

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 41 (1968)
Heft: 6-7

Artikel: Der Supraleiter mit Strom
Autor: Strässler, Sigfrid / Wyder, Peter
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-113993>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Der Supraleiter mit Strom

von **Sigfrid Strässler**

Forschungszentrum der AG Brown, Boveri & Cie., Baden, Schweiz

und **Peter Wyder**

Fysisch Laboratorium, Katholieke Universiteit, Nijmegen, Nederland

(29. IV. 68)

Abstract. We calculate the effect of the mean free path l on a superconducting film carrying a current. We find that at $T = 0$ the superconductor becomes gapless with the critical current for $l/\xi_0 = 15.78$, where ξ_0 is the BCS correlation length. The energy-gap as a function of current and mean free path is evaluated numerically.

Seit den Arbeiten von ROGERS [1], BARDEEN [2], MAKI [3] und FULDE [4] ist es bekannt, dass ein Strom in einem Supraleiter die supraleitenden Paare zerstört. Für unendlich lange freie Weglängen l wurde gezeigt [1], dass der Supraleiter ganz in der Nähe des kritischen Stromes energielückenlos wird; hingegen wird für sehr kleine freie Weglängen die Energielücke durch den Strom nur wenig verkleinert [3]. Der energielückenlose Zustand kann durch Anlegen eines Magnetfeldes, welches einen supraleitenden Strom induziert, erreicht werden [5]; dies ist allerdings experimentell schwieriger zu erfassen. Es stellt sich die Frage, bei welcher freien Weglänge der Supraleiter gerade noch den energielückenlosen Zustand erreichen kann und ob sich dies experimentell realisieren lässt. Ferner soll untersucht werden, wie sich die Energielücke als Funktion der freien Weglänge und des Stromes ändert. Da der Strom mit dem kritischen Strom normiert wird, muss auch die Frage der Abhängigkeit des kritischen Stromes von der freien Weglänge untersucht werden.

Abgesehen von den zwei Grenzfällen $l \rightarrow 0$ und $l \rightarrow \infty$ ist es nicht möglich, die GORKOV-Gleichungen [6, 7, 3], welche den stromdurchflossenen Supraleiter beschreiben, analytisch zu lösen. Ähnlich wie bei den für den Supraleiter im Magnetfeld durchgeführten Untersuchungen [8] muss die Auflösung der Gleichungen numerisch erfolgen. Eine zu diesem Zweck geeignete Form wird im folgenden hergeleitet, numerisch ausgewertet und diskutiert. In dieser Arbeit werden alle Berechnungen für die Temperatur $T = 0$ durchgeführt; eine Verallgemeinerung auf $T \neq 0$ ist allerdings leicht durchzuführen und ist vor allem in der Nähe von T_c interessant, wo die exakten Lösungen mit den Ergebnissen der Ginzburg-Landau-Theorie verglichen werden können [9].

Bei Anwesenheit von Verunreinigungen lauten die GORKOV-Gleichungen in der üblichen Notation [7, 10] (mit $\hbar = k_B = 1$):

$$\begin{aligned} (i \tilde{\omega}_n - \hat{H}) G(\omega_n, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + \tilde{\Delta}^* F(\omega_n, \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ (i \tilde{\omega}_n + \hat{H}^+) F(\omega_n, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + \tilde{\Delta} G(\omega_n, \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n + (1/2 \tau) G(\omega_n, \mathbf{r}, \mathbf{r}), \quad \tilde{\Delta} = \Delta + (1/2 \tau) F(\omega_n, \mathbf{r}, \mathbf{r}), \quad (2)$$

$$\Delta = g T \sum_{n=0}^{\infty} F(\omega_n, \mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (3)$$

In diesen Gleichungen ist $\omega_n = (2n + 1)\pi \cdot T$, \hat{H} der Hamiltonoperator der Elektronen, der die Wechselwirkung mit magnetischen Feldern einschliesst, und $\tau = l/v_F$, wobei l die freie Weglänge und v_F die Fermigeschwindigkeit bedeuten. Die BCS-Korrelationslänge ξ_0 ist gegeben durch $\xi_0 = v_F/(\Delta_0\pi)$, wobei Δ_0 den BCS-Ordnungsparameter bei $T = 0$ darstellt. Falls magnetische Felder und räumliche Variationen des Ordnungsparameters vernachlässigt werden können, wird die Bedingung, dass ein Strom längs der z -Achse fliesst, durch den Ansatz

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = e^{iq(z-z')} G_q(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{iq(z+z')} F_q(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4)$$

erfüllt. Die Stromdichte j kann aus

$$j = -\frac{e}{m} \frac{T}{2(\pi)^3} \sum_n \int d^3k \left(k_z - \frac{q}{2}\right) G(\mathbf{k}, \omega_n) \quad (5)$$

berechnet werden [3]. Dabei ist $G(\mathbf{k}, \omega_n)$ die Fouriertransformierte von $G_q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Die Gleichung für Δ wird nun

$$\Delta = \frac{g}{(2\pi)^3} T \sum_n \int d^3k F(\mathbf{k}, \omega_n), \quad (6)$$

wobei $F(\mathbf{k}, \omega_n)$ die Fouriertransformierte von $F_q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ist. Die Zustandsdichte $N(\omega)$ als Funktion der Energie ω wird [11]

$$N(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k G(\mathbf{k}, -i\omega) \right]. \quad (7)$$

Für die numerische Auswertung werden die Gleichungen in die folgende Form gebracht:

Mit dem Ansatz (4) folgt aus (1), (2) und (3) für $T = 0$

$$\ln(\Delta/\Delta_0) = - \int_0^{\chi_m} d\chi \frac{dx}{d\chi} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{2\kappa\chi}{\sqrt{2Z-\chi}} \right]. \quad (8)$$

Hier ist x als Funktion der Variablen χ gegeben durch

$$x = W(\chi) = \left[\sin^2 \chi - \left(\frac{\kappa}{Z} \right)^2 \left(1 - \frac{\chi}{2Z} \right)^2 \right]^{1/2} \frac{2Z \text{ctg} \chi - 1}{2Z - \chi}. \quad (9)$$

Dabei ist $\kappa = \tau \Delta$, $Z = (\tau q v_F / 2 \Delta_0)$ und Δ_0 der BCS-Ordnungsparameter für $j = 0$. Der Wert χ_m für die obere Integrationsgrenze in (8) ist bestimmt durch die Lösung von entweder

$$\sin \chi_1 = (Z/\kappa) [1 - (\chi_1/2Z)], \quad \text{für } Z < Z_0, \quad (10)$$

oder

$$\chi_2 = \arctg(2Z), \quad \text{für } Z > Z_0, \quad (11)$$

wobei Z_0 aus

$$\kappa = \frac{1}{2} (1 + (2Z_0)^2)^{1/2} [1 - (1/(2Z_0)) \arctg(2Z_0)] \quad (12)$$

berechnet werden muss. Aus (5) finden wir für die normierte Stromdichte $J = j/j_0$ ($j_0 = e n \Delta_0 / m v_F$, n : Zahl der Elektronen pro Volumeneinheit)

$$J = 6 \left(\frac{\Delta}{\Delta_0} \right) \kappa^2 \int_0^{\chi_m} d\chi \frac{dx}{d\chi} \frac{\cos \chi \sin \chi - \chi}{(2Z - \chi)^2}. \quad (13)$$

Durch numerische Integration von (8) und (13) lassen sich der Ordnungsparameter Δ und der Strom J als Funktion des Parameters Z für beliebige freie Weglängen berechnen. Für sehr kleine und sehr grosse freie Weglängen kann man die Integrationen explizit ausführen [3, 4, 10]; man erhält mit $\xi = (2Z^2/3\kappa)$ für $l/\xi_0 \rightarrow 0$:

$$\ln(\Delta/\Delta_0) = -\frac{\pi}{4}\xi, \text{ für } \xi < 1, \quad J = (\Delta/\Delta_0)^{3/2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\xi \right) (6\xi\tau\Delta_0)^{1/2}, \quad (14)$$

und mit $\alpha = Z/\kappa$ für $l/\xi_0 \rightarrow \infty$:

$$\ln(\Delta/\Delta_0) = \begin{cases} -\ln(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}) + (\sqrt{1-\alpha^{-2}}), & \text{für } \alpha > 1, \\ 0 & , \text{ für } \alpha < 1, \end{cases}$$

$$J = \begin{cases} \alpha(\Delta/\Delta_0)[1 - (1 - \alpha^{-2})^{3/2}], & \text{für } \alpha > 1 \\ \alpha & , \text{ für } \alpha < 1. \end{cases} \quad (15)$$

Der kritische Strom J_c wird bestimmt durch

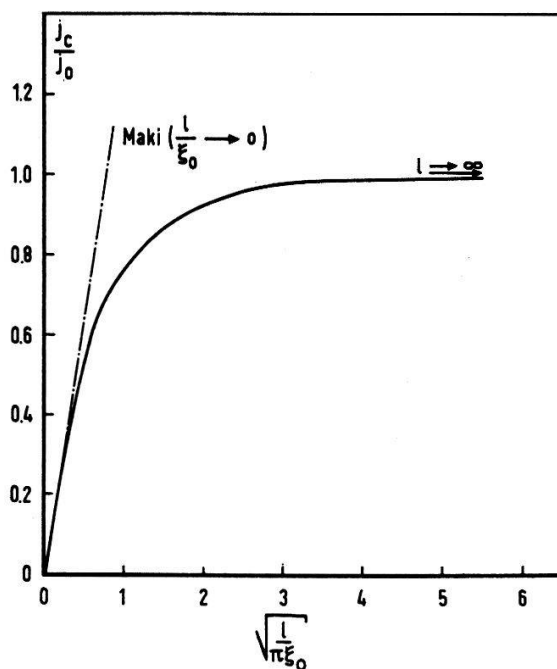
$$\left(\frac{\partial J}{\partial Z} \right)_\tau = 0. \quad (16)$$

In den Grenzfällen erhält man

$$l/\xi_0 \rightarrow 0: J_c \equiv j_c/j_0 = 0.729 (l/\xi_0)^{1/2}, \quad l/\xi_0 \rightarrow \infty: J_c \equiv j_c/j_0 = 1.011. \quad (17)$$

Für endliche freie Weglängen wird zu einem bestimmten τ ein $\kappa = \kappa_1$ angenommen und mit Hilfe von (8) $\Delta(\kappa_1) = \kappa_1/\tau_1$ berechnet. Mittels der «regula falsi» wird κ_1 so lange variiert, bis $\tau_1 = \tau$ ist. Analog findet man $J(Z)$ und damit $J_{max} = J_c$. Das Resultat ist in Figur 1 dargestellt. Für die Zustandsdichte erhalten wir aus (7)

$$N(\omega) = -2\kappa N_0 \operatorname{Im} \left(\frac{2Z}{2Z - \operatorname{tg} \chi} \right), \quad (18)$$



Figur 1

Kritischer Strom j_c/j_0 eines supraleitenden Filmes als Funktion der freien Weglänge l ($j_0 = e n \Delta_0 / m v_F$).

wobei N_0 die Zustandsdichte im normalen Zustand ist; χ wird nach (9) aus

$$W(\chi) = -i(\omega/\Delta) \quad (19)$$

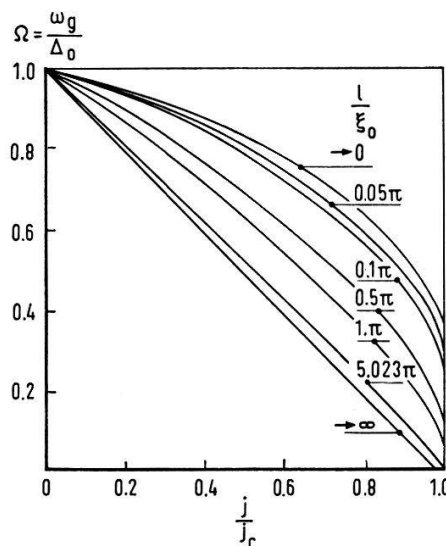
berechnet. Von besonderem Interesse ist die normierte Zustandsdichte $n_0 = N(\omega = 0)/N_0$ im energielückenlosen Zustand und die auf den stromlosen Zustand (BSC-Fall) normierte Energielücke $\Omega = \omega_g/\Delta_0$ als Funktion des Stromes für verschiedene freie Weglängen. n_0 erhält man direkt aus (18) und (19), indem man ω gegen Null gehen lässt:

$$n_0 = [1 - (4\chi Z)^2 (1 + (2Z)^2)^{-1} (2Z - \operatorname{arctg} Z)^{-2}]^{1/2}. \quad (20)$$

Damit n_0 reell und von Null verschieden ist, folgt aus (12) die Bedingung $Z > Z_0$. Für $Z < Z_0$ hat $W(\chi)$ Nullstellen bei χ_1 und χ_2 und ist dazwischen reell. Das Maximum definiert gerade die Energielücke ω_g , denn bei einer grösseren Energie ω erhält χ einen imaginären Anteil und $N(\omega)$ wird von Null verschieden. Damit ergibt sich

$$\Omega = (\Delta/\Delta_0) \operatorname{Max} |W(\chi)|, \quad \chi_1 < \chi < \chi_2. \quad (21)$$

In Figur 2 ist die Energielücke Ω als Funktion des auf den kritischen Strom normierten Stromes j/j_c für verschiedene Werte der freien Weglänge dargestellt.



Figur 2

Energielücke eines supraleitenden Filmes als Funktion des Stromes j/j_c für verschiedene Werte der freien Weglänge l .

Die Energielücke verschwindet nach (21), wenn χ_1 und χ_2 zusammenfallen. Andererseits verlangt die Bedingung (16) für den kritischen Strom $Z = Z_c$. Diese Beziehung ermöglicht uns die freie Weglänge \bar{l} zu berechnen, bei welcher der Supraleiter beim kritischen Strom gerade noch energielückenlos wird. Die numerische Auswertung ergibt $\bar{l}/\xi_0 = 15.78$.

Bei dünnen Filmen, die für diese Art von Experimenten zur Anwendung kommen, ist die freie Weglänge meist wesentlich kürzer. Der energielückenlose Zustand lässt sich deshalb durch Anlegen eines Stromes in einem dünnen Film kaum erreichen. Wohl gibt es viele Experimente [12, 13, 14] über die Stromabhängigkeit der Energie-

lücke; sie beschränken sich jedoch meistens auf das Ginzburg-Landau-Gebiet in der Nähe von T_c . Darüber hinaus ist üblicherweise die freie Weglänge nicht bekannt. Experimente, welche das in dieser Arbeit beschriebene Verhalten untersuchen, wurden in Nijmegen begonnen.

Wir möchten dem Rechenzentrum der Universität Nijmegen, insbesondere Direktor C. J. M. AARTS und H. J. BEIJNVOORT, für die grosse Unterstützung und Hilfe danken.

Literaturverzeichnis

- [1] K. T. ROGERS, Ph. D. theses, University of Illinois (1960), nicht publiziert.
- [2] J. BARDEEN, Rev. Mod. Phys. *34*, 667 (1962).
- [3] K. MAKI, Progr. Theoret. Phys. (Kyoto) *29*, 10 und 333 (1963).
- [4] P. FULDE, Phys. Rev. *137*, A783 (1965).
- [5] P. FULDE und R. A. FERRELL, Phys. Rev. *131*, 2457 (1963).
- [6] L. P. GORKOV, Zh. Eksper. Teor. Fiz. *34*, 735 (1958), [Englische Übersetzung: Soviet Phys. JETP *7*, 505 (1958)].
- [7] A. A. ABRIKOSOV, L. P. GORKOV und I. E. DZIALOSHINSKII, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1963), Chap. VII.
- [8] S. STRÄSSLER und P. WYDER, Phys. Rev. *158*, 319 (1967).
- [9] S. STRÄSSLER und P. WYDER, in Vorbereitung.
- [10] L. LARKIN, Zh. Eksper. Teor. Fiz. *48*, 232 (1965). [Englische Übersetzung: Soviet Phys. JETP *21*, 153 (1965)].
- [11] J. R. SCHRIEFFER, Rev. Mod. Phys. *36*, 200 (1964).
- [12] N. I. GINZBURG und A. I. SHAL'NIKOV, Zh. Eksper. Teor. Fiz. *37*, 399 (1959). [Englische Übersetzung: Soviet Phys. JETP *37*, (10) 285 (1960)].
- [13] J. E. MERCEREAU und T. K. HUNT, Phys. Rev. Lett. *8*, 243 (1962).
- [14] J. L. LEVINE, Phys. Rev. Lett. *15*, 154 (1965).

Optical Properties of Some Molten Semiconductors

by J. Tauc and A. Abrahám

Institute of Solid State Physics, Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, Czechoslovakia

(29. IV. 68)

Abstract. On the basis of measurements of optical reflectivity or thermal emissivity of molten Bi_2Te_3 , CdSb and CdTe in the photon energy range 0.5 to 4 eV conclusions are drawn on the changes of their electronic structure occurring during melting. With the exception of CdTe the liquids were found to have optical properties typical of metals.

1. Introduction

One of the many fields to which Prof. G. BUSCH and his collaborators have significantly contributed is the investigation of the electronic transport properties of liquids. The present paper deals with a study of their optical properties and has the same aim – a clarification of the changes in the electronic properties which occur during melting.