

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 43 (1970)
Heft: 2

Artikel: Dislocations et champs cristallins
Autor: Zahnd, J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-114163>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Dislocations et champs cristallins¹⁾

par J. Zahnd

Laboratoire de Génie Atomique, EPF-Lausanne

(5 XI 69)

Résumé. Les structures cristallines quasi-périodiques variables sont décrites à l'aide d'un champ de déformation-vitesse appelé champ cristallin. Les équations fondamentales de ce champ sont celles de la théorie des dislocations, déjà formulées en mécanique des milieux continus. Elles sont déduites ici d'un principe variationnel, qui fait apparaître une force cinétique exercée par le champ de vitesse sur les dislocations en mouvement. Les équations du champ cristallin moyen dans un réseau de dislocations sont établies, en suivant la méthode de Lorentz en électrodynamique des milieux continus, et en adoptant une classification élémentaire des réseaux de dislocations. La théorie de la dispersion des ondes élastiques dans un réseau de dislocations est abordée selon cette méthode.

1. Champ cristallin. Définitions

La fonction densité $\varrho(x, y, z)$ d'un cristal de N atomes identiques donne la densité de probabilité de présence en un point (x, y, z) de l'espace pour un atome quelconque. Dans un cristal parfait, c'est une fonction triplement périodique, les périodes étant représentées par trois vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Dans le cas d'un cristal réel, ϱ n'est plus périodique. Cependant, dans la plus grande partie du solide, ϱ peut être assimilée dans tout petit domaine à une fonction périodique. Nous pouvons associer à chaque point de l'espace une densité triplement périodique «tangente» en ce point à la fonction densité réelle. Les régions dans lesquelles ceci n'est pas possible seront les régions de mauvais cristal. Nous pouvons donc décrire l'état du cristal en associant à chaque point de l'espace trois vecteurs \mathbf{a}_i ($i = 1, 2, 3$), qui sont les périodes de la fonction périodique tangente à la fonction densité du cristal en ce point.

Remarquons qu'aucune observation de structure n'est à même de déceler une translation globale d'un cristal parfait. Compte tenu de ce fait, nous admettons comme hypothèse de travail que les données sur un état d'un cristal consistent en un champ de repères \mathbf{a}_i , et que toute fonction ϱ admettant le champ \mathbf{a}_i comme champ de périodes représente l'état du cristal.

Nous admettrons en outre que le solide est infini, et qu'il existe un état «naturel» parfait, rigoureusement périodique de ce solide, dont les périodes sont trois vecteurs \mathbf{a}_{i0} . Cet état naturel s'obtiendrait en éloignant toutes les dislocations à l'infini. Nous appellerons «déformés en \mathbf{r} des vecteurs \mathbf{a}_{i0} » les vecteurs périodes $\mathbf{a}_i(\mathbf{r})$, dans l'état déformé, \mathbf{r} étant le rayon-vecteur d'un point quelconque.

¹⁾ Résumé d'une thèse de doctorat présentée à l'Ecole Polytechnique fédérale de Lausanne, le 28 mars 1969. Subside No. 5105.2 du Fonds National de la recherche scientifique.

De plus, nous appellerons «application de Burgers au point \mathbf{r} » l'application linéaire $\mathbf{e}_{i0} \rightarrow \mathbf{e}_i(\mathbf{r})$, ($i = 1, 2, 3$). Elle caractérise la déformation au point \mathbf{r} . Soit $(\mathbf{e}_{10}, \mathbf{e}_{20}, \mathbf{e}_{30})$ la base orthonormée associée au système de coordonnées cartésiennes (x_i) ou (x, y, z) . Les déformés en \mathbf{r} des vecteurs \mathbf{e}_{i0} seront les images de ces vecteurs par l'application de Burgers au point \mathbf{r} . Nous les noterons $\mathbf{e}_i(\mathbf{r})$, et nous poserons:

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{i0} + \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_{j0}, \quad (1)$$

en adoptant la convention de sommation usuelle.

La déformation du cristal est définie par les 9 fonctions $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$. Il est commode pour la suite d'introduire les vecteurs

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{e}_{k0} \varepsilon_{ki}, \quad (2)$$

que nous appellerons «vecteurs déformations».

Considérons deux points voisins P et Q , de rayons-vecteurs \mathbf{r} et $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$. L'application de Burgers au point P fait correspondre au vecteur $\delta\mathbf{r} = \delta x_i \mathbf{e}_{i0}$, le vecteur $\delta\mathbf{r}' = \delta x_i \mathbf{e}_i$. On appellera «déplacement relatif» des points P et Q le vecteur $\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{r}' - \delta\mathbf{r}$. Ses composantes dans la base (\mathbf{e}_{i0}) sont les nombres

$$\delta u_k = \delta\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_k = \delta x_i \varepsilon_{ik}. \quad (3)$$

Dans tout domaine où les formes différentielles (3) sont intégrables, on peut définir un *champ de déplacement* $u_k(\mathbf{r})$, tel que

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{grad} u_k, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Il faut et il suffit pour cela que

$$\text{rot } \boldsymbol{\varepsilon}_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Les relations (5) constituent les «conditions de compatibilité» des déformations, celles-ci étant dites «compatibles» lorsque les formes (3) sont intégrables.

La relation (4) ne définit u_k qu'à une constante près. Néanmoins, lorsque u_k est déterminé dans un référentiel, nous admettrons qu'il est déterminé dans tous les autres, en vertu de la convention suivante: le champ de déplacement est un vrai champ vectoriel. Ses composantes dans un référentiel particulier, ne dépendent que de la base associée à ce référentiel.

Dans la description statistique du solide sur laquelle est basé notre travail, la notion de «point du solide» n'a pas de sens. Nous ne pouvons donc appeler le champ u_k «déplacement des points du solide». La signification physique de u_k apparaît alors dans le théorème suivant, que nous donnons sans démonstration: soit $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ un champ de déplacement, tel que $\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{grad} u_k$, et $\varrho_0(\mathbf{r})$ une fonction densité décrivant l'état non déformé du solide. Alors la fonction $\varrho(\mathbf{r}) = \varrho_0(\mathbf{r} - \mathbf{u}(\mathbf{r}))$ décrit l'état déformé correspondant à la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_k$. La réciproque est également vraie.

En vertu de la conservation du nombre des atomes, il existe un courant de probabilité \mathbf{j} tel que $\partial\varrho/\partial t = -\text{div } \mathbf{j}$. On appellera «champ de vitesse» un champ $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_{i0}$ tel que $j_i = \varrho v_i$. On définit ainsi un champ de vitesse comme un champ \mathbf{v} tel que

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (\varrho v_i). \quad (6)$$

Lorsque le champ de déformation dérive d'un champ de déplacement u_i , le champ $\partial u_i / \partial t$ est un champ de vitesse, de sorte qu'en posant $\varphi_i = \partial u_i / \partial t$, on a $\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i / \partial t = \mathbf{grad} \varphi_i$. Ce résultat, qui est trivial en mécanique des milieux continus – où le champ de déplacement est défini comme le déplacement des points du corps – n'est pas immédiat lorsqu'on attribue une signification statistique aux grandeurs en question.

Nous appelons «champ cristallin» l'ensemble des champs de déformation et de vitesse. Il se transforme selon les formules suivantes, lorsqu'on effectue un changement de référentiel galiléen:

$$\varphi'_i = \varphi_i + \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i. \quad (8)$$

Ces formules se démontrent aisément dans le cas où le champ de déformation dérive d'un champ de déplacement. Nous les admettrons dans tous les cas.

2. Equations fondamentales

La théorie du champ cristallin présente une grande analogie avec celle du champ électromagnétique, et les équations fondamentales que nous allons donner correspondent aux équations de Maxwell.

Nous considérons généralement un solide illimité dans lequel il n'y a pas de forces de masse. Dès lors, il n'y a que deux causes de déformation et de vitesse: les dislocations et leurs mouvements, c'est-à-dire les courants de dislocation. Les équations du champ admettent aussi des solutions non nulles en l'absence de dislocations: ce sont les ondes élastiques.

2.1. Quantité de dislocation

L'application de Burgers en un point P de l'espace est l'application linéaire qui fait correspondre à tout vecteur $\omega_i \mathbf{e}_{i0}$ le vecteur $\omega_i \mathbf{e}_i(P)$. Soit γ un arc de courbe d'extrémités P et Q . L'image de l'intégrale $\int_{\gamma} dx_i \mathbf{e}_{i0} = \mathbf{PQ}$ par la famille d'applications de Burgers sera l'intégrale

$$\int_{\gamma} dx_i \mathbf{e}_i = \mathbf{PQ} + \mathbf{e}_{k0} \int_{\gamma} d\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_k.$$

Si γ est une courbe fermée, $\mathbf{PQ} = 0$, et nous appellerons «quantités de dislocation enfermées dans la courbe γ » les nombres

$$b_k = \int_{\gamma} du_k = \int_{\gamma} d\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_k^2. \quad (9)$$

Cette dernière intégrale peut se transformer en l'intégrale de surface

$$b_k = \iint_{\Sigma} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{rot} \boldsymbol{\varepsilon}_k, \quad (10)$$

²⁾ Burgers [8] appelle «dislocation strength» le nombre $(\sum_k b_k^2)^{1/2}$.

Σ étant une surface quelconque de bord γ , et $d\sigma$ l'élément de surface. Les vecteurs

$$\beta_k = \mathbf{rot} \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad (11)$$

sont appelés «vecteurs densités de dislocation». On a

$$b_k = \iint_{\Sigma} d\sigma \cdot \beta_k \quad (12)$$

et

$$\operatorname{div} \beta_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (13)$$

L'observation montre que les dislocations dans les cristaux sont filiformes. Les vecteurs β_k sont nuls dans tout le cristal sauf sur un réseau de lignes appelées lignes de dislocation, sur lesquelles ils ont une valeur infinie (distribution de type Dirac).

2.2. Densité de courant de dislocation

Il suit de (5) et (11) qu'en l'absence de dislocations, les déformations sont compatibles et qu'on a $\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i / \partial t = \mathbf{grad} \varphi_i$. Si par contre les déformations ne varient pas de manière compatible au voisinage d'un point, il y a en cet endroit un «courant de dislocation». Nous appellerons «densités de courant de dislocation» les vecteurs

$$\gamma_i = - \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi_i. \quad (14)$$

Le courant de dislocation passant à travers un arc de courbe AB sera représenté par les vecteurs

$$\Gamma_i = \int_A^B d\mathbf{r} \cdot \gamma_i, \quad (15)$$

de sorte que la dérivée $\partial b_i / \partial t$ de la quantité de dislocation enfermée dans une courbe L (fermée), est égale au courant de dislocation qui passe à travers L . On en tire la relation de continuité

$$\mathbf{rot} \gamma_i + \frac{\partial \beta_i}{\partial t} = 0. \quad (16)$$

Rappelons que la vitesse d'une dislocation en un point est un vecteur \mathbf{v} , perpendiculaire à la dislocation en ce point. On montre que les grandeurs β_{Mi} , γ_{Mi} , \mathbf{v}_M , qui sont les moyennes de la densité, du courant, et de la vitesse des dislocations au voisinage d'un point, prises sur un certain intervalle de temps, sont liées par la relation

$$\gamma_{Mi} = \beta_{Mi} \wedge \mathbf{v}_M. \quad (17)$$

Nous pouvons, de manière formelle, supprimer les indices de moyenne dans (17). Cela revient à faire l'hypothèse suivante: il existe un champ \mathbf{v} appelé vitesse de dislocation, tel qu'en tout point

$$\gamma_i = \beta_i \wedge \mathbf{v}. \quad (18)$$

2.3. Les équations fondamentales du champ cristallin

Nous sommes déjà en possession de deux équations fondamentales: les équations (11) et (14) qui relient le champ cristallin $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i, \varphi_i\}$ à ses sources, les distributions et les courants de dislocation. La troisième équation ne concerne que le champ. Nous l'écrirons

$$\partial\varphi_i/\partial t = c_{ijkl} \partial_j \varepsilon_{kl}. \quad (19)$$

Les constantes c_{ijkl} peuvent être considérées comme les constantes élastiques usuelles divisées par la masse spécifique du solide. Le tenseur

$$\theta_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (20)$$

est le tenseur de contrainte. Il correspond au tenseur usuel divisé par la masse spécifique, et l'on admet sa symétrie: $\theta_{ij} = \theta_{ji}$.

Le tableau ci-dessous fait ressortir l'analogie de la théorie des dislocations avec l'électromagnétisme (dans le vide).

Tableau

Dynamique des dislocations	Electromagnétisme
Champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_i$	Champ électrique \mathbf{E}
Champ de vitesse φ_i	Champ magnétique \mathbf{H}
Densité de dislocation β_i	Densité de charge ϱ
Densité de courant γ_i	Densité de courant \mathbf{j}
$\gamma_i = \beta_i \wedge \mathbf{v}$	$\mathbf{j} = \varrho \mathbf{v}$
$\text{rot } \gamma_i + \partial \beta_i / \partial t = 0$	$\text{div } \mathbf{j} + \partial \varrho / \partial t = 0$
$\gamma_i = -\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i / \partial t + \text{grad } \varphi_i$	$\mathbf{j} = -\partial \mathbf{E} / \partial t + \text{rot } \mathbf{H}$
$\beta_i = \text{rot } \boldsymbol{\varepsilon}_i$	$\varrho = \text{div } \mathbf{E}$
$\partial \varphi_i / \partial t = c_{ijkl} \partial_j \varepsilon_{kl}$	$\partial \mathbf{H} / \partial t = -\text{rot } \mathbf{E}$
-	$\text{div } \mathbf{H} = 0$

(Les relations de l'électromagnétisme sont citées aux coefficients près.)

2.4. Ondes élastiques

En l'absence de dislocations, $\beta_i = \gamma_i = 0$, il existe un champ de déplacement u_i , tel que $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{grad} u_i$, et $\varphi_i = \partial u_i / \partial t$. L'équation (19) devient alors:

$$\partial^2 u_i / \partial t^2 = c_{ijkl} \partial_j \partial_k u_l. \quad (21)$$

On reconnaît l'équation des ondes élastiques.

2.5. Energie

Si l'on introduit les vecteurs contrainte $\vec{\theta}_i = \mathbf{e}_{k0} \theta_{ki}$, l'équation (19) s'écrit

$$\partial \varphi_i / \partial t = \text{div } \vec{\theta}_i. \quad (22)$$

En multipliant scalairement (14) par $\vec{\theta}_i$, et (22) par φ_i , et en additionnant membre à membre, on obtient l'équation:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varphi_i^2 + \frac{1}{2} \vec{\theta}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i \right) + \vec{\theta}_i \cdot \gamma_i - \text{div } \varphi_i \vec{\theta}_i = 0. \quad (23)$$

Le terme entre parenthèses représente la densité d'énergie du champ cristallin. Le vecteur $\varphi_i \vec{\theta}_i$ est le «vecteur de Poynting» du champ, i.e. la densité de courant d'énergie. Enfin le terme $\vec{\theta}_i \cdot \gamma_i$ représente le taux de variation d'une énergie propre de mouvement des dislocations, ou énergie cinétique des dislocations. L'énergie contenue dans un volume V est la somme de l'énergie du champ et de l'énergie cinétique des dislocations contenues dans V . Sa variation est égale au flux du vecteur de Poynting à travers la frontière de V . Le fait qu'il existe une énergie cinétique des dislocations nous incite à leur attribuer une certaine masse.

Remarque: Comme la masse spécifique du solide ne figure pas dans (19), toutes les grandeurs dynamiques ont dans cet exposé la dimension des grandeurs usuelles, divisées par la masse spécifique.

2.6. Force de Peach et Koehler

Une ligne de dislocation singulière peut être considérée comme un tube mince de section δS . On montre qu'en tout point P de cette ligne, les vecteurs β_i sont donnés par la formule $\beta_i = (b_i/\delta S) \mathbf{L}$, \mathbf{L} étant un vecteur unité tangent à la ligne de dislocation en P . Si dV est le volume d'un élément $d\mathbf{l}$ du tube, on a

$$\beta_i dV = b_i d\mathbf{l}. \quad (24)$$

D'après (23), l'intégrale de $\vec{\theta}_i \cdot \gamma_i$ étendue au volume de cette dislocation donne la dérivée de son énergie cinétique par rapport au temps. Compte tenu de (18) et de (24), cette intégrale s'écrit $\int \mathbf{v} \cdot (\vec{\theta}_i \wedge b_i d\mathbf{l})$. On voit donc que la grandeur $d\mathbf{F} = b_i \vec{\theta}_i \wedge d\mathbf{l}$ est la force agissant sur l'élément $d\mathbf{l}$ de la dislocation. La force par unité de longueur sera donc

$$\mathbf{f} = b_i \vec{\theta}_i \wedge \mathbf{L}. \quad (25)$$

On reconnaît la formule de Peach et Koehler [1].

3. Principe de moindre action

Il est montré dans ce paragraphe comment les équations du champ cristallin se déduisent d'un principe variationnel. L'avantage de la méthode variationnelle, outre son élégance, est ici de faire apparaître clairement qu'il y a deux types de forces agissant sur une dislocation en mouvement: celle de Peach et Koehler, due au champ de déformation, et une force cinétique due au champ de vitesse et dépendant de la vitesse propre de la dislocation. Elle correspond à la force magnétique sur une charge en mouvement. L'existence de cette force fait l'objet d'un débat scientifique dont on trouvera un compte rendu dans l'ouvrage de Nabarro [2]. Ce débat, portant sur des cas particuliers, est resté sans conclusion à l'heure actuelle. La méthode usuelle des auteurs qui ont abordé ce problème est d'assimiler la dislocation à son champ de déformation propre, et d'étudier l'interaction de ce champ propre avec le champ cristallin extérieur. Une telle interaction ne peut être mise en évidence que dans une théorie non linéaire, théorie pour laquelle on ne dispose d'aucune base expérimentale. Nous espérons que les considérations exposées dans ce paragraphe jetteront quelque lumière dans ce débat. Kosevich [3] a cherché avant nous les équations de mouvement

d'une dislocation par la méthode de Lagrange. Toutefois, son Lagrangien diffère du nôtre par un terme qui nous paraît essentiel, et dont l'omission a conduit cet auteur à des considérations que nous ne pouvons approuver.

3.1. L'action pour une boucle de dislocation

L'action pour un système d'objets classiques en interaction avec un champ se compose de trois termes:

- a) un terme cinétique S_{cin} qui ne dépend que de la vitesse des objets,
- b) un terme d'interaction avec le champ S_{inter} ,
- c) un terme S_{ch} qui ne concerne que le champ.

Par exemple, l'action pour un système de particules électriques dans l'approximation non relativiste s'écrit (à des coefficients près qui dépendent des unités):

$$S = \int \Sigma m v^2 dt + \int \Sigma (e \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e \varphi) dt + \frac{1}{2} \int (E^2 - H^2) dV dt , \quad (26)$$

expression dans laquelle, \mathbf{A} et φ sont les potentiels du champ, et \mathbf{E} et \mathbf{H} , les champs qui «dérivent» de \mathbf{A} et φ selon les formules bien connues.

Considérons une boucle de dislocation C . Sa configuration est décrite par une famille de vecteurs-lieu à deux paramètres $\mathbf{r}(\lambda, t)$, où t est le temps, et λ un paramètre sans dimension qui décrit la dislocation. On peut supposer que λ varie entre des limites fixes, par exemple 0 et 1, avec $\mathbf{r}(0, t) = \mathbf{r}(1, t)$. Posons

$$\partial \mathbf{r} / \partial \lambda = \boldsymbol{\tau} \quad \text{et} \quad \partial \mathbf{r} / \partial t = \mathbf{v} , \quad (27)$$

en supposant que la fonction \mathbf{r} vérifie la relation

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} = 0 . \quad (28)$$

Nous écrirons le terme cinétique de l'action

$$S_{cin} = \int_{t'}^{t''} \int_0^1 \frac{1}{2} \mu v^2 d\lambda dt . \quad (28)$$

$\mu = \mu(\lambda, t)$ est une fonction que nous appelons «masse spécifique» de la dislocation. C'est ce terme qui fait défaut chez Kosevich. Or il est indispensable pour deux raisons:

1° Comme on l'a vu au paragraphe précédent, le mouvement des dislocations s'accompagne d'une énergie cinétique propre aux dislocations. Il est donc logique de leur attribuer une certaine masse. Ce phénomène s'explique simplement si l'on considère le mouvement d'une dislocation coin rectiligne L dans son plan de glissement π . Soit S un référentiel en translation avec L . Il est clair que quel que soit le champ cristallin dans le solide, il existe un domaine D autour de L , dans lequel les vitesses de part et d'autre de π sont de sens contraires dans le référentiel S . Ce domaine possède un certain moment cinétique proportionnel à la vitesse v de L , de même qu'une certaine énergie cinétique proportionnelle à v^2 .

2° Le centre d'une dislocation est la région dans laquelle le champ cristallin ne vérifie pas les équations linéaires. Il y a dans cette région une concentration d'énergie

élastique qu'on ne sait pas évaluer. Cette quantité d'énergie doit se manifester par une certaine intertie, donc par une certaine masse.

Le terme

$$S_{inter} = \int_{t'}^{t''} \int_0^1 (\mathbf{v} \wedge b_i \mathbf{A}_i + b_i \mathbf{B}_i) \cdot \boldsymbol{\tau} d\lambda dt, \quad (29)$$

représentera l'interaction avec le champ. A l'aide de (18) et (24), il peut être présenté sous la forme plus symétrique:

$$S_{inter} = \int (\mathbf{A}_i \cdot \boldsymbol{\gamma}_i + \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\beta}_i) dV dt. \quad (30)$$

\mathbf{A}_i et \mathbf{B}_i sont des vecteurs auxquels on n'attribue aucune signification physique pour le moment, et qu'on appelle les potentiels du champ cristallin. En fait on a d'abord posé la formule (30), en choisissant comme Lagrangien d'interaction une expression linéaire simple.

3.2. Dislocation dans un champ extérieur

Pour étudier le mouvement d'une dislocation dans un champ extérieur, c'est-à-dire un champ qui ne dépend ni de la position ni de la vitesse de la dislocation, mais qui peut dépendre du temps, on utilisera le Lagrangien $L_{cin} + L_{inter}$ sous la forme

$$L = \frac{1}{2} \mu v^2 + (\mathbf{v} \wedge b_i \mathbf{A}_i + b_i \mathbf{B}_i) \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (31)$$

ou

$$L = \frac{1}{2} \mu v^2 + (b_i \mathbf{A}_i \wedge \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} + b_i \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (32)$$

Les équations de mouvement peuvent s'écrire sous la forme d'une seule équation vectorielle:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) + \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right). \quad (33)$$

En développant cette équation, on obtient

$$\frac{d}{dt} (\mu \mathbf{v}) = \boldsymbol{\tau} \wedge \left(\text{rot } b_i \mathbf{B}_i + b_i \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_i \right) + \boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{v} \operatorname{div} b_i \mathbf{A}_i. \quad (34)$$

Posons

$$\vec{\theta}_i = - \text{rot } \mathbf{B}_i - \partial \mathbf{A}_i / \partial t, \quad (34a)$$

et

$$\varphi_i = - \operatorname{div} \mathbf{A}_i. \quad (35)$$

$\vec{\theta}_i$ et φ_i sont les grandeurs qui représentent le champ cristallin. Compte tenu de la remarque du N° 2.5, μ a pour dimension L^3 , S_{cin} et $S_{inter} L^5 T^{-1}$, $\mathbf{A}_i L^2 T^{-1}$, $\mathbf{B}_i L^3 T^{-2}$, $\vec{\theta}_i L^2 T^{-2}$ et $\varphi_i L T^{-1}$. L'équation de mouvement devient

$$\frac{d}{dt} (\mu \mathbf{v}) = b_i \vec{\theta}_i \wedge \boldsymbol{\tau} + b_i \varphi_i \boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{v}. \quad (36)$$

On reconnaît dans le premier terme de droite la force de Peach et Koehler. Le second représente la force cinétique. Etant perpendiculaire à la vitesse de la dislocation, elle ne travaille pas. C'est la raison pour laquelle elle n'apparaît pas dans les exposés usuels qui calculent la force exercée sur une dislocation à partir du travail effectué lors d'un déplacement de cette dislocation. La formule (36) est l'analogue de celle de Lorentz:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e \mathbf{E} + e \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

pour une charge électrique. On a toujours comparé jusqu'ici la force de Peach et Koehler à la force magnétique $e \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, en vertu de leur analogie formelle. Peach et Koehler ont insisté les premiers là-dessus. On voit qu'en fait, elle correspond plutôt à la force électrique $e \mathbf{E}$, qui travaille.

Les formules (34) et (35) entraînent:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{\theta}_i.$$

On retrouve ainsi l'équation du champ (22). Il semble qu'on atteint avec ce formalisme la meilleure formulation actuelle de la dynamique des dislocations, dans le cas «non-relativiste». On appelle ainsi par abus de langage le cas où la vitesse du son dans le solide est grande vis-à-vis de celle des dislocations.

3.3. L'action pour le champ

Le terme S_{ch} de l'action devient indispensable si nous voulons trouver les équations qui déterminent le champ lui-même. Nous posons

$$S_{ch} = \frac{1}{2} \int (\vec{\theta}_i \cdot \boldsymbol{\epsilon}_i - \varphi_i^2) dV dt, \quad (37)$$

d'où l'action totale:

$$S = \int \frac{1}{2} \mu v^2 d\lambda dt + \int (\mathbf{A}_i \boldsymbol{\gamma}_i + \mathbf{B}_i \boldsymbol{\beta}_i) dV dt + \int \frac{1}{2} (\vec{\theta}_i \boldsymbol{\epsilon}_i - \varphi_i^2) dV dt. \quad (38)$$

Pour trouver S_{ch} , on est guidé par le fait que ce terme doit être quadratique relativement au champ pour que les équations déduites soient linéaires. D'autre part S_{ch} ne peut contenir les potentiels du champ, car ils ne sont pas définis univoquement. Ils admettent en effet la transformation de jauge

$$\mathbf{A}'_i = \mathbf{A}_i + \operatorname{rot} \mathbf{V}_i \quad \mathbf{B}'_i = \mathbf{B}_i - \partial \mathbf{V}_i / \partial t, \quad (39)$$

\mathbf{V}_i étant un champ quelconque. L'analogie électromagnétique aidant, on pose (37).

Pour obtenir les équations du champ à l'aide du principe de moindre action, il faut considérer que les mouvements des dislocations sont fixés, et faire varier le champ seulement. Il s'ensuit que la variation du premier terme de (38) est nulle, et que les grandeurs $\boldsymbol{\beta}_i$ et $\boldsymbol{\gamma}_i$ ne doivent pas varier dans le second. Il vient

$$\begin{aligned} \delta S &= \int (\delta \mathbf{A}_i \cdot \boldsymbol{\gamma}_i + \delta \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\beta}_i) dV dt + \int (\boldsymbol{\epsilon}_i \cdot \delta \vec{\theta}_i - \varphi_i \delta \varphi_i) dV dt \\ &= \int \left\{ \delta \mathbf{A}_i \cdot \boldsymbol{\gamma}_i + \delta \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\epsilon}_i \cdot \left(\operatorname{rot} \delta \mathbf{B}_i + \frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{A}_i \right) + \varphi_i \operatorname{div} \delta \mathbf{A}_i \right\} dV dt \end{aligned}$$

$$= \int \left\{ \delta \mathbf{A}_i \cdot \boldsymbol{\gamma}_i + \delta \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\beta}_i + \operatorname{div} (\boldsymbol{\varepsilon}_i \wedge \delta \mathbf{B}_i) - \delta \mathbf{B}_i \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\varepsilon}_i - \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \delta \mathbf{A}_i) \right. \\ \left. + \delta \mathbf{A}_i \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i}{\partial t} + \operatorname{div} (\varphi_i \cdot \delta \mathbf{A}_i) - \delta \mathbf{A}_i \cdot \operatorname{grad} \varphi_i \right\} dV dt .$$

L'intégrale des termes $\operatorname{div} (\boldsymbol{\varepsilon}_i \wedge \delta \mathbf{B}_i)$ et $\operatorname{div} (\varphi_i \cdot \delta \mathbf{A}_i)$ se transforme en une intégrale de surface sur la surface de l'infini où les champs sont nuls. Ensuite l'intégrale du terme $(\partial/\partial t) (\boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \delta \mathbf{A}_i)$ sur le temps est nulle, car les variations $\delta \mathbf{A}_i$ sont nulles aux extrémités de l'intervalle de temps. On peut donc laisser tomber tous ces termes. Les $\delta \mathbf{A}_i$ et les $\delta \mathbf{B}_i$ étant indépendants, la condition $\delta S = 0$ entraîne

$$\boldsymbol{\gamma}_i = - \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i}{\partial t} + \operatorname{grad} \varphi_i , \quad \boldsymbol{\beta}_i = \operatorname{rot} \boldsymbol{\varepsilon}_i .$$

On retrouve ainsi les équations fondamentales (12) et (14).

4. Champs cristallins macroscopiques

On sait que dans tout solide cristallin, il existe un réseau de dislocations à trois dimensions (réseau de Frank), dont la maille moyenne présente une arête de 10^{-1} à 10^{-2} mm pour les cristaux les mieux recuits. Ceci nous conduit à chercher les équations des champs cristallins moyens, ou «macroscopiques», en effectuant la moyenne des champs exacts ou «microscopiques» sur des éléments de volume assez grands par rapport à la maille du réseau de dislocations. Soit par exemple $u(x, y, z, t)$ une composante d'un champ quelconque. La moyenne de u est le champ $\langle u \rangle$ défini par

$$\langle u \rangle = U(x, y, z, t) = (1/L^3) \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} u(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t) d\xi d\eta d\zeta ,$$

L étant une longueur arbitraire satisfaisant à la condition ci-dessus. On vérifie que

$$\langle \partial u / \partial x \rangle = \partial \langle u \rangle / \partial x , \quad \langle \partial u / \partial t \rangle = \partial \langle u \rangle / \partial t , \text{ etc. ...}$$

C'est la méthode de Lorentz pour déduire les équations des champs électromagnétiques dans la matière des équations de Maxwell pour le vide.

En ce qui concerne leurs propriétés mécaniques, on peut distinguer parmi les solides deux classes importantes qui diffèrent par la propriété suivante: un champ de contrainte moyen $\boldsymbol{\tau}_i = \langle \vec{\theta}_i \rangle$ non nul crée dans un solide de la première espèce un courant de dislocation moyen non nul, tandis que ce n'est pas le cas pour un solide de la seconde espèce. Les solides de la première espèce sont dits *plastiques*. Nous appellerons *diélastiques* ceux de la seconde espèce, car la distinction entre ces deux espèces est tout-à-fait analogue à celle qui existe entre conducteurs et diélectriques. Il est entendu que nous venons de définir des comportements idéaux, et qu'un même corps peut appartenir à l'une ou l'autre catégorie selon la valeur du champ de déformation, et de la fréquence.

Dans ce paragraphe, on considérera toujours un réseau de dislocations occupant un domaine fini d'un cristal infini. C'est un tel domaine que nous appellerons brièvement

ment un «corps». Nous choisirons toujours la surface du corps de façon qu'elle ne coupe aucune des dislocations du réseau. Par contre, il pourra y avoir des dislocations extérieures traversant le corps.

Il est clair que lorsqu'on s'éloigne du corps, les champs moyens deviennent très rapidement identiques aux champs microscopiques. C'est pourquoi on les identifiera souvent à l'extérieur de la surface du corps.

4.1. *Les équations des champs cristallins macroscopiques*

Considérons un corps D de surface Σ , dans un cristal infini, et supposons d'abord qu'il n'y a pas de dislocations extérieures. On a donc

$$\langle \beta_i \rangle = 0 \text{ sur } \Sigma \text{ et à l'extérieur.} \quad (40)$$

Si \mathbf{E}_i désigne le champ de déformation moyen, on a

$$\langle \beta_i \rangle = \mathbf{rot} \mathbf{E}_i, \quad (41)$$

et

$$\operatorname{div} \langle \beta_i \rangle = 0. \quad (42)$$

(40) et (42) montrent que $\langle \beta_i \rangle$ peut s'écrire comme le rotationnel d'un autre champ $-\mathbf{P}_i$, nul sur Σ et à l'extérieur:

$$\langle \beta_i \rangle = -\operatorname{rot} \mathbf{P}_i. \quad (43)$$

Par analogie avec l'électricité, nous appellerons \mathbf{P}_i «champ de polarisation élastique» du corps. On montre que

$$\int_D \mathbf{P}_i \, dV = -\frac{1}{2} \int_D \mathbf{r} \wedge \langle \beta_i \rangle \, dV. \quad (44)$$

L'intégrale de droite représente le «moment de la distribution $\langle \beta_i \rangle$ », qu'on peut appeler «moment élastique du corps D », de sorte que les vecteurs $-\mathbf{P}_i$ sont les moments élastiques par unité de volume. Le champ

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{E}_i + \mathbf{P}_i \quad (45)$$

est tel que

$$\operatorname{rot} \mathbf{D}_i = 0. \quad (46)$$

A l'extérieur du corps, $\mathbf{D}_i = \mathbf{E}_i$, et il existe dans tout l'espace un champ de déplacement U_i tel que $\mathbf{D}_i = \mathbf{grad} U_i$.

Si l'on fait passer des dislocations extérieures à travers le corps, leur densité $\beta_{i,ex}$ doit être ajoutée au membre de droite de (46), de sorte que

$$\operatorname{rot} \mathbf{D}_i = \beta_{i,ex}. \quad (47)$$

La contrainte moyenne τ_i vérifie l'équation

$$\tau_{ij} = c_{ijk\ell} E_{k\ell}, \quad (48)$$

et la vitesse moyenne $V_i = \langle \varphi_i \rangle$:

$$\partial V_i / \partial t = \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_i . \quad (49)$$

(14) entraîne pour le courant moyen de dislocation:

$$\langle \boldsymbol{\gamma}_i \rangle = -\partial \mathbf{E}_i / \partial t + \operatorname{grad} V_i . \quad (50)$$

L'équation de continuité relie aussi $\langle \boldsymbol{\gamma}_i \rangle$ et $\langle \boldsymbol{\beta}_i \rangle$:

$$\operatorname{rot} \langle \boldsymbol{\gamma}_i \rangle + \partial \langle \boldsymbol{\beta}_i \rangle / \partial t = 0 . \quad (51)$$

On peut l'écrire aussi pour les dislocations extérieures:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\gamma}_{i,ex} + \partial \boldsymbol{\beta}_{i,ex} / \partial t = 0 .$$

Il s'ensuit d'après (47) que

$$\operatorname{rot} (\partial \mathbf{D}_i / \partial t + \boldsymbol{\gamma}_{i,ex}) = 0 . \quad (52)$$

L'expression entre parenthèses est donc le gradient d'un champ scalaire qu'on notera H_i :

$$\operatorname{grad} H_i = \boldsymbol{\gamma}_{i,ex} + \partial \mathbf{D}_i / \partial t . \quad (53)$$

A l'extérieur du corps, on a $\mathbf{D}_i = \mathbf{E}_i$, et (53) doit être identique à (50). Ainsi les champs H_i et V_i sont identiques à l'extérieur du corps. Ils correspondent aux champs \mathbf{H} et \mathbf{B} de l'électromagnétisme, et (53) correspond à la relation $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$. Le champ

$$M_i = V_i - H_i \quad (54)$$

qui vérifie l'équation

$$\langle \boldsymbol{\gamma}_i \rangle = -\operatorname{grad} M_i + \partial \mathbf{P}_i / \partial t , \quad (55)$$

est analogue à l'aimantation en électromagnétisme. S'il n'est pas nul, il est du à des mouvements du réseau de dislocation. Sans tirer de conclusion sur l'existence de tels mouvements, nous utiliserons par la suite les grandeurs H_i et V_i sans faire aucune hypothèse sur leur différence, que le lecteur peut très bien supposer toujours nulle.

4.2. Champs constants dans un diélastique

Un champ de déformation constant dans un diélastique vérifie les équations (41), (45), (47), et l'équation

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_i = 0 . \quad (56)$$

Les relations thermodynamiques dans un diélastique font l'objet de ce paragraphe.

Pour provoquer une petite variation quasi-statique du champ dans un corps, il faut fournir un travail δR égal à la somme de deux termes:

- a) une variation d'énergie δW à l'intérieur du corps,
- b) une variation d'énergie extérieure.

Le terme δW est égal au flux du vecteur de Poynting $\varphi_i \vec{\theta}_i$ pendant un intervalle de temps δt , à travers la surface Σ du corps D . Comme $\beta_i = 0$ sur Σ , $\varphi_i = \partial u_i / \partial t$, donc

$$\delta W = \int_{\Sigma} d\boldsymbol{\sigma} \cdot (\delta u_i \vec{\theta}_i) .$$

D'autre part, si Σ est assez éloignée du réseau de dislocations, les champs microscopiques sur Σ sont égaux aux champs moyens, de sorte que

$$\delta W = \int_{\Sigma} d\boldsymbol{\sigma} \cdot (\delta U_i \boldsymbol{\tau}_i) = \int_D \operatorname{div} (\delta U_i \boldsymbol{\tau}_i) dV ,$$

car le champ U_i est défini dans tout l'espace. Compte tenu de (56) il vient

$$\delta W = \int_D \boldsymbol{\tau}_i \cdot \delta \mathbf{D}_i dV .$$

La variation d'énergie à l'extérieur du corps est l'intégrale $\int \vec{\theta}_i \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_i dV$ étendue à tout l'espace extérieur. Comme dans toute cette région, $\vec{\theta}_i = \boldsymbol{\tau}_i$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{E}_i = \mathbf{D}_i$, on a finalement

$$\delta R = \int_{\text{espace}} \boldsymbol{\tau}_i \cdot \delta \mathbf{D}_i dV . \quad (57)$$

L'énergie interne d'un corps comprend l'énergie du champ cristallin microscopique des dislocations qui n'est pas nulle même lorsque la déformation moyenne est nulle. La densité de cette énergie est $w = 1/2 \vec{\theta}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i$. Or, comme $\operatorname{div} \vec{\theta}_i = 0$, il existe un champ $\boldsymbol{\alpha}_i$ tel que $\vec{\theta}_i = \operatorname{rot} \boldsymbol{\alpha}_i$. On a donc

$$w = \frac{1}{2} (\operatorname{rot} \boldsymbol{\alpha}_i) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\operatorname{rot} \boldsymbol{\varepsilon}_i) \cdot \boldsymbol{\alpha}_i - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\boldsymbol{\alpha}_i \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_i) .$$

La déformation moyenne étant supposée nulle, on admet que les champs décroissent assez rapidement à l'extérieur du corps pour que l'intégrale du deuxième terme, transformée en intégrale de surface soit nulle. La densité d'énergie «microscopique» est donc simplement

$$w = \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\beta}_i .$$

La différentielle de la densité d'énergie interne sera

$$dU = T dS + \boldsymbol{\alpha}_i \cdot d\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\tau}_i \cdot d\mathbf{D}_i . \quad (58)$$

U représente l'énergie interne par unité de volume et de masse. L'énergie interne totale du corps est l'intégrale $\int \varrho U dV$, étendue à tout l'espace. On a de même pour l'énergie libre

$$dF = -S dT + \boldsymbol{\alpha}_i \cdot d\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\tau}_i \cdot d\mathbf{D}_i . \quad (59)$$

L'énergie libre totale du corps sera de même l'intégrale $\int \varrho F dV$, étendue à tout l'espace. Ce dernier fait peut surprendre. Mais il faut considérer qu'un changement

quelconque du corps peut entraîner une variation du champ dans tout l'espace, champ dont l'énergie doit ainsi figurer dans l'expression du travail effectué pour ce changement.

Un diélastique linéaire est un corps pour lequel il existe une relation linéaire entre D_i et E_i :

$$D_{ij} = d_{ijkl} E_{kl} . \quad (60)$$

Le tenseur d_{ijkl} s'appellera tenseur des constantes diélastiques. Ses composantes sont des nombres sans dimension. On pourra écrire:

$$U = U_0(S, \beta_i) + \frac{1}{2} c_{ijkl} d_{ijmn} E_{kl} E_{mn} , \quad (61)$$

$$F = F_0(T, \beta_i) + \frac{1}{2} c_{ijkl} d_{ijmn} E_{kl} E_{mn} . \quad (62)$$

Notons la symétrie:

$$c_{ijkl} d_{ijmn} = c_{ijmn} d_{ijkl} . \quad (62a)$$

Elle provient du fait que

$$c_{ijkl} d_{ijmn} = \partial^2 F / (\partial E_{kl} \partial E_{mn}) . \quad (63)$$

4.3. Courant de dislocation constant

Considérons un courant moyen de dislocation constant dans un solide plastique. Il vérifie les équations

$$\text{rot } \langle \gamma_i \rangle = 0 , \quad (64)$$

et

$$\langle \gamma_i \rangle = \mathbf{grad} V_i . \quad (65)$$

Le champ de déformation, constant lui aussi, vérifie l'équation

$$c_{ijkl} \partial_j E_{kl} = 0 .$$

Ces équations doivent être complétées par une relation entre $\langle \gamma_i \rangle$ et E_i . Nous envisageons ici le cas d'un corps plastique linéaire idéal, pour lequel on a:

$$\langle \gamma_{ij} \rangle = \sigma_{ijkl} E_{kl} . \quad (66)$$

On tire alors de (65):

$$\partial_i V_j = \sigma_{ijkl} E_{kl} . \quad (67)$$

4.4. Champs variables dans un diélastique

Nous considérons tout d'abord des fréquences pour lesquelles la relation (60) est valable, et nous supposons de plus qu'il existe une relation linéaire:

$$V_i = \lambda_{ij} H_j . \quad (68)$$

Les équations (49), (53) avec $\gamma_{i,ex} = 0$, (60), et (68), entraînent l'équation d'onde:

$$\partial^2 V_i / \partial t^2 = g_{ijkl} \partial_j \partial_k V_l , \quad (69)$$

dans laquelle on a posé:

$$g_{ijkl} = c_{ijmn} d_{mnkr}^{-1} \lambda_{rl}^{-1} . \quad (70)$$

(d^{-1} et λ^{-1} sont les matrices inverses de d et λ). En comparant (69) et (21), on voit comment la propagation des ondes dans un cristal est modifiée par la présence d'un réseau diélastique de dislocations. Toutes les mesures de constantes élastiques par des méthodes de vitesse du son, sont en fait des mesures des constantes g_{ijkl} .

Nous étudierons maintenant les champs dont la période est comparable au temps de relaxation des dislocations. Nous entendons par là le temps moyen que mettrait un segment du réseau de dislocations à reprendre sa configuration à la suite d'une déformation.

Lorsque la fréquence augmente, la longueur d'onde λ peut devenir égale à la dimension a des mailles du réseau de dislocations, de sorte que la description macroscopique du champ n'a plus de sens. Cependant, si l'on admet avec la plupart des auteurs que la vitesse v des dislocations est toujours très inférieure à la vitesse du son c , il se trouve qu'à la fréquence de dispersion maximum, la description macroscopique du champ est encore valable. Il s'agit en effet de la fréquence $1/\tau$, où τ , le temps de relaxation des dislocations est de l'ordre de grandeur de a/v , et cette fréquence correspond à la longueur d'onde $\lambda = c a/v$, qui est grande par rapport à a .

Contrairement au cas des champs lentement variables, $D_i(t)$ ne dépend pas seulement de la valeur de E_i à l'instant t , mais en général de la valeur de E_i à tous les instants antérieurs. Cela provient du retard mis par la polarisation à s'établir. La relation linéaire de ce type la plus générale s'écrit:

$$D_{ij}(t) = E_{ij}(t) + \int_0^\infty f_{ijkl}(\tau) E_{kl}(t - \tau) d\tau . \quad (71)$$

$f_{ijkl}(\tau)$ est une fonction qui dépend des propriétés du corps. Pour une onde sinusoïdale de fréquence circulaire ω , on peut écrire:

$$D_{ij} = d_{ijkl}(\omega) E_{kl} , \quad (72)$$

avec

$$d_{ijkl}(\omega) = \delta_{ik} \delta_{jl} + \int_0^\infty f_{ijkl}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau . \quad (73)$$

Les fonctions $d_{ijkl}(\omega)$ sont en général complexes. Nous pouvons établir leur forme dans deux cas limites: les corps plastiques aux basses fréquences, et les corps quelconques aux hautes fréquences.

Dans le premier cas, l'équation (53) entraîne $\partial_i V_j = \partial D_{ij} / \partial t$, si l'on suppose que $\gamma_{i,ex} = 0$ et que $V_i = H_i$. Cette équation doit être identique à (67). Or, pour une onde sinusoïdale, on a $\partial D_{ij} / \partial t = -i\omega d_{ijkl}(\omega) E_{kl}$. Il s'ensuit que

$$d_{ijkl}(\omega) = (i/\omega) \sigma_{ijkl} . \quad (74)$$

Lorsque ω tend vers l'infini, la fonction $d_{ijkl}(\omega)$ doit tendre vers $\delta_{ik}\delta_{jl}$. En effet lorsque le champ varie assez rapidement, le processus de polarisation ne peut pas se produire. Lorsque la fréquence est grande vis-à-vis de celle des dislocations, on peut calculer la polarisation en considérant les dislocations comme libres et en négligeant leurs interactions. Les distances parcourues par une dislocation pendant une période du champ étant petites par rapport à la longueur d'onde, nous pouvons supposer le champ uniforme en calculant la vitesse acquise par une dislocation dans ce champ. On obtient cette vitesse par la formule (36) dans laquelle on néglige le deuxième terme:

$$d\mathbf{v}/dt = (1/\mu) b_i \boldsymbol{\tau}_i \wedge \boldsymbol{\lambda} . \quad (75)$$

On désigne ici par $\boldsymbol{\lambda}$ le vecteur unité tangent à la dislocation au point considéré, et par $\boldsymbol{\tau}_i$ le champ de contrainte de l'onde. En supposant qu'il s'agit d'une onde sinusoïdale, le déplacement \mathbf{r} d'un point de la dislocation est donné par

$$\mathbf{r} = - (b_i/\mu \omega^2) \boldsymbol{\tau}_i \wedge \boldsymbol{\lambda} . \quad (76)$$

La polarisation \mathbf{P}_j étant le moment élastique par unité de volume, on l'écrit

$$\mathbf{P}_j = \Sigma \frac{1}{2} b_j \int \mathbf{r} \wedge d\mathbf{l} , \quad (77)$$

c'est-à-dire comme une somme d'intégrales sur toutes les dislocations contenues dans une unité de volume. On calcule que

$$P_{ij} = - (\chi_{ijkl}/\omega^2) E_{kl} , \quad (78)$$

avec

$$\chi_{ijkl} = \Sigma (b_m b_j / 2 \mu) \int dl (\lambda_i \lambda_n - \delta_{in}) c_{mnkl} . \quad (79)$$

χ_{ijkl} est un facteur de structure, caractérisant le réseau de dislocations. Comme $D_{ij} = E_{ij} + P_{ij}$, on a

$$d_{ijkl}(\omega) = \delta_{ik}\delta_{jl} - (1/\omega^2) \chi_{ijkl} . \quad (80)$$

5. Travaux importants

Les premiers travaux importants concernant la théorie des dislocations, sont ceux de Weingarten [4] et Volterra [5], relatifs aux corps élastiques multiplement connexes. C'est en traduisant ces travaux que Love [6] introduit le terme de dislocation. Ce terme prend sa signification actuelle de défaut de structure avec Taylor [7]. Burgers [8] et Frank [9] définissent les concepts de base de la théorie des dislocations dans les cristaux. Nye [10] introduit le tenseur de densité de dislocation. Kröner [11] met au point une méthode pour calculer le champ de contrainte dans un continu élastique d'une distribution de dislocations donnée par son tenseur densité. Kondo [12], Bilby et al. [13], développent la théorie mathématique des déformations incompatibles. Le centre des dislocations est l'objet du travail fondamental de Peierls [14].

Remerciements

Je remercie mon directeur de thèse, Monsieur le Professeur B. Vittoz pour le soutien constant qu'il m'a apporté. Je dois à mes collègues J. J. Paltenghi et W. Benoit, une grande reconnaissance pour les nombreuses discussions que nous avons eues. Ce travail a été possible grâce aux subsides du Fonds National Suisse pour la Recherche Scientifique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. PEACH et J. S. KOEHLER, Phys. Rev. 80, 436 (1950).
- [2] F. R. N. NABARRO, *Theory of Crystal Dislocations*, Oxford University Press (1967).
- [3] A. M. KOSEVICH, Soviet Phys. JETP 16, 455 (1963).
- [4] G. WEINGARTEN, Rend. R. Acad. Lincei, 5e sér., Vol. 10 (1901).
- [5] V. VOLTERRA, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*, Ann. Ec. norm. sup. 24 (1907).
- [6] A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge (1927).
- [7] G. I. TAYLOR, Proc. Roy. Soc. A 145, 362 (1938).
- [8] J. M. BURGERS, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. 42, 293, 378 (1939).
- [9] F. C. FRANK, Phil. Mag. 42, 809 (1951).
- [10] J. F. NYE, Acta Met. 1 (1953).
- [11] E. KRÖNER, *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Springer (1958).
- [12] K. KONDO, Proc. 2 Japan Nat. Congress of Applied Mech. (1952).
- [13] B. A. BILBY, *Continuous Distributions of Dislocations*, Progress in Solid Mechanics, Sneddon and Hill eds., North-Holland (1964).
- [14] R. PEIERLS, Proc. Phys. Soc. London 52, 34 (1940).