Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 43 (1970)
Heft: 6-7

Artikel: Eine Analyse der Differentialraum-Quantentheorie
Autor: Ochs, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-114188

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Eine Analyse der Differentialraum-Quantentheorie[1])

von **W. Ochs**

Sektion Physik der Universität München

(11. V. 70)

Summary. An analysis of *Differential-Space Quantum Theory* (*DSQ*) is given, continuing a former presentation of this theory. Our investigation reveals (1) contradictions between the mathematical formalism of *DSQ* and the properties of an ensemble-theory, and (2) quantitative differences between quantum mechanics and *DSQ* in the description of the measuring process.

Einleitung

Die *Differentialraum-Quantentheorie* (DRQ) ist eine deterministische Formulierung der Quantentheorie, die in den Jahren 1953/1956 von N. Wiener und A. Siegel entwickelt wurde [1–3]. Nachdem wir diese Theorie in einer früheren Arbeit [4] unter besonderer Berücksichtigung ihrer physikalischen Voraussetzungen dargestellt haben, versuchen wir im folgenden eine kritische Analyse der DRQ.

In unserer Analyse behandeln wir vier Fragen, deren Beantwortung zur Beurteilung der DRQ wesentlich ist. Die ersten drei Fragen beziehen sich auf Geltungsbereich, Konsistenz und praktischen Nutzen der DRQ und sind Gegenstand von Kapitel 1. Die vierte Frage nach der Verträglichkeit von DRQ und Quantenmechanik führt auf die Theorie des Messprozesses, die wir in Kapitel 2 behandeln. Als Resultat unserer Untersuchung zeigen sich (a) Widersprüche zwischen den physikalischen Vorstellungen der DRQ und ihrem mathematischen Aufbau und (b) Unterschiede in nachprüfbaren Prognosen von Quantenmechanik und DRQ.

1. Zur Konsistenz der Differentialraum- Quantentheorie

Die in der vorliegenden Arbeit versuchte Analyse der DRQ stützt sich auf die Darstellung dieser Theorie in [4] und behandelt folgende Fragen:

(A) Hat die DRQ in Bezug auf experimentell prüfbare Aussagen einen anderen Geltungsbereich als die Quantenmechanik?

(B) Ermöglicht die DRQ neue Lösungsmethoden für konkrete physikalische Probleme?

[1]) Auszug aus der Diplomarbeit des Autors, Frankfurt a. M. 1964.

(C) Gibt es Widersprüche zwischen dem mathematischen Formalismus der DRQ und den physikalischen Vorstellungen, die der DRQ zugrunde liegen?

(D) Kommen Quantenmechanik und DRQ in allen Fällen zu den gleichen Prognosen?

Auf Grund der besonderen Konstruktion der DRQ lassen sich die beiden ersten Fragen unmittelbar mit Nein beantworten. Eine eingehende Untersuchung von Frage (C) ergibt folgende Resultate:

a) Die DRQ ist schon ihrer formalen Struktur nach keine Ensembletheorie im Sinne der statistischen Mechanik, da sie keinen wesentlichen Unterschied zwischen Zustandsraum und Ensemble macht. Wie man aus dem kinematischen und dem statistischen Postulat der DRQ ersieht, konstruiert diese Theorie zu jedem Makrozustand einen eigenen Zustandsraum, der – bis auf das von vornherein festgelegte und vom Zustandsoperator unabhängige Wienermass – stets mit dem Ensemble zusammenfällt. Damit gibt die DRQ aber eines der fruchtbarsten und grundlegendsten Prinzipien jeder Ensembletheorie auf, nämlich die Unterscheidung zwischen der Struktur eines physikalischen Systems, die die Wahl des Zustandsraums bestimmt, und seinem zufälligen Makrozustand, der durch ein spezielles Ensemble im Zustandsraum repräsentiert wird. In diesem Punkt entfernt sich die DRQ viel weiter von der klassischen Physik als die Quantenmechanik, die die Unterscheidung zwischen System und Zustand auch in ihrem Formalismus klar zum Ausdruck bringt[2]).

b) Diese Schwäche der DRQ zeigt sich besonders krass bei der Beschreibung der zeitlichen Entwicklung physikalischer Systeme. Aus den Postulaten der DRQ ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen dem zeitabhängigen Erwartungswert und der Observablenwertfunktion der Observablen $\mathfrak{A}$:

$$E_t(\mathfrak{A}) = \int_{\Xi} {}^0A_{W(t)}(\hat{U}_t\, x)\, d\mu\,. \tag{1.1}$$

Die zeitliche Änderung eines Differentialraumensembles hängt also in zweifacher Weise von der Zeit ab: erstens über die *Zustandsströmung* $\hat{U}_t$ der virtuellen Systeme in $\mathfrak{D}$ und zweitens über die zeitliche Änderung der (den Zustandsraum definierenden) Observablenwertfunktionen. Das bedeutet, dass die DRQ die zeitliche Entwicklung eines physikalischen Systems nicht als reine *Zustandsströmung* im gleichen Zustandsraum darstellen kann, sondern zu jedem Zeitpunkt einen neuen Zustandsraum konstruieren muss.

c) Neben diesen Mängeln des «statistischen Überbaus» gibt es auch ein entscheidendes Argument gegen den Anspruch, die Punkte des Zustandsraums der DRQ als *virtuelle Kopien* des Originalsystems aufzufassen. Die virtuellen Systeme der DRQ haben nämlich nicht die gleichen Eigenschaften wie das Originalsystem, da die funktionale Abhängigkeit zwischen den Observablen in beiden Fällen verschieden ist.

[2]) Auf diesen Mangel der *DRQ* hat J. Schwartz [5] zuerst aufmerksam gemacht. In seiner jüngsten Darstellung der *DRQ* [6] ging Siegel auf die Kritik von Schwartz ein und schlug eine Änderung der *DRQ* in Richtung auf eine echte Ensembletheorie vor. Doch stellt meines Erachtens die von Siegel vorgeschlagene Änderung noch keine befriedigende Lösung dar, da sie (1) nur diesen einen Mangel der *DRQ* berücksichtigt und (2) dafür auch noch die Stetigkeit der zeitlichen Entwicklung der Mikrozustände preis gibt.

Werden die Observablen $\mathfrak{A}$ und $f(\mathfrak{A})$ gemeinsam am selben Objekt gemessen, so gilt nach der Quantenmechanik in allen Fällen (d.h. unabhängig vom Makrozustand des Objekts) die Beziehung

$$f\,(\text{Wert von } \mathfrak{A}) = \text{Wert von } f(\mathfrak{A})$$

für alle stückweise stetigen Funktionen f. Aus dieser Beziehung und den Annahmen (I) bis (III) aus [4] ergibt sich dann für die DRQ die analoge Forderung

$$^0f(A)_W = f(^0A_W)\,. \tag{1.2}$$

Wie der folgende Satz zeigt, ist Gleichung (1.2) aber im mathematischen Aufbau der DRQ nicht erfüllt.

Satz (1). Sei $\mathcal{D}$ ein Differentialraum von mindestens drei Dimensionen. Dann existieren im Hilbert-Unterraum $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ von $\mathcal{D}$

1. unendlich viele Paare von Projektionsoperatoren P, Q mit den Eigenschaften[3])

$$\mathbf{0} < P < Q < \mathbf{1}$$

$$\mu\{x \in \mathcal{D} \mid {}^0P_\varphi(x) = 1,\, {}^0Q_\varphi(x) = 0\} > 0\,. \tag{1.3}$$

2. unendlich viele Paare vertauschbarer, selbstadjungierter Operatoren B, C mit der Eigenschaft

$$\mu\{x \in \mathcal{D} \mid {}^0B_\varphi(x) + {}^0C_\varphi(x) \neq {}^0(B+C)_\varphi(x)\} > 0 \tag{1.4}$$

für eine nichtleere, offene Menge[4]) von Projektionsoperatoren $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ aus $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$.

Beweis. Wegen $\dim \mathcal{D} \geqslant 3$ gibt es unendlich viele Zerlegungen der Einheit $\mathbf{1} = R_1 + R_2 + R_3$ mit $1 \leqslant Sp(R_i) \leqslant \dim \mathcal{D}$ in $\mathcal{H}$. Setzen wir $P := R_1$ und $Q := R_1 + R_2$, so gilt $\mathbf{0} < P < Q < \mathbf{1}$ und aus der Definition der Observablenwertfunktionen ^0A_W in der DRQ ergibt sich

$$\mu\,\{x \in \mathcal{D} \mid {}^0P_\varphi(x) = 1,\ {}^0Q_\varphi(x) = 0\} = \mu\left\{x \mid \frac{|\langle\varphi \mid R_1 \mid x)|}{\langle\varphi \mid R_1 \mid \varphi\rangle} \leqslant \frac{|\langle\varphi \mid R_2 + R_3 \mid x)|}{\langle\varphi \mid R_2 + R_3 \mid \varphi\rangle};\quad \frac{|\langle\varphi \mid R_3 \mid x)|}{\langle\varphi \mid R_3 \mid \varphi\rangle} \leqslant \frac{|\langle\varphi \mid R_1 + R_2 \mid x)|}{\langle\varphi \mid R_1 + R_2 \mid \varphi\rangle}\right\}. \tag{1.5}$$

Sei φ nun ein beliebiges Element aus der Menge

$$K := \{\varphi \in \mathcal{H} \mid 0 < \langle\varphi|R_i|\varphi\rangle < \langle\varphi|R_1 + R_2|\varphi\rangle < \langle\varphi|R_3|\varphi\rangle;\ i = 1, 2\}. \tag{1.6}$$

Setzen wir $|h_i\rangle := R_i\,|\varphi\rangle$, so folgt aus (1.6) $\|h_i\|^2 = \langle h_i \mid h_i\rangle \neq 0$, und Gleichung (1.5) nimmt die Form an

$$\mu\,\{x \in \mathcal{D} \mid {}^0P_\varphi(x) = 1,\, {}^0Q_\varphi(x) = 0\} = \mu\left\{x \mid \max\left(\frac{|h_1(x)|}{\|h_1\|^2},\ \frac{|h_3(x)|}{\|h_3\|^2}\right) \leqslant \min\left(\frac{|h_2(x) + h_3(x)|}{\|h_2\|^2 + \|h_3\|^2},\ \frac{|h_1(x) + h_2(x)|}{\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2}\right)\right\}.$$

[3]) Bei elementaren Zustandsoperatoren $W = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ schreiben wir statt ^0A_W auch kürzer $^0A_\varphi$.

[4]) Unter einer offenen Menge von Operatoren verstehen wir eine Menge von Operatoren, die bezüglich der gewöhnlichen Operatornorm offen ist.

Nach *Satz* (A1) aus [4] stellen die Funktionen $h_i(x)$ komplexe Zufallsvariable auf $\mathcal{D}$ dar, deren Real- und Imaginärteile insgesamt unabhängig-, gleich- und normalverteilt sind. Daraus folgt unmittelbar

$$\mu\{x \in \mathcal{D} \mid {}^0P_\varphi(x) = 1, {}^0Q_\varphi(x) = 0\} > 0 \text{ für alle } \varphi \in K\,. \tag{1.7}$$

Zum Beweis von Gleichung (1.4) setzen wir

$$B := b_1 R_1 + b_2 (R_2 + R_3)\,, \qquad C := c_1 (R_1 + R_2) + c_2 R_3 \tag{1.8}$$

mit der Nebenbedingung

$$0 \neq b_i, c_i;\; b_1 \neq b_2, c_1 \neq c_2;\; b_1 + c_2 \neq b_\mu + c_\nu \tag{1.9}$$

für alle $(\mu, \nu) \neq (1, 2)$. Offensichtlich gibt es unendlich viele selbstadjungierte Operatoren B, C der Form (1.8) mit reellen Eigenwerten der Eigenschaft (1.9). Die Operatoren B und C sind so konstruiert, dass der Wert $b_1 + c_2$ im Spektrum des Operators

$$B + C = (b_1 + c_1) R_1 + (b_2 + c_1) R_2 + (b_2 + c_2) R_3$$

nicht enthalten ist. Das bedeutet nach *Definition* (3.1) aus [4] ${}^0(B + C)_\varphi (x) \neq b_1 + c_2$ für alle $x \in \mathcal{D}$ und alle $\varphi \in \mathcal{H}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mu\{x \in \mathcal{D} \mid {}^0B_\varphi + {}^0C_\varphi \neq {}^0(B + C)_\varphi\} &\geqslant \mu\{x \mid {}^0B_\varphi = b_1, {}^0C_\varphi = c_2\} \\ &= \mu\left\{x \;\middle|\; \frac{|\langle\varphi \mid R_1 \mid x)|}{\langle\varphi \mid R_1 \mid \varphi\rangle} \leqslant \frac{|\langle\varphi \mid R_2 + R_3 \mid x)|}{\langle\varphi \mid R_2 + R_3 \mid \varphi\rangle};\right. \\ &\qquad \left.\frac{|\langle\varphi \mid R_3 \mid x)|}{\langle\varphi \mid R_3 \mid \varphi\rangle} \leqslant \frac{|\langle\varphi \mid R_1 + R_2 \mid x)|}{\langle\varphi \mid R_1 + R_2 \mid \varphi\rangle}\right\}.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Ein Vergleich von (1.5), (1.7) und (1.10) ergibt schliesslich

$$\mu\{x \mid {}^0B_\varphi + {}^0C_\varphi \neq {}^0(B + C)_\varphi\} \geqslant \mu\{x \mid {}^0P_\varphi = 1, {}^0Q_\varphi = 0\} > 0$$

für alle $\varphi \in K$. Da wir K als offene Menge konstruiert haben, bilden auch die zugehörigen Projektionsoperatoren $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ bezüglich der Operatornorm eine offene Menge.

Da die beiden Beziehungen ■

$$P \leqslant Q \Rightarrow {}^0P_W \leqslant {}^0Q_W \quad \text{und} \quad {}^0B_W + {}^0C_W = {}^0(B + C)_W$$

offensichtlich Sonderfälle von Gleichung (1.2) darstellen, kann diese Beziehung nicht allgemein gültig sein.

Damit hat unsere Behandlung von Frage (C) drei entscheidende Widersprüche zwischen den physikalischen Vorstellungen der DRQ und ihrer mathematischen Darstellung aufgezeigt.

2. Der Messprozess in der Differentialraum-Quantentheorie

Im zweiten Teil unserer Untersuchung müssen wir nun noch Frage (D) beantworten. Dazu überlegen wir uns, dass sowohl die Quantenmechanik wie auch die DRQ nur zwei Arten von Prognosen kennen: Erstens Prognosen über Erwartungs-

werte von Messungen und zweitens Voraussagen über Makrozustände als Ergebnisse präparierender Messungen. Nun haben wir in *Satz* 1 von [4] gezeigt, dass Quantenmechanik und DRQ stets zu den selben Aussagen über Erwartungswerte kommen. Die einzige Möglichkeit für einen Widerspruch zwischen Quantenmechanik und DRQ liegt also in der Beschreibung der präparierenden Messung. Um Frage (D) beantworten zu können, müssen wir daher die präparierende Messung näher analysieren, wobei wir uns auf den einfachsten Fall beschränken [7].

An einem Objekt im Zustand $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ soll die Observable $\mathfrak{A}$ mit dem zugeordneten Operator

$$A = \sigma(\mathfrak{A}) = \sum_{n=1}^{Sp(\mathbf{1})} a_n \, |n\rangle\langle n|$$

gemessen werden. Ein dazu geeignetes Instrument befinde sich vor der Messung im Zustand $|\Phi\rangle\langle\Phi|$. Die Quantenmechanik beschreibt den Verlauf des Messprozesses im Hilbertraum des Gesamtsystems *Objekt + Instrument,* das sich nach unseren Annahmen zu Beginn der Messung im Zustand $W_1 := |\Psi_1\rangle\!\rangle\langle\!\langle\Psi_1|$ mit $|\Psi_1\rangle\!\rangle := |\varphi\rangle|\Phi\rangle$ befindet. Der eigentliche Messvorgang besteht in einer Wechselwirkung zwischen Objekt und Instrument, die die gesuchte Zustandseigenschaft des Objekts auf eine leicht feststellbare Zustandseigenschaft des Instruments überträgt.

Ein zur Messung von $\mathfrak{A}$ geeignetes Instrument ist u. a. durch eine Observable $\mathfrak{A}^{(\mathfrak{J})}$ charakterisiert, der im Hilbertraum $\mathcal{H}^{(\mathfrak{J})}$ des Instruments der Operator

$$A^{(\mathfrak{J})} := Q + \sum_{n=1}^{\dim \mathcal{H}^{(\mathfrak{D})}} a_n \, P_{a_n}^{(\mathfrak{J})}$$

zugeordnet ist. Hierbei sehen wir $\mathfrak{A}^{(\mathfrak{J})}$ als «klassisch beobachtbare», makroskopische Observable des Instruments an, deren Werte sich einfach ablesen lassen.

Diese Wechselwirkung wird durch einen unitären Entwicklungsoperator U_{M} im Hilbertraum des Gesamtsystems beschrieben.

Eine ideale präparierende Messung setzt dabei eine äusserst spezielle Wechselwirkung zwischen Objekt und Instrument voraus, die sich durch folgende Eigenschaften charakterisieren lässt:

1. Befindet sich das Objekt in einem Eigenzustand des Operators A, so wird der Zustand des Objekts durch die Messung nicht geändert:

$$U_{\mathsf{M}} \, |n\rangle \, |\Phi\rangle = |n\rangle \, |X_n\rangle \, . \tag{2.1}$$

2. Der Zustand des Instruments[5]) nach der Wechselwirkung erlaubt einen eindeutigen Schluss auf den Zustand des Objekts vor der Messung:

$$\langle X_n \mid X_m\rangle = \delta_{nm} \, , \quad \langle \Phi \mid X_n\rangle = 0 \, . \tag{2.2}$$

[5]) Von den Zustandsvektoren $|X_n\rangle$ des Instruments am Ende der Wechselwirkung setzen wir daher voraus, dass sie Eigenzustände des Operators $A^{(\mathfrak{J})}$ zu den entsprechenden Eigenwerten darstellen:

$$Q \, |\Phi\rangle = |\Phi\rangle, \qquad P_{a_n}^{(\mathfrak{J})} \, |X_n\rangle = |X_n\rangle \, .$$

Entwickelt man den Anfangszustand des Gesamtsystems nach Eigenzuständen von A

$$|\Psi_1\rangle\rangle = |\varphi\rangle\,|\Phi\rangle = \sum_n |n\rangle\,|\Phi\rangle\,\langle n\,|\,\varphi\rangle\,, \tag{2.3}$$

so ergibt sich aus (2.1)

$$|\Psi_2\rangle\rangle := U_{\mathsf{M}}\,|\Psi_1\rangle\rangle = \sum_n |n\rangle\,|X_n\rangle\,\langle n\,|\,\varphi\rangle\,. \tag{2.4}$$

3. Die dritte und entscheidende Eigenschaft einer idealen, präparierenden Messung liegt nun darin, dass nach vollzogener Wechselwirkung eine Interferenz der orthogonalen Zustände $|n\rangle\,|X_n\rangle$ aufgrund der makroskopischen irreversiblen Fixierung der «Zeigerstellung» des Instruments praktisch nicht mehr möglich ist. Das bedeutet: für alle physikalisch sinnvollen Observablen $\mathfrak{B}$ sind die Summen

$$\sum_{\substack{(i,j)=(n,j),(i,n)\\ \neq(n,n)}} \langle i\,|\,\varphi\rangle\,\langle\varphi\,|\,j\rangle \langle\langle j, X_j\,|\,V\,|\,i, X_i\rangle\rangle \tag{2.5}$$

von *Interferenztermen* von $W_2 = |\Psi_2\rangle\rangle\,\langle\langle\Psi_2|$ so verschwindend klein gegen die Diagonalterme $|\langle n\,|\,\varphi\rangle|^2 \langle\langle n, X_n\,|\,V\,|\,n, X_n\rangle\rangle$, dass man den Zustandsoperator W_2 durch das Gemisch

$$W_2' := \sum_n |\langle n\,|\,\varphi\rangle|^2\,|n, X_n\rangle\rangle\langle\langle n, X_n| \quad (\textit{Objektivierung}\ [7]) \tag{2.6}$$

ersetzen kann.

Der Zustandsoperator W_2' drückt unsere Kenntnis vom quantenmechanischen Zustand des Gesamtsystems vor der Ablesung aus: Danach befindet sich das Objekt mit der Wahrscheinlichkeit $|\langle\varphi\,|\,n\rangle|^2$ im Zustand $|n\rangle$. Die Ablesung als letzter Teil der Messung gibt uns die Information, welcher der nach W_2' möglichen Zustände aus dem Gemisch durch den Messvorgang realisiert wurde. Dabei wird die Ablesung als störungsfreie Beobachtung eines makroskopischen, klassischen Objekts (eben des Messinstruments) durch ein anderes makroskopisches System (z.B. das Auge) mit anschliessender Informationsverwertung betrachtet, deren eigene Problematik für die vorliegende Fragestellung ausgeklammert werden kann.

Die Beschreibung des gleichen Messprozesses im Rahmen der DRQ ist durch die physikalischen Annahmen und mathematischen Postulate dieser Theorie (siehe [4]) eindeutig festgelegt und soll im folgenden kurz skizziert werden.

Dem Makrozustand $|\Psi_1\rangle\rangle\,\langle\langle\Psi_1|$ des Gesamtsystems *Objekt* + *Instrument* wird zu Beginn der Messung (gemäss dem statistischen Postulat) das Ensemble $\mathcal{E}_1$ im Differentialraum des Gesamtsystems zugeordnet, dessen Elemente mathematische Bilder (virtuelle Systeme) des physikalischen Systems in allen möglichen Mikrozuständen darstellen sollen. Die Wechselwirkung zwischen Objekt und Instrument führt dann – gemäss dem dynamischen und kinematischen Postulat – zu einer Ensembleentwicklung, bei der sich die Mikrozustände der virtuellen Systeme aufgrund der Zustandsströmung $\hat{U}_{\mathsf{M}}$ im – zeitlich variierenden – Zustandsraum kontinuierlich ändern. Betrachten wir insbesondere die Wechselwirkung bei einer idealen präparierenden Messung mit ihren speziellen Eigenschaften (2.1) und (2.2), so bewirkt die entsprechende Ensembleentwicklung, dass nach Abschluss der Wechselwirkung die

Werte der Observablen $\mathfrak{A} \times \mathbf{1}^{(\mathfrak{J})}$ und $\mathbf{1} \times \mathfrak{A}^{(\mathfrak{J})}$ für alle Mikrozustände des Ensembles $\mathcal{E}_2$ übereinstimmen:

$$^0(A \times \mathbf{1}^{(\mathfrak{J})})_{\psi_2} = {}^0(\mathbf{1} \times A^{(\mathfrak{J})})_{\psi_2} . \tag{2.7}$$

Diese anschauliche und nach den Vorstellungen der DRQ zu erwartende Konsequenz ergibt sich unmittelbar aus Definition (3.1) von [4] und der Gleichung

$$(P_{a_n} \times \mathbf{1}^{(\mathfrak{J})}) \,|\Psi_2\rangle\!\rangle = (\mathbf{1} \times P_{a_n}^{(\mathfrak{J})}) \,|\Psi_2\rangle\!\rangle = \langle n \mid \varphi\rangle \,|n, X_n\rangle\!\rangle .$$

Nach Abschluss der Wechselwirkung zeigt sich nun der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Theorien des Messprozesses. Während in dem durch den Zustandsoperator $|\Psi_2\rangle\!\rangle \langle\!\langle \Psi_2|$ beschriebenen System mehrere quantenmechanische Zustände in Superposition koexistieren, besteht das *Differentialraum-Ensemble* $\mathcal{E}_2$ aus virtuellen Systemen mit eindeutig bestimmtem Mikrozustand. Dieser «klassische» Zustand der virtuellen Systeme kennt aber keine Superposition verschiedener Zustände. Eine der Objektivierung entsprechende Operation hat daher im Rahmen der DRQ keinen Sinn, und bereits die Wechselwirkung führt zu dem erwarteten Ergebnis: Die Ablesung kann genau einen der Observablenwerte a_n ergeben, und der Wert a_n ist mit der Wahrscheinlichkeit $|\langle n \mid \varphi\rangle|^2$ zu erwarten. Die abschliessende Ablesung und der dabei entstehende Informationszuwachs bedeuten in einer Ensembletheorie notwendig eine *Auswahl* virtueller Systeme. Lesen wir etwa den Wert a_i ab, so sind aus dem Ensemble $\mathcal{E}_2$ nur noch die virtuellen Systeme x mit der Eigenschaft $^0(\mathbf{1} \times A^{(\mathfrak{J})})\,(x) = a_i$ mit der durch die Ablesung gewonnenen Information verträglich. Die Ablesung $A^{(\mathfrak{J})}: a_i$ verursacht also eine *Ensemblereduktion*

$$\mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2 \mid M_{a_i} \quad \text{mit } M_{a_i} = \{x \in \mathcal{D} \mid {}^0(1 \times A^{(\mathfrak{J})})\,(x) = a_i\} . \tag{2.8}$$

Die Operation (2.8) entspricht gerade der Kombination von Objektivierung und Ablesung in der Quantenmechanik. Mit dieser unproblematischen, unmittelbar aus den Vorstellungen der klassischen Physik und Wahrscheinlichkeitstheorie ableitbaren Ensemblereduktion vertritt die DRQ eine durchsichtige Theorie des Messprozesses, in der die bis heute nicht befriedigend gelöste Problematik der Objektivierung völlig vermieden wird. Liesse sich der Messprozess auf diese Weise korrekt beschreiben, so wäre die DRQ in diesem Punkt der Quantenmechanik gewiss überlegen. Eine quantitative Analyse zeigt aber, dass die oben skizzierte Theorie des Messprozesses zu anderen Resultaten kommt als die Quantenmechanik[6]). Beide führen offensichtlich genau dann zu den gleichen Prognosen, wenn die statistischen Eigenschaften des reduzierten Ensembles $\mathcal{E}_2 \mid M_{a_i}$ mit denen des Zustandsoperators $|i, X_i\rangle\!\rangle \langle\!\langle i, X_i|$ übereinstimmen. Daraus ergibt sich folgende notwendige und hinreichende Bedingung für die Übereinstimmung beider Theorien:

$$\int_{M_{a_i}} {}^0B_{\psi_2}\, d\mu = \mu(M_{a_i}) \langle\!\langle i, X_i \mid B \mid i, X_i\rangle\!\rangle \tag{2.9}$$

für alle Observablen $\mathfrak{B} = \sigma^{-1}(B)$.

[6]) Diese Tatsache wurde auch von R. L. Warnock [6] bei der Untersuchung einer anderen Definition der Observablenwertfunktionen bemerkt. Wie Warnock erkannte, beruht dieser Widerspruch zwischen Quantenmechanik und *DRQ* darauf, dass stochastisch unabhängige Zufallsvariable $\langle h_n | x\rangle$ (siehe Anhang I in [4]) beim Übergang von $\mathcal{E}_2$ nach $\mathcal{E}_2 \mid M_{a_i}$ ihre Unabhängigkeit verlieren.

Spezialisieren wir diese Gleichung auf den einfachen Fall

$$|\langle\varphi \mid i\rangle|^2 = \frac{1}{2}, \quad B = |\Psi_3\rangle\!\rangle\langle\!\langle\Psi_3| \tag{2.10}$$

mit den Nebenbedingungen

$$|\Psi_3\rangle\!\rangle := \sum_n c_n \, |n, X_n\rangle\!\rangle, \quad \langle\!\langle\Psi_3 \mid \Psi_3\rangle\!\rangle = \sum_n |c_n|^2 = 1 \,,$$

$$\langle\!\langle\Psi_3 \mid \Psi_2\rangle\!\rangle = \sum_n c_n^* \, \langle n \mid \varphi\rangle = 0 \,, \quad |c_i|^2 = \frac{1}{2}, \tag{2.11}$$

so ergibt die rechte Seite von (2.9) $|\langle\varphi \mid i\rangle|^2 \, |c_i|^2 = 1/4$, während der Integrand der linken Seite nach Definition (3.1) aus [4] und Gleichung (2.11) verschwindet. Damit haben wir gezeigt, dass Gleichung (2.9) falsch ist und dass sich Quantenmechanik und DRQ in ihren quantitativen Prognosen im allgemeinen widersprechen. Dieses Ergebnis beantwortet auch Frage (D) und schliesst unsere Untersuchung der DRQ ab.

Zusammenfassung

Unsere Analyse der DRQ hat zu folgenden Ergebnissen geführt:

(α) Die DRQ ist keine klassische Ensembletheorie, da die Konstruktion der Differentialraum-Ensembles nicht zwischen der Struktur des betrachteten Systems und unserer Kenntnis seines Zustandes unterscheidet.

(β) Die Elemente der Differentialraum-Ensembles können nicht als virtuelle Systeme interpretiert werden, da sie eine andere Observablenstruktur haben als das reale System.

(γ) In der Theorie des Messprozesses kommt die DRQ zu Resultaten, die von denen der Quantenmechanik abweichen.

Auf Grund dieser schwerwiegenden Einwände muss der Versuch von Wiener und Siegel, mit der DRQ eine den Einsteinschen Forderungen genügende, deterministische Formulierung der Quantentheorie zu entwickeln [2, 4], als gescheitert angesehen werden.

Dieser Misserfolg bedeutet allerdings noch keine endgültige Entscheidung über die Möglichkeit einer konsistenten, «*DRQ-ähnlichen*» Theorie. Es ist denkbar, dass sich mit einem anderen mathematischen Formalismus alle oben aufgezeigten Mängel der DRQ vermeiden lassen, ohne dabei die überzeugenden physikalischen Vorstellungen der DRQ aufgeben zu müssen. Diese Möglichkeit werden wir in einer weiteren Arbeit untersuchen.

Herrn Professor Dr. G. Süßmann danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele wertvolle Hinweise und klärende Diskussionen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] N. Wiener and A. Siegel, Phys. Rev. *91*, 1551 (1953).
[2] N. Wiener and A. Siegel, Nuov. Cim. Suppl. *2*, Ser X, 982 (1955).
[3] A. Siegel and N. Wiener, Phys. Rev. *101*, 429 (1956).
[4] W. Ochs, Helv. Phys. Acta. *43*. 668 (1970).
[5] K. O. Friedrichs et al., *Integration of Functionals*, New York University 1957.
[6] A. Siegel, *The Differential-Space Theory of Quantum Systems*, in: *Differential-Space, Quantum Systems and Prediction*, ed. by N. Wiener, Cambridge, Mass. 1966.
[7] G. Süssmann, *Über den Messvorgang*, Abh. Bayr. Ak. Wiss., Math.-Nat. Kl. Heft *88* (1958).