournons maintenant à la diffusion  $\pi$ -noyau. Dans le centre de masse cette diffusion est gouvernée par l'équation de Lippmann-Schwinger qui peut s'écrire sous la forme:

$$|\psi\rangle = |\varphi\rangle + G T |\varphi\rangle \quad (4.6)$$

où  $|\varphi\rangle$  est l'état initial de notre système, c'est-à-dire le produit de l'onde plane du pion incident et de la fonction d'onde du noyau dans son état fondamental, et  $|\psi\rangle$  l'état complet du système après diffusion.  $G$  est le propagateur retardé:

$$G = (\varepsilon_\pi + E_0 - H + i\eta)^{-1} \quad (4.7)$$

avec  $\varepsilon_\pi$  = énergie cinétique du pion incident,

$E_0$  = énergie de l'état fondamental du noyau,

$H$  = hamiltonien du noyau + opérateur d'énergie cinétique du pion.

Soit maintenant  $\tilde{t}_j$  la matrice décrivant la diffusion du pion sur le  $j^{\text{ième}}$  nucléon lié du noyau. En suivant [15] nous avons

$$|\psi\rangle = |\varphi\rangle + \sum_{j=1}^A G \tilde{t}_j |\psi_j\rangle \quad (4.8)$$

décrivant que l'onde complète est somme de l'onde incidente et des ondes diffusées par  $A$  centres de diffusion.  $|\psi_j\rangle$  représente l'onde incidente effective lors de la  $j^{\text{ième}}$  diffusion et est donnée de façon similaire à (4.8) par

$$|\psi_j\rangle = |\varphi\rangle + \sum_{l \neq j} G \tilde{t}_l |\psi_{j,l}\rangle. \quad (4.9)$$

Portant cette équation dans (4.8) et itérant on obtient

$$|\psi\rangle = |\varphi\rangle + G \left[ \sum_{j=1}^A \tilde{t}_j + \sum_{j, l=1}^A \tilde{t}_j G \tilde{t}_l + \dots \right] |\varphi\rangle$$

c'est-à-dire

$$T = \sum_{j=1}^A \tilde{t}_j + \sum_{j, l=1}^A \tilde{t}_j G \tilde{t}_l + \dots \stackrel{\text{p. d.}}{=} T^{(1)} + T^{(2)} + \dots \quad (4.10)$$

termes correspondant aux contributions de diffusion simple, double, etc.

Par la suite nous ferons les approximations suivantes:

1. Nous négligerons les contributions de diffusion triple et supérieures. Ceci est justifié priori par la présence d'absorption pour les pions dans le noyau. La diffusion double doit être prise en considération à cause de la forte suppression d'onde  $s$  en diffusion simple (petitesse du paramètre  $b_0$ ).

Comme nous désirons tenir compte de façon semi-phénoménologique de la diffusion  $\pi$ -nucléon, c'est-à-dire en prenant la forme (4.3) pour l'amplitude de diffusion mais en laissant les paramètres libres, nous reporterons dans ces derniers les conséquences des approximations suivantes un peu plus brutales.

2. Nous négligeons l'énergie de liaison des nucléons (approximation d'impulsion) malgré le fait que nous travaillons à des énergies, dans le c.m.  $\pi$ -nucléon, du même ordre de grandeur. Ceci revient à poser

$$\tilde{t} = t.$$

3. Nous admettons que le libre parcours moyen entre deux diffusions est suffisamment grand pour que nous puissions évaluer le propagateur, en diffusion double, sur des états asymptotiques. Ceci signifie également que dans ce cas seules les valeurs sur la couche d'énergie des matrices  $t$  interviendront.

Dans ce travail nous ne nous préoccupons pas des termes de spin ( $d_0$  et  $d_1$  dans (4.3)). Leur effet est une structure hyperfine des niveaux  $l \neq 0$  des atomes  $\pi$ -mésoniques. La précision expérimentale actuelle ne permet pas la mesure de cette structure qui se manifeste par un élargissement (additionnel à celui produit par l'absorption) des transitions  $X$ .

#### a) Contribution de diffusion simple

Soient  $\mathbf{k}_i$ ,  $\mathbf{K}_i$ , respectivement  $\mathbf{k}_f$ ,  $\mathbf{K}_f$  les impulsions initiales et finales du  $\pi^-$  et du noyau dans le laboratoire.  $\alpha$  désignant l'ensemble des nombres quantiques de spin et d'isospin caractérisant l'état fondamental du noyau, l'isospin du  $\pi^-$  étant sous-entendu, nous avons

$$\langle \mathbf{k}_f \mathbf{K}_f \alpha | T^{(1)} | \mathbf{k}_i \mathbf{K}_i \alpha \rangle = \sum_{j=1}^A \langle \mathbf{k}_f \mathbf{K}_f \alpha | t_j | \mathbf{k}_i \mathbf{K}_i \alpha \rangle. \quad (4.11)$$

La conservation de l'impulsion nous permet d'écrire

$$\langle \mathbf{k}_f \mathbf{K}_f \alpha | T^{(1)} | \mathbf{k}_i \mathbf{K}_i \alpha \rangle = T_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i, \mathbf{K}_i) \delta(\mathbf{k}_f + \mathbf{K}_f - \mathbf{k}_i - \mathbf{K}_i) \quad (4.12)$$

et l'on a

$$T_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i, \mathbf{K}_i) = \sum_{j=1}^A \int d^3p P_{\alpha}(\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{p}) \langle \alpha | t_j(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i, \mathbf{p}) | \alpha \rangle. \quad (4.13)$$

$\mathbf{q} = \mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i$  est le transfert d'impulsion et

$$P_{\alpha}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \int d^3p_1 \dots d^3p_j \dots d^3p_A \psi_{\alpha}^*(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}', \dots, \mathbf{p}_A) \psi_{\alpha}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}_A) \quad (4.14)$$

l'amplitude de probabilité de trouver dans le noyau, dans son état fondamental, le  $j^{\text{ième}}$  nucléon avec une impulsion  $\mathbf{p}$  avant diffusion et  $\mathbf{p}'$  après diffusion.

Dans un modèle de particules indépendantes:

$$P_{\alpha}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \frac{1}{A} \sum_{m=1}^A \psi_{\alpha}^{*m}(\mathbf{p}') \psi_{\alpha}^m(\mathbf{p}). \quad (4.15)$$

En approximation non relativiste le passage au centre de masse se fait simplement [15]:

$$t(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i, \mathbf{p}) = t(\mathbf{k}', \mathbf{k})$$

où  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k}'$  sont les impulsions initiale et finale dans ce système, c'est-à-dire explicitement

$$\mathbf{k} = \frac{m \mathbf{k}_i - \mu \mathbf{p}}{m + \mu}, \quad \mathbf{k}' = \frac{m \mathbf{k}_f - \mu (\mathbf{p} - \mathbf{q})}{m + \mu}. \quad (4.16)$$

Ainsi (4.13) devient, en passant aux amplitudes de diffusion, sommant sur  $j$  et calculant les éléments de matrice en isospin:

$$F_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \frac{1 + \mu/m}{1 + \mu/m A} \int d^3p P_{\alpha}(\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{p}) \times \{[b_0 A + b_1 (N - Z)] + [c_0 A + c_1 (N - Z)] \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'\}. \quad (4.17)$$

Si on adopte un modèle nucléaire de particules indépendantes et que l'on passe en représentation  $\mathbf{r}$  cette expression devient:

$$F_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \frac{1 + \mu/m}{1 + \mu/m A} \left\{ \left[ B + C \left( \frac{m}{m + \mu} \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_f - \frac{m \mu}{(m + \mu)^2} k^2 \right) \right] \times \int e^{-i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \varrho(\mathbf{r}) d^3r - C \frac{m \mu}{(m + \mu)^2} (\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f) \cdot \int e^{-i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{X}(\mathbf{r}) d^3r + C \frac{\mu^2}{(m + \mu)^2} \int e^{-i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} Y(\mathbf{r}) d^3r \right\}$$

où  $B = b_0 A + b_1 (N - Z)$ ;  $C = c_0 A + c_1 (N - Z)$ ;

$$\varrho(\mathbf{r}) = \frac{1}{A} \sum_m \varphi_{\alpha}^{*m}(\mathbf{r}) \varphi_{\alpha}^m(\mathbf{r}); \quad \mathbf{X}(\mathbf{r}) = \frac{-i}{A} \sum_m \varphi_{\alpha}^{*m}(\mathbf{r}) \nabla \varphi_{\alpha}^m(\mathbf{r});$$

$$Y(\mathbf{r}) = \frac{1}{A} \sum_m [\nabla \varphi_{\alpha}^{*m}(\mathbf{r})] \cdot \nabla \varphi_{\alpha}^m(\mathbf{r}).$$

En admettant un noyau à couches complètes, le calcul de certains termes se simplifie et on obtient pour la contribution de diffusion simple aux longueurs de diffusion  $s$  et  $p$ :

$$A_0^{(1)} = - \frac{1 + \mu/m}{1 + \mu/m A} \left\{ B + \frac{\mu^2}{(m + \mu)^2} C \langle p^2 \rangle_1 \right\} \quad (4.18)$$

$$A_1^{(1)} = - 3 \frac{1 + \mu/m}{1 + \mu/m A} \left\{ B \frac{\langle r^2 \rangle_1}{3} + \left[ \frac{m}{m + \mu} + \frac{\mu^2}{(m + \mu)^2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \langle p^2 r^2 \rangle_1 \right) \right] C \right\} \quad (4.19)$$

où

$$\langle h \rangle_1 = \int \varrho(\mathbf{r}) h(\mathbf{r}) d^3r.$$

Le premier terme de  $A_0^{(1)}$  est typique de l'approximation de diffusion simple: il est formé de la somme des contributions de chaque nucléon diffusant un pion dans l'état relatif  $s$ . Le second est un terme de mouvement de Fermi. Il fait intervenir la diffusion du pion dans un état  $p$ . Si l'on croit les valeurs des paramètres concernant la diffusion sur un nucléon libre, ce terme est du même ordre de grandeur et de signe opposé au précédent [5].

A côté de petites corrections de mouvement de Fermi, l'expression de  $A_1^{(1)}$  fait apparaître le terme typique auquel s'ajoute une contribution de diffusion  $s$  dépendant

de la taille du noyau. Elle peut devenir prépondérante pour de grands  $A$  et nous voyons apparaître une caractéristique déjà mentionnée des résultats expérimentaux (voir fig. 2).

b) *Contribution de diffusion double*

Utilisant la même notation qu'au paragraphe précédent nous avons

$$\langle \mathbf{k}_f \mathbf{K}_f \alpha | T^{(2)} | \mathbf{k}_i \mathbf{K}_i \alpha \rangle = \sum_{l \neq j} \langle \mathbf{k}_f \mathbf{K}_f \alpha | t_j G t_l | \mathbf{k}_i \mathbf{K}_i \alpha \rangle.$$

Dans le cadre des approximations mentionnées plus haut nous introduisons des projecteurs entre ces opérateurs, projecteurs formés par des états  $|\mathbf{k}' \mathbf{K}' n\rangle$  décrivant un pion libre et le noyau éventuellement excité. Comme  $G$  est diagonal sur de tels états il vient

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_f \mathbf{K}_f \alpha | T^{(2)} | \mathbf{k}_i \mathbf{K}_i \alpha \rangle &= \sum_{\substack{l \neq j \\ n}} \int d^3 k' d^3 K' \\ &\times \frac{\langle \mathbf{k}_f \mathbf{K}_f \alpha | t_j | \mathbf{k}' \mathbf{K}' \alpha \rangle \langle \mathbf{k}' \mathbf{K}' \alpha | t_l | \mathbf{k}_i \mathbf{K}_i \alpha \rangle}{\varepsilon_{k_i} - \varepsilon_{k'} + E_\alpha - E_n + i\eta}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

On se convainc facilement [5] que les seuls états intermédiaires intervenant sont ceux ayant les mêmes nombres quantiques que l'état fondamental. Nous pouvons alors écrire, utilisant encore la conservation de l'impulsion:

$$\begin{aligned} T_\alpha^{(2)}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i, \mathbf{K}_i) &= \sum_{l \neq j} \int d^3 k' d^3 p_1 d^3 p_2 P_\alpha(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \\ &\times \frac{\langle \alpha | t_j(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}', \mathbf{p}_1) t_l(\mathbf{k}', \mathbf{k}_i, \mathbf{p}_2) | \alpha \rangle}{\varepsilon_{k_i} - \varepsilon_{k'} + i\eta}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dans cette expression

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{k}_f - \mathbf{k}'; \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{k}' - \mathbf{k}_i$$

sont les transferts d'impulsion partiels et

$$\begin{aligned} P_\alpha(\mathbf{p}', \mathbf{q}'; \mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \int d^3 p_1 \dots \hat{d}^3 p_j \dots \hat{d}^3 p_l \dots d^3 p_A \\ &\times \psi_\alpha^*(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}', \dots, \mathbf{q}', \dots, \mathbf{p}_A) \psi_\alpha(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}, \dots, \mathbf{q}, \dots, \mathbf{p}_A) \end{aligned} \quad (4.22)$$

l'amplitude de probabilité de trouver dans l'état fondamental du noyau les  $j^{\text{ième}}$  et  $l^{\text{ième}}$  nucléons avec des impulsions  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  avant diffusion, respectivement  $\mathbf{p}'$  et  $\mathbf{q}'$  après diffusion.

Le passage aux centres de masse puis aux amplitudes de diffusion nous permet d'écrire (4.21) sous la forme équivalente

$$\begin{aligned} F_\alpha^{(2)}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) &= - \frac{1}{\mu(2\pi)^2} \frac{(1 + \mu/m)^2}{1 + \mu/m A} \sum_{l \neq j} \int d^3 k' d^3 p_1 d^3 p_2 \\ &\times P_\alpha(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \frac{\langle \alpha | f_j(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1') f_l(\mathbf{k}_2', \mathbf{k}_2) | \alpha \rangle}{\varepsilon_{k_i} - \varepsilon_{k'} + i\eta} \end{aligned} \quad (4.23)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \frac{m \mathbf{k}_f - \mu (\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1)}{m + \mu}, & \mathbf{k}'_1 &= \frac{m \mathbf{k}' - \mu \mathbf{p}_1}{m + \mu}, \\ \mathbf{k}'_2 &= \frac{m \mathbf{k}' - \mu (\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2)}{m + \mu}, & \mathbf{k}_2 &= \frac{m \mathbf{k}_i - \mu \mathbf{p}_2}{m + \mu}. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Le calcul de l'élément de matrice donne, après sommation,

$$\sum_{l \neq j} \langle \alpha | f_j(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'_1) f_l(\mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_2) | \alpha \rangle = D^{ss} + D^{sp} (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}'_2) + D^{pp} (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}'_1) (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}'_2)$$

où

$$\begin{aligned} D^{ss} &= A (A - 1) \left[ b_0^2 + 2 b_0 b_1 \frac{N - Z}{A} + b_1^2 \frac{(N - Z)^2 - A}{A (A - 1)} \right], \\ D^{sp} &= A (A - 1) \left[ b_0 c_0 + (b_0 c_1 + b_1 c_0) \frac{N - Z}{A} + b_1 c_1 \frac{(N - Z)^2 - A}{A (A - 1)} \right], \\ D^{pp} &= A (A - 1) \left[ c_0^2 + 2 c_0 c_1 \frac{N - Z}{A} + c_1^2 \frac{(N - Z)^2 - A}{A (A - 1)} \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

les indices supérieurs rappelant le genre des deux diffusion successives  $\pi$ -nucléon.

#### b1) Contribution $s s$

Nous passons en représentation  $r$  pour rendre les expressions plus significatives et prenons le modèle nucléaire des particules indépendantes. Après intégration sur  $\mathbf{k}'$ , (4.23) nous livre pour cette partie:

$$F_{\alpha}^{(2)ss}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \frac{(1 + \mu/m)^2}{1 + \mu/m A} D^{ss} \int d^3 r_1 d^3 r_2 \frac{e^{i \mathbf{k} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_2 - \mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}_1)} \varrho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (4.26)$$

où  $\varrho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  est la densité à deux particules normée à 1 et s'exprimant à l'aide de la fonction à 4 points de la façon suivante:

$$\varrho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (4.27)$$

$$g(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{A}{A - 1} \left[ g(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_1) g(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}_2) - \frac{1}{4} g(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}_1) g(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2) \right]. \quad (4.28)$$

Le facteur 1/4 dans le terme d'échange est dû au fait que la corrélation a lieu seulement si les spins et les isospins des nucléons considérés sont les mêmes et que nous avons admis ici  $N = Z = A/2$ . L'approximation de la matière nucléaire locale (L.D.A.) [17] que nous ferons revient à prendre

$$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \varrho(R) \frac{3 j_1(K_F(R) r)}{K_F(R) r} = g(r, R), \quad (4.29)$$

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}; \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

où

$$K_F^3(R) = \frac{3\pi^2}{2} \varrho(R) A \quad (4.30)$$

est l'impulsion de Fermi correspondant à de la matière nucléaire de densité  $\varrho(R) \cdot A$  ( $\varrho$  est de norme 1). De façon à simplifier les calculs nous prendrons un  $\varrho(r)$  gaussien. Ainsi  $\varrho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  ne dépendra que des modules de  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{R}$ :

$$\varrho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \varrho(r, R).$$

En passant à ces coordonnées et aux impulsions

$$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f}{2}; \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i$$

nous pouvons écrire (4.26) sous la forme

$$F_{\alpha}^{(2)ss}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \frac{(1 + \mu/m)^2}{1 + \mu/m A} D^{ss} \int d^3R d^3r \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} e^{-i[\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{R}]} \varrho(r, R). \quad (4.31)$$

Nous obtenons ainsi les contributions suivantes aux longueurs de diffusion:

$$A_0^{(2)ss} = - \frac{(1 + \mu/m)^2}{1 + \mu/m A} D^{ss} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_2 \quad (4.32)$$

$$A_1^{(2)ss} = - \frac{(1 + \mu/m)^2}{1 + \mu/m A} D^{ss} \left[ \left\langle \frac{R^2}{r} \right\rangle_2 - \frac{1}{4} \langle r \rangle_2 \right] \quad (4.33)$$

expressions dans lesquelles les valeurs moyennes  $\langle \dots \rangle_2$  s'entendent naturellement avec la densité à deux particules.

## b2) Contribution $sp$

Quelques calculs, et dans les mêmes notations que (4.31), conduisent à

$$F_{\alpha}^{(2)sp}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \frac{(1 + \mu/m)^2}{1 + \mu/m A} D^{sp} \int d^3R d^3r \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} e^{-i[\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{R}]} \\ \times \left\{ \frac{\mu^2}{(m + \mu)^2} Y(r, R) - \frac{2m\mu}{(m + \mu)^2} \left[ k^2 - \left( 1 + \frac{m}{\mu} \right) \left( k + \frac{i}{r} \right) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{Q}}{r} \right] \varrho(r, R) \right\} \quad (4.34)$$

avec

$$Y(r, R) = \int d^3r'_1 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) \nabla_{\mathbf{r}_1} \nabla_{\mathbf{r}'_1} g(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ + \int d^3r'_2 \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2) \nabla_{\mathbf{r}_2} \nabla_{\mathbf{r}'_2} g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2).$$

La plupart des termes de (4.34) sont des termes de recul, celui associé à  $Y$  étant de plus lié au mouvement de Fermi des nucléons. En faisant usage de (4.29),  $Y$  se laisse écrire sous la forme

$$Y(r, R) = \left( \frac{1}{4} \Delta_{\mathbf{R}} + \Delta_{\mathbf{r}} \right) \left[ \varrho(r, R) - \frac{A}{2(A-1)} \varrho(r_1) \varrho(r_2) \right] \\ + \frac{3}{5} \frac{A}{A-1} \varrho(r_1) \varrho(r_2) [K_F^2(r_1) + K_F^2(r_2)] + \frac{A}{2(A-1)} g(r, R) \left[ \frac{1}{4} \Delta_{\mathbf{R}} + \Delta_{\mathbf{r}} \right] g(r, R).$$



Avec une densité illimitée (gaussienne) le dernier terme donne une contribution formellement divergente à (4.34). Ceci vient de la surestimation, en L.D.A., de la corrélation à longue distance pour des nucléons ayant leur centre de masse dans une région de faible densité [17].

Un calcul plus réaliste avec une fonction de corrélation judicieusement pondérée

$$\tilde{g}(r, R) = f(r) g(r, R)$$

a montré que la contribution de ce terme aux longueurs de diffusion n'excédait pas 10% des précédents, déjà correctifs puisqu'en  $(\mu/(m + \mu))^2$ . Nous le négligeons dès maintenant. Pour ce calcul  $f(r)$  fut choisie de façon à ne pas modifier essentiellement la corrélation dans le domaine où elle est significative (fig. 3).

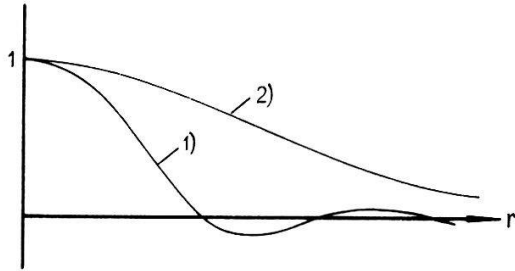


Figure 3  
Fonctions de corrélation et de pondération:  
1.  $g(r, 0)/\varrho(0)$ ; 2.  $f(r)$ .

Explicitement (4.29) a été pondérée en substituant

$$\varrho(R) \rightarrow [\varrho(r_1) \varrho(r_2)]^{1/2} = \varrho(R) f(r).$$

Tous calculs faits on obtient pour finir de (4.34)

$$A_0^{(2)sp} = \frac{(1 + \mu/m)^2}{1 + \mu/m A} D^{sp} \frac{\mu^2}{(m + \mu)^2} \frac{A}{A - 1} \times \left[ \pi \langle \varrho \rangle_1 - \int d^3R d^3r \frac{\varrho(r_1) \varrho(r_2)}{r} \frac{3}{5} (K_F^2(r_1) + K_F^2(r_2)) \right] \quad (4.35)$$

$$A_1^{(2)sp} = - \frac{(1 + \mu/m)^2}{1 + \mu/m A} D^{sp} \left\{ \left( \frac{m}{m + \mu} + \frac{\mu^2}{(m + \mu)^2} \right) \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_2 + \frac{\mu^2}{(m + \mu)^2} \frac{A}{A - 1} \left[ - \frac{\sqrt{2}}{4} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_1 - \pi \langle \varrho r^2 \rangle_1 + \int d^3R d^3r \left( \frac{R^2}{r} - \frac{r}{4} \right) \varrho(r_1) \varrho(r_2) \frac{3}{5} (K_F^2(r_1) + K_F^2(r_2)) \right] \right\}. \quad (4.36)$$

### b3) Contribution $p\bar{p}$

On peut voir, après quelques calculs simples que nous ne reproduirons pas ici, que seuls des termes en  $(\mu/m)^4$  apportent une correction aux longueurs de diffusion  $s$  et  $\bar{p}$ . Nous les négligerons donc dans ce travail.

### c) Absorption

La théorie développée plus haut ne tient aucun compte de la probabilité d'absorption du pion par le noyau. Nous ne l'avons mentionnée que pour négliger les termes de diffusion triple, etc.

L'étude théorique de ce phénomène est un domaine en soi et, malgré le grand nombre de travaux s'y rapportant, encore partiellement ouvert [18].

Il est connu que, pour de simples raisons cinématiques, l'absorption d'un pion lent sur un nucléon

$$\pi + N \rightarrow N$$

est très improbable avec les impulsions nucléoniques à disposition dans le noyau. C'est par conséquent le processus d'absorption sur une paire de nucléons qui joue le rôle fondamental. La plupart des auteurs partent donc d'un modèle nucléaire en amas de deux nucléons, amas avec lesquels le pion interagit directement.

Dans le cadre de la théorie ci-dessus, on serait tenté d'introduire l'absorption dans la diffusion double en prenant des paramètres  $\pi$ -nucléon complexes à cet endroit: le pion après diffusion sur un premier nucléon est absorbé par un second. En admettant nos relations valables, malgré la nécessité cinématique d'un état intermédiaire excité pour le noyau et hors couche de masse pour le pion, on se heurte à la nature cohérente de la diffusion double. Les phases relatives des ondes formant l'onde incidente sur le second nucléon pourraient être telles qu'il faille admettre émission de pions par ce nucléon pour décrire une absorption globale!

Le but de ce travail n'étant pas une étude de l'absorption, nous avons adopté un point de vue radicalement phénoménologique à son sujet en admettant des valeurs complexes pour les paramètres  $\pi$ -nucléon dans l'ensemble de notre théorie.

#### d) Comparaison avec les résultats expérimentaux et conclusion

Des relations (4.18), (4.32), (4.35) et (4.19), (4.33), (4.36) nous obtenons dans nos approximations les longueurs de diffusion théoriques  $s$  et  $p$ :

$$A_0 = A_0^{(1)} + A_0^{(2)ss} + A_0^{(2)sp}, \quad A_1 = A_1^{(1)} + A_1^{(2)ss} + A_1^{(2)sp}. \quad (4.37)$$

Pour le calcul des valeurs moyennes figurant dans ces expressions nous avons adopté une densité nucléaire gaussienne de rayon quadratique moyen donné dans les tables 1 et 2. Ces rayons sont, pour la plupart, extraits de Landolt et Börnstein [19]. Parmi les valeurs indiquées dans cet ouvrage nous avons choisi les plus précises entre les résultats de diffraction des électrons et ceux d'atomes muoniques. Les rayons non tabulés ont été déterminés par la loi  $r_0 A^{1/3}$  avec  $r_0$  correspondant aux noyaux voisins figurant dans ces tables.

L'ajustement de nos longueurs de diffusion théoriques aux valeurs expérimentales  $A_i^e$  (corrigées de l'effet de charge étendue) nous a donné l'ensemble de paramètres

$$\begin{aligned} b_0 &= (-0,0193 + i 0,0052) \mu^{-1} & c_0 &= (0,125 + i 0,034) \mu^{-3} \\ b_1 &= (-0,0511 + i 0,0096) \mu^{-1} & c_1 &= (-i 0,22) \mu^{-3}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Nous n'indiquons pas la valeur de  $\text{Re}(c_1)$  celle-ci n'ayant pratiquement aucune influence sur la qualité de l'ajustement.

Les longueurs de diffusions théoriques correspondantes, augmentées de l'effet coulombien de rayon fini, sont représentées dans les figures 1 et 2.

Malgré la qualité visiblement pas très satisfaisante de cet ajustement l'accord est cependant quantitatif. Le comportement global des longueurs de diffusion expérimentales, effet de l'isospin compris, est bien reproduit.

Sans nous arrêter sur les parties imaginaires de nos paramètres (4.38) nous observons un écart d'un facteur 2 environ entre leurs parties réelles et les valeurs (4.4) provenant de mesures de diffusion  $\pi$ -nucléon. Cet écart ne peut pas être attribué aux parties imaginaires de nos paramètres et implique un caractère déplaisant à notre ajustement: avec les valeurs (4.38) des paramètres  $b_0$  et  $b_1$ , la contribution de diffusion double aux longueurs de diffusion  $s$  n'est que d'environ 10% de la contribution de diffusion simple alors que les valeurs (4.4) donnent des effets à peu près égaux.

Ces faits sont cependant à éclairer par les remarques suivantes. A côté des approximations faites en diffusion multiple et de celles liées à notre modèle nucléaire naïf, il est à rappeler la condition de faible influence coulombienne résiduelle (III.a)) nécessaire pour la comparaison des valeurs expérimentales à celles issues de cette théorie. La validité de cette condition peut être mise sérieusement en doute pour l'état  $s$  et  $Z > 8$  si l'on croit le calcul de Seki [4] qui trouve une correction positive aux longueurs expérimentales allant jusqu'à 40% pour  $^{23}\text{Na}$ ! Sans invoquer un ordre de grandeur pareil, un effet de ce type serait suffisant pour améliorer notre ajustement  $s$ , systématiquement trop bas pour  $A < 16$  et trop haut pour  $A > 18$ . La façon dont les paramètres  $b_0$  et  $b_1$ , les seuls essentiels ici, entrent dans l'expression de  $A_0$  permet de voir que cette correction tendrait à les déplacer dans le sens des valeurs (4.4). Cette étude fera l'objet d'un travail ultérieur.

Ensuite il s'agit de mentionner que les rayons quadratiques moyens choisis sont ceux de la densité de charge et ne coïncident qu'en première approximation avec ceux de la distribution des nucléons.

D'autre part nous n'avons tenu aucun compte de l'indétermination de ces rayons. Un simple calcul de propagation d'erreur sur (4.37) montre que

$$\frac{\Delta \text{Re}(A_0)}{\text{Re}(A_0)} \simeq -0,3 \frac{\Delta \sqrt{\langle r^2 \rangle}}{\sqrt{\langle r^2 \rangle}}, \quad \frac{\Delta \text{Re}(A_1)}{\text{Re}(A_1)} \simeq (-1 \text{ à } -4) \frac{\Delta \sqrt{\langle r^2 \rangle}}{\sqrt{\langle r^2 \rangle}}. \quad (4.39)$$

La grande sensibilité de  $A_1$  au rayon s'explique par l'effet de taille. A quelques exceptions près les rayons des noyaux du domaine  $s$  sont connus à une précision de l'ordre de 5% et ceux du domaine  $p$  à 1% environ (atomes muoniques). Ce seul fait conduit à des erreurs théoriques du même ordre de grandeur que celles d'origine expérimentale indiquées dans les figures.

Enfin indiquons que le caractère ponctuel du pion n'a jamais été mis en doute lors des corrections coulombiennes et radiatives intervenant dans la détermination des longueurs de diffusion expérimentales. De récentes mesures [20] semblent confirmer un rayon électromagnétique du pion d'environ 3 fm, c'est-à-dire de l'ordre de 1/5 du plus petit rayon de Bohr intervenant dans notre contexte. Il est intéressant de noter, comme un simple calcul le montre, que ce fait n'entraîne pas de correction appréciable aux énergies des niveaux.

En conclusion, il nous semble utile de relever un aspect de cette construction des longueurs de diffusion dans un formalisme de diffusion multiple. Chaque contribution apparaît distinctement et pondérée par des moments nucléaires du plus haut intérêt au point de vue de la structure du noyau. Une étude plus évoluée, tenant compte de la liaison des nucléons et de processus d'absorption-émission de pions dans un modèle nucléaire plus réaliste, ne voilerait certainement pas cette caractéristique. Il est permis

de penser qu'on serait alors en mesure d'extraire de façon claire l'importance relative des différents effets ainsi que la valeur de certaines approximations faites au niveau nucléaire ou au niveau de l'interaction  $\pi$ -nucléon.

## Remerciements

Qu'il me soit permis d'exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur P. Huguenin, directeur de ce travail. Son intérêt ininterrompu et l'excellence des conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer furent d'une aide inappréciable dans la réalisation de cet ouvrage.

Mes remerciements vont également à M. J. Beiner qui mit généreusement à ma disposition son programme de recherche de minimum.

Enfin j'adresse mes remerciements au centre de calcul de l'EPFL dont l'ordinateur fut utilisé pour l'ensemble des calculs de ce travail.

## RÉFÉRENCES

- [1] E. LAMBERT, *Helv. Phys. Acta* **42**, 667 (1969).
- [2] S. DESER, M. L. GOLDBERGER, K. BAUMANN, W. THIRRING, *Phys. Rev.* **96**, 774 (1954).
- [3] T. L. TRUEMAN, *Nucl. Phys.* **26**, 57 (1961).
- [4] R. SEKI, A. H. CROMER, *Phys. Rev.* **156**, 93 (1967).
- [5] L. R. MOYER, D. S. KOLTUN, *Phys. Rev.* **182**, 999 (1969).
- [6] D. A. JENKINS et coll., *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1148 (1966).
- [7] G. BACKENSTOSS et coll., *Phys. Lett.* **25 B**, 365 (1967).
- [8] G. POELZ et coll., *Phys. Lett.* **26 B**, 331 (1968).
- [9] H. SCHMITT et coll., *Phys. Lett.* **27 B**, 530 (1968).
- [10] R. J. HARRIS et coll., *Phys. Rev. Lett.* **20**, 505 (1968).
- [11] H. KOCH et coll., *Phys. Lett.* **28 B**, 279 (1968).
- [12] T. E. O. ERICSON, *Herceg Novi 1969* (preprint).
- [13] M. KRELL, T. E. O. ERICSON, *Nucl. Phys.* **B11**, 521 (1969).
- [14] G. E. PUSTOVALOV, *J.E.T.P.* **5**, 1234 (1957).
- [15] M. GOLDBERGER, K. WATSON, *Collision Theory* (Wiley, N.Y. 1964).
- [16] M. ERICSON, T. E. O. ERICSON, *Ann. Phys.* **36**, 323 (1966).
- [17] H. A. BETHE, *Phys. Rev.* **167**, 879 (1968).
- [18] D. S. KOLTUN, *Advances in Nucl. Phys.* vol. 3, M. Baranger & E. Vogt ed. (Plenum Press, N.Y. 1969).
- [19] LANDOLT-BÖRNSTEIN, *Nuclear Radii* (Springer, Berlin 1967).
- [20] A. FAINBERG, Thèse, Berkeley 1969, UCRL-19208.