Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 41 (1968)

Heft: 6-7

Artikel: Newtons Auffassung der Mathematik und die mathematische Form der "Principia"

Autor: Fierz, Markus

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-113933

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Literaturverzeichnis

[1] H. B. G. Casimir and F. du Pre, Physica *5*, 507 (1938).
[2] B. N. Provotorov, Soviet Phys. JETP *15*, 611 (1962). S. R. Hartmann and A. G. Anderson, XIth Colloque Ampère Eindhoven (North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1963). S. R. Hartmann, Phys. Rev. *133*, A17 (1964).
[3] J. van Vleck, Suppl. Nuovo Cim. *6*, 1181 (1957).
[4] R. Kubo, M. Yokota, S. Nakajima, J. Phys. Soc. Japan *12*, 1203 (1957). R. L. Peterson, Phys. Rev. *139*, A1151 (1965). L. L. Buishvili, Sov. Phys. JETP *22*, 1277 (1966). L. L. Buishvili and M. D. Zviadadse, Physics Letters *24A*, 661 (1967).
[5] H. Schwegler und G. Sauermann, Z. Physik *204*, 375 (1967).
[6] G. Sauermann und H. Schwegler, Z. Physik *209*, 355 (1968).
[7] J. van den Broek, L. C. van der Marel and C. J. Gorter, Physica *25*, 371 (1959). K. H. Hellwege, R. von Klot und G. Weber, Phys. kondens. Materie *2*, 397 (1964). G. Weber, Phys. kondens. Materie *2*, 408 (1964). R. von Klot und G. Weber, Z. Phys. *209*, 380 (1968). R. Cremer, N. Gabrielsen, S. Hüfner, K. Nicolay und G. Weber, Phys. kondens. Materie *5*, 5 (1966). A. J. van Duyneveldt, H. R. C. Tromp and C. J. Gorter, Physica *38*, 205 (1968). K. Amaya, Y. Tokunaga, T. Haseda, Physica, im Erscheinen.
[8] J. Meixner und H. G. Reik, Hdbch. Phys. (Flügge) Bd. III, 2 (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1959).
[9] E. Fick und H. Schwegler, Z. Phys. *200*, 165 (1967).
[10] E. Siré, Diplomarbeit, TH Darmstadt (1968), unveröffentlicht.
[11] E. Fick, Physica *27*, 415 (1961).
[12] H. Ziemann, Ann. Phys. *18*, 299 (1966). W. Vinzenz, Ann. Phys., im Erscheinen.

Newtons Auffassung der Mathematik und die mathematische Form der «Principia»

von **Markus Fierz**
(ETH Zürich)

(29. II. 68)

Wer theoretische Mechanik unterrichtet, der beruft sich auf Newton, und er nennt die Bewegungsgleichungen «die Newtonschen Gleichungen». Aber in dem berühmten Werke Newtons über Mechanik, den «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» von 1687 wird er vergeblich nach Bewegungsgleichungen suchen. Und doch behandelt Newton in seinem Werk einen grossen Teil all der Probleme, die wir auch heute in unseren Vorlesungen behandeln. Aber dies geschieht in einer uns fremd gewordenen mathematischen Form: diese ist geometrisch. Anstatt Formeln erscheinen Figuren, in denen Endpunkte von Strecken mit Buchstaben bezeichnet sind. Die mathematischen Aussagen sind nun solche über Proportionen zwischen Strecken oder zwischen Flächen, die umständlich mit Worten formuliert werden.

Newton eröffnet sein Buch mit acht Definitionen, nämlich von Masse, Bewegungsgrösse, Trägheit, Kraft und Kraftmass. Hierauf folgen die Axiome oder Bewegungsgesetze, deren zweites lautet: «Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.»

Nun ist es unmöglich, die Mechanik ohne infinitesimale Begriffsbildung aufzubauen. Darum folgt jetzt ein Abschnitt, der den Titel trägt: «Über die Methode der ersten und letzten Verhältnisse, mit deren Hilfe alles folgende bewiesen wird.» Hier werden elf Lemmata ausgesprochen und bewiesen, welche die Existenz gewisser Grenzwerte sicherstellen. Das erste Lemma ist ein Konvergenzkriterium und lautet: «Grössen, wie auch Verhältnisse von Grössen, die während irgendeiner endlichen Zeit dauernd zur Gleichheit streben und die vor dem Ende dieser Zeit sich näherkommen als jede vorgegebene Differenz, sind schliesslich gleich.»

Die Definitionen, Axiome und die Lemmata, vor allem Lemma IX und X, sind in den Händen Newtons dem gleichwertig, was wir «Newtonsche Gleichungen» nennen.

Newton schliesst diesen Abschnitt mit einem Scholium, in dem es heisst: «Ich habe diese Lemmata vorausgeschickt, um die bis zum Überdruss langen indirekten Beweise im Stil der antiken Geometer zu vermeiden. Gedrängtere Beweise sind auch möglich, wenn man die Methode der Indivisiblen[1]) verwendet. Weil aber die Hypothese, es gäbe Indivisible, etwas Stossendes hat und darum diese Methode als weniger geometrisch gilt, so zog ich es vor, die Beweise dessen, was folgt, mit Hilfe letzter Summen und Verhältnisse verschwindender Grössen zu führen, d.h. mit Hilfe der Grenzwerte solcher Summen und Verhältnisse.»

Die Grössen, von denen hier die Rede ist, sind geometrische Grössen, also Strecken, Flächen und Winkel. Darum erscheinen in den Lemmata das Riemannsche Integral und die Ableitung in geometrischer Gestalt.

Newton erreicht durch seine Darstellung einen hohen Grad mathematischer Strenge. Es ist eindrucksvoll, wie elegant und geistreich er seinen Gegenstand bewältigt. Aber uns, die wir an das analytische Verfahren gewöhnt sind, scheint seine Darstellung künstlich und zudem unnötig schwierig. Auch die Zeitgenossen hatten grösste Mühe, die Newtonsche Mathematik zu verstehen. Erst nachdem die Mechanik, vor allem durch die Bemühungen Eulers, ihre moderne analytische Gestalt gewonnen hatte, wurde sie einem grösseren Kreise verständlich. Das geschah allerdings zuerst unter Verzicht auf mathematische Strenge. So ist für Euler der Differentialquotient das Verhältnis wirklich unendlich kleiner Grössen.

Das Streben Newtons, seinen «Principia» eine an die Werke des Archimedes erinnernde, synthetische Form zu geben, kann man als reaktionär bezeichnen: sie steht im Gegensatz zu den damals modernen Tendenzen, die von Descartes inspiriert waren. Dieser hatte 1637 in seiner «Géométrie» die Äquivalenz algebraischer und geometrischer Probleme nachgewiesen und mit zahlreichen Beispielen belegt. Seither neigten die jüngeren Mathematiker mehr und mehr dazu, ihre Wissenschaft zu algebraisieren. Das war auch das Ziel, das Leibniz verfolgte, der eine Differentialrechnung, d.h. einen analytischen Kalkül entwickelte, und damit ungeheuren Erfolg hatte.

---

[1]) Die Methode der Indivisiblen ist ein vor allem durch die italienischen Mathematiker entwickeltes Integrationsverfahren, das von aktuell unendlich kleinen Grössen Gebrauch macht. Vergl. hiezu Carl B. Boyer, The History of the Calculus (Dover Publications 1959).

Auch Newton war, als Mathematiker und als Physiker, von Descartes ausgegangen. Dessen mathematische Methode hat er in der reich kommentierten und ergänzten Ausgabe von Schooten (Amsterdam 1659/1661) fleissig studiert[2]). In den Jahren 1664 bis 1666 hat er, lange vor Leibniz, seine Analysis entwickelt, die er in den folgenden Jahren zu grosser Vollkommenheit brachte. Dabei haben ihn häufig kinematische Vorstellungen geleitet.

Es ist darum merkwürdig, dass er die Mechanik nicht analytisch behandelt hat. In den Principia sind algebraische Methoden, wo irgend möglich, vermieden.

Es scheint, dass Newton, mindestens im Alter, seine Begeisterung für die Cartesischen Methoden als eine Art Jugendsünde ansah. So berichtet Pemberton:

«Sir Isaac Newton has several times particularly recommended to me Huygen's stile and manner. He thought him the most elegant of any mathematical writers of modern times, and the most just imitator of the ancients. Of their taste, and form of demonstration Sir Isaac always professed himself a great admirer: I have heard him even censure himself for not following them yet more closely than he did; and speak with regret of his mistake at the beginning of his mathematical studies, in applying himself to the work of Des Cartes and other algebraic writers, before he had considered the elements of Euclid with that attention which so excellent a writer deserves.»

Nun weiss man, dass Newton als Student seinen Euklid mit grosser Sorgfalt studierte. In welcher Hinsicht liess er es also seiner Ansicht nach an Aufmerksamkeit fehlen?

Darauf gibt uns eine Anekdote Antwort. Conduitt erzählt: «Soon after (he had studied Des Cartes) he stood to be a Scholar of the House and Dr. Barrow examined him in Euclid which he knew so little of that Dr. Barrow conceived a very indifferent opinion of him. The Dr. never asked him about Descartes' Geometry not imagining that any one could be master of that book without first reading Euklid ... Upon this Sir Isaac read Euclid over again and began to change his opinion of him when he read that Paralellograms upon the same base and between the same parallels are equal and that other proposition that in a right angled triangle the square of the Hypothonuse is equal to the squares of the two other sides.»

Ich möchte hier nicht erörtern, ob, oder in welchem Sinne, diese Geschichte im einzelnen wahr sein kann. Als Ganzes ist sie plausibel. Es kommt durchaus vor, dass ein junger, genialer Student Sätze, wie die erwähnten, trivial[3]) findet und dass ihm ein Professor darum einen Dämpfer aufsetzt. Dies geschieht besonders dann, wenn der Professor ahnt, dass ihm der junge Mann überlegen ist.

Conduitt kann die Geschichte nicht erfunden haben. Sie muss auf einen bedeutenden Mathematiker zurückgehen, der den tieferen Sinn der beiden angeführten Lehrsätze erkennen konnte, und dem sie darum nicht trivial vorkamen. Warum sollte also nicht Newton selber etwas Derartiges erzählt haben?

---

[2]) Isaac Newton, *The Mathematical Papers*, Bd. I. 1664–1666, ed. by D. T. Whiteside (Cambridge 1967).
Durch diese Ausgabe und durch seine lichtvollen und inhaltsreichen Einleitungen hat der gelehrte Herausgeber uns die Entwicklung des Mathematikers Newton nahegebracht. Meine Studie stützt sich wesentlich auf dieses Werk.

[3]) Der Biograph Newtons, L. T. Morre, hält die Geschichte für unhistorisch, ja für sinnlos, weil ihm die erwähnten Lehrsätze trivial erscheinen.

Der Satz über Parallelogramme ist Propositio 35 im 1. Buch Euklid. Hier wird, ohne dass dies gesagt wird, in einem neuen Sinne von der Gleichheit von Figuren gehandelt, nämlich im Sinn der Flächengleichheit, im Gegensatz zur Kongruenz. Wer den axiomatischen Aufbau des Buches nicht sorgfältig beachtet, dem entgeht das leicht. Der Herausgeber der klassischen englischen Euklidausgabe, Sir Thomas Heath, widmet darum diesem Lehrsatz einen Kommentar von über drei enggedruckten Seiten. Diesem Satz folgt eine Reihe von zwölf weiteren Sätzen, die im Pythagoräischen Lehrsatz gipfelt: einem Hauptsatz der Euklidschen Geometrie. So stehen also die beiden Lehrsätze unserer Anekdote für diese ganze Reihe.

Euklid beweist die Sätze ohne infinitesimale Hilfsmittel. Er verwendet vielmehr neben schon bewiesenen Kongruenzsätzen die allgemeinen Axiome über «gleiche Grössen», d.h. dass Dinge die demselben Ding gleich sind, auch untereinander gleich sind und dass dann, wenn man zu gleichen Dingen gleiche addiert, die Summen ebenfalls gleich sind.

Man kann die Gleichheit der Parallelogramme auch leicht mit Hilfe von Indivisiblen beweisen, und etwas Derartiges hat Newton vielleicht in der erwähnten Prüfung vorgeschlagen[4]). Später aber schien ihm die Hypothese der Indivisiblen stossend. Man kann den Pythagoräischen Lehrsatz durch Betrachten ähnlicher Dreiecke und Proportionen beweisen. Das hat dem jungen Newton vielleicht mehr eingeleuchtet, als die scheinbar künstliche Beweisart bei Euklid[5]). Aber ein Beweis mit Proportionen setzt die Proportionenlehre des Eudoxos voraus, die erst im V. Buch des Euklid dargestellt ist. Diese benötigt eine Reihe weiterer Axiome, denn sie ist eine Theorie des geometrischen Kontinuums und entspricht der Dedekindschen Theorie der reellen Zahlen.

Unsere Anekdote gibt uns also einen Hinweis darauf, woran es Newton bei seinem Euklidstudium vorerst fehlen liess: er beachtete den axiomatischen Aufbau des Werkes nicht genügend, und so erkannte er nicht, wie eine folgerichtige und strenge mathematische Deduktion zu geschehen hat. Nun lernte er, dass es zu einem strengen Aufbau einer mathematischen Theorie gehört, dass ein elementarer Satz auch mit elementaren Mitteln bewiesen werden soll. Was aber elementar sei, dafür liefert der axiomatische Aufbau das Kriterium: neue Axiome dürfen nur dann angerufen werden, wenn dies zum Beweis notwendig ist. Daraus ergibt sich, dass die erwähnten Sätze ohne infinitesimale Begriffe, also ohne die Theorie des geometrischen Kontinuums, bewiesen werden müssen.

Es scheint mir, dass der ältere Newton sich darüber im klaren war, dass ihm ein rein arithmetisch-algebraischer Aufbau der Analysis in diesem strengen Sinn nicht möglich sei. Dies kann ja nur gelingen, wenn man einen wohldefinierten Begriff der reellen Zahl besitzt. Dieser ist aber erst im 19. Jh. durch Bolzano, Weierstrass und Dedekind entwickelt worden[6]). Im 17. Jh. gab es aber nur die Theorie des geometrischen Kontinuums, die im V. Buch des Euklid dargestellt ist. Hier tritt anstelle der reellen Zahl die Proportion. Ganz in diesem Sinn erklärt darum Newton in seiner Vorlesung über höhere Mathematik, der «Arithmetica Universalis»:

---

[4]) Vgl. hiezu I. Newton, «The Mathematical Papers», p. 91 ff.

[5]) Vgl. «The Mathematical Papers» p. 6, Fussnote [12]).

[6]) Ob die Dedekindsche Konstruktion des Kontinuums der reellen Zahlen ohne die geometrische Vorstellung des linearen Kontinuums einleuchtend wäre, ist fraglich. Der «Schnitt», welcher die rationalen Zahlen in zwei Klassen teilt, entspricht jedenfalls einer geometrischen Vorstellung.

«Unter einer Zahl verstehen wir nicht eine Vielheit von Einheiten, sondern vielmehr das Verhältnis einer abstrakten Grösse zu einer anderen der gleichen Art, die als Einheit gilt.»

Dadurch wird, wenn wir so sagen dürfen, die «Arithmetica» in der Geometrie verankert. Denn hier allein ist ein strenger Aufbau möglich. Darum führt auch nur die geometrische, und nicht die algebraische Betrachtungsweise, zu einem wirklichen Verständnis mathematischer Strukturen.

Diese Ansicht wird in einem Anhang zur «Arithmetica», der die graphische Lösung von Gleichungen behandelt, auseinandergesetzt. Newton sagt:

«Studiert man Kurven und sucht ihre Eigenschaften zu ergründen, dann lobe ich es, wenn man sie nach dem Grad ihrer Gleichungen einteilt. Aber es ist nicht die Gleichung, es ist die Konstruktion (descriptio), welche die Kurve erzeugt.»

Später aber heisst es:

«Der einfachste Kegelschnitt ist die Ellipse. Sie ist wohlbekannt und dem Kreise sehr verwandt. Auch kann sie leicht von Hand in der Ebene konstruiert werden. Einige ziehen ihr die Parabel vor, weil diese durch eine einfachere Gleichung dargestellt wird. Aber von diesem Standpunkt aus wäre die Parabel sogar dem Kreise vorzuziehen, was nie geschieht. Also ist die Einfachheit der Gleichungen ein falscher Gesichtspunkt. Das Denken der heutigen Geometer beschäftigt sich überhaupt viel zu sehr mit den Gleichungen. Ihre Einfachheit entspricht einer analytischen Betrachtungsweise. Wir bemühen uns aber um die Synthese, und deren Gesetze folgen nicht aus der Analyse. Diese führt zwar zur Synthese: aber die Synthese ist erst dann ganz abgeschlossen, wenn sie von aller Analyse befreit ist. Verbleibt in einer Synthese nur ein kleiner analytischer Rest, so ist die wahre Synthese nicht gelungen. Die Synthese ist in sich vollendet und schreckt vor jeder analytischen Beimischung zurück. Die Einfachheit einer Figur hängt von der Einfachheit ihrer Entstehungsweise, ihrer erzeugenden Idee ab. Nicht die Gleichung, die Konstruktion, sei sie geometrisch oder mechanisch, erzeugt die Figur und liefert den verständlichen Begriff[7]).»

Es ist klar, dass diese Betrachtung eine Polemik gegen Descartes und seine Nachfolger enthält. Sie zeigt aber vor allem, was für Newton das mathematische Ideal war. Für ihn gibt es eine Rangordnung der mathematischen Methoden, in der die Synthese – er sagt «compositio» – am höchsten steht; denn in ihr wird das gesuchte Gebilde geometrisch konstruiert[8]). Der Rang der Konstruktionsmittel ist durch die in den Axiomen niedergelegten Existenzsätze gegeben. Denn Newton sagt:

«Allein der Axiome halber hat der Kreis denselben Rang wie die Gerade. Das gilt noch mehr für die Ellipse, die weniger vom Kreise abweicht als der Kreis von der Geraden, die den gleichen Rang wie der Kreis erhält, wenn man ihre Konstruktion in der Ebene gleichfalls axiomatisch fordert.»

---

[7]) Ich kann mir hier nicht versagen, auf die allgemeine Relativitätstheorie hinzuweisen. Ihre Feldgleichungen sind vom geometrischen Standpunkt aus und von der mathematisch-physikalischen Idee her gesehen, höchst einfach. Analytisch, d.h. als partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung betrachtet, sind sie aber erschreckend kompliziert. Vielleicht kann dieses Beispiel deutlich machen, dass auch heute Newtons Standpunkt seine Berechtigung hat.

[8]) Das erinnert an die Meinung der Intuitionisten, für die ein Existenzsatz ohne nachfolgende Konstruktion «einem Papiere gleicht, welches das Vorhandensein eines Schatzes anzeigt, ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort» (H. Weyl, «Selecta» [Basel 1956] p. 224).

Es erhebt sich jetzt noch die Frage, was nach Newton die Bedeutung der geometrischen Axiome denn ist. Darauf findet man die Antwort im Vorwort der Principia:

«Das Konstruieren (descriptio) sowohl der Geraden wie der Kreise, auf dem die Geometrie beruht, gehört in die Mechanik. Aber die Geometrie lehrt nicht, wie man diese Kurven konstruiert, das postuliert sie. Darauf lehrt sie, wie man mit Hilfe dieser Operationen Probleme löst. Gerade und Kreise konstruieren, das sind ebenfalls Probleme, aber keine der Geometrie. Man fordert, dass sie die Mechanik lösen könne. In der Geometrie lehrt man ihren Gebrauch. Nun rühmt sich die Geometrie, dass sie mit so wenigen Grundsätzen, die anderswoher entlehnt sind, so vieles leisten könne. Die Geometrie ist daher in der praktischen Mechanik begründet und ist nichts anderes als derjenige Teil der allgemeinen Mechanik, welcher die Messkunst streng darstellt und beweist.»

Diese Aussagen lassen an Deutlichkeit nichts zu wünschen übrig. Die Geometrie ist für Newton die mathematisch-physikalische Theorie des wirklichen, physikalischen Raumes. Dieser ist ein metrisches Kontinuum, dessen Eigenschaften durch physikalische Messung erforscht werden müssen. Die Axiome der Geometrie sind darum physikalische Aussagen über den Raum, genau so, wie die Axiome der Mechanik, die Leges motûs, physikalische Aussagen über die Bewegung der Körper sind. Das Zahlenkontinuum, das der Analysis zugrunde gelegt wird, ist Abbild des geometrischen Kontinuums. Darum kann auch die Analysis streng genommen nur geometrisch begründet und dargestellt werden. Als Axiome soll man daher die Existenz derjenigen geometrischen Gebilde postulieren, die in der «mechanischen Praxis» am genauesten konstruiert werden können.

Ich glaube, dass die hier gesammelten Zitate aus Newtons Werken sowie die Berichte seiner Zeitgenossen über sein Denken und seine Erlebnisse, deutlich genug zeigen, was Newtons Auffassung der Mathematik war.

Gewiss hat er nicht immer so gedacht. Als junger Mann war er Cartesianer, wenn er auch schon früh Vorbehalte gegenüber der cartesischen Philosophie anbrachte: dass Ausdehnung und Materie dasselbe sein sollten, hat ihm gar nicht eingeleuchtet[9]).

Mit der Zeit schien ihm auch der mathematische Standpunkt Descartes' immer anfechtbarer. Mehr und mehr wuchs seine Achtung vor den klassischen Geometern der älteren Generation, und besonders Huygens ward ihm zum Vorbild. Das entspricht einer natürlichen geistigen Entwicklung. So ist er schliesslich zu einer grossartigen, folgerichtigen und strengen Auffassung der Mathematik gelangt, was allerdings zur Folge hatte, dass er seinem Werk eine altertümliche und schwierige Form gegeben hat.

---

[9]) Vgl. die Kritik an der cartesischen Raum- und Bewegungslehre in «de gravitatione et aequipondio fluidorum», herausgegeben in A. R. Hall und M. Boas Hall, «Unpublished Scientific Papers of I.N.» (Cambridge 1962). Die Herausgeber datieren diese Schrift in die Jahre 1664 bis 1668. Sie enthält u. a. schon Formulierungen, wie dass nichts existieren könne, das nicht irgendwie mit dem Raum zu tun habe. Darum sei der Raum die Folge der höchsten Existenz. Diese Gedanken sind also keineswegs erst dem alten Newton eigen.