

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta

**Band:** 42 (1969)

**Heft:** 2

**Artikel:** Analyse des résultats d'une mesure du moment magnétique de l'hypéron °

**Autor:** Charrière, Gérard

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-114071>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 31.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Analyse des résultats d'une mesure du moment magnétique de l'hypéron $\Lambda^\circ$

par **Gérard Charrière**

Institut de Physique Nucléaire de l'Université, Lausanne

(22 VII 68)

*Abstract.* A method is described for the kinematic reconstruction of 874  $\Lambda$  decays observed in nuclear emulsions. Their angular distribution is studied in order to determine the  $\Lambda$  magnetic moment.

Selecting 151 events, we obtain  $\mu_\Lambda = -0.50 \pm 0.28$  nuclear magneton.

A discussion of the systematic errors is given and the method of selection of the events is justified.

## TABLE DES MATIÈRES

Introduction . . . . .	339
I Aspect théorique . . . . .	340
II Aspect expérimental . . . . .	341
1. Production, précession et détection . . . . .	341
2. Dépouillement et mesures . . . . .	342
III Méthodes d'analyse . . . . .	343
1. Introduction . . . . .	343
2. Méthode des moindres carrés et signification de $\chi^2$ . . . . .	345
3. Méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	347
4. Ajustement d'une fonction par moindres carrées . . . . .	348
5. Méthode de Monte Carlo . . . . .	349
IV Analyse des résultats . . . . .	350
1. Ajustement cinématique et reconstitution géométrique . . . . .	350
2. Probabilité de détection . . . . .	352
3. Fonction de vraisemblance . . . . .	353
4. Résultats et erreurs . . . . .	354
5. Erreurs systématiques et faux événements . . . . .	357
Conclusion . . . . .	359
Bibliographie . . . . .	359

## Introduction

La mesure du moment magnétique des hypérons est d'un intérêt capital pour la connaissance de leur structure et de leurs interactions.

L'importance de ces mesures est encore rehaussée actuellement par la possibilité qu'elles offrent de tester certains modèles de symétries unitaires.

Une expérience consistant en la mesure du moment magnétique de l'hypéron  $\Lambda$  a été effectuée en collaboration entre les laboratoires de Bristol, Munich et Lausanne, et le groupe «Emulsions» du CERN [2]. Les principes généraux de cette expérience ont été exposés de façon détaillée par ROSSELET [1]. L'irradiation des émulsions a été faite au S.P. du CERN, le dépouillement et les mesures des événements dans les quatre laboratoires susmentionnés.

Pour notre part, nous avons été chargé du traitement des données provenant de ces mesures, de leur analyse, de l'interprétation des résultats et de l'estimation du moment magnétique. Ce travail est l'objet du présent article.

Nous verrons tout d'abord l'importance réelle que revêt la mesure du moment magnétique du  $\Lambda$ ; puis, après un rappel expérimental, nous exposerons la technique du dépouillement et des mesures. Dans une deuxième partie, nous décrirons les méthodes devant nous permettre l'estimation du moment magnétique. La troisième partie décrira l'utilisation de ces méthodes pour faire une analyse détaillée des résultats des mesures (ajustement cinématique, calcul des probabilités de détection, calcul de l'amplitude et du déphasage ( $\sim$  moment magnétique) de la distribution angulaire des désintégrations) et évaluer les erreurs statistiques; nous discuterons également des erreurs systématiques.

### I. Aspect théorique

Dans le modèle de classification des particules élémentaires basé sur le groupe  $SU(3)$  [3] où  $p$ ,  $n$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$  et  $\Xi$  sont associés dans une représentation de dimension 8, on établit un certain nombre de relations entre les moments magnétiques des baryons.

Ce sont:

$$\begin{aligned}\mu_{\Sigma^+} &= \mu_p \\ \mu_{\Xi^0} &= 2 \mu_{\Lambda^0} = -2 \mu_{\Sigma^0} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \mu_{\Lambda\Sigma} = \mu_n \\ \mu_{\Sigma^-} &= \mu_{\Xi^-} = -\mu_n - \mu_p\end{aligned}$$

( $\mu_{\Lambda\Sigma}$  est le moment de transition entre  $\Lambda^0$  et  $\Sigma^0$ , et détermine la vie du  $\Sigma^0$  pour sa désintégration  $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$ ).

Nous constatons qu'on peut exprimer tous les moments magnétiques en fonction de ceux du  $p$  et du  $n$ .

En ce qui concerne  $SU(6)$ , les prédictions sont les mêmes, avec une relation supplémentaire entre le moment magnétique du  $n$  et celui du  $p$ ,

$$\mu_n = -\frac{2}{3} \mu_p$$

relation qui est en excellent accord avec les valeurs expérimentales

$$\mu_p = 2,793 \text{ et } \mu_n = -1,913$$

exprimées en magnéton nucléaire.

La mesure du moment magnétique du  $\Lambda$  est, comme l'on peut facilement s'en rendre compte, un test très important de  $SU(3)$  et doit permettre, de plus, d'éliminer définitivement des modèles antérieurs qui prédisent  $\mu_\Lambda = 0$  [4] et  $\mu_\Lambda = \mu_n$  [5].

A un stade ultérieur des mesures beaucoup plus précises pourront être faites pour tester les modèles de violation de SU(3).

Ajoutons que les mesures des moments magnétiques  $\mu_A$ ,  $\mu_{\Sigma^+}$  et  $\mu_{\Xi^-}$  sont les seules possibles pour des raisons expérimentales connues.

## II. Aspect expérimental

Le principe de la mesure est bien connu [1] :

Des hypérons  $\Lambda$  polarisés produits dans une cible de polyéthylène par un faisceau de mésons  $\pi^-$  de 1,05 GeV/c se déplacent dans un champ magnétique pulsé de 150 kG. La direction de la polarisation tourne d'un angle proportionnel au moment magnétique des  $\Lambda$ .

La direction initiale de la polarisation est connue ; la direction finale est déduite de l'observation, dans des émulsions ionographiques, de la distribution angulaire des désintégrations  $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$ , distribution asymétrique par suite de la non-conservation de la parité dans les interactions faibles.

### 1. Production, précession et détection

Les hypérons  $\Lambda$  produits dans la réaction  $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$  sont fortement polarisés dans une direction normale au plan de production.

De façon à maximiser le rapport nombre de  $\Lambda$ /bruit de fond, il est évidemment avantageux de détecter les hypérons produits dans un petit intervalle angulaire limité supérieurement par l'angle maximum d'émission. Ce dernier étant de  $21^\circ$ , nous avons choisi d'observer l'intervalle  $13^\circ$ – $23^\circ$  auquel correspond une région angulaire dans le système du centre de masse de la réaction où la polarisation des  $\Lambda$  approche 100%.

Le mouvement de précession du vecteur polarisation  $\mathbf{S}$  d'une particule  $\Lambda$  dans un champ magnétique  $\mathbf{H}$  peut être décrit par l'équation différentielle suivante [1] :

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{S} \times \boldsymbol{\Omega}$$

avec

$$\boldsymbol{\Omega} = \mu \frac{e}{mc} \left\{ \mathbf{H} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \mathbf{p}_\Lambda \frac{\mathbf{p}_\Lambda \cdot \mathbf{H}}{|\mathbf{p}_\Lambda|^2} \right\}$$

où  $\mathbf{p}_\Lambda$  est la quantité de mouvement du  $\Lambda$  et  $\mu$  son moment magnétique, en magnétions intrinsèques si  $m$  est la masse du  $\Lambda$ .

Dans notre cas nous avons utilisé un champ magnétique transverse, c'est-à-dire perpendiculaire à la ligne de vol moyenne des  $\Lambda$  pour produire un effet de «balayage» des particules chargées parasites, entre la cible et le détecteur.

Il s'en suit que

$$\boldsymbol{\Omega} = \mu \frac{e H}{mc}.$$

Après que la particule a parcouru une distance  $l$  dans le champ magnétique, à une vitesse  $\beta c$ , ce qui correspond à un temps de vol  $t = l/\beta c$ , l'angle de précession  $\varphi_0$  entre les directions finale et initiale du vecteur polarisation s'exprime par :

$$\varphi_0 = \boldsymbol{\Omega} t = \mu \frac{e}{mc^2} \frac{Hl}{\beta}$$

et sa mesure va nous permettre de déterminer le moment magnétique  $\mu$  ( $e/m c^2 = 15,4^\circ/\text{Mgauss. cm. magnéton } \Lambda$ ).

Pour produire par impulsion le champ magnétique  $H$  nécessaire, des bobines ont été construites, produisant un champ de 150 kG sur une longueur d'environ 16 cm comprenant la cible et le détecteur [7, 8].

La désintégration des hypérons  $\Lambda$  par le processus  $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$  n'est pas isotrope. Dans le système du centre de masse, les mésons  $\pi^-$  ont une distribution angulaire de la forme:

$$N(\theta) d\Omega = \frac{1}{4\pi} (1 + \alpha P \cos \theta) d\Omega \quad (1)$$

où:  $\theta$  est l'angle compris entre le vecteur polarisation et la direction d'émission,  $\mathbf{p}_\pi^*$ , du méson de désintégration;  $P$  la polarisation des  $\Lambda$ ;  $\alpha$  une constante caractéristique du mode de désintégration, qui vaut  $-0,663 \pm 0,022$  [6].

L'observation de la distribution (1) va nous permettre de déterminer la direction finale du vecteur polarisation des  $\Lambda$ .

La détection de la désintégration des  $\Lambda$  s'est faite dans des empilements d'émulsions ionographiques, constitués chacun de 18 pellicules  $7,5 \times 2,8 \times 0,12 \text{ cm}^3$ . Les pellicules ont été placées de telle façon que leur plan contienne le vecteur polarisation. Une trentaine de lots ont été irradiés, le sens du champ magnétique étant inversé après l'irradiation de chacun d'entre eux.

## 2. Dépouillement et mesures

Le domaine de quantité de mouvement des hypérons  $\Lambda$  produits se situe entre 450 et 900 MeV/c, et dans ce cas les protons de désintégration sont émis, en avant, à de relativement petits angles dans le système du laboratoire; par exemple, pour un  $\Lambda$  de 650 MeV/c, l'angle d'émission maximum du proton est  $10,5^\circ$ . Par contre le méson  $\pi^-$  peut être émis dans n'importe quelle direction. Il s'ensuit que seule une trace de proton à petit angle peut servir comme une première et utile indication d'une désintégration possible d'un  $\Lambda$  pour un dépouillement «le long des traces». Ajoutons que l'énergie des protons des désintégrations est telle que la densité de grains est comprise entre 1,4 et 3,6 fois le minimum.

Définissons plus précisément la méthode de dépouillement utilisée: on choisit un plan dans l'émulsion approximativement perpendiculaire à la ligne de vol moyenne des particules provenant de la cible et à une certaine distance (1 cm ou 2 cm) du bord d'entrée des pellicules. L'intersection de ce plan avec l'émulsion est appelée, abusivement (par commodité), ligne de dépouillement. Les traces traversant cette ligne sont choisies si leurs angles par rapport à la direction moyenne des  $\Lambda$  au point d'observation sont dans l'intervalle attendu pour des protons de désintégration  $\Lambda$ . Toutes ces traces sont suivies, en arrière, jusqu'à ce qu'elles sortent de la plaque, présentent une interruption, ou au maximum sur 1 cm.

Pour éviter de suivre un nombre excessif de traces parasites, il est nécessaire de choisir un intervalle d'angle en projection (c'est-à-dire dans le plan de l'émulsion, donc perpendiculaire au champ magnétique) hors duquel la plupart des particules chargées du bruit de fond a été «balayée» par l'action du champ magnétique. A une distance donnée de la cible, les limites de cet intervalle sont déterminées par l'impulsion des particules les plus énergétiques atteignant ce point. Ces particules sont des mésons

$\pi^-$  diffusés élastiquement, d'un côté de la direction moyenne des  $\Lambda$ , et des protons de reculs de diffusions élastiques, de l'autre côté.

Ainsi les conditions angulaires du choix des traces à suivre sont définies par:

- a) un angle d'inclinaison compris dans un intervalle ( $+15^\circ$ ,  $-15^\circ$ ) par rapport au plan de l'émulsion; ces limites, dues à la cinématique, tiennent compte, également, de la dimension de la cible.
- b) un angle en plan compris dans un intervalle asymétrique par rapport à la direction du centre de la cible au point considéré. Cet intervalle, compris entre les pics  $\rho$  et  $\pi^-$ , s'étend de  $-4^\circ$  à  $+13^\circ$ , pour une ligne de dépouillement à 1 cm du bord d'entrée des pellicules. Pour une orientation contraire du champ magnétique, il suffit de changer les signes de ces limites.
- c) une densité de grains supérieure à 1,2 fois le minimum. Cette dernière condition permet d'éliminer la plupart des électrons ainsi que tous les pions diffusés qui sont également au minimum d'ionisation.

Toutes les traces sélectionnées selon ces critères ont été suivies, et chaque événement se présentant sous la forme d'un  $V$  a été enregistré et mesuré (1 pour 15 traces suivies environ).

Pour chaque pellicule, une mesure de la dilatation latérale et de la contraction de l'épaisseur est effectuée pour déterminer les coefficients qui entrent dans les calculs de reconstitution géométrique des événements. De plus, au début du dépouillement de chaque nouvelle plaque, 1000–1500 grains sont comptés sur des traces d'électrons (facilement identifiables) afin de déterminer l'ionisation au plateau. Pour chaque microscopiste, la relation entre la densité de grains normalisée et la vitesse des particules est établie à l'aide de  $\pi^+$  de 70 MeV s'arrêtant dans des pellicules identiques à celles utilisées pour l'expérience.

Pour chaque événement  $V$  trouvé, on mesure:

- 1) La position à l'intérieur du stack.
- 2) L'angle en plan et l'angle d'inclinaison de chaque trace; le premier se mesure à un demi degré près; pour calculer le second, on mesure la variation de cote pour une distance en projection horizontale donnée, l'incertitude est de quelques pourcents.
- 3) La densité de grains de chaque trace avec une précision statistique de 5%.
- 4) Le parcours de la branche du  $V$  non suivie, lorsqu'elle s'arrête et que son aspect est celui d'un méson  $\pi^-$ ; une telle mesure, permettant une détermination très précise de l'énergie du pion, est possible pour 10 à 15% des événements  $\Lambda$ .
- 5) L'effet combiné de la courbure due au champ magnétique et de la diffusion multiple pour les traces peu inclinées et assez longues [9].

Les mesures 3), 4) et 5) permettent de calculer la quantité de mouvement de chaque particule.

### III. Méthodes d'analyse

#### 1. Introduction [10, 14, 17, 20]

Lors d'une expérience, il arrive souvent qu'une ou plusieurs grandeurs physiques que l'on désire déterminer ne peuvent être mesurées directement. L'analyse d'une telle expérience pose essentiellement deux problèmes:

Le premier est de transformer les quantités mesurées en paramètres utiles pour l'étude que l'on se propose de faire. Cette transformation consiste, à partir d'un ensemble de grandeurs expérimentales entachées d'une certaine erreur, à rechercher l'ensemble correspondant le plus «probable», ensemble pouvant comprendre à la fois les valeurs ajustées des grandeurs observées, et aussi les valeurs estimées de grandeurs non-observées.

Le second est l'étude des propriétés de ce nouvel ensemble et conduit aux résultats proprement dits de l'expérience.

De façon générale les problèmes de statistique qui se posent sont essentiellement de deux sortes, soit des tests d'hypothèses, soit des estimations de paramètres, l'imbrication des deux étant en fait très grande.

Les exemples que l'on peut donner sont nombreux et variés: test d'hypothèses concernant certains types d'interactions nucléaires, ajustement de fonctions théoriques ou empiriques sur des courbes expérimentales, analyse de distributions angulaires observées, calcul de déphasages ou de longueurs de diffusion, etc.

La résolution de ces problèmes peut être guidée par différents principes, les plus courants étant le principe du maximum de vraisemblance et le principe des moindres carrés.

Un problème important consiste donc à trouver des valeurs de  $n$  paramètres  $x_1, \dots, x_n$  de telle façon que la valeur d'une fonction  $f(x_1, \dots, x_n)$  soit minimum.

Les méthodes de minimisation d'une fonction se répartissent en deux classes:

a) Celles qui tentent (en utilisant une forme approximative de la fonction) d'atteindre un minimum directement en un pas et répètent l'opération un certain nombre de fois si cela est nécessaire en utilisant un procédé itératif. Toutes ces méthodes nécessitent généralement la connaissance des dérivées premières, et parfois des dérivées secondes, de la fonction par rapport à tous les paramètres du problème.

La plus classique de ces méthodes est celle qui consiste à résoudre  $df = 0$ . La résolution d'un tel système dépend naturellement de la complexité de la fonction et peut être différente suivant les cas traités.

De façon générale, on procède par approximations successives en linéarisant les équations à l'aide d'un développement limité de Taylor. De tels processus conviennent particulièrement bien au calcul numérique à l'aide d'un ordinateur électronique. Il existe cependant certaines difficultés lorsque l'on se trouve assez loin de la solution (du minimum) car l'hypothèse de linéarité est souvent gravement en défaut, et, de plus, il est souvent très laborieux ou pratiquement impossible de calculer les dérivées de la fonction; il est donc nécessaire de posséder des méthodes de minimisation qui ne les requièrent pas. Ce sont:

b) Celles qui approchent un minimum graduellement, par une série de pas. Ces méthodes sont aussi très indiquées lorsque la fonction possède plusieurs minima, ou si des paramètres ne sont définis que dans certaines régions.

Le principe de telle méthodes est toujours du même type: le processus part d'un ensemble de valeurs initiales des paramètres. A chacun de ces paramètres est attribué un pas de dimension choisie. Le premier paramètre est augmenté ou diminué d'une quantité correspondant à son pas afin de trouver une plus petite valeur de la fonction. Si c'est le cas, la nouvelle valeur de ce paramètre est utilisée et la même opération

est répétée pour le paramètre suivant et ainsi de suite jusqu'au dernier. Ce cycle est répété tant que la fonction décroît. Lorsque l'on s'approche du minimum, les pas initialement choisis sont réduits d'un facteur choisi et le processus continue jusqu'à ce que l'on trouve une solution satisfaisante. Le critère de convergence ultime consiste à arrêter le processus dès que la différence entre deux valeurs successives est inférieure à une grandeur fixée.

## 2. Méthode des moindres carrés et signification de $\chi^2$ [15, 18, 19, 21]

Cette méthode est basée sur le principe dit des moindres carrés qui admet une courbe de Gauss pour la probabilité de distribution des grandeurs mesurées. On peut aisément montrer que dans un tel cas, cette méthode est équivalente à celle du maximum de vraisemblance que nous verrons dans le paragraphe suivant. Cependant il faut tout de suite noter que si les fonctions de distributions ne sont pas exactement gaussiennes le principe des moindres carrés donne cependant une méthode raisonnable d'estimation. C'est une des raisons pour lesquelles cette méthode est l'une des plus utilisées, une autre de ces raisons étant la simplicité de sa formulation.

Si l'on se trouve en présence d'une seule grandeur inconnue, on peut énoncer le principe des moindres carrés de la façon suivante: la meilleure estimation,  $x$ , de cette grandeur inconnue est telle que la somme des carrés des déviations des observations  $x_i$  par rapport à cette valeur soit minimum.

Parmi de nombreuses utilisations et généralisations que l'on peut faire de ce principe, nous nous contenterons, ici, de développer la méthode d'ajustement par moindres carrés qui est la méthode de base de l'analyse cinématique des interactions nucléaires détectées par des chambres à bulles ou par des émulsions ionographiques.

Considérons une interaction nucléaire; pour une hypothèse donnée expliquant la configuration des traces, les impulsions et les angles des traces mesurées ne sont généralement pas compatibles avec les lois de conservation d'énergie et d'impulsion. En effet, ces lois imposent un certain nombre de contraintes sur les variables. Il est donc nécessaire d'ajuster ces dernières, en tenant compte des incertitudes de mesures. L'ajustement doit donc remplir les deux conditions suivantes:

- 1) Les équations de conservation d'énergie et d'impulsion doivent être satisfaites.
- 2) Les valeurs ajustées des variables cinématiques doivent être aussi proches que possible des valeurs mesurées.

Dans un formalisme matriciel, la première condition s'exprime par une équation du type:

$$g(x, y) = 0. \quad (1)$$

La deuxième condition s'exprime par le minimum de la fonction

$$\chi^2 = (x - x^m)^T G_x^{-1} (x - x^m) \quad (2)$$

$x^m$  est le vecteur des valeurs mesurées originales,  $x$  celui des valeurs ajustées,  $y$  celui des grandeurs inconnues.  $G$  est la matrice d'erreurs des grandeurs mesurées (s'il n'y a pas de corrélations entre les grandeurs mesurées,  $G$  est une matrice diagonale).

Pour procéder à un tel ajustement, on cherche le minimum de la fonction

$$\chi^2(x, y, \lambda) = (x - x^m)^T G_x^{-1} (x - x^m) + 2 \lambda g(x, y) \quad (3)$$

en résolvant le système suivant:

$$(4) \begin{cases} \frac{d\chi^2}{dx} = (x - x^m)^T G_x^{-1} + \lambda \frac{dg(x, y)}{dx} = 0 \\ \frac{d\chi^2}{dy} = \lambda \frac{dg(x, y)}{dy} = 0 \\ \frac{d\chi^2}{d\lambda} = g(x, y) = 0 . \end{cases} \quad (5) \quad (6) \quad (7)$$

La résolution d'un tel système ne peut, généralement, se faire que par approximations successives. Nous dénoterons, par la suite, par un indice  $v$  toutes les grandeurs calculées à la  $v$ ème étape itérative.

Les équations de contraintes peuvent être développées de la façon suivante:

$$g^v + \frac{dg^v}{dy} (y^{v+1} - y^v) + \frac{dg^v}{dx} (x^{v+1} - x^v) = 0 \quad (8)$$

les équations (5) donnent:

$$x^{v+1} = x^m - G_x \frac{dg^v}{dx} \lambda^{v+1} \quad (9)$$

en remplaçant  $x^{v+1}$  par cette expression dans (8), on obtient

$$\frac{dg^v}{dx} G \frac{dg^v}{dx} \lambda^{v+1} = g^v + \frac{dg^v}{dx} (x^m - x^v) + \frac{dg^v}{dy} (y^{v+1} - y^v) .$$

En posant

$$R = g^v + \frac{dg^v}{dx} (x^m - x^v) \quad \text{et} \quad S = \frac{dg^v}{dx} G \frac{dg^v}{dx}$$

on peut écrire

$$\lambda^{v+1} = S^{-1} \left[ R + \frac{dg^v}{dy} (y^{v+1} - y^v) \right]$$

et, en introduisant ce vecteur  $\lambda$  dans les équations (6), on obtient:

$$y^{v+1} = y^v - \left( \frac{dg^v}{dy} S^{-1} \frac{dg^v}{dy} \right)^{-1} \frac{dg^v}{dy} S^{-1} R . \quad (10)$$

La méthode de résolution est ainsi clairement définie. Il suffit de calculer le vecteur  $y^{v+1}$  à l'aide de la relation (10), puis le vecteur  $\lambda$  et enfin le vecteur  $x^{v+1}$  avec la relation (9). Chaque étape itérative donne une solution approximative du problème et l'on peut se rendre compte de l'évolution du processus en calculant chaque fois la valeur que prend la fonction  $\chi^2$  définie par la relation (3):

$$\chi^2 = (x - x^m)^T G^{-1} (x - x^m) + 2 \lambda g = \frac{dg}{dx} (x^m - x) \lambda + 2 \lambda g = \lambda (R + g) .$$

Nous avons ainsi déterminé les valeurs des grandeurs inconnues et les valeurs ajustées des grandeurs mesurées. On pourrait, de plus, calculer les matrices d'erreurs et la matrice de corrélations intervenant sur ces résultats et montrer que, lors de l'ajustement, les erreurs sur les grandeurs mesurées diminuent, des corrélations entre les grandeurs  $x$  (s'il n'y en avait pas déjà) et des corrélations entre les grandeurs  $y$  et  $x$  apparaissent.

La valeur finale de la grandeur  $\chi^2$  présente un très grand intérêt, puisqu'elle permet de se rendre compte de la qualité de l'ajustement.

En effet, lorsque ce dernier est achevé, la valeur de  $\chi^2$  caractérise, par définition, les différences entre les valeurs ajustées et mesurées de chaque grandeur. On peut associer à la valeur de  $\chi^2$  trouvée une probabilité, en utilisant la distribution théorique:

$$f_n(\chi^2) d\chi^2 = \frac{(\chi^2)^{(n/2)-1}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} e^{-\chi^2/2} d\chi^2$$

où  $n$  est le nombre de degrés de liberté de la loi de  $\chi^2$ . Il existe des tables donnant la probabilité en fonction de  $\chi^2$  et de  $n$  [14].

De façon générale,  $n$  est la différence entre le nombre de variables aléatoires indépendantes et le nombre de paramètres inconnus indépendants.

Si  $N_1$  = nombre de variables aléatoires (mesures)

$C_1$  = nombre de liaisons algébriques entre ces variables

$N_2$  = nombre de paramètres inconnus (que l'on veut estimer)

$C_2$  = nombre de liaisons entre ces paramètres

alors:  $n = (N_1 - C_1) - (N_2 - C_2)$ .

### 3. Méthode du maximum de vraisemblance [16]

La vraisemblance d'un ensemble de grandeurs est un nombre proportionnel à la probabilité d'observation de cet ensemble.

Si cette probabilité est fonction d'un certain nombre de paramètres inconnus, leur meilleure estimation est celle qui rend maximum la vraisemblance du résultat expérimental. Tel est l'énoncé du principe du maximum de vraisemblance.

Considérons un phénomène caractérisé par une loi de distribution  $F(x, y, \dots; \theta_1, \dots, \theta_h)$  de forme analytique connue, fonction des variables aléatoires  $x, y, \dots$ , et dépendant des  $h$  paramètres  $\theta$ .

La probabilité d'observer un échantillon de  $N$  valeurs des grandeurs  $x, y, \dots$  est proportionnelle à

$$L = \prod_{i=1}^N \frac{F(x_i, y_i, \dots; \theta_1, \dots, \theta_h)}{\int F(x, y, \dots; \theta_1, \dots, \theta_h) dx dy \dots}.$$

La détermination des valeurs  $\theta_1, \dots, \theta_h$  est donc possible en cherchant le maximum de la fonction  $L$  par rapport aux paramètres  $\theta$ . Il est souvent plus pratique de chercher le maximum de  $\mathcal{L} = \ln L$ .

Si l'on considère une expérience de physique nucléaire, il arrive souvent que la probabilité de détection d'un événement dépende de ses caractéristiques (énergie, angles, position dans le détecteur). Une telle probabilité, qui peut être soit le résultat d'un calcul, soit déterminée expérimentalement, va naturellement intervenir dans la formulation de la fonction de vraisemblance. Désignons-la par  $d(x, y, \dots)$ . La nouvelle fonction de vraisemblance s'écrit:

$$L = \prod_{i=1}^N \frac{d(x_i, y_i, \dots) F(x_i, y_i, \dots; \theta_1, \dots, \theta_h)}{\int d(x, y, \dots) F(x, y, \dots; \theta_1, \dots, \theta_h) dx dy \dots}$$

d'où:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \ln L = \sum_{i=1}^N & \{ \ln d(x_i, y_i, \dots) + \ln F(x_i, y_i, \dots; \theta_1, \dots, \theta_h) \\ & - \ln [\int d(x, y, \dots) F(x, y, \dots; \theta_1, \dots, \theta_h) dx dy \dots] \}. \end{aligned} \quad (I)$$

Remarquons que le premier terme ne dépend pas des paramètres  $\theta$ , et qu'ainsi, pour la recherche du maximum de  $\mathcal{L}$  par rapport aux paramètres  $\theta$ , la probabilité de détection  $d(x, y, \dots)$  n'intervient que dans le terme de normalisation. Il est souvent très difficile d'évaluer cette expression. On peut alors utiliser une fonction de vraisemblance sous la forme simplifiée suivante:

$$L' = \prod_{i=1}^N \left[ \frac{F(x_i, y_i, \dots; \theta_1, \dots, \theta_h)}{\int F(x, y, \dots; \theta_1, \dots, \theta_h) dx dy \dots} \right]^{1/d(x_i, y_i, \dots)}.$$

Cette dernière expression est très intuitive puisque l'on a simplement pondéré chaque observation par l'inverse de sa probabilité de détection. Les valeurs estimées  $\theta'$  des paramètres  $\theta$  obtenues à l'aide de la fonction  $\mathcal{L}' = \ln L'$  ne sont pas biaisées, si l'on peut montrer que  $\langle \partial \mathcal{L}' / \partial \theta \rangle_{\theta=\theta^{\text{vrai}}} = 0$ .

L'utilisation d'une fonction du type  $L'$  se justifie pour autant que la fonction  $d(x, y, \dots)$  ne soit pas trop proche de zéro pour certaines valeurs de  $x, y, \dots$ . Dans un tel cas, on a alors intérêt à éliminer les événements ayant ces faibles probabilités de détection, malgré la perte d'information qui en résulte.

En plus de la valeur des paramètres qui rendent la fonction de vraisemblance maximum, on peut tirer une information très utile de la forme de la fonction au voisinage de son maximum. Les physiciens considèrent souvent, qu'en bonne approximation, la matrice des covariances (ou matrice des erreurs) de l'échantillon est l'inverse de la matrice dont les éléments sont

$$\left( -\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)_{\theta=\theta^{\text{vrai}}} \quad (i, j = 1, \dots, h).$$

Une telle hypothèse est bonne si  $L$  est une fonction approximativement multi-gaussienne.

#### 4. Ajustement d'une fonction par moindres carrés

Nous allons maintenant considérer un cas particulier, très courant, d'application de la méthode des moindres carrés: l'ajustement de fonctions théoriques ou empiriques sur des résultats expérimentaux. Cet exemple va nous permettre de montrer l'équivalence de cette méthode avec celle du maximum de vraisemblance.

Considérons  $m$  mesurés  $y_1, \dots, y_m$  en des points  $x_1, \dots, x_m$ , et supposons les résultats expérimentaux distribués de façon gaussienne avec des déviations standards  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ , et appelons  $y'_i(x_i; \theta_1, \dots, \theta_h)$  les valeurs données par une fonction théorique (ou empirique) dépendant de  $h$  paramètres  $\theta$ . Dans ce cas, la fonction de vraisemblance s'écrit:

$$L = \prod_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2 \pi \sigma_i^2}} \exp \left\{ -\frac{(y_i - y'_i(\theta))^2}{2 \sigma_i^2} \right\}$$

d'où:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{(y_i - y'_i)^2}{\sigma_i^2} + \text{constante} = -\frac{1}{2} M + \text{constante}.$$

On voit donc que les valeurs  $\theta_1^*, \dots, \theta_h^*$  qui rendent  $L$  maximum sont les mêmes que celles qui rendent  $M$  minimum. Cette valeur,  $M^*$ , est bien la somme des moindres carrés. Nous avons déjà parlé des méthodes possibles de résolution d'un tel problème dans un paragraphe précédent, en particulier lorsque la résolution analytique n'est pas possible.

Un exemple qui nous intéresse est le suivant: le comptage, dans des émulsions, des densités de grains sur des traces de particules dont nous connaissons les vitesses  $\beta_1, \dots, \beta_m$  donnent les résultats

$$g_1 \pm \sigma_1, \dots, g_m \pm \sigma_m \left( \sigma_i \sim \frac{N_i}{\sqrt{N_i}}, N_i = \text{nombre de grains comptés} \right).$$

Il est alors possible de déterminer les paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$  de la fonction

$$g' = \theta_1 \left\{ \frac{\theta_2 - \log(1/\beta^2 - 1)}{\beta^2} - 1 \right\}$$

et ainsi d'obtenir la courbe  $\bar{g} = \bar{g}(\beta)$ , (on appelle calibration un tel procédé), en cherchant le minimum de

$$M = \sum_{i=1}^m \left( \frac{g_i - g'_i}{\sigma_i} \right)^2$$

par rapport à  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . On peut naturellement remplacer  $g'$  par toute autre fonction théoriquement mieux justifiée ou par un polynôme  $g' = \theta_0 + \sum_{j=1}^p \theta_j \beta^j$ .

### 5. Méthode de Monte Carlo [11, 12, 13]

Le principe d'une telle méthode est de simuler un processus que l'on observe, par exemple la diffusion multiple d'une particule chargée ou des cascades intranucléaires.

Pour étudier en réalité de tels phénomènes, on observe et on compte un certain nombre d'événements d'un type donné, les résultats étant sujets aux erreurs statistiques. La méthode de Monte Carlo fonctionne de la même façon: on génère un grand nombre de pseudo-événements selon un modèle de simulation choisi. Ces événements sont, ensuite, étudiés selon les mêmes critères que les événements réels. Les résultats peuvent alors être comparés à la réalité ou utilisés comme prédition pour une expérience à faire (en supposant que le modèle établi simule suffisamment bien la nature!).

Considérons une variable  $v$ , dont la distribution  $P(v)$  est connue. Si l'on veut introduire cette variable dans un processus de simulation, le choix d'une valeur  $v$  doit être tel que cette valeur ne soit pas connue a priori. Pour satisfaire cette exigence, on compare la distribution initiale à une distribution de nombres aléatoires. Plus exactement: on affirme que la probabilité que la variable ait une valeur comprise entre  $v$  et  $v + dv$  est proportionnelle à la probabilité que le nombre aléatoire  $NA$  ait une valeur comprise entre  $n$  et  $n + dn$ :

$$P(v) dv = K(n) dn. \quad (1)$$

Dans la plupart des cas on choisit la distribution des nombres aléatoires uniforme et définie entre 0 et + 1;  $K(n)$  est alors simplement une constante de normalisation.

Le principal problème de la méthode de Monte Carlo consiste à écrire correctement l'équation fondamentale (1) pour le problème que l'on étudie, qui nous permet ainsi de transformer une série de nombres aléatoires en une distribution de la variable  $v$ .

Un exemple très simple est donné par une distribution isotrope de l'angle polaire  $\theta$ : l'équation (1) s'écrit :

$$P(\theta) d\theta \sim d(\cos \theta) = K dn$$

en intégrant, on obtient :

$$\int_{-1}^{\cos \theta} d(\cos \theta) = K \int_0^n dn$$

ou

$$\cos \theta + 1 = K n .$$

Pour  $\cos \theta = -1$ ,  $n = 0$ , et pour  $\cos \theta = +1$ ,  $n = 1$  d'où le résultat évident:  $\cos \theta = 2(nA) - 1$ .

#### IV. Analyse des résultats

Dans notre expérience, nous nous trouvons en présence des deux problèmes essentiels dont nous avons parlé au début du chapitre précédent. A savoir:

- transformation de quantités mesurées en paramètres utiles pour l'étude que l'on se propose de faire.
- étude des propriétés des ces paramètres.

##### 1. Ajustement cinématique et reconstitution géométrique

Nous avons donné précédemment les lois générales, régies par le principe des moindres carrés, qui nous permettent, à partir des grandeurs mesurées, de les ajuster et de calculer les grandeurs inconnues (c'est-à-dire les grandeurs non-mesurées). Pour le cas particulier qui nous intéresse, où les grandeurs mesurées sont des énergies (ou des impulsions) et des angles et où nous faisons l'hypothèse que les événements que nous observons sont des désintégrations  $A^0 \rightarrow p + \pi^-$ , les équations de contraintes sont :

$$\begin{aligned} g_1 &= p_A \cos \delta_A \cos \alpha_A - p_p \cos \delta_p \cos \alpha_p - p_\pi \cos \delta_\pi \cos \alpha_\pi = 0 , \\ g_2 &= p_A \cos \delta_A \sin \alpha_A - p_p \cos \delta_p \sin \alpha_p - p_\pi \cos \delta_\pi \sin \alpha_\pi = 0 \\ g_3 &= p_A \sin \delta_A - p_p \sin \delta_p - p_\pi \sin \delta_\pi = 0 , \\ g_4 &= \sqrt{p_A^2 + m_A^2} - \sqrt{p_p^2 + m_p^2} - \sqrt{p_\pi^2 + m_\pi^2} = 0 . \end{aligned}$$

Les grandeurs  $m_A$ ,  $m_p$  et  $m_\pi$  sont supposées connues.  $p_p$ ,  $\delta_p$ ,  $\alpha_p$ ,  $p_\pi$ ,  $\delta_\pi$  et  $\alpha_\pi$  sont les valeurs ajustées des mesures  $p_p^m$ ,  $\delta_p^m$ ,  $\alpha_p^m$ ,  $p_\pi^m$ ,  $\delta_\pi^m$  et  $\alpha_\pi^m$ .  $p_A$ ,  $\delta_A$  et  $\alpha_A$  sont inconnues. Le nombre de degrés de liberté est  $n = 1$ .

En fait, les erreurs de mesures ( $\sigma_{\alpha_p}$ ,  $\sigma_{\alpha_\pi}$ ,  $\sigma_{\delta_p}$ ,  $\sigma_{\delta_\pi}$ ) sur les angles sont la plupart du temps négligeables, dans les émulsions, comparativement à celles ( $\sigma_p$ ,  $\sigma_\pi$ ) sur les impulsions du proton et du pion. Seules seront considérées comme variables aléatoires mesurées les impulsions  $p_p$  et  $p_\pi$ . De plus, nous supposerons aucune corrélation entre

ces deux grandeurs. Il est à noter que nous avons toujours  $n = 1$ . Le minimum de la fonction

$$\chi^2 = (\mathbf{p}_p - \mathbf{p}_p^m, \mathbf{p}_\pi - \mathbf{p}_\pi^m) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_p^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_\pi^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_p^m \\ \mathbf{p}_\pi - \mathbf{p}_\pi^m \end{pmatrix} + 2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}$$

est obtenu en utilisant la méthode que nous avons développée dans le paragraphe III-2, avec:

$$\frac{dg}{dx} = \begin{pmatrix} -\cos\delta_p \cos\alpha_p & -\cos\delta_\pi \cos\alpha_\pi \\ -\cos\delta_p \sin\alpha_p & -\cos\delta_\pi \sin\alpha_\pi \\ -\sin\delta_p & -\sin\delta_\pi \\ \frac{-p_p}{\sqrt{p_p^2 + m_p^2}} & \frac{-p_\pi}{\sqrt{p_\pi^2 + m_\pi^2}} \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{dg}{dy} = \begin{pmatrix} \cos\delta_A \cos\alpha_A & -p_A \cos\delta_A \sin\alpha_A & -p_A \sin\delta_A \cos\alpha_A \\ \cos\delta_A \sin\alpha_A & p_A \cos\delta_A \cos\alpha_A & -p_A \sin\delta_A \sin\alpha_A \\ \sin\delta_A & 0 & p_A \cos\delta_A \\ \frac{p_A}{\sqrt{p_A^2 + m_A^2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le résultat d'un tel calcul nous permet ainsi pour chaque événement trouvé, que l'on suppose être une désintégration  $A$ , de calculer le vecteur impulsion de l'hypéron  $A$  ainsi qu'une grandeur caractéristique ( $\chi^2$ ) donnant la probabilité pour que, l'hypothèse étant exacte, on trouve une valeur de  $\chi^2$  plus grande que celle obtenue.

Rappelons la forme de la distribution angulaire des désintégrations  $A$ :

$$dN(\theta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} (1 + \alpha P \cos\theta) \sin\theta d\theta d\zeta \quad (1)$$

où  $\zeta$  est l'angle azimuthal autour de  $\mathbf{S}_A$ .

Considérant notre champ transverse, il est utile de projeter la distribution (1) sur le plan défini par  $\mathbf{S}_A$  et  $\mathbf{p}_A$ , qui est en moyenne perpendiculaire à  $\mathbf{H}$ , puisque c'est dans ce plan que se produit la précession du vecteur polarisation. Redéfinissons la direction du  $\pi$  émis,  $\mathbf{p}_\pi^*$ , par  $\varphi$ , angle entre sa projection sur le plan  $(\mathbf{p}_A, \mathbf{S}_A)$  et  $\mathbf{p}_A$ , et  $\psi$ , son angle d'inclinaison par rapport à ce plan. Avec ces nouvelles variables, la distribution devient:

$$dN(\varphi, \psi) = \frac{1}{4\pi} (1 - \alpha P \sin\varphi \cos\psi) \cos\psi d\psi d\varphi.$$

Intégrant sur  $\psi$  entre les limites  $-\psi_0$  et  $+\psi_0$ , on obtient la distribution de  $\varphi$  suivante:

$$dN(\varphi/\psi_0) = \frac{\sin\psi_0}{2\pi} [1 - \alpha P \lambda(\psi_0) \sin\varphi] d\varphi$$

en posant

$$\lambda(\psi_0) = \frac{1}{2} \left( \cos \psi_0 + \frac{\psi_0}{\sin \psi_0} \right).$$

Nous avons vu dans un paragraphe précédent que l'effet de la précession se manifeste par la rotation du vecteur polarisation, dans le plan  $(\mathbf{S}_\Lambda, \mathbf{p}_\Lambda)$ , d'un angle  $\varphi_0 = \mu (e H l/m c^2 \beta)$ ; il s'en suit que la distribution angulaire de désintégration devient simplement:

$$dN(\varphi/\psi_0) = \frac{\sin \psi_0}{2\pi} [1 - \alpha P \lambda(\psi_0) \sin(\varphi - \varphi_0)] d\varphi. \quad (2)$$

Ainsi, nous voyons clairement comment la mesure de la distribution (2) permet la détermination de  $\mu$ .

Ayant reconstitué la désintégration  $\Lambda$  dans le système du laboratoire, il nous est possible, de calculer les angles caractéristiques de la désintégration dans le système du centre de masse. Tenant compte de la position de l'événement dans l'empilement de pellicules, il est aussi possible de vérifier si l'hypéron provient de la cible. Nous pouvons alors, si c'est le cas, trouver les coordonnées de son origine dans le plan perpendiculaire à l'axe de la cible et passant par son centre effectif. Nous pouvons également évaluer son temps de vol. Définissons et calculons la quantité suivante:  $\Delta^2 = (E_{inc} + m_p - E_\Lambda)^2 - |\mathbf{p}_{inc} - \mathbf{p}_\Lambda|^2 - m_K^2$  où  $\mathbf{p}_{inc}(E_{inc})$  est l'impulsion (énergie) du pion incident ( $|\mathbf{p}_{inc}| = 1,05 \text{ GeV/c}$ ); les indices  $p$ ,  $\Lambda$  et  $K$  se réfèrent aux particules correspondantes. Cette grandeur va nous permettre de tester si l'hypéron que l'on considère a été produit dans la réaction  $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$ . En effet, si l'on ignore les erreurs de mesures et si l'on considère un proton libre, on doit obtenir  $\Delta^2 = 0$ .

Pour 874 événements mesurés nous avons calculé: les impulsions ajustées  $\mathbf{p}_p$  et  $\mathbf{p}_\pi$ ; l'impulsion du  $\Lambda$ ,  $\mathbf{p}_\Lambda$ ; son origine dans la cible; son temps de vol,  $t_\Lambda$ ; les angles  $\varphi$  et  $\psi$  caractérisant la direction d'émission du  $\pi$  dans le système du centre de masse du  $\Lambda$ ; la grandeur  $\Delta^2$  attachée à la production du  $\Lambda$ ; et la valeur  $\chi^2$  caractérisant l'ajustement à la désintégration  $\Lambda$ .

## 2. Probabilité de détection

Etant donné que la probabilité de détection varie d'un événement à l'autre, il nous faut attribuer un poids statistique à chaque événement trouvé.

La probabilité de détection dépend de deux effets indépendants. Le premier est dû à la dimension finie des pellicules ( $1200 \mu$  d'épaisseur). En effet, les traces des protons peuvent quitter une pellicule (par la surface ou le fond) avant d'avoir atteint la ligne de dépouillement; de tels événements ne sont pas détectés puisque les traces ne sont pas suivies d'une plaque à l'autre. La probabilité d'un tel phénomène dépend essentiellement de l'angle entre les traces du  $\Lambda$  et du proton et des coordonnées de l'événement. C'est une fonction de l'angle  $\varphi$  dont il faut tenir compte. Le second effet est dû aux critères de dépouillement. En dépouillant l'intervalle angulaire projeté allant de  $-4^\circ$  à  $+13^\circ$  et en acceptant tous les angles d'inclinaison compris entre  $-15^\circ$  et  $+15^\circ$ , on introduit un biais dans la distribution angulaire des  $\pi$ . En effet, dans le système du  $\Lambda$ , une partie de la distribution des angles  $\varphi$  n'est pas du tout observée. Les limites de cet intervalle ignoré dépendent naturellement de l'impulsion de l'hypéron et de l'angle que fait sa direction avec le rayon vecteur joignant le centre de la cible. Le nombre de variables ( $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\mathbf{p}_\Lambda$ ,  $\delta_p$ , coordonnées de l'événement) qui interviennent

finalement dans la probabilité de détection étant important, il semble plus judicieux de la calculer par une méthode de Monte Carlo plutôt que d'en chercher une expression analytique. On peut ainsi trouver la probabilité  $d(\varphi, \mathbf{p}_A)$  en fonction de l'angle  $\varphi$  et de l'impulsion  $\mathbf{p}_A$ , en prenant des valeurs moyennes pour toutes les autres variables. Nous avons fait un tel calcul et nous allons en donner le principe.

Pour une quantité de mouvement du  $\Lambda$ ,  $\mathbf{p}_A$ , choisie, on génère un grand nombre de désintégrations  $\Lambda$  (par exemple 10000 pour chaque intervalle de  $\mathbf{p}_A$ ) en tirant au hasard, pour chaque événement, les coordonnées de la désintégration dans l'émulsion, la direction de l'hypéron, les angles  $\varphi$  et  $\psi$  définissant la direction du pion émis dans le système du  $\Lambda$ .

Le tirage se fait, pour chaque quantité  $q$ , en prenant un nombre aléatoire  $n$  compris entre 0 et 1, et en le transformant selon une loi:  $n \rightarrow q(n)$ . Pour les coordonnées de la désintégration, les angles définissant la direction du  $\Lambda$  et l'angle  $\varphi$ :  $q(n) = q_1 + n(q_2 - q_1)$ , où  $q_2$  et  $q_1$  sont les limites supérieure et inférieure de  $q$ . Pour l'angle  $\psi$ ,  $\cos q(n) = 2n - 1$ . Pour chaque événement ainsi généré, on peut alors estimer la direction du proton dans le système du laboratoire et son impulsion. En tenant compte de l'effet du champ magnétique, on peut ensuite vérifier si oui ou non la trace du proton traverse la ligne de dépouillement dans la fenêtre angulaire, c'est-à-dire, en d'autres termes, calculer sa probabilité de détection  $d(\varphi, \mathbf{p}_A)$ . Il suffit ensuite de recommencer le même processus pour d'autres valeurs de l'impulsion du  $\Lambda$ . Il est, de plus, facile d'inclure certaines coupures dues, par exemple, au fait d'ignorer, à la ligne de dépouillement, les traces qui sont à moins de  $50 \mu$  de la surface ou du fond, ou à la limitation sur  $\psi$  que nous verrons plus loin. Nous avons résumé, sur la figure 1, un exemple de résultats de notre calcul.

### 3. Fonction de vraisemblance

Si, parmi les événements trouvés lors du dépouillement nous en sélectionnons un nombre  $N$  pour l'analyse finale, le logarithme de la fonction de vraisemblance s'écrit:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \ln \frac{d(\varphi_i, \beta_i) [1 - a \sin \{\varphi_i \pm \mu e/m c^2 (H l)_i / \beta_i\}]}{\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} d(\varphi, \beta_i) [1 - a \sin \{\varphi \pm \mu e/m c^2 (H l)_i / \beta_i\}] d\varphi} \quad (I)$$

avec  $a = \alpha \mathbf{p} \lambda(\psi_0)$ . Le signe  $(\pm)$  correspond aux deux orientations possibles du champ magnétique. Les limites  $\varphi_a$  et  $\varphi_b$  définissent l'intervalle angulaire que l'on observe. En dehors de ces limites, les probabilités de détection sont très faibles et mal déterminées.

La fonction de vraisemblance permet de tenir compte du fait que toutes les particules  $\Lambda$  n'ont pas passé le même temps dans le champ magnétique et que la probabilité de détection n'est pas constante.

Comme nous l'avons déjà relevé précédemment, le logarithme de la fonction de vraisemblance peut également s'écrire:

$$\mathcal{L}' = \sum_{i=1}^N \frac{1}{d(\varphi_i, \beta_i)} \ln \frac{1 - a \sin \{\varphi_i \pm \mu e/m c^2 (H l)_i / \beta_i\}}{\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} [1 - a \sin \{\varphi \pm \mu e/m c^2 (H l)_i / \beta_i\}] d\varphi}. \quad (II)$$

Remarques: les paramètres à considérer sont  $\mu$  et  $a$ . Ce dernier est connu approximativement. Cependant il est utile de la déterminer afin de voir si le degré de polarisation

des  $\Lambda$  que l'on considère est bien celui que l'on a prévu. La recherche du maximum de la fonction de vraisemblance a été effectuée en utilisant une méthode d'approche graduelle pas à pas dont nous avons déjà donné le principe. Nous avons, en fait, utilisés les relations (I) et (II), en remplaçant les intégrales par des sommes sur des intervalles où  $d \simeq$  constante, et constaté que pour les valeurs de  $d$  que l'on considère (voir paragraphe concernant les résultats) ces deux formes sont équivalentes. Il est évident que le domaine des valeurs possibles de  $a$  (physiquement) est tel que  $-1 < a < +1$ . Pour des valeurs ne satisfaisant pas cette condition, les fonctions de vraisemblance, telles que nous les avons définies, ne sont pas correctes. Il faut alors prendre certaines précautions et ignorer les régions où  $\varphi$  est tel que la probabilité partielle  $\{1 - a \sin(\varphi - \varphi_0)\}$  n'est pas positive. Cependant de telles difficultés disparaissent lorsque le nombre  $N$  est assez grand.

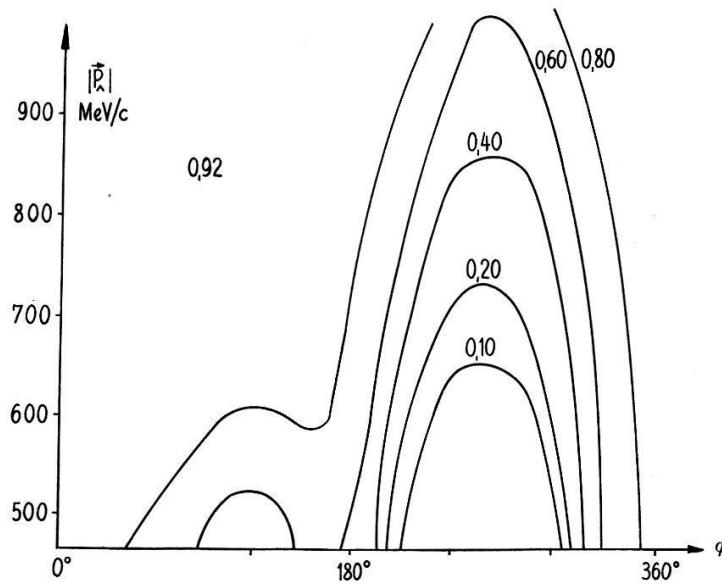


Figure 1

Probabilité de détection d'un  $\Lambda$ .

#### 4. Résultats et erreurs

La figure 2 montre la distribution des  $\chi^2$  des 874 événements mesurés, ainsi que la distribution théorique donnée pour un degré de liberté. Nous avons choisi une échelle telle que cette dernière soit une droite (trait interrompu). On voit immédiatement que l'ajustement est très satisfaisant jusqu'à des valeurs de  $\chi^2 = 4$ . Pour des valeurs supérieures (en particulier pour  $\chi^2 > 10$ ) il est évident que les événements en question font partie du bruit de fond dont nous reparlerons. Des 874 événements mesurés, 324 sont considérés comme étant des désintégrations  $\Lambda$ . Les critères de ce premier choix étant: a)  $\chi^2 \leq 4$ , b) direction ajustée du  $\Lambda$  provenant du volume de la cible. Il est, de plus, possible de montrer la cohérence interne de cet ensemble de désintégrations  $\Lambda$ .

Tout d'abord, pour 60 d'entre eux, présentant des conditions géométriques favorables et ayant un  $\varphi^2 < 10$ , il a été possible de faire des mesures de courbures qui ont montré que les signes des charges des deux particules sont en complet accord avec

l'interprétation que l'on en donne: trace suivie = proton, seconde trace = pion. Dans 20 cas, il a été possible de suivre la seconde trace jusqu'à l'arrêt, ce qui a permis des mesures de parcours très précises, et chaque fois on a constaté qu'il s'agissait bien de la trace d'un  $\pi^-$ .

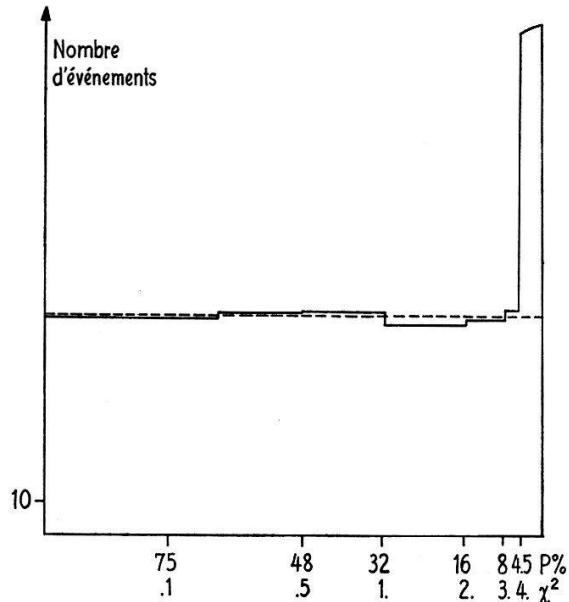


Figure 2

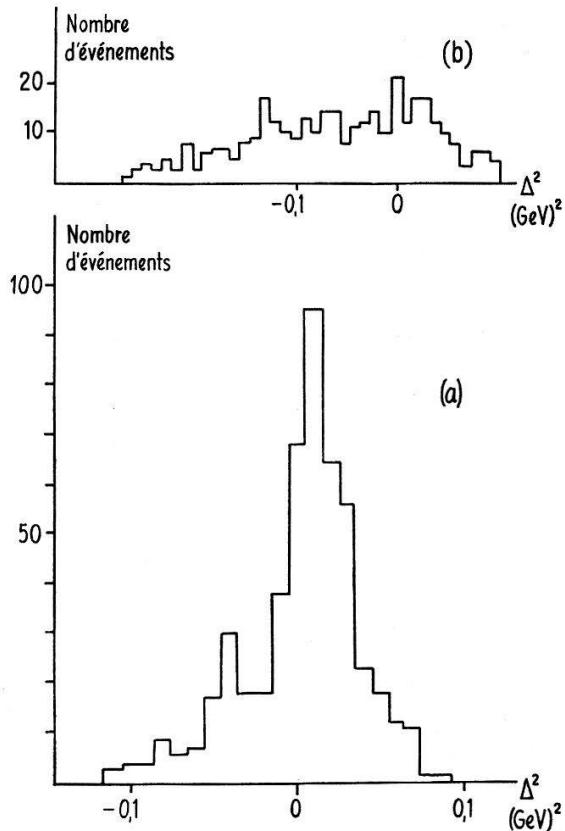
Distribution des  $\chi^2$ .

Figure 3

Distribution des valeurs  $\Delta^2$ 

- (a) pour des événements ayant  $\chi^2 < 10$
- (b) pour des événements ayant  $\chi^2 > 10$

Sur la figure 3 nous avons représenté, séparément, les distributions des valeurs  $\Delta^2$  pour des événements ayant  $\chi^2 \leq 10$  et  $\chi^2 > 10$ . La seconde de ces distributions est tout à fait ce que l'on peut attendre pour des événements appartenant au bruit de fond. La première, elle, est compatible avec l'hypothèse que l'on a des événements  $\Lambda$  produits par collision  $\pi^- + p$ . Elle est effectivement centrée autour de  $\Delta^2 = 0$ . Sa largeur ( $\simeq 0,04$  (GeV/c) $^2$ ) s'explique parfaitement par les erreurs de mesures. Elle est, par contre, relativement plus étroite que celle que l'on devrait observer si la réaction de production se faisait sur un proton lié.

Appelons  $\mathbf{p}'_\Lambda = \mathbf{p}_\Lambda + \delta\mathbf{p}_\Lambda$  la vraie valeur de  $\mathbf{p}_\Lambda$ , et  $E'_\Lambda = E_\Lambda + \delta E_\Lambda$  la vraie valeur de  $E_\Lambda$ , où  $\delta\mathbf{p}_\Lambda$  et  $\delta E_\Lambda$  sont les incertitudes de mesures. ( $\delta\mathbf{p}_\Lambda$  est un vecteur dont la direction est aléatoire.) Par définition:

$$(E_{inc} + m_p - E'_\Lambda)^2 - |\mathbf{p}_{inc} - \mathbf{p}'_\Lambda|^2 - m_K^2 = 0.$$

En développant cette expression on obtient:

$$(E_{inc} + m_p - E_\Lambda)^2 - 2 E_K \delta E_\Lambda + \delta E_\Lambda^2 - |\mathbf{p}_{inc} - \mathbf{p}_\Lambda|^2 + 2 \delta\mathbf{p}_\Lambda \cdot \mathbf{p}_K - \delta\mathbf{p}_\Lambda^2 - m_K^2 = 0$$

d'où:

$$\Delta^2 = 2 E_K \delta E_A - \delta E_A^2 + \delta \mathbf{p}_A^2 - 2 \delta \mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_K.$$

La largeur de la distribution est donc proportionnelle à  $\delta \mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_K$ , terme qui donne la contribution essentielle. En considérant des valeurs moyennes, pour obtenir un ordre de grandeur, on trouve que la largeur de la distribution des  $\Delta^2$  est égale à 0,04 (GeV/c)<sup>2</sup>.

Par contre, si l'on développe, en supposant les mesures infiniment précises,

$$(E_{inc} + m_p + T_F - E_A)^2 - |\mathbf{p}_{inc} + \mathbf{p}_F - \mathbf{p}_A|^2 - m_K^2 = 0$$

où l'indice  $F$  se réfère au mouvement de Fermi d'un proton lié, on obtient:  $\Delta^2 = -2 T_F E_K - T_F^2 + 2 \mathbf{p}_F \cdot \mathbf{p}_K + \mathbf{p}_F$  ( $\mathbf{p}_F$  est un vecteur dont la direction est aléatoire). Dans ce cas, en prenant  $T_F = 20$  MeV, la largeur de la distribution ( $\sim \mathbf{p}_F \cdot \mathbf{p}_K$ ) devrait être environ 0,14 (GeV)<sup>2</sup>.

Nous pouvons donc conclure que les événements que nous avons choisi proviennent essentiellement de l'hydrogène de la cible (proton libre, mouvement de Fermi nul); la largeur de la distribution des  $\Delta^2$  obtenue est, répétons-le, due aux erreurs de mesures.

De l'ensemble, très pur, des 324 désintégrations, 212 ont une impulsion supérieure à 650 MeV/c. ROSSELET [1] a montré que l'erreur statistique sur la mesure  $\varphi_0$  est minimum lorsque  $\psi_0 = 65^\circ$ . Cette constatation peut se comprendre intuitivement, l'information sur la direction de la polarisation étant essentiellement fournie par les désintégrations se produisant dans le plan contenant cette dernière. Nous avons donc imposé la condition supplémentaire:  $|\sin \psi| \leq 0,9$ , ce qui réduit le nombre d'événements à 196. Nous avons choisi des limites de l'intervalle angulaire que nous utilisons pour la fonction de vraisemblance telles que tous les événements que nous considérons ont une probabilité de détection  $d$  supérieure ou égale à 0,7, quelles que soient leurs impulsions. Cette nouvelle condition réduit le nombre de  $\Lambda$  de 196 à 151.

Utilisant ces 151 désintégrations  $\Lambda$ , nous avons cherché les valeurs de  $\mu$  et  $\alpha \mathbf{p}$  qui rendent maximum la fonction  $\mathcal{L}$ .

Ce sont:

$$\begin{aligned} \mu_\Lambda &= -0,50 \pm 0,28 \text{ magnéton nucléaire,} \\ &= -0,59 \pm 0,33 \text{ magnéton intrinsèque} \end{aligned}$$

et  $\alpha \mathbf{p} = 0,59 \pm 0,15$ . La figure 4 montre la forme de la fonction  $\mathcal{L}$ . Les erreurs sont celles données par les valeurs de  $\mu$  et  $\alpha \mathbf{p}$  où la fonction  $\mathcal{L}$  est  $1/e$  de son maximum.

Cette valeur de  $\mu$  correspond à un angle moyen de précession égal à  $22^\circ$ . Ajoutons que la vitesse moyenne des  $\Lambda$  est  $0,558 c$  et que la valeur  $Hl$  effective vaut 1,37 MGauss · cm.

Si l'on compare la valeur obtenue pour  $\mu_\Lambda$  et la prédition théorique donnée par SU(3) qui est  $-0,95$ , on constate que l'accord est bon. En faisant une telle comparaison, il faut se rappeler que la valeur donnée par SU(3) suppose les masses du multiplet baryonique égales, c'est-à-dire, entre autre,  $m_p = m_\Lambda$ ; comme l'unité «magnéton» est inversément proportionnelle à la masse de la particule, plus exactement égale à  $e \hbar / m c$ , on obtient une imprécision d'environ 20% sur la valeur théorique. La façon la plus intuitive (et la plus simple!) de tenir compte de la différence des masses du proton et du  $\Lambda$  est de multiplier la prédition  $\mu_\Lambda = -0,95$  par le rapport  $m_p/m_\Lambda$ , ce qui donne  $-0,80$ . Cette opération n'est, naturellement, pas nécessaire si l'on

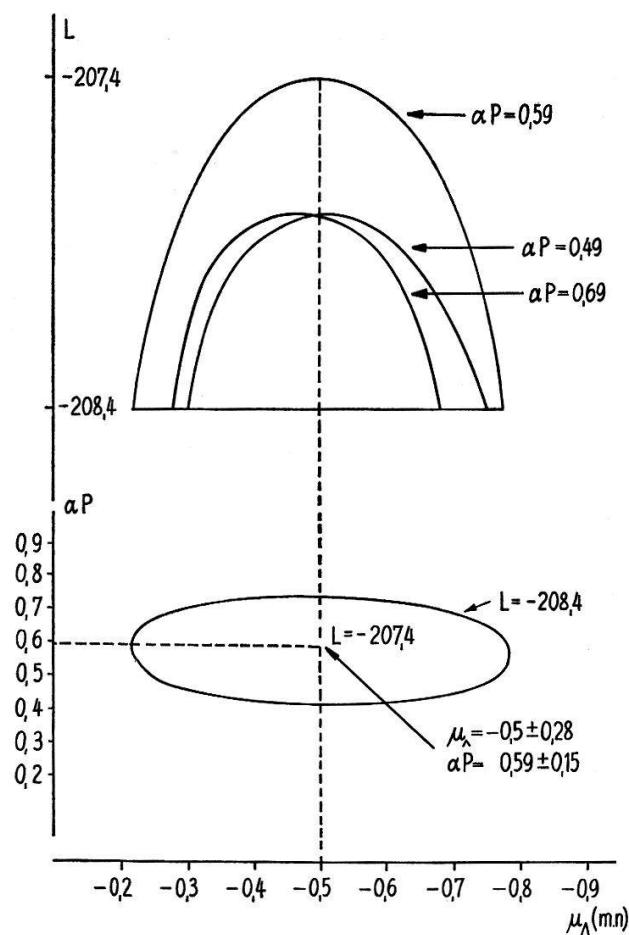


Figure 4  
Contours de  $L(\mu, \alpha P)$ .

exprime, comme nous l'avons également fait, le moment magnétique en magnéton intrinsèque.

Il est intéressant de noter que la moyenne pondérée de toutes les valeurs du moment magnétique du  $\Lambda$  actuellement disponibles est  $-0,73 \pm 0,17$  magnéton nucléaire [22, 23, 24, 25].

##### 5. Erreurs systématiques et faux événements

Les sources les plus importantes de biais systématiques qui peuvent intervenir dans le résultat de notre expérience sont les suivantes:

- incertitude dans la mesure du champ magnétique;
- événements  $V$ , produits par collisions de neutrons sur des noyaux de l'émulsion, pouvant simuler des désintégrations  $\Lambda$ ;
- erreur dans la calibration  $g^* \rightarrow \beta$ ;
- biais dans la distribution angulaire des  $\Lambda$  dû aux critères de sélection des traces lors du dépouillement.

Nous avons déjà vu précédemment comment calculer et utiliser les corrections dues au cas d). Ajoutons que les critères d'angle en plan ont été appliqués avec une précision meilleure que  $1^\circ/2$ ; les limites que nous avons donné à la fenêtre angulaire sont plus grandes que l'angle maximum d'émission pour tous les protons de désintégrations  $\Lambda$ , du moins pour l'hémisphère complètement observé.

Nous verrons plus loin que le cas b) n'apporte aucune contribution dans notre échantillon de désintégrations  $\Lambda$ .

Le champ magnétique a été mesuré avec une précision d'environ 2% par deux méthodes différentes. Pour couvrir les effets de l'inhomogénéité à l'intérieur de la cible nous avons utilisé  $Hl = \int H(l) dl$ , pour chaque événement.

Pour ce qui concerne c), nous avons éprouvé la validité de la conversion  $g^* \rightarrow \beta$  en étudiant l'effet d'un changement systématique de l'ordre de 10% sur les quantités de mouvements utilisées. Nous avons constaté qu'après ajustement les mêmes désintégrations étaient sélectionnées et que la valeur obtenue pour  $\mu$  était à moins de 10% du résultat que nous avons donné, mais que la distribution des  $\chi^2$  était moins bonne.

Finalement nous pouvons donc affirmer qu'une erreur systématique, si elle existe, ne doit certainement pas dépasser 10%.

Nous avons également éprouvé la cohérence de nos résultats lorsque l'on change les critères de sélection des désintégrations qui interviennent dans l'analyse, afin de voir si le choix que nous avons fait n'est pas critique. Aussi nous avons répété l'analyse pour différents domaines d'impulsions des  $\Lambda$  et pour différentes régions angulaires. Nous avons constaté qu'il n'y a aucune indication d'un effet systématique entre l'échantillon que nous avons choisi et tout autre échantillon fourni par les 324  $\Lambda$ . Les résultats obtenus ne diffèrent pas de plus de 20% de la valeur que nous avons donné.

Si l'on s'intéresse aux sources de bruit de fond possible parmi les événements  $V$ , nous pouvons tout de suite dire que les paires d'électrons sont éliminées facilement lors du dépouillement. Il ne peut donc exister qu'une seule source de bruit de fond, donnée par des réactions du type:



les particules émises pouvant être des mésons  $\pi$ , des mésons  $K$ , des nucléons, des hypérons, ainsi que des particules composées telles que deutérons, particules alpha, etc.

Les événements du type (1) qui nous intéressent sont ceux qui possèdent: - un primaire neutre et deux secondaires chargés; - un primaire et un secondaire chargés.

En imposant, après ajustement cinématique, les conditions a)  $\chi^2 \leq 4$  et b) impulsion  $\mathbf{p}_\Lambda$  venant de la cible, le second cas est quasiment exclu. Il reste donc à considérer les réactions qui produisent des étoiles avec un neutron comme primaire et qui ont deux branches secondaires visibles (chargées) telles que la résultante de leurs impulsions satisfasse la condition b) ci-dessus et que la masse invariante  $M^*$  soit proche de celle du  $\Lambda$  afin de satisfaire la condition a). De plus, comme nous l'avons déjà écrit, dans un échantillon de 60 désintégrations des tests sur la courbure des traces de ces événements ont montré que la paire de particules était constituée d'une particule chargée positivement et d'une particule chargée négativement. On peut donc immédiatement se restreindre à la réaction suivante:  $n + n \rightarrow n + p + \pi^-$ .

Pour des neutrons incidents d'énergie cinétique inférieure à 400 MeV seuls des protons sortent des cascades intranucléaires et donnent donc deux branches chargées positivement. La création de mésons  $\pi$  intervenant pour des neutrons d'énergie

cinétique supérieure à cette limite, la source la plus importante résulte des neutrons du pic de diffusion ( $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$  et  $\pi^- n \rightarrow \pi^- n$ ) qui ont une énergie cinétique d'environ 600 MeV. R. WEILL [26] en a calculé le flux et il a estimé un nombre d'environ 300 neutrons par plaque. Rappelons que nous avons observé en moyenne un  $\Lambda$  par plaque. Avec une section efficace de 800 mb, 15% des étoiles produites par ces neutrons ont deux branches chargées et 2% de ces événements- $V$  ont une branche chargée positivement ( $\phi$ ) et une branche chargée négativement ( $\pi^-$ ). On voit ainsi que le nombre d'étoiles à deux branches (positive et négative) est très faible. De plus, seule une petite portion d'entre elles sont susceptibles de satisfaire les conditions a) et b).

Nous pouvons donc conclure que la contribution, dans notre échantillon  $\Lambda$ , de faux événements dus à des étoiles à deux branches est absolument négligeable.

### Conclusion

L'analyse détaillée des résultats des mesures faites dans les émulsions pour évaluer dans la phase finale la valeur du moment magnétique a été faite en résolvant d'importants problèmes, jusqu'alors non considérés. Ce sont :

- ajustement cinématique des grandeurs mesurées,
- calcul des probabilités de détection,
- définition d'une fonction de vraisemblance utilisant ces probabilités de détection,
- maximisation d'une fonction quelconque d'un nombre variable de paramètres.

Avec une rigueur aussi grande que possible, nous avons sélectionné un échantillon très pur d'événements  $\Lambda$  qui nous a permis de calculer une valeur non biaisée du moment magnétique et son erreur.

### Remerciements

Ma profonde gratitude va à M. le Professeur CH. HAENNY pour l'intérêt constant qu'il a porté à ce travail.

J'exprime ma reconnaissance aux physiciens des groupes «émulsions» de Bristol, du CERN et de Munich pour les nombreuses remarques et suggestions qu'ils m'ont faites lors de nos réunions. Je remercie mes collègues, les Drs M. GAILLOUD et R. WEILL, et tout particulièrement le Dr PH. ROSSELET pour l'aide inestimable qu'il m'a apportée tout au long de ce travail.

Ce travail a été réalisé grâce à l'appui financier du Fonds National Suisse pour la Recherche Scientifique.

### Bibliographie

- [1] PH. ROSSELET, Helv. phys. Acta 38, 691 (1965).
- [2] G. CHARRIÈRE, M. GAILLOUD, PH. ROSSELET, R. WEILL, W. M. GIBSON, K. GREEN, P. TOLUN, N. A. WHYTE, J. C. COMBE, E. DAHL-JENSEN, N. T. DOBLE, D. EVANS, L. HOFFMANN, W. T. TONER, H. GÖING, K. GOTTSSTEIN, W. PÜSCHEL, V. SCHEUING, T. TIETGE, Phys. Lett. 15, 66 (1965); Proc. of the 12<sup>th</sup> Ann. Intern. Conf. on High Energy Physics, Dubna, August 1964, vol. 1, 668 (Atomizdat, Moscow 1966); Nuovo Cim. 46, 205 (1966).
- [3] L. VAN HOVE, CERN 65-24, vol. III (1966).
- [4] G. FEINBERG, R. E. BEHREND, Phys. Rev. 115, 745 (1959).

- [5] Y. YAMAGOUCHI, *Prog. theor. Phys. Suppl.* **11**, 37 (1959).
- [6] A. H. ROSENFELD et al., UCRL-8030 (Jan. 1967).
- [7] Ph. ROSSELET, *Nucl. Instr. Meth.* **20**, 487 (1963).
- [8] Laboratoire de Recherches Nucléaires EPUL, Lausanne, rapports internes non publiés (mars, avril, juillet 1963).
- [9] Ph. ROSSELET, Thèse, appendice (Lausanne 1964).
- [10] H. D. YOUNG, *Statistical Treatment of Experimental Data* (McGraw-Hill, N.Y. 1962).
- [11] J. M. HAMMERSLEY, D. C. HANDSCOMB, *Monte Carlo Methods* (Methuen and Co Ltd., London 1964).
- [12] A. WERBROUCK, CERN 64-13, vol. 1, 147 (1964) et D. HUDSON, id, 169.
- [13] YU. A. SHREIDER, *Method of Statistical Testing, Monte Carlo Method* (Elsevier Publishing Company, 1964).
- [14] W. E. DEMING, *Statistical Adjustment of Data* (John Wiley and Sons Inc., N.Y. 1959).
- [15] YU. V. LINNIK, *Method of Least Squares and Principles of the Theory of Observations* (Pergamon Press, 1964).
- [16] F. T. SOLMITZ, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **14**, 375 (1964).
- [17] A. H. ROSENFELD, W. E. HUMPHREY, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **13**, 103 (1963).
- [18] J. P. BERGE, F. T. SOLMITZ, H. D. TAFT, *Rev. Sci. Instr.* **32**, 538 (1961).
- [19] R. BÖCK, CERN 60-30 (1960) et CERN 61-29 (1961).
- [20] F. GRARD, UCRL-10153 (1962).
- [21] B. RONNE, CERN 64-13, vol. I, 87 (1964).
- [22] R. L. COOL, E. W. JENKINS, T. F. KYCIA, D. A. HILL, L. MARSHALL, R. A. SCHLUTER, *Phys. Rev.* **127**, 2223 (1962).
- [23] W. KERNAN, T. B. NOVEY, S. D. WARSHAW, A. WATTENBERG, *Phys. Rev.* **129**, 870 (1963).
- [24] J. A. ANDERSON, F. S. CRAWFORD JR., *Phys. Rev. Lett.* **13**, 167 (1964).
- [25] D. A. HILL, K. K. LI, E. W. JENKINS, T. F. KYCIA, H. RUDERMAN, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 85 (1965).
- [26] R. WEILL, Lab. Rech. Nucléaires EPUL, Lausanne, rapports internes, juin 1964 (non publiés).