

<b>Zeitschrift:</b>	Helvetica Physica Acta
<b>Band:</b>	42 (1969)
<b>Heft:</b>	4
<b>Artikel:</b>	Fonction de portée effective et déplacement en énergie des états liés en présence d'un potentiel coulombien modifié
<b>Autor:</b>	Lambert, E.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-114085">https://doi.org/10.5169/seals-114085</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Fonction de portée effective et déplacement en énergie des états liés en présence d'un potentiel coulombien modifié<sup>1)</sup>

par E. Lambert

Institut de Physique, Université de Neuchâtel

(27 XII 68)

*Abstract.* We first recall some properties of the confluent hypergeometric functions then from these we build the usual Coulomb functions paying special attention to their analytical properties. An irregular solution of the Coulomb problem, entire in  $k^2$ , is then built for all  $l$ . From this solution an effective range function, meromorphic in  $k^2$ , is established when a finite range additional interaction is present. We simply connect the energy shifts of the bound states, produced by this additional interaction, to the scattering length.

## I. Introduction

Afin d'éviter au lecteur de fréquents retours à la littérature, nous résumons au début de ce travail quelques propriétés, analytiques pour la plupart, des fonctions hypergéométriques confluentes. Pour l'essentiel cette partie est extraite de [1].

Ensuite nous passons au problème de Coulomb en traitant simultanément le cas répulsif et le cas attractif et nous restreignant à des  $l$  entiers. Nous définissons les fonctions coulombiennes  $F_l$  et  $G_l$  [2] à partir de la solution régulière  $\phi_l$  et des solutions de Jost  $f_l^{(\pm)}$  de l'équation de Schrödinger radiale. Les propriétés analytiques en  $k$  de ces solutions sont données ainsi que quelques comportements limites. D'autre part, une solution  $\theta_l$  irrégulière en  $r$  à l'origine et entière en  $k^2$  est construite explicitement pour tout  $l$ .

Introduisant ensuite une interaction additionnelle de portée finie nous construisons de façon simple une fonction de portée effective  $Z^e(l, k^2)$  méromorphe en  $k^2$  généralisant ainsi la fonction de Bethe-Landau-Smorodinsky [3].

Dans la dernière partie de ce travail nous lions ce développement de portée effective au déplacement en énergie des états liés dans un potentiel coulombien modifié par une interaction de portée finie (atomes mésiques) généralisant à tout  $l$  le résultat de TRUEMAN [4] par une expression sans bois mort [5].

## II. Fonctions hypergéométriques confluentes

Ces fonctions sont les solutions de l'équation hypergéométrique confluente:

$$z \frac{d^2y}{dz^2} + (c - z) \frac{dy}{dz} - a y = 0 \quad (2.1)$$

où  $a$  et  $c$  sont des paramètres complexes.

C'est une équation linéaire du 2ème ordre possédant deux singularités régulières en  $0$  et  $\infty$ . Cette équation provient de l'équation hypergéométrique:

$$z(1-z) \frac{d^2y}{dz^2} + [c - (a + b + 1)z] \frac{dy}{dz} - ab y = 0 . \quad (2.2)$$

<sup>1)</sup> Ce travail a bénéficié de l'aide financière du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique.

(2.2) possède 3 singularités régulières en 0, 1 et  $\infty$ . C'est par confluence de ses singularités en 1 et  $\infty$  à l'infini que l'on obtient (2.1).

### 1) Solutions du premier type

Pour autant que  $c \notin \mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  on a deux solutions linéairement indépendantes de (2.1) notées  $y_1$  et  $y_2$  et données par :

$$y_1 = \Phi(a, c; z), \quad (2.3)$$

$$y_2 = z^{1-c} \Phi(a - c + 1, 2 - c; z) \quad (2.4)$$

où

$$\Phi(a, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}. \quad (2.5)$$

Si $c = \dots, -2, -1, 0$	$y_1$ n'est pas définie
si $c = 1$	$y_1 = y_2$
si $c = 2, 3, 4, \dots$	$y_2$ n'est pas définie.

On peut cependant introduire les solutions du premier type modifiées

$$\tilde{y}_1 = \frac{y_1}{\Gamma(c)} \quad \text{et} \quad \tilde{y}_2 = \frac{y_2}{\Gamma(2-c)}$$

définies pour tout  $c \in \mathbf{C}$  et coïncidant pour  $c \in \mathbf{Z}$ .

Mentionnons maintenant quelques propriétés de ces solutions :

a) On a l'importante relation de Kummer

$$\Phi(a, c; z) = e^z \Phi(c - a, c; -z). \quad (2.6)$$

b) Considérée comme fonction de  $a$  ou de  $z$  la fonction  $\Phi(a, c; z)$  est entière. En tant que fonction de  $c$  elle est méromorphe avec des pôles simples en  $c = 0, -1, -2, \dots$ . Il s'ensuit que  $\tilde{y}_1$  est une fonction entière en ses 3 variables.

c) Les propriétés d'analyticité de  $y_2$  découlent de celles de  $y_1$ . En particulier on voit que  $y_2$  est une fonction multiforme en  $z$  et on définit sa branche principale en coupant le plan  $z$  selon le demi-axe réel négatif. Alors :

$$y_2(z e^{2im\pi}) = e^{2im\pi(1-c)} y_2(z); \quad -\pi < \arg z < \pi \quad m \in \mathbf{Z} \quad (2.7)$$

d) On a les limites :

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} \Phi(a, c; z) = 1 \quad (2.8)$$

$$\Phi(a, c; z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} \left(\frac{e^{i\pi\varepsilon}}{z}\right)^a + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-c}. \quad (2.9)$$

Pour l'application de cette dernière relation il faut prendre  $-\pi < \arg z < \pi$  (bien que  $\Phi(a, c; z)$  soit entière en  $z$ ) et  $\varepsilon = \operatorname{sgn}[\operatorname{Im}(z)]$ .

### 2) Solutions du 2<sup>e</sup> type

L'introduction de ce type de solutions est nécessaire afin d'obtenir une seconde solution de (2.1) lorsque  $c \in \mathbf{Z}$ . On les obtient par une combinaison linéaire judicieuse de  $y_1$  et  $y_2$  et à l'aide de la relation de Kummer (2.6) :

$$y_3 = \Psi(a, c; z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} \Phi(a, c; z) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} z^{1-c} \Phi(a - c + 1, 2 - c; z) \quad (2.10)$$

$$y_4 = e^z \Psi(c - a, c; -z). \quad (2.11)$$

Ces deux nouvelles solutions sont toujours définies et linéairement indépendantes. Elles sont en général multiformes et on coupe à nouveau le plan  $z$  selon le demi-axe réel négatif pour définir leur branche principale. Lorsque  $c = 1, 2, \dots$  on a:

$$\begin{aligned} \Psi(a, n+1; z) &= \lim_{c \rightarrow n+1} \Psi(a, c; z) = \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(n+1) \Gamma(a-n)} \\ &\times \left\{ \ln z \Phi(a, n+1; z) + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+r) \Gamma(n+1)}{\Gamma(a) \Gamma(n+1+r)} \right. \\ &\times [\psi(a+r) - \psi(1+r) - \psi(1+n+r)] \frac{z^r}{r!} \Big\} \\ &+ \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(a)} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\Gamma(a-n+s) \Gamma(1-n)}{\Gamma(a-n) \Gamma(1-n+s)} \frac{z^{s-n}}{s!} \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

expression dans laquelle la dernière somme doit être ignorée si  $n = 0$  et où  $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$  est la fonction di-gamma.

Lorsque  $c = \dots, -2, -1, 0$  on utilisera (2.13) puis (2.12).

Voyons maintenant quelques propriétés de ces solutions:

c) A partir de (2.10) on voit que:

$$\Psi(a, c; z) = z^{1-c} \Psi(a-c+1, 2-c; z) . \quad (2.13)$$

b) Pour autant que  $|z| > 0$ ,  $\Psi(a, c; z)$  est une fonction entière en  $a$  et  $c$ . Considérée comme fonction de  $z$ ,  $\Psi(a, c; z)$  est en général multiforme et singulière à l'origine. On définit sa branche principale, alors analytique, en coupant le plan  $z$  selon le demi-axe réel  $\leq 0$ . On a:

$$\Psi(a, c; z e^{2im\pi}) = \Psi(a, c; z) + (e^{-2im\pi c} - 1) \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} z^{1-c} \Phi(a-c+1, 2-c; z) \quad (2.14)$$

$$m \in \mathbf{Z}, \quad -\pi < \arg z < \pi$$

et si  $c = 1, 2, \dots$

$$\Psi(a, n+1; z e^{2im\pi}) = \Psi(a, n+1; z) + \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(n+1) \Gamma(a-n)} 2im\pi \Phi(a, n+1; z) \quad (2.15)$$

$\Psi(a, c; z)$  est donc entière en  $z$  si  $a = 0, -1, -2, \dots$

c) On a la relation

$$\Phi(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} e^{i\epsilon\pi a} \Psi(a, c; z) + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^{i\pi\epsilon(a-c)} e^z \Psi(c-a, c; -z) \quad (2.16)$$

$$\epsilon = \operatorname{sgn} \operatorname{Im}(z) .$$

d) On a les limites

$$\Psi(a, c; z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{\sim} z^{-a} \quad -\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \quad (2.17)$$

$$\Psi(a, c; z) \underset{|z| \rightarrow 0}{\sim} \begin{cases} \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} z^{1-c} & \operatorname{Re}(c) > 1 \\ \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} & \operatorname{Re}(c) < 1 \\ \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} z^{1-c} & \operatorname{Re}(c) = 1, c \neq 1 \\ -\frac{\ln z}{\Gamma(a)} & c = 1 . \end{cases} \quad (2.18)$$

e) Les différents ensembles de solutions parmi lesquels on peut choisir 2 solutions linéairement indépendantes de notre équation (2.1), selon les valeurs de  $a$ ,  $c$ ,  $c-a$ , sont donnés dans la figure 1.

$a \notin \mathbb{Z}$ $c \notin \mathbb{Z}$ $c-a \notin \mathbb{Z}$	$a \notin \mathbb{Z}$ $c \in \mathbb{Z}$	$a=1,2,\dots$ $c \notin \mathbb{Z}$	$a=0,1,\dots$ $c \notin \mathbb{Z}$	$a \notin \mathbb{Z}$ $c-a=1,2,\dots$	$a \notin \mathbb{Z}$ $c-a=0,-1,\dots$	$a=1,2,\dots$ $c-a=1,2,\dots$	$a=1,2,\dots$ $c-a=0,-1,\dots$	$a=0,1,\dots$ $c-a=1,2,\dots$	$a=0,1,\dots$ $c-a=0,-1,\dots$
$\tilde{y}_1$	•	•	•	•	•	•	•	•	0
$\tilde{y}_2$	•	•	•	•	•	0	•	•	•
$y_3$	•	•	•	•	•	•	•	•	•
$y_4$	•	•	•	•	•	•	•	•	•

Figure 1

Groupements de solutions de l'équation hypergéométrique confluente parmi lesquels on peut en choisir deux linéairement indépendants.

### III. Fonctions coulombiennes

L'équation de Schrödinger radiale en présence d'un champ coulombien est:

$$\psi_l''(k, r) + \left[ k^2 - \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \psi_l(k, r) = 0 \quad (3.1)$$

où

$$\beta = \frac{2\mu Z_1 Z_2 e^2}{\hbar^2}. \quad (3.2)$$

Introduisant le paramètre de Coulomb

$$\alpha = \frac{\beta}{2k} \quad (3.3)$$

et posant

$$\omega = 2ikr,$$

$$\tilde{\psi}_l(\omega) = e^{\omega/2} \omega^{-l-1} \psi_l(k, r)$$

(3.1) devient

$$\omega \tilde{\psi}_l''(\omega) + [(2l+2) - \omega] \tilde{\psi}_l'(\omega) - [l+1 - i\alpha] \tilde{\psi}_l(\omega) = 0$$

qui est l'équation hypergéométrique confluente avec

$$a = l+1 - i\alpha \quad \text{et} \quad c = 2l+2.$$

#### 1) Solution régulière à l'origine

En vertu du chapitre II, la seule solution de ce type pour chaque  $l$  est:

$$\tilde{\phi}_l(k, r) = e^{-ikr} (2ikr)^{l+1} \Phi(l+1 - i\alpha, 2l+2; 2ikr). \quad (3.4)$$

En théorie de la diffusion on travaille en général avec la solution normée par

$$\lim_{|r| \rightarrow 0} \phi_l(k, r) r^{-l-1} = 1. \quad (3.5)$$

Alors

$$\phi_l(k, r) = r^{l+1} e^{-ikr} \Phi(l+1 - i\alpha, 2l+2; 2ikr). \quad (3.6)$$

Nous avons:

- a)  $\phi_l$  est une fonction entière en  $r$  (cf. chap. II).
- b) D'après le théorème de POINCARÉ [6],  $\phi_l$  est une fonction entière en  $k^2$ .
- c) (2.6) nous donne:

$$\phi_l(-k, r) = \phi_l(k, r) \quad (3.7)$$

d)

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow 0} \phi_l(k, r) = \frac{(2l+1)!!r}{k^l} j_l(kr) \quad (3.8)$$

$j_l$ : fonction de Bessel sphérique d'ordre  $l$ .

e)

$$\phi_l(0, r) = \lim_{|k| \rightarrow 0} \phi_l(k, r) = \begin{cases} \frac{\Gamma(2l+2)}{\beta^{l+1}} (\beta r)^{1/2} I_{2l+1}[2(\beta r)^{1/2}] & \beta > 0 \\ \frac{\Gamma(2l+2)}{|\beta|^{l+1}} (|\beta| r)^{1/2} J_{2l+1}[2(|\beta| r)^{1/2}] & \beta < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

$I_{2l+1}$ : fonction de Bessel modifiée d'ordre  $2l+1$ ,

$J_{2l+1}$ : fonction de Bessel d'ordre  $2l+1$ .

- f) D'après (2.9) on a le comportement asymptotique:

$$\phi_l(k, r) \underset{|r| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{C_l(\alpha) k^{l+1}} \sin \left( kr - \alpha \ln 2kr - l \frac{\pi}{2} + \sigma_l \right) \quad \operatorname{Re}(k) > 0 \quad (3.10)$$

avec

$$e^{2i\sigma_l} = \frac{\Gamma(l+1+i\alpha)}{\Gamma(l+1-i\alpha)} \quad (3.11)$$

et

$$C_l(\alpha) = \frac{2^l e^{-\alpha\pi/2} [\Gamma(l+1+i\alpha) \Gamma(l+1-i\alpha)]^{1/2}}{\Gamma(2l+2)} \quad (3.12)$$

$C_l(\alpha)$  est appelé coefficient de Coulomb d'ordre  $l$ . On a

$$C_0^2(\alpha) = \frac{2\pi\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1} \quad (3.13)$$

$$C_l^2(\alpha) = \frac{p_l(\alpha)}{2\alpha(2l+1)} C_0^2(\alpha) \quad (3.14)$$

avec

$$p_l(\alpha) = \frac{2\alpha 2^{2l}}{(2l)!(2l+1)!} \prod_{s=1}^l (s^2 + \alpha^2). \quad (3.15)$$

On trouve l'expression asymptotique de  $\phi_l(k, r)$  pour  $\operatorname{Re}(k) < 0$  en utilisant (3.10) et (3.7). (3.10) nous conduit à introduire la fonction de Coulomb régulière habituelle, ayant un comportement asymptotique plus simple:

$$F_l(\alpha, kr) = C_l(\alpha) k^{l+1} \phi_l(k, r) = C_l(\alpha) e^{-ikr} (kr)^{l+1} \Phi(l+1-i\alpha, 2l+2; 2i kr) \underset{|r| \rightarrow \infty}{\sim} \sin \left( kr - \alpha \ln 2kr - l \frac{\pi}{2} + \sigma_l \right) \quad \operatorname{Re}(k) > 0. \quad (3.16)$$

## 2) Solutions irrégulières à l'origine

Par analogie avec le traitement habituel de la diffusion nous voulons définir ici deux solutions de (3.1) ayant, dans un certain domaine du plan  $kr$ , un comportement

asymptotique analogue à  $e^{\pm ikr}$ . Nous définissons, pour des raisons d'analyticité en  $k$  qui apparaîtront par la suite:

$$f_l^{(\pm)}(k, r) = e^{\alpha\pi/2} e^{\pm ikr} (\mp 2ikr)^{l+1} \Psi_{\pm}(l+1 \pm i\alpha, 2l+2; \mp 2ikr) \quad (3.17)$$

où  $\Psi_+$  est la branche de la fonction  $\Psi$  (2.10) définie en couplant le plan  $z$  selon le demi-axe imaginaire positif (resp. négatif pour  $\Psi_-$ ). D'après (2.17) on a les comportements asymptotiques désirés:

$$f_l^{(\pm)}(k, r) \underset{|kr| \rightarrow \infty}{\sim} e^{\pm i(kr - \alpha \ln 2kr)} - \pi < \pm \arg kr < 2\pi. \quad (3.18)$$

On a les propriétés:

a) Pour  $k \in \mathbb{R}$ ,  $f_l^{(\pm)}(k, r)$  sont analytiques dans le plan  $r$  coupé selon le demi-axe réel  $\leq 0$ .

b) Pour  $r \in \mathbb{R}$ ,  $f_l^{(\pm)}(k, r)$  sont analytiques dans le plan  $k$  coupé selon le demi-axe réel  $\leq 0$ .

c)

$$f_l^{(\pm)}(k e^{\mp i\pi}, r) = e^{-\alpha\pi} f_l^{(\mp)}(k, r) \quad (3.19)$$

d)

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} f_l^{(\pm)}(k, r) = (\pm i)^l k r h_l^{(\pm)}(kr) \quad (3.20)$$

$h_l^{(\pm)}$ : fonctions de Hankel sphériques (Messiah).

e) On a l'expression pour notre solution régulière (3.6) à partir de (2.16):

$$\phi_l(k, r) = \frac{e^{\alpha(\pi/2)} \Gamma(2l+2)}{i(2k)^{l+1}} \left[ \frac{(-i)^l}{\Gamma(l+1-i\alpha)} f_l^{(+)}(k, r) - \frac{i^l}{\Gamma(l+1+i\alpha)} f_l^{(-)}(k, r) \right]. \quad (3.21)$$

On introduit la fonction de Coulomb irrégulière en formant:

$$\begin{aligned} G_l(\alpha, kr) &= \frac{[\Gamma(l+1+i\alpha) \Gamma(l+1-i\alpha)]^{1/2}}{2} \\ &\times \left[ \frac{(-i)^l}{\Gamma(l+1-i\alpha)} f_l^{(+)}(k, r) + \frac{i^l}{\Gamma(l+1+i\alpha)} f_l^{(-)}(k, r) \right] \\ &= \frac{2^{2l}(kr)^{l+1} i (-1)^l}{C_l(\alpha)} \left[ \frac{\Gamma(l+1-i\alpha)}{\Gamma(2l+2)} e^{-ikr} \Psi_-(l+1-i\alpha, 2l+2; 2ikr) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Gamma(l+1+i\alpha)}{\Gamma(2l+2)} e^{ikr} \Psi_+(l+1+i\alpha, 2l+2; -2ikr) \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

ayant le comportement asymptotique

$$G_l(\alpha, kr) \underset{|kr| \rightarrow \infty}{\sim} \cos \left( kr - \alpha \ln 2kr - l \frac{\pi}{2} + \sigma_l \right) \quad -\pi < \arg kr < \pi. \quad (3.23)$$

Nous construisons maintenant une solution irrégulière de (3.1) entière en  $k^2$  à l'aide de (3.22). Cette construction n'étant en aucun cas unique, nous nous bornerons à soustraire de (3.22) «le moins possible» de façon à obtenir les propriétés analytiques désirées.

Pour des raisons de simplicité nous partons plutôt de la solution  $k^l C_l(\alpha) G_l(\alpha, kr)$  qui possède comme singularité en  $k$ : une coupure le long de l'axe réel  $\leq 0$ ; des pôles en  $\alpha = \beta/2$   $k = \pm i(l+1+n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Le premier type de singularité provient des fonctions  $\Psi_{\pm}$ , (2.15) nous permet de l'éliminer en considérant les fonctions:

$$\begin{aligned} a_{\pm}(k, r) &= \Psi_{\pm}(l+1 \pm i\alpha, 2l+2; \mp 2ikr) \\ &+ \frac{\ln \hat{\alpha}}{\Gamma(2l+2) \Gamma(-l \pm i\alpha)} \Phi(l+1 \pm i\alpha, 2l+2, \mp 2ikr) \end{aligned}$$

où

$$\hat{\alpha} = \frac{|\beta|}{2k}. \quad (3.24)$$

Les singularités de second type, provenant des fonctions  $\Gamma$ , sont aussi éliminées simplement en considérant (2.12). On voit en effet que les fonctions

$$b_{\pm}(k, r) = k^{2l+1} \Gamma(l+1 \pm i\alpha) a_{\pm}(k, r) - \frac{k^{2l+1} \Gamma(l+1 \pm i\alpha) \psi(\pm i\alpha)}{\Gamma(2l+2) \Gamma(-l \pm i\alpha)} \Phi(l+1 \pm i\alpha, 2l+2; \mp 2ikr)$$

sont entières en  $k$ .

En reportant ces résultats dans (3.22) on obtient la solution de (3.1)

$$\theta_l(k, r) = k^l C_l(\alpha) G_l(\alpha, kr) - \frac{p_l(\alpha) h(\alpha)}{(2l+1) C_l(\alpha)} k^l F_l(\alpha, kr) \quad (3.25)$$

entièrre en  $k$  et où

$$h(\alpha) = \frac{1}{2} [\psi(i\alpha) + \psi(-i\alpha)] - \ln \hat{\alpha}. \quad (3.26)$$

Nous avons les propriétés :

a)

$$\theta_l(-k, r) = \theta_l(k, r) \quad (3.27)$$

donc  $\theta_l$  est une fonction entière de  $k^2$ .

b)

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow 0} \theta_l(k, r) = \frac{k^l}{(2l+1)!!} kr n_l(kr) \quad (3.28)$$

$n_l$ : fonction de Neumann sphérique d'ordre  $l$ .

c)

$$\theta_l(0, r) = \lim_{|k| \rightarrow 0} \theta_l(k, r) = \begin{cases} \frac{\beta^l}{\Gamma(2l+2)} 2(\beta r)^{1/2} K_{2l+1}[2(\beta r)^{1/2}] & \beta > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \frac{|\beta|^l}{\Gamma(2l+2)} 2(|\beta|r)^{1/2} Y_{2l+1}[2(|\beta|r)^{1/2}] & \beta < 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

$K_{2l+1}$ : fonction de Neumann modifiée d'ordre  $2l+1$ ,

$Y_{2l+1}$ : fonction de Neumann d'ordre  $2l+1$ .

### 3) Wronskiens, fonctions de Jost, matrice $S$

A partir de

$$W(f_l^{(-)}(k, r), f_l^{(+)}(k, r)) = 2ik \quad (3.30)$$

on a successivement

$$W(G_l(\alpha, kr), F_l(\alpha, kr)) = k \quad (3.31)$$

$$W(\theta_l(k, r), \phi_l(k, r)) = 1 \quad (3.32)$$

$$f_l^{(\pm)}(k) = W(f_l^{(\pm)}(k, r), \phi_l(k, r)) = \frac{\Gamma(2l+2) e^{\alpha\pi/2}}{(\mp 2ik)^l \Gamma(l+1 \pm i\alpha)} \quad (3.33)$$

par définition des fonctions de Jost.

La solution physique  $\psi_l^{(+)}$  devant satisfaire aux mêmes conditions de régularité à l'origine que  $\phi_l$ , elle lui est proportionnelle. La matrice  $S_l$  étant définie par

$$\psi_l^{(+)}(k, r) \sim C (e^{-i(kr - \alpha \ln 2kr)} - (-1)^l S_l(k) e^{i(kr - \alpha \ln 2kr)})$$

et il suit de (3.33) que:

$$S_l(k) = (-1)^l \frac{f_l^{(-)}(k)}{f_l^{(+)}(k)} = \frac{\Gamma(l+1+i\alpha)}{\Gamma(l+1-i\alpha)} = e^{2i\sigma_l}. \quad (3.34)$$

#### IV. Potentiel coulombien modifié

Nous considérons le problème où un potentiel  $V(r)$  est présent en plus du potentiel coulombien. Nous faisons les hypothèses suivantes:

$$V(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} r^{-2+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0$$

$$V(r) = 0 \quad \text{si } r > r_0$$

(portée finie).

Nous avons l'équation de Schrödinger radiale

$$\psi_l''(k, r) + \left[ k^2 - \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \psi_l(k, r) = V(r) \psi_l(k, r). \quad (4.1)$$

Sous nos hypothèses quant au potentiel, nous pouvons définir la solution régulière à l'origine de (4.1), proportionnelle à la solution physique, par:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-l-1} u_l^c(k, r) = 1. \quad (4.2)$$

On a:

$$u_l^c(k, r) = A(k) \theta_l(k, r) + B(k) \phi_l(k, r) \quad r \geq r_0 \quad (4.3)$$

avec

$$A(k) = W_{r \geq r_0}(u_l^c(k, r), \phi_l(k, r)) = - \int_0^{r_0} V(\zeta) u_l^c(k, \zeta) \phi_l(k, \zeta) d\zeta$$

$$B(k) = -W_{r \geq r_0}(u_l^c(k, r), \theta_l(k, r)) = 1 + \int_0^{r_0} V(\zeta) u_l^c(k, \zeta) \theta_l(k, \zeta) d\zeta. \quad (4.4)$$

En vertu du théorème de Poincaré nous savons que  $u_l^c(k, r)$  est entière en  $k^2$ .  $A(k)$  et  $B(k)$  sont donc des fonctions entières en  $k^2$  en vertu des propriétés de  $\theta_l$  et  $\phi_l$ .

Nous définissons le «déphasage nucléaire» de façon habituelle:

$$u_l^c(k, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} C \sin \left( k r - \alpha \ln 2 k r - l \frac{\pi}{2} + \sigma_l + \delta_l^c \right) \quad (4.5)$$

l'indice supérieur  $c$  rappelant le fait que ce déphasage est sensible à la présence du champ coulombien.

##### 1) Développement de portée effective

De (3.16), (3.23), (3.26), (4.3) et (4.5) nous tirons l'importante relation:

$$Z^c(l, k^2) \stackrel{d}{=} \frac{B(k)}{A(k)} = C_l^2(\alpha) k^{2l+1} \cotg \delta_l^c + k^{2l+1} \frac{p_l(\alpha)}{2l+1} h(\alpha) \quad (4.6)$$

que nous pouvons encore écrire, à l'aide de (3.14):

$$Z^c(l, k^2) = \frac{p_l(\alpha)}{2\alpha(2l+1)} k^{2l+1} [C_0^2(\alpha) \cotg \delta_l^c + 2\alpha h(\alpha)]. \quad (4.7)$$

C'est une fonction méromorphe en  $k^2$  que nous appelons *fonction de portée effective* par analogie avec le cas non coulombien.

On a en effet :

$$\lim_{|\beta| \rightarrow 0} Z^c(l, k^2) = Z(l, k^2) = \frac{1}{[(2l+1)!]^2} k^{2l+1} \cotg \delta_l \quad (4.8)$$

qui est la fonction habituelle de portée effective.

Développons-la, en admettant que l'origine ne soit pas un pôle, de façon à faire apparaître longueur de diffusion et portée effective :

$$Z^c(l, k^2) = -\frac{1}{A_l^c} + \frac{1}{2} R_l^c k^2 + O(k^4).$$

Quelques calculs conduisent à :

$$A_l^c = (2l+1) r_0^{2l} \left[ \frac{\phi_l(0, r_0)}{(2l+1) r_0^{2l} \theta_l(0, r_0)} - \frac{(2l+1) r_0 u_l^c(0, r_0)}{r_0 u_l'(0, r_0) [(2l+1) r_0^l \theta_l(0, r_0)]^2 + u_l^c(0, r_0) [-(2l+1)^2 r_0^{2l+1} \theta_l(0, r_0) \theta_l'(0, r_0)]} \right] \quad (4.9)$$

qui donne à la limite le résultat sans potentiel coulombien :

$$A_l = \lim_{|\beta| \rightarrow 0} A_l^c = (2l+1) r_0^{2l} \left[ r_0 - \frac{(2l+1) r_0 u_l(0, r_0)}{r_0 u_l'(0, r_0) + l u_l(0, r_0)} \right]. \quad (4.10)$$

De façon à comparer l'expression de  $R_l^c$  avec celle donnée dans la littérature pour  $R_l$ , nous introduisons une solution  $v_l(k, r)$  du problème coulombien pur ( $V(r) = 0$ ) telle que

$$v_l(k, r) = \tilde{u}_l^c(k, r) = \frac{u_l^c(k, r)}{A(k)} \quad r \geq r_0. \quad (4.11)$$

Explicitement :

$$v_l(k, r) = C_l(\alpha) k^l [\cotg \delta_l F_l(\alpha, k r) + G_l(\alpha, k r)] = Z^c(l, k^2) \phi_l(k, r) + \theta_l(k, r) \quad (4.12)$$

et quelques calculs donnent :

$$Z^c(l, k^2) = -\frac{1}{A_l^c} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \times \left\{ W[\theta_l(k, \epsilon), \theta_l(0, \epsilon)] + k^2 \int_{\epsilon}^{r_0} [v_l(k, r) v_l(0, r) - \tilde{u}_l^c(k, r) \tilde{u}_l^c(0, r)] dr \right\} \quad (4.13)$$

dans laquelle le terme  $W[\theta_l(k, \epsilon), \theta_l(0, \epsilon)]$  supprime la divergence de l'intégrale à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  présente lorsque  $l \neq 0$ . On a donc

$$R_l^c = 2 \lim_{|k| \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \times \left\{ \frac{1}{k^2} W[\theta_l(k, \epsilon), \theta_l(0, \epsilon)] + \int_{\epsilon}^{r_0} [v_l(k, r) v_l(0, r) - \tilde{u}_l^c(k, r) \tilde{u}_l^c(0, r)] dr \right\} \quad (4.14)$$

et comme cas particulier:

$$R_0^c = 2 \int_0^{r_0} \{[v_l(0, r)]^2 - [\tilde{u}_l^c(0, r)]^2\} dr \quad (4.15)$$

analogue coulombien du résultat bien connu.

### 2) Matrice $S$

Par définition de la matrice  $S$  nous avons:

$$S_l(k) = e^{2i(\sigma_l + \delta_l^c)}. \quad (4.16)$$

Notons dans ce paragraphe:

$$S_l^c(k) = e^{2i\sigma_l} = \frac{\Gamma(l+1+i\alpha)}{\Gamma(l+1-i\alpha)}; \quad S_l^{n,c}(k) = e^{2i\delta_l^c}.$$

On calcule à partir de (4.6)

$$S_l^{n,c}(k) = \frac{B(k) - g_l(\alpha) A(k)}{B(k) - g_l^*(\alpha^*) A(k)} \quad (4.17)$$

où

$$g_l(\alpha) = k^{2l+1} \left[ \frac{p_l(\alpha) h(\alpha)}{2l+1} - i C_l^2(\alpha) \right]. \quad (4.18)$$

$S_l^{n,c}(k)$  possède comme singularités:

- a) des pôles simples provenant de  $g_l(\alpha)$  en  $\alpha = -i(l+n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,
- b) une coupure selon le demi axe réel  $k \leq 0$  d'origine coulombienne,
- c) des pôles provenant des zéros du dénominateur. On montre que les pôles de cette catégorie pour lesquels  $\text{Im}(k) > 0$  sont situés sur l'axe imaginaire dans le plan  $k$ .

Remarquons encore que  $S_l^{n,c}(k)$  possède des zéros en  $\alpha = i(l+n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Donc  $S_l(k)$  ne possède que les singularités b) et c) compte tenu de  $S_l^c(k)$ . Pour un potentiel réel (4.4) donne:

$$A^*(k^*) = A(k); \quad B^*(k^*) = B(k)$$

ce qui permet de vérifier sur (4.17) l'unitarité:

$$S_l^{n,c*}(k^*) S_l^{n,c}(k) = 1. \quad (4.19)$$

La limite

$$\lim_{|\beta| \rightarrow 0} g_l(\alpha) = \frac{-i k^{2l+1}}{[(2l+1)!!]^2} \quad (4.20)$$

montre qu'on retrouve l'expression habituelle de  $S_l(k)$  aux hautes énergies ou en coupant l'interaction coulombienne.

### 3) Relation entre états liés et développement de portée effective

Notons  $k_b$ , respectivement  $\alpha_b$ , le point du plan  $k$ , respectivement  $\alpha$ , correspondant à un état lié  $b$ . On a:

$$\cotg \delta_l^c(k_b) = i$$

$$Z^c(l, k_b^2) = \frac{p_l(\alpha_b) k_b^{2l+1}}{2 \alpha_b (2l+1)} [2 \alpha_b h(\alpha_b) + i C_l^2(\alpha_b)] = -\frac{1}{A_l^c} + \frac{1}{2} R_l^c k_b^2 + O(k_b^4) \quad (4.21)$$

Faisons les hypothèses suivantes:

a)

$$\left| Z^c(l, k_b^2) + \frac{1}{A_l^c} \right| \ll \left| \frac{1}{A_l^c} \right|$$

i.e. nous négligeons les termes de l'ordre de  $k_b^2$  dans le développement de portée effective.

b)  $k_b$  est suffisamment proche de  $k_b^c$  (état lié purement coulombien correspondant) pour que nous puissions nous limiter au premier ordre dans leur différence.

En numérotant les états liés à l'aide de  $l$  et  $n \geq l + 1$  il vient:

$$\alpha_{n,l}^c = i n$$

$$\alpha_{n,l} - \alpha_{n,l}^c \cong \frac{i (-1)^{l+1} \beta^{2l+1}}{n^{2l} [\Gamma(2l+2)]^2} \prod_{p=1}^l (\phi^2 - n^2) A_l^c . \quad (4.22)$$

En passant aux énergies et en introduisant le déplacement

$$\Delta E_{n,l} = E_{n,l} - E_{n,l}^c \quad (4.23)$$

on obtient

$$\frac{\Delta E_{n,l}}{E_{n,l}^c} \cong \frac{1}{[(2l+1)!]^2} \frac{4}{n} \prod_{p=1}^l \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right) \frac{A_l^c}{B^{2l+1}} \quad (4.24)$$

où

$$B = \frac{2}{\beta} = \frac{\hbar^2}{\mu Z_1 Z_2 e^2} \quad (4.25)$$

est le rayon de Bohr de notre système.

### Remerciements

Nous remercions particulièrement Monsieur le Professeur P. HUGUENIN de l'intérêt qu'il a porté à ce travail et son constant soutien. Notre reconnaissance va également à l'ensemble du groupe de physique théorique de Neuchâtel au sein duquel maintes discussions fructueuses ont aidé la réalisation de ce travail.

### Références

- [1] A. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, F. TRICOMI, *Higher Transcendental Functions* (McGraw-Hill, New York 1953), Vol. 1, Chap. VI.
- [2] M. ABRAMOWITZ, I. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions* (National Bureau of Standards, Washington 1966), Chap. 14.
- [3] M. BERTERO, G. A. VIANO, Nucl. Phys. 131, 317–334 (1967).
- [4] T. L. TRUEMAN, Nucl. Phys. 26, 57–87 (1961).
- [5] A. PARTENSKY, M. ERICSON, Nucl. Phys. B1, 382–388 (1967).
- [6] H. POINCARÉ, Acta Mathematica 4, 201 (1884).