Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 41 (1968)

Heft: 1

Artikel: Observables d'une particule libre et changements de représentations spectrales

Autor: Guillot, J.C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-113871

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

© 1968 by Schweizerische Physikalische Gesellschaft
Société Suisse de Physique – Società Fisica Svizzera
Nachdruck verboten – Tous droits réservés – Printed in Switzerland

Observables d'une particule libre et changements de représentations spectrales

par **J. C. Guillot**[1])
Institut de Physique Théorique de Genève et Faculté des Sciences de Brest

(7 VIII 67)

Sommaire

Introduction 6

Première partie: Observables d'une particule libre 7

I Définition formelle des observables d'une particule libre. Problèmes 7

II Première définition des observables utilisant le domaine de GÅRDING associé à la représentation 9
- A. Définition du domaine de GÅRDING 9
- B. Théorème 1 11
- C. Cas relativiste. Masse positive et spin j 14
  - α) Formalisme canonique 14
  - β) Formalisme hélicité 17
- D. Cas relativiste. Masse nulle et spin j 18
- E. Cas non relativiste. Masse positive et spin j 18

III Seconde définition des observables utilisant les espaces $\mathcal{D}$ et $\mathcal{S}$ 19
- A. Prologue 19
- B. Cas relativiste. Masse positive et spin j. Formalisme canonique 20
- C. Cas de l'hélicite. Formalisme canonique 23
- D. Cas non relativiste. Masse positive et spin j 25
- E. Cas non relativiste et cas relativiste. Formalisme hélicité et masse nulle 25

IV Commutativité et systèmes complets d'observables qui commutent 25

V Conclusion de la première partie 26

Seconde partie: Changements de représentations spectrales 26

VI Prologue 26

VII Représentation spectrale d'un système complet d'observables qui commutent 28

VIII Exemples; Notion de coefficient de Clebsch-Gordan 32
- 1. Base $L-S$ 32
- 2. Coefficient de Clebsch-Gordan du groupe de Poincaré et du groupe de Galilée . . . 34

Appendice I: Représentations unitaires et irréductibles des groupes de Poincaréet de Galilée 40
- 1. Définition des différents groupes rencontrés 40
- 2. Algèbres de Lie correspondantes 42
  - α) Notations 43
  - β) Relations de commutation 43

[1]) Adresse postale: Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Avenue Victor-le-Gorgeu, Brest 29-N (France).

3. Représentations unitaires et irréductibles 44
A. Cas du groupe de Poincaré 44
α) Masse positive et spin j 44
β) Masse nulle et spin discret 44
B. Cas du groupe de Galilée 46
Appendice II: Espaces nucléaires et triplets de Guelfand 47
1. Opérateurs nucléaires 47
2. Espaces dénombrablement hilbertiens 48
3. Espaces nucléaires 49
4. Espaces d'Hilbert équipés ou triplets de Guelfand 51

Abstract. In this paper, we study, in the first part, the mathematical definition of the usual observables of a free particle by essentially self-adjoint operators defined on different domains of definition, as the Gårding domain or the $\mathcal{D}$ and $\mathcal{S}$ spaces of the theory of distributions. The relativistic and the galilean case are considered.

In the second part, we study the general theory of change of spectral representations. The theory of nuclear spaces and rigged hilbert spaces is used and a mathematical definition of the coefficient of Clebsch-Gordan for the Poincaré and Galilée groups is given.

Introduction

Cet article a pour but de jeter les bases d'un exposé rigoureux de certaines questions dont dépend le développement de la cinématique relativiste ou non relativiste.

Ce travail est divisé en deux parties. La première est consacrée à la définition, correcte du point de vue mathématique, des observables d'une particule libre intéressantes pour la cinématique, particulièrement celles qui composent les systèmes complets d'observables commutantes ou bases. La seconde est consacrée à l'étude des changements de représentations spectrales c'est-à-dire au passage d'une base à une autre. L'étude est ici très générale. Comme cas particuliers on considère les changements de bases dans l'ensemble des observables d'une particule libre et la définition correcte des coefficients de Clebsch Gordan des groupes de Poincaré et de Galilée. Ce concept est en effet fondamental dans l'analyse phénomènologique des expériences de diffusion.

Les techniques mathématiques employées sont différentes d'une partie à l'autre. La première repose sur la théorie de la représentation de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie par des opérateurs symétriques ou essentiellement auto-adjoints, associée à une représentation unitaire du groupe. La seconde partie utilise la théorie des distributions et plus particulièrement les espaces nucléaires.

C'est ainsi que nous montrons que l'on peut définir les principales observables par des opérateurs essentiellement auto-adjoints définis sur le domaine de Gårding associé à la représentation unitaire irréductible du groupe de Poincaré ou de Galilée. Nous étudions ensuite la possibilité d'autres définitions en considérant d'autres domaines de fonctions différentiables.

Ensuite nous précisons l'isométrie entre deux représentations spectrales et nous justifions l'expression «développement sur les vecteurs propres d'une base». La solution est due à l'existence d'un domaine dense D qui peut être muni d'une structure d'espace nucléaire.

Un premier appendice rappelle les principaux résultats concernant les représentations unitaires irréductibles des groupes de Poincaré et de Galilée. Un second rapelle les principales notions concernant les espaces nucléaires.

Première partie

OBSERVABLES D'UNE PARTICULE LIBRE

I. Définition formelle des observables d'une particule libre. Problèmes.

Les définitions que nous allons donner sont connues et élémentaires. En fait les physiciens définissent les observables, d'une particule libre, dans une représentation donnée, en se donnant une forme analytique de l'opérateur formellement auto-adjoint qui la représente et en supposant que l'opérateur a le spectre désiré, sans se préoccuper de savoir s'il existe en fait un opérateur auto-adjoint qui admette le spectre en question et qui par restriction sur un domaine convenablement choisi redonne bien l'expression analytique initiale.

Considérons d'abord le cas d'une particule libre relativiste de masse m et de spin j et plaçons-nous dans le formalisme canonique (appendice I).

- *L'énergie* est alors représentée par l'opérateur de multiplication par la variable $p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ [2]), de spectre $[m, +\infty]$ c'est-à-dire l'opérateur représentant P^0 générateur des translations du temps.
- *La tri-impulsion* est représentée par les 3 opérateurs $\boldsymbol{p}$ générateurs des translations spatiales; chacune des composantes p^i a toute la droite réelle pour spectre.
- La *masse* est ici un simple scalaire $m = (p^{02} - \boldsymbol{p}^2)^{1/2}$.
- De même le spin j est un scalaire tel que $W^2 = -m^2 j(j+1)$.
- Le *moment angulaire total* est représenté par les trois opérateurs $\boldsymbol{J} = -i\boldsymbol{p} \wedge \partial/\partial\boldsymbol{p} + \boldsymbol{S}$; en fait seuls les opérateurs $\boldsymbol{J}^2$ et J^3 sont importants pour les applications. Le spectre de $\boldsymbol{J}^2$, déterminé par réduction sur le groupe SU(2), est de la forme $J(J+1)$ où J parcourt l'ensemble des entiers si j est entier ou des demi-entiers si j est demi-entier. Le spectre de J^3 est alors l'ensemble des entiers ou des demi-entiers suivant le cas et de signe quelconque.
- Les *opérateurs de spin* $\boldsymbol{S}_j$ sont représentés par les 3 opérateurs $\boldsymbol{S}$. Le spin $\boldsymbol{S}_j$ est proprement défini par l'intégrale directe

$$\boldsymbol{S}_j = \int^{\oplus} \boldsymbol{S}_j(p)\, d\mu(p)$$

où le champ $p \to \boldsymbol{S}_j(p)$ est un champ constant car $\boldsymbol{S}_j(p) = \boldsymbol{S}$, pour presque tout p. Ils sont tels que $\boldsymbol{S}_j^2 = j(j+1)$ et le spectre de chacun des opérateurs S^i est simplement l'ensemble des entiers ou demi-entiers tels que $-j \leqslant s \leqslant +j$.
- Par convention nous appellerons *hélicité* les opérateurs unitairement équivalents au spin $\boldsymbol{S}_j$ suivants:

$$\boldsymbol{H}_j = \int^{\oplus} D^j\,(A_p^{C-1}\, A_p^H)\, \boldsymbol{S}_j(p)\, D^j\,(A_p^{H-1}\, A_p^C)\, d\mu(p)$$

on réserve le nom de *polarisation longitudinale* à la troisième composante $H_j^3 = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{J}/|\boldsymbol{P}|$. On a donc $\boldsymbol{H}_j^2 = j(j+1)$ et le spectre de chacune des composantes H_j^i est le même que celui de l'opérateur S_j^i.

---

[2]) Cette identification directe n'est possible que si nous sommes dans le système d'unité $\hbar = c = 1$, ce que nous supposerons toujours par la suite.

- *Le moment angulaire orbital* est défini par l'ensemble des 3 opérateurs $-i\,\boldsymbol{p} \wedge \partial/\partial\boldsymbol{p} = \boldsymbol{J} - \boldsymbol{S}_j$. Seuls $\boldsymbol{L}^2$ et L^3 sont intéressants pour les applications. Le spectre de $\boldsymbol{L}^2$ est de la forme $l\,(l+1)$ où l parcourt l'ensemble des entiers.
- Signalons aussi l'opérateur $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{p}^2$ qui intervient comme élément de certaines bases.

Ce sont les principales observables qui interviennent constamment dans l'analyse phénomènologique des expériences de diffusion, notamment dans la constitution des bases ou systèmes complets d'observables qui commutent sur lesquelles reposent l'analyse en ondes partielles relativistes.

- Signalons enfin l'*opérateur de position* dont l'importance théorique n'est plus à faire (WIGHTMAN 1962, CHAKRABARTI 1965)[3]) soit

$$\boldsymbol{X} = i\,\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{p}} - \frac{i\,\boldsymbol{p}}{2(p^0)^2}\,.$$

L'opérateur de position a été complètement étudié du point de vue qui nous intéresse par WIGHTMAN (1962). Il est donc inutile d'y revenir.

Ce cas galiléen ne présente pas de différence essentielle dans l'interprétation, notons quand même quelques particularités (LEVY LEBLOND 1965). La masse ici est toujours un scalaire mais caractérise le groupe et non pas une représentation irréductible et unitaire du groupe (ce n'est plus un invariant): L'un des invariants est ici *l'énergie interne* $\mathcal{V}$ et l'observable correspondante est une simple multiplication par un scalaire, à savoir $\mathcal{V} = E - \boldsymbol{p}^2/2\,m$.

Le *moment orbital* peut alors se représenter à l'aide des opérateurs infinitésimaux $\boldsymbol{L} = 1/m\;\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{K} = -\,i\,\boldsymbol{p} \wedge \partial\boldsymbol{p}$ de même en ce qui concerne le spin $\boldsymbol{S}_j$ car $\boldsymbol{S}_j = \boldsymbol{J} - 1/m\;\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{K}$. $\boldsymbol{S}_j^2 = j\,(j+1)$ correspond au second invariant.

Ici *l'opérateur de position* est simplement

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{m}\,\boldsymbol{K} = -\,i\,\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{p}}\,.$$

Ces quelques particularités favorisent l'étude du cas non relativiste et le simplifie. Les spectres des observables restent les mêmes que dans le cas relativiste.

Les définitions précédentes se transportent par isomorphisme dans toute autre représentation.

Par la suite nous chercherons à obtenir une définition de chacune des observables par un opérateur essentiellement auto-adjoint défini sur un domaine dense, et ayant le spectre désiré; l'extension auto-adjointe unique définit complètement l'observable du point de vue physique. Mais les exigences de la seconde partie nous contraignent à rechercher un même domaine de définition pour l'ensemble des observables qui nous intéressent. De plus ce domaine doit être stable pour ces opérateurs si l'on veut diagonaliser les opérateurs dans un espace de distributions, et si possible par la représentation unitaire du groupe considéré. Enfin les opérateurs auto-adjoints doivent par restriction à un sous domaine convenable redonner les expressions précédentes des observables, ce dernier point devant justifier le calcul plus ou moins heuristique des opérateurs infinitésimaux par les physiciens.

---

[3]) ( ) renvoie à la bibliographie située à la fin de l'article. Elle est classée par ordre alphabétique des auteurs et (1962) renvoie à l'année de la parution de la référence.

Nous verrons par la suite que ces exigences pourront être satisfaites à quelques rares exceptions près.

Comme de nombreuses observables sont les images d'éléments de l'algèbre de Lie et de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie la première idée qui vient à l'esprit est de considérer le domaine des vecteurs différentiables pour la représentation et plus particulièrement le domaine de Gårding, ou bien le domaine des vecteurs analytiques. Néanmoins les expressions particulières obtenues par un calcul explicite font plus ou moins intervenir des domaines de fonctions différentiables évidemment plus liés à la nature particulière de la représentation considérée.

Nous allons considérer en détail ces deux possibilités et par là même résoudre les problèmes que nous nous sommes posés.

II. Première définition des observables utilisant le domaine de Gårding associé à la représentation

A. *Définition du domaine de Gårding*

Rappelons que l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ d'un groupe de Lie G est l'algèbre de Lie de tous les champs vectoriels invariants à droite et que l'algèbre enveloppante $\mathcal{E}$ de l'algèbre de Lie de G est l'algèbre des opérateurs sur $C^\infty(G)$ (l'ensemble des fonctions indéfiniment differentiables sur G) engendrée par tous les champs vectoriels invariants à droite sur G.

Notons que $\mathcal{E}$ est aussi l'algèbre de tous les opérateurs différentiels invariants à droite sur G, en vertu du théorème de L. Schwartz et de Harish-Chandra.

Soit donc G un groupe de Lie et $g \to \mathcal{U}(g)$ une représentation unitaire continue de G dans un espace d'Hilbert $\mathcal{H}$; un élément $h \in \mathcal{H}$ est un vecteur indéfiniment différentiable ou régulier pour $\mathcal{U}$ si l'application $g \to \mathcal{U}(g)\, h$ de G dans $\mathcal{H}$ est de classe C^∞, c'est-à-dire indéfiniment différentiable. *Dorénavant nous comprendrons toujours par différentiable, indéfiniment différentiable.*

L'ensemble des vecteurs différentiables est dense dans $\mathcal{H}$. En fait, Gårding (1947 et 1960) a montré que si la fonction φ sur G est différentiable et à support compact et si l'opérateur $\mathcal{U}(\varphi)$ est défini sur $\mathcal{H}$ par:

$$\mathcal{U}(\varphi)\, h = \int_G \mathcal{U}(g)\, \varphi(g)\, h\, dg^{4)} \tag{8}$$

(où dg est la mesure de Haar sur G, invariante à gauche) alors pour tout $h \in \mathcal{H}$, $\mathcal{U}(\varphi)\, h$ est un vecteur différentiable et l'ensemble de tels vecteurs est total dans $\mathcal{H}$. On appelle alors le *domaine de Gårding*, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies de vecteurs de la forme précédente.

La représentation de l'algèbre de Lie sur ce domaine est alors très simple. Soit X un élément de l'algèbre de Lie; à tout X on fait correspondre un opérateur noté $d\mathcal{U}(X)$ défini sur le domaine de Gårding de la manière suivante. Soit $y = \mathcal{U}(\varphi)\, h$.

Le vecteur

$$\frac{\mathcal{U}(\exp t\, X) - I}{t}\, y$$

---

4) Pour le seus precis à donner à cette integrale, voir par exemple (Hille et Phillips 1957) et (Dunford et Schwartz, tome I).

est encore un élément du domaine de Gårding. Si on effectue le passage à la limite $t \to 0$, on obtient encore un vecteur dans le domaine de Gårding, puisque

$$d\mathcal{U}(X)\, y = \lim_{t \to 0} \frac{\mathcal{U}(\exp t X) - I}{t}\, y = \int_G \mathcal{U}(g)\, (X\, \varphi)\, (g)\, h\, dg = \mathcal{U}(X\, \varphi)\, h \tag{1}$$

où X est considéré comme opérateur différentiel invariant à droite; l'expression (1) définit l'opérateur $d\mathcal{U}(X)$ pour tout élément du domaine de Gårding.

Les opérateurs H_x définis par:

$$d\mathcal{U}(X) = -\, i\, H$$

sont des opérateurs symétriques; on démontre aussi qu'ils sont essentiellement auto-adjoints. Cela résultera du théorème 1 ci-dessous dans le cas des groupes de Poincaré et de Galilée.

La fermeture de H_x soit $\overline{H}_x = H_x^{**}$ est le générateur auto-adjoint défini directement par le théorème de Stone, l'application $X \to i\, d\mathcal{U}(X)$ est une représentation de l'algèbre de Lie par des opérateurs essentiellement auto-adjoints (Segal 1951) et le domaine de Gårding est invariant aussi bien par la représentation du groupe que par celle de l'algèbre de Lie.

La représentation se prolonge à l'algèbre enveloppante $\mathcal{E}$ de l'algèbre de Lie. En effet puisque le domaine de Gårding est invariant par tous les opérateurs infinitésimaux, tout produit fini $d\mathcal{U}(X_1)\, d\mathcal{U}(X_2) \ldots d\mathcal{U}(X_n)$ est défini sur le domaine de Gårding et l'on a pour tout $X \in \mathcal{E}$ $d\mathcal{U}(X)\ (\mathcal{U}(\varphi)\, h) = \mathcal{U}(X\, \varphi)\, h$ où X est l'opérateur différentiel invariant à droite sur G correspondant. Le prolongement de $d\mathcal{U}$ à $\mathcal{E}$ est un homomorphisme d'algèbre associative.

Considérons un élément $X \in \mathcal{E}$ symétrique, c'est-à-dire invariant par la transformation qui associe à tout monôme $\alpha\, X_1 X_2 \ldots X_n$ le monôme $\bar{\alpha}(-1)^n\, X_n X_{n-1} \ldots X_2 X_1$ ($\alpha \in C$ et $X_i \in \mathfrak{L}$); l'opérateur $i\, d\mathcal{U}(X)$ est un opérateur symétrique sur le domaine de Gårding.

Mais on ne peut pas affirmer en général que l'opérateur soit essentiellement auto-adjoint. Nelson et Stinespring (1959) en ont donné de nombreux contre-exemples et il suffira de se reporter à leur article pour de plus amples informations. Néanmoins pour certaines catégories d'opérateurs on peut conclure; en effet un théorème de Ségal affirme:

Théorème (Ségal 1952)

Si p est un polynôme symétrique appartenant au *centre* de l'algèbre $\mathcal{E}$, alors l'opérateur $i\, d\mathcal{U}(p)$ est essentiellement auto-adjoint sur le domaine de Gårding.

Un résultat plus général et contenant celui de Ségal a été obtenu par Nelson et Stinespring: $i\, d\mathcal{U}(X)$ est aussi essentiellement auto-adjoint lorsque X est un opérateur *elliptique*, ou commute avec un opérateur elliptique.

Les résultats qui précèdent ont beaucoup d'importance pour les problèmes qui nous concernent. En effet on peut diviser les observables d'une particule libre en 3 catégories.

- Celles qu'on peut identifier aux opérateurs représentant des éléments de l'algèbre de Lie, comme par exemple P^0, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{J}$, $1/m\, \boldsymbol{K}$, ... etc. pour qui en vertu de ce qui précède la conclusion sera immédiate.

- Celles qu'on peut identifier aux opérateurs représentants des éléments de l'algèbre enveloppante $\mathcal{E}$ comme P^2, W^2, $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{J}^2$, $E - \boldsymbol{P}^2/2\,m$, $(\boldsymbol{J} - 1/m\ \boldsymbol{K} \wedge \boldsymbol{P})$, $1/m\ \boldsymbol{K} \wedge \boldsymbol{P}$, ... etc. pour qui le caractère essentiellement auto-adjoint n'est pas automatique et nécessite une démonstration.
- Enfin toutes les autres observables dont on peut affirmer qu'en général elles font partie du corps enveloppant. If faut dans cette dernière catégorie examiner tous les cas particuliers car il n'est même pas question que les opérateurs soient définis sur le domaine de Gårding et le laissent stables. Néanmoins on peut conclure immédiatement pour les observables qui appartiennent aux deux premières catégories et les opérateurs essentiellement auto-adjoints qu'on obtient sont de notre point de vue les définitions des observables en question.

On peut résumer les résultats dans le théorème 1 suivant. Notons que ces résultats sont indépendants de la représentation unitaire considérée.

B. *Théorème 1*

A Quelle que soit la représentation unitaire du groupe de Poincaré considérée $g \to \mathcal{U}(g)$ dans un espace d'Hilbert $\mathcal{H}$, les opérateurs P^0, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{N}$, $(P^0)^2 - \boldsymbol{P}^2$, $(W^0)^2 - \boldsymbol{W}^2$, $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{P}^2$, $\boldsymbol{J}^2$ sont des opérateurs essentiellement auto-adjoints sur le domaine de Gårding associé à cette représentation.

B Quelle que soit la représentation unitaire du groupe de Galilée considérée $g \to \mathcal{U}(g)$ dans un espace d'Hilbert $\mathcal{H}$, les opérateurs E, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{P}^2$, $\boldsymbol{J}^2$ sont des opérateurs essentiellement auto-adjoints sur le domaine de Gårding associé à cette représentation.
Si de plus la représentation considérée est une représentation projective de masse m, c'est-à-dire une vraie représentation de l'extension indexée par m, en plus des opérateurs précités dans B on peut affirmer que:

$$E - \frac{\boldsymbol{P}^2}{2\,m} \qquad\qquad \left(\boldsymbol{J} - \frac{1}{m}\,\boldsymbol{K} \wedge \boldsymbol{P}\right)^2$$

sont aussi essentiellement auto-adjoints sur le domaine de Gårding de la représentation.

La démonstration repose sur un theoreme de Nelson et Stinespring (1959) dont nous avons explicité la demonstration et sur le fait que tous ces opérateurs sont des invariants soit du groupe lui-même, soit de l'un des sous-groupes fermés.

On notera $\mathcal{D}(G)$ l'ensemble des fonctions définies sur un groupe de Lie G à valeurs dans $\mathbf{C}$ différentiables et dont le support est compact.

Théorème 2 (Nelson *et* Stinespring)

Soit $\mathcal{U}$ une représentation unitaire continue d'un groupe de Lie G dans un espace d'Hilbert $\mathcal{H}$. Soit X un élément de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G. Soit A un opérateur symétrique tel que

(1) A ait un domaine dense, invariant par tous les opérateurs $\mathcal{U}(\varphi) = \int_G \varphi(g)\ \mathcal{U}(g)\ dg$ avec $\varphi(g) \in \mathcal{D}(G)$.

(2) A $(\mathcal{U}(\varphi)\, h) = d\mathcal{U}(X)\, (\mathcal{U}(\varphi)\, h) = \mathcal{U}(X\, \varphi)\, h \qquad h \in D_A$.
Alors $d\mathcal{U}(X) \subset A^{**}$ et si $d\mathcal{U}(X)$ est essentiellement auto-adjoint, A l'est aussi et $d\mathcal{U}(X)^{**} = A^{**}$.

Démonstration du théorème 2

On doit d'abord démontrer que $d\mathcal{U}(X) \subset A^{**}$:
Soit $y \in D\, d\mathcal{U}(X)$, on doit pour cela montrer que $y \in D_{A^{**}}$ et que $A^{**}\, y = d\mathcal{U}(X)\, y$. Pour démontrer la dernière égalité, il faut pour tout $y \in D_{d\mathcal{U}(X)}$ construire une suite u_n telle que $u_n \in D_A$ pour tout n, telle que les deux suites u_n et $A\, u_n$ soient simultanément convergentes et que de plus

$$\begin{cases} u_n \to y \\ A\, u_n \to d\mathcal{U}(X)\, y\,. \end{cases}$$

Il suffit de le démontrer pour tout élément y de la forme $\mathcal{U}(\varphi)\, h$, car ce sera vrai alors pour toute combinaison linéaire finie. Soit h un élément quelconque de $\mathcal{H}$, alors pour $\varphi(g) \in \mathcal{D}(G)$, $\mathcal{U}(\varphi)\, h \in D\, d\mathcal{U}(X)$; comme $\overline{D}_A = \mathcal{H}$, il existe une suite h_n, avec $h_n \in D_A$ pour tout n, telle que $h_n \to h$. Considérons la suite $\mathcal{U}(\varphi)\, h_n$; comme les opérateurs $\mathcal{U}(\varphi)$ sont bornés, $\mathcal{U}(\varphi)\, h_n \to \mathcal{U}(\varphi)\, h$. C'est la suite cherchée; en effet en vertu de la première condition $\mathcal{U}(\varphi)\, h_n \in D_A$ et en vertu de la seconde condition on a $A(\mathcal{U}(\varphi)\, h_n) = \mathcal{U}(X\, \varphi)\, h_n$ qui tend vers $\mathcal{U}(X\, \varphi)\, h$ c'est-à-dire vers $d\mathcal{U}(X)\, (\mathcal{U}(\varphi)\, h)$.

Donc $d\mathcal{U}(X) \subset A^{**}$, par suite $A^* \subset d\mathcal{U}(X)^*$ car $A^{***} = A^*$ et $d\mathcal{U}(X)^{**} \subset A^{**}$. Comme $d\mathcal{U}(X)^* = d\mathcal{U}(X)^{**}$ par hypothèse, on a compte tenu de $A^{**} \subset A^*$ par hypothèse, $A^{**} = A^* = d\mathcal{U}(X)^*$. C.Q.F.D.

Remarque

Naïmark (1962; p. 276) a démontré que le domaine linéaire $\mathcal{U}(\varphi)\, D_A$ lorsque φ parcourt $\mathcal{D}(G)$ est dense $\mathcal{H}$, car D_A l'est.

Si A est l'élément de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie calculé directement, et, si la condition 1 du théorème est vérifiée, par définition la condition 2 l'est automatiquement. Aussi pour appliquer ce théorème à ce cas, il suffira de vérifier la première condition.

Demonstration du théorème 1.

Pour la partie A:
Les opérateurs P^0, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{N}$ sont les images des générateurs de sous-groupes à un paramètre et par suite ce sont les images des invariants de chacun de ces sous-groupes. $P^2 = (P^0)^2 - \boldsymbol{P}^2$ et $W^2 = (W^0)^2 - \boldsymbol{W}^2$ sont les images de deux générateurs du centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré; $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{J}$ et $\boldsymbol{P}^2$ sont les images des deux générateurs du centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de $\tilde{E}_3$ et enfin $\boldsymbol{J}^2$ est l'image du générateur du centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de SU(2). Chacun de ces opérateurs est défini sur le domaine de Gårding du groupe de Poincaré mais aussi sur le domaine de Gårding du sous groupe correspondant Γ (à l'exception évidemment de P^2 et de W^2) pour la représentation $g \to \mathcal{U}(g)$ restreinte au même sous groupe Γ.

Aussi doit-on distinguer entre les opérateurs P^0, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{P}^2$, $\boldsymbol{J}^2$ lorsqu'on les considère comme définis sur le domaine de Gårding associé à la représentation du

groupe de Poincaré considérée et les opérateurs qu'on notera p^0, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{p}^2$, $\boldsymbol{j}^2$ définis respectivement sur le domaine de Gårding associé à la restriction au sous groupe correspondant de la représentation du groupe de Poincaré considérée. Le domaine de Gårding du groupe de Poincaré est invariant par les operateurs $\mathcal{U}(\varphi)$ où φ est une fonction definie sur un sous groupe fermé Γ, differentiable et à support compact; de plus, puisque la condition (1) du théorème 2 en verifieé, la seconde condition l'est automatiquement en vertu de l'egalité (II, 1) lorsque A est egal, respectivement a P^0, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{J}$ ... etc. et $d\mathcal{U}(X)$, respectivement à p^0, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{j}$, ... etc. Donc en vertu du théorème 2, il suffit de démontrer que p^0, $\boldsymbol{p}$, ... etc. sont essentiellement autoadjoints pour que les opérateurs P^0, $\boldsymbol{P}$, ... le soient sur le domaine de Gårding associé à la représentation $g \to \mathcal{U}(g)$ du groupe de Poincaré. Or, en vertu du théorème de Ségal les opérateurs p^0, $\boldsymbol{p}$, ... etc. sont bien essentiellement auto-adjoints respectivement sur chacun des domaines de Gårding associé à la représentation du sous groupe dont ils sont les images des invariants, ainsi que P^2 et W^2 sur le domaine de Gårding associé à la représentation $g \to \mathcal{U}(g)$ du groupe de Poincaré.

Pour la partie B:

La démonstration reste absolument la même à ceci près que dans le cas de l'extension H_m P^2 et W^2 doivent être remplacés par les deux invariants

$$E - \frac{\boldsymbol{P}^2}{2\,m} \text{ et } \left(\boldsymbol{J} - \frac{1}{m}\,\boldsymbol{K} \wedge \boldsymbol{P}\right)^2 \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Notons que si la représentation $g \to \mathcal{U}(g)$ du groupe de Poincaré est irréductible on montre aisément (Bargman 1947) en appliquant le lemme de Schur à la transformée de Cayley de l'opérateur P^2 (resp. W^2) que $\overline{P^2} = P^{2**}$ (resp. $\overline{W^2}$) est défini sur tout l'espace d'Hilbert $\mathcal{H}$ et qu'il se réduit à la multiplication par un scalaire.

L'intérêt de définir la représentation de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie sur le domaine de Gårding tient au caractère général du résultat obtenu, ce qu'on perd si on a recours aux expressions obtenues directement à partir de la forme particulière de la représentation. De plus du point de vue où nous nous plaçons, le domaine de Gårding présente l'avantage de se transformer en lui même lorsqu'on passe d'une représentation unitaire à une autre représentation unitairement équivalente, ce qui n'est pas généralement le cas lorsqu'on considère un domaine particulier lié à la forme particulière de la représentation, comme nous le ferons un peu plus loin.

Malheureusement notre démonstration ne recouvre pas l'ensemble des observables. En effet, il faut bien s'attendre à ce que généralement toutes les observables ne soient pas définies indépendamment de la représentation car quel sens donner exactement au spin d'une masse nulle? Ainsi dans le formalisme relativiste, le spin dans sa formulation trivectorielle, l'hélicité, le moment angulaire orbital, l'opérateur de position ne sont pas les images d'éléments de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie. Il suffit par exemple de se reporter aux expressions des opérateurs de spin et des opérateurs de position obtenus par Berg (1965), en fonction des opérateurs infinitésimaux, pour s'en convraincre. Le cas non relativiste est plus favorisé car l'opérateur de position $\boldsymbol{X} = 1/m\,\boldsymbol{N}$ le moment angulaire $\boldsymbol{L} = 1/m\,\boldsymbol{N} \wedge \boldsymbol{P}$, ainsi que $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{J} - \boldsymbol{L}$ sont des images d'éléments de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie mais $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{S}$ échappent néanmoins à l'analyse précédente. Aussi sommes-nous contraints de recourir aux

formes particulières des représentations. Nous considérerons les représentations unitaires irréductibles dans le formalisme canonique et dans le formalisme hélicité (appendice I); nous distinguerons le cas relativiste du cas non relativiste.

C. *Cas relativiste: masse positive et spin j*

α) *Formalisme canonique*

Dans le cadre du formalisme canonique, on définira le trivecteur *spin j*: $\boldsymbol{S}_{(j)}$ par l'intégrale directe:

$$\boldsymbol{S}_{(j)} = \int^{\oplus} \boldsymbol{S}_{(j)}(p)\, d\mu(p) \text{ où } d\mu(p) = \frac{d^3\boldsymbol{p}}{p^0} \tag{11}$$

et où le champ $p \to \boldsymbol{S}_{(j)}(p)$ est un champ constant: $\boldsymbol{S}_{(j)}(p)$ est en effet égal aux 3 générateurs S^1, S^2, S^3 de la représentation irréductible de SU(2) indexée par j. Les 3 opérateurs S^i sont évidemment bornés. Le champ $p \to \boldsymbol{S}_j(p)$ est donc μ-essentiellement borné par j. Les 3 opérateurs $\boldsymbol{S}_j$ sont définis sur tout l'espace d'hilbert, ils sont bornés (de borne j) et de plus symétriques. Ils sont donc auto-adjoints.

Le lemme 1 rappelle un résultat bien connu mais généralement mal formulé.

Lemme 1

On a:

$$\mathcal{U}(a, A)^{-1}\, \boldsymbol{S}_j\, \mathcal{U}(a, A) = \int^{\oplus} R^c(p, A)\, \boldsymbol{S}_j(p)\, d\mu(p) \tag{2}$$

où $R^c(p, A)$ désigne la rotation 3×3 engendrée par la matrice 2×2.

$$A^{c-1}_{\Lambda(A)p}\, A\, A_p \in \mathrm{SU}(2) \text{ soit } R^c(p, A) = R(A^{c-1}_{\Lambda(A)p}\, A\, A^c_p)\,.$$

Démonstration

En effet, soit:

$$(\mathcal{U}(a, A)\, f)_s\,(p) = e^{iap} \sum_{s'} D^j_{s\,s'}\,(A^{c-1}_p\, A\, A^{c-1}_{\Lambda(A)p})\, f_{s'}\,(\Lambda(A)^{-1}\, p)\,.$$

La représentation $[m, j]$ considérée.

On a:

$$(\mathcal{U}(a, A)^{-1}\, \boldsymbol{S}_j\, \mathcal{U}(a, A)\, f)_s\,(p) = e^{-iap} \sum_{s_1} D^j_{s\,s_1}\,(A^{c-1}_p\, A^{-1}\, A^c_{\Lambda(A)p})\, [(\boldsymbol{S}_j\, \mathcal{U}(a, A))\, f]_s\,(\Lambda(A)\, p)$$

$$= \sum_{s_1, s_2, s_3} D^{j-1}_{s\,s_1}\,(A^{c-1}_{\Lambda(A)p}\, A\, A^c_p)\, (\boldsymbol{S}_j\,(\Lambda(A)\, p))_{s_1 s_2}\, D^j_{s_2 s_3}\,(A^{c-1}_{\Lambda(A)p}\, A\, A^c_p)\, f_{s_3}(p)$$

or

$$\sum_{s_1 s_2} D^{j-1}_{s\,s_1}\,(A^{c-1}_{\Lambda(A)p}\, A\, A^c_p)\, S^i_{s_1 s_2}\, D^j_{s_2 s_3}\,(A^{c-1}_{\Lambda(A)p}\, A\, A^c_p) = R^{cik}(p, A)\, S^k_{s\,s_3}$$

cette dernière formule n'est rien d'autre que la relation générale

$$\mathcal{U}(B)\, J^i\, \mathcal{U}(B)^{-1} = R^i_j(B^{-1})\, J_j$$

où $B \to \mathcal{U}(B)$ est une représentation de SU(2) et les opérateurs J^i les opérateurs infinitésimaux habituels dans la représentation considérée, écrite dans la représentation irréductible D_j. En conclusion: $\mathcal{U}(a, A)^{-1} \boldsymbol{S}_j(p)\, \mathcal{U}(a, A)$ est l'opérateur décomposable engendré par le champ $p \to R^c(p, A)\, \boldsymbol{S}_j(p)$ μ-essentiellement borné.

Nous avons néanmoins le résultat négatif suivant:

Le domaine de Gårding n'est pas stable par les opérateurs de spin $\boldsymbol{S}_j$

Soit en effet, u un élément du domaine de Gårding:

$$u(p) = \int \varphi(a, A)\, (\mathcal{U}(a, A)\, f)\, (p)\, da\, dA\,.$$

Considérons $\boldsymbol{S}_j\, u$. Comme chacun des opérateurs S_j^i est borné, il commute avec l'intégrale forte et l'on peut écrire:

$$\boldsymbol{S}_j\, u = \int \varphi(a, A)\, \boldsymbol{S}_j(\mathcal{U}(a, A)\, f)\, da\, dA$$

si on note

$$\boldsymbol{S}_j' = \int^{\oplus} R^c(p, A)\, \boldsymbol{S}_j(p)\, d\mu(p)$$

on a en vertu du lemme 2

$$\boldsymbol{S}_j\, \mathcal{U}(a, A) = \mathcal{U}(a, A)\, \boldsymbol{S}_j'$$

et

$$\boldsymbol{S}_j\, u = \int \varphi(a, A)\, \mathcal{U}(a, A)\, (\boldsymbol{S}_j'\, f)\, da\, dA\,.$$

Or un simple examen des éléments de matrice de la rotation $R^c(p, A)$ nous montre qu'ils ne peuvent être absorbés à la fois par la fonction $\varphi(a, A)$ et par la fonction f de façon qu'on retrouve la forme habituelle d'un élément du domaine de Gårding. D'où la conclusion.

Néanmoins l'opérateur S_j^i, restreint au domaine de Gårding est un opérateur essentiellement auto-adjoint.

On peut, pour étudier la polarisation longitudinale, partir de l'expression $H_j^3 = (\sqrt{\boldsymbol{P}^2})^{-1}\, \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{J}$. On sait en effet que $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{J}$ est essentiellement auto-adjoint sur le domaine de Gårding.

Néanmoins les propriétés mathématiques de H_j^3 n'apparaissent pas simplement sur cette expression et il est préférable de partir de l'expression du spin. *L'hélicité* $\boldsymbol{H}_j$ est en effet un opérateur unitairement équivalent au spin. C'est l'opérateur

$$\boldsymbol{H}_j = \int^{\oplus} D^j(A_p^{c-1}\, A_p^H)\, \boldsymbol{S}_j(p)\, D^j\, (A_p^{H-1}\, A_p^c)\, d\mu(p)$$

or

$$D^j(A_p^{c-1}\, A_p^H)\, \boldsymbol{S}_j(p)\, D^j\, (A_p^{H-1}\, A_p^c) = R\, (\boldsymbol{w} \to \boldsymbol{k})\, \boldsymbol{S}_j(p)$$

où $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{p})/|\boldsymbol{p}|$ et $\boldsymbol{k}$ le vecteur unitaire de l'axe $0\,z$ et $R\,(\boldsymbol{w} \to \boldsymbol{k})$ est la rotation dans le plan $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{k})$ d'axe $\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{k}$ qui applique $\boldsymbol{w}$ sur $\boldsymbol{k}$.

L'étude de cette rotation est grandement facilitée si on l'écrit sous la forme d'un produit de deux symétries (Michel 1963/64, Bacry 1963). Elle est le produit de la symétrie par rapport au plan orthogonal à $\boldsymbol{w}$, et de celle par rapport au plan orthogonal

à $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{k}$. Or la matrice correspondante à une symétrie par rapport à un plan orthogonal à un vecteur $\boldsymbol{b}$ s'écrit

$$\mathsf{1} - \frac{2\,\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}.$$

En effet si $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ on a

$$\left(\mathsf{1} - \frac{2\,\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\right) \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \quad \text{et} \quad \left(\mathsf{1} - \frac{2\,\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\right) \boldsymbol{b} = -\,\boldsymbol{b}\,.$$

La rotation de Jacob et Wick s'écrit alors:

$$R\,(\boldsymbol{w} \to \boldsymbol{k}) = \mathsf{1} - \frac{(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{w}) \otimes (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{w})}{1+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{w}} + 2\,\boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{w}\,. \tag{14}$$

Remarque

Notons que cette rotation n'est pas définie dans deux cas, celui où $\boldsymbol{p} = 0$ et celui où $\boldsymbol{w} = -\,\boldsymbol{k}$. Dans le premier cas, la première symétrie n'est pas définie car $\boldsymbol{w}$ ne l'est pas et dans le second cas c'est la seconde symétrie qui n'est pas définie.

L'hélicité est donc représentée par l'opérateur suivant:

$$\boldsymbol{H}_j = \int^{\oplus} R\,(\boldsymbol{w} \to \boldsymbol{k})\; \boldsymbol{S}_j(p)\; d\mu(p)$$

comme $\boldsymbol{H}_j$ est unitairement équivalent à $\boldsymbol{S}_j$ il est borné, (de borne j), défini sur tout l'espace d'Hilbert et auto-adjoint; le champ

$$p \to R\,(\boldsymbol{w} \to \boldsymbol{k})\; \boldsymbol{S}_j(p) = \boldsymbol{H}_j(p)$$

est μ-essentiellement borné par j.

A la place du lemme 1 nous avons maintenant la relation suivante:

$$\mathcal{U}(a, A)^{-1}\, \boldsymbol{H}_j\, \mathcal{U}(a, A) = \int^{\oplus} R^H(p, A)\; \boldsymbol{H}_j(p)\; d\mu(p)$$

où

$$R^H(p, A) = R(A^{H-1}_{\Lambda(A)\,p}\; A\; A^H_p)\,.$$

Pour démontrer cette égalité, il suffit de partir de la définition de $\boldsymbol{H}_j$. On en déduit aussi que le domaine de Gårding n'est pas invariant par les opérateurs $\boldsymbol{H}_j$.

Chacun des opérateurs H^i_j est essentiellement auto-adjoint lorsqu'on restreint son domaine de définition au domaine de Gårding.

On a:

$$\boldsymbol{S}^2_j = \boldsymbol{H}^2_j = -\,\frac{W^2}{m^2} = j\,(j+1)\,.$$

On définit les opérateurs de *moment angulaire* L^i par

$$L^i = J^i - S^i_j\,.$$

Ils sont définis sur le domaine de Gårding associé à la représentation $[m, j]$.

Proposition 1

Chacun des L^i est essentiellement auto-adjoint sur le domaine de Gårding.

La démonstration est basée sur le lemme suivant.

Lemme 3 (cf. DUNFORD et SCHWARTZ 1963, p. 1189)

Comme S_j^i est un opérateur auto-adjoint et défini partout on a $L^{i*} = J^{i*} - S_j^i$. En effet, comme S_j^i est défini partout, $D_{L^i} = D_{J^i}$ pour tout i. De plus, comme

$$((J^i - S_j^i)\, f, g) = (J^i f, g) - (S_j^i f, g)$$

et que S_j^i est continu il suit immédiatement des définitions que

$$D_{(J^i - S^i)*} = D_{J^{i*}}$$

et pour tout élément $f \in D_{J^i}$ et $g \in D_{J^{i*}}$ on a

$$\begin{aligned}((J^i - S_j^i)^* f, g) &= (f, (J^i - S_j^i)\, g) = (f, J^i g) - (f, S_j^i g)\\ &= (J^{i*} f, g) - (S_j^{i*} f, g) = ((J^{i*} - S_j^{i*})\, f, g)\end{aligned}$$

d'où le résultat. Mais comme J est essentiellement auto-adjoint on a en itérant le lemme

$$L^{i**} = J^{i**} - S_j^i = J^{i*} - S_j^i = L^{i*} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

L'opérateur $\boldsymbol{L}^2$ échappe à l'analyse précédente.

Evidemment le domaine de Gårding n'est stable ni par chacun des opérateurs L^i, ni par $\boldsymbol{L}^2$ puisque il ne l'est pas par les opérateurs $\boldsymbol{S}_j$.

β) *Formalisme hélicité*

L'isomorphisme entre les deux formalismes est engendré par l'opérateur unitaire T suivant:

$$f_h^H(p) = \sum_s D_{hs}\,(A_p^{H^{-1}} A_p^c)\, f_s^c(p) \text{ où } T = \int^{\oplus} D^j(A_p^{H^{-1}} A_p^c)\, d\mu(p)\,.$$

C'est l'isométrie entre les deux représentations spectrales associées aux deux bases $(\boldsymbol{P}, S_j^3)$ et $(\boldsymbol{P}, H_j^3)$. Les deux domaines de Gårding engendrés par chacune des représentations sont en correspondance biunivoque par l'isomorphisme précédent. En effet si on note $g \to \mathcal{U}^c(g)$ la représentation canonique et $g \to \mathcal{U}^H(g)$ celle correspondant au formalisme hélicité, $\mathcal{U}^c(\varphi)\, f^c$ un élément du domaine de Gårding de la première et $\mathcal{U}^H(\varphi)\, f^H$ un élément du même domaine pour la seconde, alors on a:

$$T(\mathcal{U}^c(\varphi)\, f^c) = \mathcal{U}^H(\varphi)\,(T f^c)$$

et réciproquement:

$$T^{-1}(\mathcal{U}^H(\varphi)\, f^H) = \mathcal{U}^c(\varphi)\,(T^{-1} f^H)\,.$$

Si O est une observable dans le formalisme canonique, dans le formalisme d'hélicité la nouvelle observable est $T\, O\, T^{-1}$. On voit donc que toutes les conclusions précédentes concernant les observables établies dans le cadre du formalisme canonique sont valables ici à condition de se rapporter au domaine de Gårding associé à la nouvelle représentation. C'est ce qui fait notamment l'intérêt de considérer le domaine de Gårding alors que la remarque précédente risque d'être fausse pour un autre domaine, comme nous le verrons. Seule la représentation change. Ainsi c'est l'hélicité qui est représentée par l'intégrale directe:

$$\boldsymbol{H}_j = \int^{\oplus} \boldsymbol{S}\, d\mu(p)$$

alors que le spin, lui est représenté par le champ:

$$\boldsymbol{S}_j = \int^{\oplus} R\,(\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{w})\, \boldsymbol{H}_j(p)\, d\mu(p) \quad \text{où} \quad \boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}$$

où $R\,(\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{w})$ est la rotation:

$$R\,(\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{w}) = 1 - \frac{(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{w}) \otimes (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{w})}{1+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{w}} + 2\,\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{k}\,.$$

Les mêmes conclusions en ce qui concerne toutes les observables sont valables dans ce cas puisque T est un opérateur unitaire.

D. *Cas relativiste masse $m = 0$ et spin j*

Les observables physiquement intéressantes sont P^0, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{J}^2$, $\boldsymbol{P}^2$, $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{J}$ ainsi que W^μ qui ici est simplement $W^\mu = j\, P^\mu \cdot P^2$ et W^2 sont tous deux nuls. On voit donc que toutes ces observables sont essentiellement auto-adjointes sur le domaine de Gårding.

Il ne peut être question de spin au sens strict pour une masse nulle et le moment angulaire $\boldsymbol{L}$ n'est pas une observable intéressante puisqu'elle ne peut pas être définie canoniquement par manque de définition du spin.

E. *Cas non relativiste masse positive et spin j*

Ce cas est strictement identique au cas relativiste à quelque changement près. Néanmoins le cas est plus favorable car nombreuses sont les observables qui sont les images d'éléments de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie si bien que les résultats obtenus sont plus généraux.

Nous avons démontré que les opérateurs E, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{P}^2$, $\boldsymbol{J}^2$ ainsi que les invariants $E - \boldsymbol{P}^2/2\,m$ et $(\boldsymbol{J} - 1/m\,\boldsymbol{K} \wedge \boldsymbol{P})^2$ sont des opérateurs essentiellement auto-adjoints sur le domaine de Gårding.

Signalons que contrairement au cas relativiste $1/m\,\boldsymbol{K}$ s'interprète comme l'opérateur de position du système de masse m. L'opérateur de spin est l'image d'un élément de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie puisque

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{J} - \frac{1}{m}\,\boldsymbol{K} \wedge \boldsymbol{P}$$

c'est-à-dire que le moment angulaire orbital est ici

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{m}\,\boldsymbol{K} \wedge \boldsymbol{P}\,.$$

Contrairement au cas relativiste, c'est aussi l'image d'un élément de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie.

Le comportement du spin non relativiste dans une transformation de Galilée quelconque est très simple puisque l'on a:

$$\mathcal{U}^{-1}(b, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, B)\, \boldsymbol{S}_j\, \mathcal{U}(b, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, B) = R(B)\, \boldsymbol{S}_j\,.$$

Le spin est invariant dans une transformation de Galilée pure et l'opérateur borné $\boldsymbol{S}_j$ est essentiellement auto-adjoint, sur le domaine de Gårding; contrairement au cas relativiste le domaine de Gårding est stable par les opérateurs $\boldsymbol{S}_j$.

De même en ce qui concerne l'hélicité dont la définition est strictement identique au cas relativiste, à savoir:

$$\boldsymbol{H}_j = \int^{\oplus} R\,(\boldsymbol{w} \to \boldsymbol{k})\; \boldsymbol{S}_j(\boldsymbol{p})\; d^3\boldsymbol{p}\,.$$

$\boldsymbol{H}_j$ est donc aussi essentiellement auto-adjoint sur le domaine de Gårding. Notons la relation importante suivante:

$$\mathcal{U}^{-1}(b, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, B)\; \boldsymbol{H}_j\; \mathcal{U}(b, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, B) = \int^{\oplus} R(B^{-1}_{R(B)\boldsymbol{p}+m\boldsymbol{v}}\; B\; B_{\boldsymbol{p}})\; \boldsymbol{H}_j(\boldsymbol{p})\; d^3\boldsymbol{p}$$

où B_p est la rotation [appendice I; (1)].

Cette relation a pour conséquence que le domaine de Gårding n'est pas invariant par les opérateurs $\boldsymbol{H}_j$, suivant un argument strictement identique au cas relativiste du spin $\boldsymbol{S}_j$.

Les 3 opérateurs $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{J} - \boldsymbol{S}_j$ sont aussi essentiellement auto-adjoints sur le domaine de Gårding.

III. Seconde définition des observables utilisant les espaces $\mathcal{D}$ et $\mathcal{S}$

A. *Prologue*

Nous avons défini l'ensemble des observables d'une particule libre sur un domaine commun dense, associé à la représentation considérée. Ce domaine présente l'avantage d'être invariant à la fois par la représentation de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie et par la représentation globale. Les observables sont en général essentiellement auto-adjointes sur ce domaine et ce sont évidemment les extensions auto-adjointes qui les caractérisent; on ne fera pas la distinction entre les deux par la suite. La considération du domaine de Gårding est intéressante par le caractère général des résultats obtenus, indépendants notamment de la forme particulière de la représentation considérée. Néanmoins le domaine de Gårding ne peut pas être stable par certaines observables comme le spin, le moment orbital et l'hélicité dans le cas d'une particule relativiste de masse m et de spin j et par l'hélicité dans le cas non relativiste.

Ce n'est pas la seule définition possible des observables et cela peut avoir quelque importance. Le domaine de Gårding n'est qu'un sous domaine de l'ensemble des vecteurs différentiables et il peut y en avoir d'autres qui possèdent, vis-à-vis de l'ensemble des observables, les mêmes propriétés que le domaine de Gårding. Que le choix ne soit pas unique est particulièrement important lorsque, dans la seconde partie, nous diagonaliserons une sous algèbre abélienne maximale car le développement sur les vecteurs propres fait intervenir un domaine particulier muni d'une topologie convenable. De plus pratiquement on fait toujours intervenir un domaine différent de celui de Gårding lorsqu'on calcule et exprime, de la manière habituelle, les opérateurs infinitésimaux des groupes de Poincaré et de Galilée.

En effet si l'on considère le *formalisme canonique* pour une particule de masse m et de spin j, le calcul des opérateurs infinitésimaux donne pour ceux ci des expressions

qui s'expriment à l'aide des opérateurs aux dérivées partielles et aux opérateurs de multiplication par les variables considérées.

A priori ces opérateurs sont définis sur des domaines de fonctions ayant de bonnes propriétés de différentiation et deux domaines particulièrement pratiques sont $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ et $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$. Rappelons brièvement la définition de ces ensembles. $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ est ici l'ensemble des fonctions définies sur l'hyperboloïde de masse Ω_m ($p^2 = m$; $p_0 > 0$), différentiables, à support compact sur Ω_m, et à valeurs dans $\mathcal{H}_{2j+1}$. $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$ est l'espace des fonctions f différentiables sur Ω_m, à valeurs dans $\mathcal{H}_{2j+1}$, telles que, pour tout $n > 0$ et tout indice de differentiation q, la fonction $(1 + \boldsymbol{p}^2)^{n/2} D^q f$ soit bornée sur Ω_m.

On a

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1}) .$$

Rappelons, puisque $\mathcal{H}_{2j+1}$ est de dimension finie, qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $f \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ (resp. $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$) est que pour tout $h \in \mathcal{H}_{2j+1}$ on ait $h \cdot f \in \mathcal{D}(\Omega_m)$ (resp. $\mathcal{S}(\Omega_m)$) où $h \cdot f$ est le produit scalaire dans $\mathcal{H}_{2j+1}$.

Le choix de $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ et de $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$ est pratiquement imposé par les considérations de la seconde partie. De plus $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1}) = \mathcal{D}(\Omega_m) \otimes \mathcal{H}_{2j+1}$ et $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1}) = \mathcal{S}(\Omega_m) \otimes \mathcal{H}_{2j+1}$.

On peut alors se poser un certain nombre de problèmes. A savoir

1) Quel est le rapport entre la nouvelle définition des observables et celle obtenue en utilisant le domaine de Gårding?

2) Les nouveaux opérateurs définissant les observables sont-ils essentiellement auto-adjoints sur $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ et sur $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$.

La solution du premier problème permet de résoudre le second. Elle repose sur le théorème 2, comme au second paragraphe. Là, encore, A sera un opérateur symétrique représentant un élément de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie, calculé directement et definie sur $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ et sur $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$. Par suite, si la condition (1) du théorème 2 est vérifiée, la seconde sera automatiquement verifiée.

B. *Cas relativiste: masse positive et spin j. Formalisme canonique.*

1° On considère d'abord les opérateurs représentant les éléments de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie.

Comme on peut le voir en considérant les expressions explicites (appendice I) le domaine de définition de ces opérateurs est $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1}$ et ceci les définit completement. $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ est stable par ces opérateurs. Ils sont aussi définis sur $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$ mais en vertu du lemme 2 ci-dessous, et de l'inclusion $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$ il suffira de considérer le premier domaine, sur lequel chacun des opérateurs précédents est symétrique.

Avant de parvenir aux résultats essentiels (théorèmes 3 et 4) nous aurons besoin de démontrer un certain nombre de résultats préliminaires.

Lemme 2

Soient H_1 et H_2 deux opérateurs symétriques tels que $H_1 \subset H_2$. Si H_1 est essentiellement auto-adjoint, alors H_2 l'est aussi et $\overline{H}_1 = H_1^* = H_1^{**} = \overline{H}_2 = H_2^* = H_2^{**}$.

Démonstration

Si $H_1 \subset H_2$ on a $H_2^* \subset H_1^*$ est aussi $H_1^{**} \subset H_2^{**}$. Comme $H_2^{**} \subset H_2^*$ on a donc $H_1^{**} \subset H_2^{**} \subset H_2^* \subset H_1^*$. Comme $H_1^* = H_1^{**}$, on en déduit le résultat. C.Q.F.D.

Proposition 2

Soient G un groupe de Lie analytique; Γ un sous-groupe fermé de G. On suppose G/Γ muni de la structure de variété analytique unique telle que l'application $(g, p) \to g \cdot p$ où $g \in G$ et $p \in G/\Gamma$ soit différentiable. De plus soit $\mathcal{H}$ un espace d'Hilbert de dimension finie et $(p, g) \to T(p, g)$ une application de $G/\Gamma \times G$ dans l'ensemble des opérateurs unitaires définis sur $\mathcal{H}$. On suppose que pour tout g et pour tout $h \in \mathcal{H}$ l'application $p \to T(p, g)\, h$ est différentiable.
Soient $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ et $f \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$. Alors la fonction $\Psi\colon G/\Gamma \to \mathcal{H}$ définie par

$$\Psi(p) = \int_G \varphi(g)\; T(p, g)\, f(g^{-1}\, p)\, dg$$

où dg est la mesure de Haar invariante à gauche sur G, appartient à $\mathcal{D}(\mathcal{H})$.

Démonstration

Soit $\lambda(p, g)$ la fonction de $G/\Gamma \times G$ dans $\mathcal{H}$ suivante

$$\lambda(p, g) = \varphi(g)\; T(p, g)\, f(g^{-1}\, p)\,.$$

La démonstration de l'intégrabilité pour tout p de la fonction $g \to \lambda(g, p)$ et celle de la différentiabilité de la fonction Ψ ne présentent aucune difficulté. Aussi nous porterons notre attention sur la propriété du support de Ψ.

Soient supp ϕ le support de la fonction ϕ et supp f celui de la fonction f. Le support de la fonction $\lambda(g, p)$ est compact. En effet puisque $T(p, g)$ est toujours $\neq 0$, $\lambda(g, p)$ est nulle pour tout g, située dans le complémentaire de supp ϕ et pour tout p situé dans le complémentaire de $\bigcup_{g \in \operatorname{supp} \phi} g \cdot \operatorname{supp} f$ et seulement pour ces éléments.

$$\text{or} \bigcup_{g \in \operatorname{supp} \phi} g \cdot \operatorname{supp} f = \{g \cdot p \in \Omega_m;\, g \in \operatorname{supp} \phi \text{ et } p \in \operatorname{supp} f\}\,.$$

C'est une partie de Ω_m compacte car c'est l'image par l'application continue $(g, p) \to g \cdot p$ de l'ensemble compact supp $\phi \times$ supp f. Donc

$$\operatorname{supp} \lambda = \operatorname{supp} \phi \times \bigcup_{g \in \operatorname{supp} \phi} g \cdot \operatorname{supp} f\,.$$

Comme l'ensemble produit de deux parties compactes est compact, supp λ est compact.

Donc il est clair que $\Psi(p) = 0$ pour tout p situé dans le complémentaire de $\bigcup_{g \in \operatorname{supp} \phi} g \cdot \operatorname{supp} f$, par suite supp $\Psi \subseteq \bigcup_{g \in \operatorname{supp} \phi} g \cdot \operatorname{supp} f$; comme le support d'une fonction est fermé par définition, supp Ψ est compact. C.Q.F.D.

Corollaire 1

Soit $\mathcal{U}(a, \Lambda)$ la représentation de G:

$$f(p) \xrightarrow{\mathcal{U}(a, \Lambda)} e^{iap}\, D^j\, (A_p^{c-1}\, A\, A_{\Lambda^{-1}p}^c)\, f(\Lambda^{-1}(A)\, p)\,.$$

Alors si $f(p) \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, la fonction $\mathcal{U}(\varphi) f$ définie par:

$$p \to (\mathcal{U}(\varphi) f)(p) = \int_G \varphi(a, A)\, e^{iap}\, D^j(A_p^{c-1}\, A\, A_{A^{-1}p}^c)\, f(A^{-1}(A)\, p)\, da\, dA$$

est un élément de $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$; en particulier $\mathcal{U}(a, A)\, \mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$.

Démonstration

Ce corollaire n'est que l'application de la proposition 2 au groupe de Poincaré et à $G/\Gamma = \mathrm{SL}(2, C)/\mathrm{SU}(2) = \Omega_m$.

Seul le cas de la différentiabilité mérite un examen par suite de la présence du terme $e^{iap}\, D^j(A_p^{c-1}\, A\, A_{A^{-1}p}^c)\, f(A^{-1}(A)\, p)$. Or quelque soit $h \in \mathcal{H}_{2j+1}$ l'application $B \to D^j(B)\, h$ est différentiable car la représentation est de dimension finie. Il suffira donc que l'application

$$p \to A_p^{c-1}\, A\, A_{A^{-1}p}^c \in \mathrm{SU}(2)$$

soit aussi différentiable pour tout A.

L'application $p \to A^{-1}\, p$ est, pour tout A, un difféomorphisme de Ω_m sur lui-même donc différentiable quelque soit A; de plus le choix fait pour la transformation $p \to A_p^c$ (appendice I) est tel que l'application $p \to A_p^c$ est elle-même différentiable. On en déduit que l'application

$$p \to D^j(A_p^{c-1}\, A\, A_{A^{-1}p}^c)\, h$$

est une application différentiable de Ω_m. dans $\mathcal{H}_{2j+1}$ et qu'il en est de même de l'application

$$p \to e^{iap}\, D^j(A_p^{c-1}\, A\, A_{A^{-1}p}^e)\, f(A^{-1}(A)\, p)\,.$$

On a bien donc $\mathcal{U}(a, A)\, \mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$. C.Q.F.D.

Nous pouvons donc conclure en vertu du théorème 2 que les opérateurs P_0, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{J}$, P^2, W^2, $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{P}^2$ et $\boldsymbol{J}^2$ sont essentiellement auto-adjoints sur $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ et par suite sur $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$ et que leurs fermetures coïncident avec celles précédemment définies par l'intermédiaire du domaine de Gårding.

2° *Autres observables*

Les opérateurs de spin $\boldsymbol{S}_j$ sont définis sur $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ et de plus $\boldsymbol{S}_j\, \mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$. Sur ce domaine ils sont essentiellement auto-adjoints.

Même conclusion pour $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{J} - \boldsymbol{S}_j$ puisque la démonstration faite précédemment (lemme 3) reste la même. De plus sa fermeture $\boldsymbol{L}$ est identique à celle définie par l'intermédiaire du domaine de Gårding soit $\boldsymbol{J}^* - \boldsymbol{S}_j$.

Proposition 2

L'opérateur $\boldsymbol{L}^2$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ et sur $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$. Exiger que $\boldsymbol{L}^2$ soit un opérateur essentiellement auto-adjoint, c'est exiger en vertu du critère de Nelson (1959, Th. 5, p. 602), que la représentation de l'algèbre de Lie de SU(2) engendrée par $\boldsymbol{L}$ est la représentation infinitésimale associée à une représentation unitaire du groupe. Ce critère affirme en effet qu'il suffit pour cela que $\boldsymbol{L}^2$ soit aussi un opérateur essentiellement auto-adjoint. Or, pour le démontrer, il suffit alors

de montrer l'existence d'une représentation de SU(2) qui admette les opérateurs $\boldsymbol{L}$ comme générateurs infinitésimaux, donc $\boldsymbol{L}^2$ comme invariant.

Or il est évident que la représentation en question est la suivante:

$$f(p) \xrightarrow{T(B)} f\big(R^{-1}(B)\, p\big)\,.$$

$\boldsymbol{L}^2$ est un opérateur défini sur $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ et symétrique. L'argument pour démontrer qu'il est essentiellement auto-adjoint est le même que celui que nous venons d'employer pour le groupe de Poincaré. Il repose sur le théorème 2 et il suffit de démontrer que $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ est invariant par les opérateurs $T(\phi)$ associés à la représentation $T(B)$ et à une fonction ϕ définie sur le groupe SU(2) et différentiable.

La démonstration est, en tous points, identique à celle du corollaire 1 et nous permet d'affirmer que $\boldsymbol{L}^2$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$. C.Q.F.D.

Néanmoins, les mêmes méthodes ne nous permettent pas d'affirmer que l'opérateur $\boldsymbol{L}^2$, en tant qu'opérateur symétrique défini sur le domaine de Gårding, et qu'on notera $\boldsymbol{L}_G^2$, soit essentiellement auto-adjoint sur ce domaine.

En fait, la restriction de la représentation du groupe de Poincaré à SU(2) a dans le formalisme canonique, la structure très simple suivante:

$$\boldsymbol{f}(B) \xrightarrow{\mathcal{U}(B)} D^j(B)\, \boldsymbol{f}(R^{-1}(B)\, p) \quad \text{pour } \boldsymbol{f} \in L^2_\mu(\Omega_m, \mathcal{H}_{2j+1})\,.$$

Or on sait que $L^2_\mu(\Omega_m, \mathcal{H}_{2j+1})$ est isomorphe à $L^2_\mu(\Omega_m) \otimes \mathcal{H}_{2j+1}$ (Dixmier 1957). Dans ce dernier espace, la représentation $\mathcal{U}(B)$ est simplement le produit tensoriel de la représentation suivante de SU(2) dans $L^2_\mu(\Omega_m)$:

$$f(p) \to f\big(R^{-1}(B)\, p\big) \quad \text{où } f \in L^2_\mu(\Omega_m) \tag{3}$$

et de la représentation irréductible indexée par j:

$$\boldsymbol{h} \to D^j(B)\, \boldsymbol{h} \quad \text{où } \boldsymbol{h} \in \mathcal{H}_{2j+1}\,. \tag{4}$$

Ce que nous avons appelé $\boldsymbol{L}$ n'est rien d'autre que les 3 générateurs de la représentation (3) et les 3 opérateurs de spin j: $\boldsymbol{S}_j$ les 3 générateurs de la représentation (4).

En conclusion nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème 3

Les opérateurs P_0, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{N}$, P^2, W^2, $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{P}^2$, $\boldsymbol{J}^2$, $\boldsymbol{L}^2$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{S}_j^2$, $\boldsymbol{H}_j^2$, $\boldsymbol{S}_j$, $\boldsymbol{H}_j$ sont essentiellement auto-adjoints sur $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ et sur $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$. Leurs fermetures coïncident avec celles précédemment par l'intermédiaire du domaine de Gårding. De plus toutes ces observables, à l'exception de $\boldsymbol{H}_j$ stabilisent $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ et $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$.

C. *Cas de l'hélicité*

Il y a une difficulté en ce qui concerne l'hélicité $\boldsymbol{H}_j$; de par définition même les opérateurs sont définis sur $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ mais on ne peut plus affirmer que $\boldsymbol{H}_j\, \mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ par suite des deux indéterminations dans la rotation $R(\boldsymbol{w} \to \boldsymbol{k})$. Chacun des H_j^i est néanmoins essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$.

On peut chercher néanmoins à palier cette difficulté en considérant d'autres domaines que $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ ou $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$. En effet seules les observables $H_j^3 = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{S}/|\boldsymbol{P}|$ et

$\boldsymbol{H}_j^2 = j\,(j+1)$ ont un intérêt pratique car elle entrent dans la constitution des systèmes complets d'observables qui commutent (cf. paragraphe IV). La forme même de l'opérateur représentant la polarisation longitudinale nous invite à considérer les domaines suivants: tout d'abord $\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$. C'est le sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ formé des fonctions dont le support compact est contenu dans $\Omega_{m_0} = \Omega_m - \{(m, \mathbf{0})\}$ où $(m, \mathbf{0})$ est le point stabilisé de la variété $\Omega_m \cdot \mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ est dense dans $L^2_\mu(\Omega_m, \mathcal{H}_{2j+1})$.

On peut aussi considérer l'espace $\mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ (cf. ANTOINE 1966). C'est le sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$ formé des fonctions appartenant à $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$ qui s'annulent au point $(m, \mathbf{0})$ ainsi que toutes leurs dérivées. C'est un sous espace dense de $L^2_\mu(\Omega_m, \mathcal{H}_{2j+1})$ puisque $\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1}) \subset \mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$.

Le problème est de savoir si ces domaines sont acceptables pour les observables, tout au moins pour un certain nombre d'entre elles.

Toutes les observables que nous avons considérées jusqu'ici sont définies sur $\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ et sur $\mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$.

$\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ et $\mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ sont stables par l'ensemble des observables à l'exception de H_j^1 et de H_j^2. De plus elles sont symétriques sur chacun de ces domaines. Le problème se pose maintenant de savoir si elles sont essentiellement auto-adjointes. Il suffit de considérer le cas de $\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ car elles le seront automatiquement sur $\mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$. La méthode de démonstration reste la même que pour l'espace $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$. Néanmoins elle est plus limitée car, si elle repose toujours sur le théorème 2, on ne peut plus affirmer un résultat analogue, pour $\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$, à celui valable pour $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ exprimé dans le corollaire 1. La raison en est très simple. La présence des transformations de Lorentz pures ne nous permet pas d'affirmer que le support de la fonction

$$p \to (\mathcal{U}(\varphi)\, f)\,(p) = \int_G \varphi(a, \Lambda)\, e^{iap}\, D^j(A_p^{c-1}\, A\, A^c_{A^{-1}p}) \quad f(\Lambda^{-1}(A)\, p)\, da\, d\Lambda$$

pour $f \in \mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ ne contient pas le point exceptionnel $\{(m, \mathbf{0})\}$ que nous voulons justement éviter. Par contre un simple examen nous montre que le corollaire 1 reste valable lorsqu'on restreint la représentation du groupe de Poincaré aux sous groupes suivants $\tilde{E}_3$, SU(2), les translations dans le temps et dans l'espace, ainsi que par la représentation $T(B)$ de SU(2). Plus précisément $\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$, ainsi que $\mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ sont stables par la restriction de la représentation à chacun de ces sous groupes et par la représentation $T(B)$. On en conclut donc d'une manière strictement analogue au cas de $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ que les opérateurs P^0, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}^2$, $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{J}^2$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{L}^2$, $\boldsymbol{L}$ sont essentiellement auto-adjoints sur $\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ donc aussi sur $\mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$; à ces opérateurs il faut évidemment ajouter les opérateurs P^2, W^2, $\boldsymbol{S}_j^2$, $\boldsymbol{H}_j^2$ qui sont des simples scalaires, ainsi que $\boldsymbol{S}_j$ et $\boldsymbol{H}_j$ puisqu'ils sont bornés. Leurs fermetures coïncident avec celles définies précédemment par l'intermédiaire de $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ et par suite par l'intermédiaire du domaine de Gårding. Echappent à cette analyse les opérateurs $\boldsymbol{N}$, ce qui est moins grave puisque ces opérateurs n'ont pas d'interprétation en termes d'observables d'une particule libre.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant qui résume l'ensemble des résultats obtenus.

Théorème 4

Les opérateurs P_0, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{J}$, P^2, W^2, $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{P}^2$, $\boldsymbol{J}^2$, $\boldsymbol{L}^2$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{S}_j^2$, $\boldsymbol{H}_j^2$, $\boldsymbol{S}_j$, $\boldsymbol{H}_j$ sont essentiellement auto-adjoints sur $\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ et sur $\mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$. Leurs fermetures coïncident avec celles définies précédemment par l'intermédiaire de $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$ et de $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ et par l'intermédiaire du domaine de Gårding. De plus toutes ces observables, à l'exception de H_j^1 et de H_j^2, stabilisent $\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ et $\mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$.

D. *Cas non relativiste $m \neq 0$ spin j; formalisme canonique*

La situation est strictement identique au cas relativiste et la démonstration du corollaire 1 est encore plus simple puisque ici la forme de la rotation (Appendice I; (2)) est très simple car elle ne dépend pas de p.

Les conclusions des théorèmes 3 et 4 restent les mêmes, à condition de substituer à P^2 et W^2, les deux invariants du groupe de Galilée, à $\boldsymbol{N}$, le générateur des transformations de Galilée pures $\boldsymbol{K}$, à Ω_m, l'espace R^3, et à Ω_{m_0}, l'espace $R_0^3 = R^3 - \{\boldsymbol{0}\}$.

E. *Cas relativiste et non relativiste: formalisme hélicité;* m $= 0$

Ces trois cas présentent tous la même particularité, à savoir de ne pas pouvoir s'analyser par la méthode précédente pour la raison simple que la transformation $p \to A_p$ n'est pas définie pour tout p. Il faudrait alors exclure des supports des fonctions considérées l'ensemble de mesure nulle où la transformation n'est pas définie. Malheureusement le domaine ne serait plus invariant par les opérateurs $\mathcal{U}(\varphi)$ car on ne pourrait pas assurer que le support de $\mathcal{U}(\varphi)\, f$ ne contienne pas l'ensemble d'indétermination. Néanmoins dans le cas d'une particule de masse $m \neq 0$ et de spin j, et dans le cas du formalisme hélicité on peut très bien considérer comme domaine de définition des observables l'image de $\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ ou de $\mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ par l'isomorphisme T entre le formalisme canonique et le formalisme hélicité. L'ensemble des conclusions du théorème 4 restent valables si l'on considère $T\,\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ et $T\,\mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ et les opérateurs unitairement équivalents à ceux du formalisme canonique. Ceci est valable aussi bien dans le cas relativiste que dans le cas non relativiste.

IV. Commutativité et systèmes complets d'observables qui commutent

Le dernier problème à résoudre est celui qui concerne la commutativité des résolutions spectrales des opérateurs représentant certaines observables. On ne fera qu'esquisser une démonstration.

Ce qu'on peut vérifier très aisément, c'est une égalité du type $S^3\, P^0 = P^0\, S^3$ sur le domaine de Gårding ou sur $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$. Ceci n'entraîne pas, comme l'a montré Nelson (1959), la commutativité de leurs familles spectrales respectives. Nelson a effectivement montré l'existence de deux opérateurs essentiellement auto-adjoints A et B tels qu'ils aient un domaine commun dense et invariant D et tels que $A\,B\,x = B\,A\,x$ pour tout $x \in D$ mais tels que les résolutions spectrales de A et de B ne commutent pas. En fait l'existence d'un tel contre exemple est lié à l'existence de représentations locales d'algèbre de Lie, c'est-à-dire de représentations qui ne soient pas les représentations infinitésimales associées à une représentation unitaire du groupe. Mais dans notre cas, les observables qui nous intéressent de ce point de vue sont ou bien les

générateurs infinitésimaux d'un groupe, ou bien l'invariant d'un groupe, ou bien des opérateurs bornés définis partout; aussi suffit-il de vérifier que les opérateurs unitaires correspondants commutent au sens ordinaire, ou bien qu'ils commutent avec un opérateur essentiellement auto-adjoint représentant un invariant ou un opérateur borné: ce qui se fait beaucoup plus facilement, pour assurer la commutativité des résolutions spectrales (SÉGAL 1952, corollaire). Tout ceci afin de constituer des systèmes complets d'observables qui commutent ou bases (JAUCH 1960) et d'en obtenir leurs représentations spectrales (JAUCH et MISRA 1965).

Nous étudierons dans un article ultérieur cinq bases cinématiquement importantes que ce soit dans le cas relativiste ou dans le cas non relativiste. Ce sont:

$$(\boldsymbol{P}, S_j^3),\ (\boldsymbol{P}, H_j^3),\ (P^0, \boldsymbol{J}^2, J^3, H_j^3),$$
$$(P^0, \boldsymbol{L}^2, \boldsymbol{J}^2, J^3),\ (P^0, \boldsymbol{L}^2, L^3, S_j^3)\ .$$

Chacun de ces systèmes est un système complet. Par définition même, puisqu'on constate que la théorie de Wigner-Mackey fournit bien une représentation spectrale des deux premiers systèmes et pour les autres on le montrera dans un article ultérieur en construisant explicitement l'isomorphisme avec les deux premières représentations spectrales.

V. Conclusion de la première partie

Nous avons montré, aussi bien dans le cas relativiste que dans le cas non relativiste que l'ensemble des observables d'une particule libre $[m, j]$ ($m \neq 0$ ou $m = 0$) peut être défini par des opérateurs symétriques sur le domaine de Gårding associés à la représentation irréductible considérée. Nous avons démontré, à l'exception de $\boldsymbol{L}^2$, qu'ils étaient en outre tous essentiellement auto-adjoints sur ce domaine.

Nous avons étudié ensuite une autre définition des observables pour une particule $[m, j]$ $m \neq 0$ faisant intervenir des domaines différents soient $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$, $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$, $\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ et $\mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$. Dans le cas du formalisme canonique, nous avons démontré que toutes les observables sont définies sur ces domaines par des opérateurs essentiellement auto-adjoints dont la fermeture auto-adjointe coïncident avec celle des opérateurs de la représentation sur le domaine de Gårding. Donc du point de vue physique, les deux définitions sont strictement équivalentes.

Enfin nous avons envisagé le problème de la commutativité forte de certaines observables.

Seconde partie

CHANGEMENT DE REPRÉSENTATIONS SPECTRALES

VI. Prologue

Nous avons dans la première partie défini les observables cinématiquement intéressantes d'une particule libre, par des opérateurs essentiellement auto-adjoints, tous définis sur un même domaine. En fait, nous avons poursuivi deux buts. Le premier est la définition des observables par des opérateurs auto-adjoints. Le second correspond au troisième volet du tryptique formé par l'ensemble de la formulation

de la mécanique quantique par Dirac. Ce premier volet est associé à la notion de système complet d'observables qui commutent (JAUCH 1960) et le second à la notion de représentation spectrale d'un tel système (JAUCH et MISRA 1965). Le troisième correspond au problème du passage d'une représentation spectrale d'un système à celle d'un autre, en particulier à la détermination de l'isométrie entre les deux et au développement suivant les «vecteurs propres» d'un système.

Si les deux premiers cas ont pu bénéficier d'un exposé rigoureux et suffisamment général pour recouvrir les besoins de la mécanique quantique, comme on peut le voir en se reportant aux travaux précités, il ne peut en être de même du troisième cas.

Dans certaines conditions et pour un opérateur seulement on peut préciser la forme de l'isométrie linéaire entre l'espace de définition de l'opérateur et l'espace d'Hilbert associé à sa représentation spectrale (DUNFORD et SCHWARTZ, p. 1213, th. 11) (GERLACH 1965). De toutes manières, le théorème précédent ne concerne pas un ensemble dénombrable d'opérateurs et de plus les conditions supplémentaires imposées semblent difficilement justifiables du point de vue physique. Les difficultés proviennent évidemment de l'existence du spectre continu et on peut on opposition aux théories plus intrinsèques opposer les méthodes modernes de l'analyse fonctionnelle.

La solution est alors plus simple; elle est toujours liée à l'apparition d'un espace nucléaire; on montrera en effet que le domaine de définition des observables d'une particule libre, que ce soit le domaine de Gårding, $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$, $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$ ou $\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ et $\mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ selon les cas, peut toujours être muni d'une topologie qui en fait un espace nucléaire, topologie strictement plus fine que la topologie hilbertienne initiale. Les observables qui n'étaient pas continues, le deviennent pour cette nouvelle topologie. Les vecteurs propres sont tous dans le dual de l'espace nucléaire; un théorème de Guelfand-Kostyuchenko nous permettra d'écrire le «développement suivant les vecteurs propres d'une base diagonalisée» et de lui donner un sens mathématique précis.

Depuis quelques temps des travaux (GROSSMANN 1964, 1965; MAYER 1965; ROBERTS 1966; ANTOINE 1966) employant ces nouvelles méthodes ont été consacrés à la justification des notions de bras et de kets. Rappelons qu'ici nous poursuivons un but légèrement différent car nous sommes uniquement intéressés par la structure de l'isométrie entre deux représentations isomorphes, c'est-à-dire par ce que les mathématiciens nomment formules de Plancherel et les physiciens coefficients de Clebsch-Gordan. Nous insistons aussi sur le fait que nous sommes intéressés uniquement par des problèmes explicites et non généraux car nous sommes persuadés que, dans la cinématique, les physiciens n'utilisent en fait qu'un petit nombre de formalismes. Nous bénéficions de la situation favorable d'utiliser les représentations unitaires d'un groupe car comme nous le verrons les topologies utilisées sont les topologies habituelles et bien étudiées des espaces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$. La nucléarité sera toujours assurée. Alors que dans le cas général, il faut introduire comme l'a fait ROBERTS (1966) une topologie plus liée à l'ensemble des observables du système et dont la nucléarité n'est pas automatiquement assurée.

Un cas particulier important du problème précédent est celui de la décomposition du produit tensoriel de deux représentations irréductibles du groupe de Poincaré ou de Galilée en représentations irréductibles et de la définition du coefficient de Clebsch-Gordan. En fait la décomposition est équivalente à un nouveau choix d'une base pour

les états des deux particules et le coefficient de Clebsch-Gordan apparaît alors comme un vecteur propre commun et donc comme une distribution.

Nous rappelons dans l'appendice II un certain nombre de définitions et de théorèmes qui se trouvent tous dans le tome IV des Distributions de GUELFAND et VILENKIN (1964). On peut aussi les trouver dans GROTHENDIECK (1955) et L. SCHWARTZ (1953/54) mais il est incontestable que la lecture de la première référence est plus facile pour un physicien. Néanmoins les définitions y sont données dans un sens trop restreint pour recouvrir l'ensemble des cas dont nous avons besoin et il sera nécessaire dans ce cas de recourir au séminaire de L. SCHWARTZ (1953/54). Ensuite nous étudierons, à l'aide de la théorie précédemment exposée le passage d'un système complet d'observables qui commutent à un autre. Enfin nous considérerons des exemples physiques caractéristiques, comme la définition des coefficients de Clebsch-Gordan du groupe de Poincaré et du groupe de Galilée. Notons qu'indépendamment de nous RIDEAU s'est intéressé à la définition des coefficients de Clebsch-Gordan (RIDEAU 1966).

VII. Représentation spectrale d'un système complet d'observables qui commutent

A l'aide des concepts et résultats exposés dans l'appendice II nous sommes en mesure de préciser la théorie de la représentation spectrale des opérateurs auto-adjoints définis dans un espace d'Hilbert équipé $\mathcal{H}$. Plus précisément nous supposerons qu'une suite au plus dénombrable d'opérateurs auto-adjoints est définie sur un domaine dense et qui soit un espace nucléaire et tel que l'application identique de ce domaine dans $\mathcal{H}$ soit continue, donc nucléaire. On peut supposer tous les opérateurs continus pour cette topologie, car tel sera le cas dans les applications que nous visons. Nous nous intéressons uniquement au cas où tous les opérateurs commutent; nous entendons par là que leurs familles spectrales respectives commutent et on se restreint aussi au cas où ce système est «complet». Les opérateurs en question définissent des observables et un système d'observables qui commutent est complet s'il engendre une algèbre abélienne maximale de l'algèbre de von Neumann engendré par l'ensemble des observables du système étudié. Il suffit d'ailleurs de se reporter à (JAUCH 1960) pour de plus amples développements.

Le théorème de JAUCH et MISRA (1965) affirme qu'il existe une représentation spectrale d'un système complet d'observables qui commutent. Plus précisément:

Théorème 5 (JAUCH et MISRA)

Soit $\mathcal{S} = \{A_i\}_{i \in N}$ un système complet d'opérateurs auto-adjoints et soient Λ_i le spectre de l'opérateur A_i et P_i la mesure spectrale associée à l'opérateur A_i: il existe alors une classe unique C de mesures équivalentes définies sur les boréliens de l'ensemble produit $\prod_i \Lambda_i$. Pour chaque élément $\varrho \in C$ de la classe il existe une correspondance isométrique bijective:

$$f \leftrightarrow u(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots) \text{ avec } \lambda_i \in \Lambda_i$$

entre $\mathcal{H}$ et $L^2_\varrho\left(\prod_i \Lambda_i, C\right)$ telle que si:

$$f \leftrightarrow u(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots)$$

on ait

$$P_i(M_i)\, f \leftrightarrow \chi_{M_i}(\lambda_i)\, u(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots) \quad (i = 1, 2; \ldots)$$

où M_i est un sous ensemble borélien de Λ_i et $\varkappa_i\,(\lambda_i)$ est la fonction caractéristique de M_i.

Soit ν_i la mesure définie sur les boréliens de Λ_i par

$$\nu_i(M_i) = \int_{\prod_j M_j} d\varrho$$

$$(M_j = \Lambda_j \text{ pour } j \neq i \text{ et } M_j = \Delta \text{ pour } j = i)\,.$$

Si la mesure ϱ est absolument continue par rapport à la mesure produit des mesures ν_i, alors l'isométrie a la propriété supplémentaire que:

$$A_i\, f \leftrightarrow \lambda_i\, u(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i)\,.$$

Nous supposerons que nous sommes toujours dans la situation où les opérateurs A_i se ramènent à des opérateurs de multiplication par la variable λ_i. C'est le cas dans les applications physiques. En fait, l'isométrie entre $\mathcal{H}$ et $L^2_\varrho\left(\prod_i \Lambda_i\right)$ s'interprète, comme nous le verrons, comme la décomposition en sous espaces propres de l'espace d'Hilbert $\mathcal{H}$ puisque

$$\mathcal{H} \simeq L^2_\varrho\left(\prod_i \Lambda_i\right) = \int^{\oplus} d\varrho\, \mathbf{C}$$

où $\mathbf{C}$ est le corps des complexes. Si l'une des observables a un spectre discret, la mesure $\mathbf{C}$, lorsqu'on la restreint à ce spectre, est supposée discrete. L'intégrale directe est alors une somme directe d'intégrales directes.

Le fait que chacun des sous espaces propres isomorphes à $\mathbf{C}$ soit unidimensionnel traduit la propriété du système d'être complet.

Soit maintenant un autre système complet d'observables qui commutent $\mathcal{S}' = \{B_i\}_{i \in N}$ de la même algèbre d'observables. Soit $f \leftrightarrow v\,(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_i, \ldots)$ la représentation spectrale associée telle que:

$$B_i\, f \leftrightarrow \mu_i\, v(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i, \ldots)$$

pour une mesure σ définie sur les produits des spectres $\prod_i \{\mu_i\}$ des opérateurs auto-adjoints B_i. $\{\mu_i\}$ est le spectre de l'observable B_i.

Le théorème 5 nous assure qu'il y a une isométrie $u(\lambda_1, \lambda_\lambda, \ldots \lambda_i, \ldots) \leftrightarrow v\,(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_i, \ldots)$ entre les deux représentations spectrales. Ce que nous voulons préciser c'est la structure de cette isométrie lorsqu'on la restreint à certains sous espaces denses et nucléaires de $L^2_\varrho\left(\prod_i \Lambda_i\right)$ ou de $L^2_\varrho\left(\prod_i \{\mu_i\}\right)$.

Supposons donc les opérateurs B_i[5]) définis sur un domaine dense de $L^2_\varrho\left(\prod_i \Lambda_i\right)$: D, invariant par ces opérateurs. De plus D est supposé être muni d'une structure d'espace nucléaire telle que l'injection canonique $D \to L^2_\varrho\left(\prod_i \Lambda_i\right)$ soit continue.

---

[5]) Nous conservons la même notation pour l'observable B_i auto-adjointe et pour sa restriction à D, essentiellement auto-adjointe. Lorsque nous devons les distinguer, on emploie la notation evidente B_i^* (fermeture auto-adjointe de B_i) pour l'observable.

Supposons aussi ces mêmes opérateurs continus pour cette nouvelle topologie. L'ensemble $D \subset L^2_\varrho\left(\prod_i \Lambda_i\right) \subset D'$ forme bien un triplet de Guelfand. On peut alors définir une *fonctionelle propre* d'un opérateur B_i.

L'opérateur B_i induit dans D' l'opérateur transposé ${}^T B_i$, continu puisque B_i l'est et défini par l'égalité:

$$\langle {}^T B_i\, F, \varphi\rangle = \langle F, B_i\, \varphi\rangle$$

où $F \in D'$, $\varphi \in D$ et $\langle F, \varphi\rangle$ est la valeur de la fonctionelle F pour φ notée suivant SCHWARTZ.

Une fonctionelle $F_{\mu_i} \in D'$ est une fonctionnelle propre de B_i pour la valeur propre μ_i si et seulement si on a:

$${}^T B_i\, F_{\mu_i} = \mu_i\, F_{\mu_i}$$

ou

$$\langle {}^T B_i\, F_{\mu_i}, \varphi\rangle = \langle F_{\mu_i}, B_i\, \varphi\rangle = \mu_i\, \langle F_{\mu_i}, \varphi\rangle$$

on définit ainsi un sous espace propre $D'_{\mu_i} \subset D'$ qui est l'espace vectoriel engendré par les fonctionnelles F_{μ_i} pour une valeur μ_i déterminée. On définit ensuite une décomposition spectrale de φ comme une application de $D \times \{\mu_i\}$ dans D''_{μ_i} soit:

$$(\varphi, \mu_i) \to \tilde{\varphi}_{\mu_i} \in D''_{\mu_i}$$

définie par

$$\langle \tilde{\varphi}_{\mu_i}, F_{\mu_i}\rangle = \langle F_{\mu_i}, \varphi\rangle$$

où $\{\mu_i\}$ est le spectre de B_i.

On dira que l'ensemble des fonctionnelles propres généralisées est *complet* is $\varphi_{\mu_i} = 0$ pour tout $\mu_i \Rightarrow \varphi = 0$.

Soit maintenant U l'isométrie de $L^2_\varrho\left(\prod_i \Lambda_i\right)$ sur $L^2_\varrho\left(\prod_i \{\mu_i\}\right)$ et U^{-1} l'isométrie inverse. Supposons la déterminée. Un théorème de Guelfand et Kostyuchenko permet d'en préciser la structure.

Théorème 6 (GUELFAND et VILENKIN 1964)

Soit $D \subset \mathcal{H} \subset D'$ un espace d'Hilbert équipé isomorphe à un espace d'Hilbert $L^2_\sigma(X)$ où X est un espace localement compact et σ une mesure positive sur X. Soit U l'isométrie qui applique $\mathcal{H}$ sur $L^2_\sigma(X)$. Alors pour chaque valeur de x, on peut associer une fonctionnelle $F_x \in D'$ telle que pour toute fonction $(U\,\varphi)$ où $\varphi \in D$, on ait

$$(U\,\varphi)\,(x) = \langle F_x, \varphi\rangle \text{ pour presque tout } x\,. \tag{6}$$

Pour la démonstration, il suffit de se reporter au tome IV des distributions (GUELFAND et VILENKIN 1964) dans le cas d'un espace nucléaire qui soit en même temps un espace dénombrablement normé. Dans le cas où la topologie de l'espace nucléaire n'est pas nécessairement métrisable on peut se reporter à la démonstration de MAURIN (1959; Lemme).

Notons qu'on peut toujours modifier la fonction $(U\,\varphi)$ de sorte que l'égalité (5) ait lieu pour tout x et c'est en ce sens que nous la comprendrons dorénavant. Si

maintenant nous appliquons ce théorème à l'isométrie U entre les deux représentations spectrales, on voit que, si pour $\varphi \in D$ on note Ψ la fonction $U\varphi$, il existe pour tout $(\mu) \in \prod_i \{\mu_i\}$ une fonctionnelle $F_{(\mu)} \in D'$ telle que

$$\langle F_{(\mu)}, \varphi \rangle = \Psi(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i, \ldots) \tag{7}$$

avec

$$(\mu) = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i, \ldots).$$

Montrons que l'application $(\mu) \to F_{(\mu)}$ est une application de $\prod_i \{\mu_i\}$ dans D'_μ c'est-à-dire dans le sous espace propre correspondant à l'ensemble des valeurs propres (μ). En effet par définition de la représentation spectrale $U(B_i\varphi) = \mu_i \Psi$ avec $\|B_i\varphi\| = |\mu_i| \, \|\Psi\| < \infty$.

Donc

$$\begin{aligned}\langle {}^T B_i F_{(\mu)}, \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots)\rangle &= \langle F_{(\mu)}, B_i \varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots)\rangle \\ &= U(B_i\varphi)\,((\mu)) = \mu_i \Psi(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i, \ldots) \qquad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

Ainsi l'expression (6) n'est rien d'autre que l'interprétation mathématiquement correcte de celle qu'on écrit, après Dirac, habituellement sous la forme heuristique:

$$\langle \mu\, \phi\rangle = \int d\varrho(\lambda)\, \overline{\langle \lambda \mid \mu\rangle}\, \langle \lambda \mid \phi\rangle$$

$|\phi\rangle$ étant l'état du système, $\langle \mu | \phi\rangle$ est la fonction d'onde correspondant à cet état dans la représentation (μ) et $\langle \lambda | \phi\rangle$ celle dans la représentation (λ); ainsi à $\langle \mu | \phi\rangle$ correspond bien $\Psi(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i, \ldots)$ et à $\langle \lambda\, \phi\rangle$, $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots)$.

La distribution $F_{(\mu)}$ n'est rien d'autre que l'élément de matrice généralisé du système S' ou noyau $\langle \lambda | \mu\rangle$, c'est-à-dire la fonction propre indexée par (μ) exprimée dans la représentation (λ).

En fait la formule de Dirac a été écrite en parfaite analogie avec le cas de la dimension finie. Elle est encore valable dans le cas de la dimension infinie à condition qu'on ait affaire à des fonctions propres qui appartiennent elles-mêmes à l'espace d'Hilbert $L^2_\varrho\left(\prod_i \Lambda_i\right)$ et conformément à l'esprit de la théorie des distributions, on doit vérifier que la formule (6) redonne bien celle de Dirac lorsque la fonctionnelle propre $F_{(\mu)}$ est un élément de l'espace d'Hilbert soit $f_{(\mu)}$. La présence du complexe conjugué du noyau $\langle \lambda | \mu\rangle$ s'explique alors très bien. Si T' désigne l'application canonique antilinéaire de $L^2_\varrho\left(\prod_i \Lambda_i\right)$ dans D', il suffit de connaître la fonctionnelle $T' f_{(\mu)}$ pour $f_{(\mu)} \in L^2_\varrho\left(\prod_i \Lambda_i\right)$. Or en vertu du théorème de Riesz et de l'antilinéarité de T', on a pour tout $\varphi \in D$

$$\langle T' f_{(\mu)}, \varphi\rangle = \int_{\prod_i \Lambda_i} \bar{f}_{(\mu)}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots)\, \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots)\, d\varrho$$

ce qui n'est rien d'autre que l'expression de Dirac. On voit d'ailleurs tout de suite sur cette expression que la correspondance $f_{(\mu)} \to T' f_{(\mu)}$ est antilinéaire.

De plus si $B_i^* f_{(\mu)} = \mu_i f_{(\mu)}$ on a bien ${}^T B_i(T' f_{(\mu)}) = \mu_i(T' f_{(\mu)})$.
En effet:

$$\langle {}^T B_i(T' f_{(\mu)}), \varphi\rangle = \langle T' f_{(\mu)}, B_i \varphi\rangle = \int_{\prod_i \Lambda_i} \bar{f}_{(\mu)} B_i \varphi \, d\varrho = (f_{(\mu)}, B_i \varphi) = (B_i^* f_{(\mu)}, \varphi)$$

$$= \mu_i(f_{(\mu)}, \varphi) \text{ car } \mu_i \in R$$

$$= \mu_i \langle T' f_{(\mu)}, \varphi\rangle$$

$$= \langle \mu_i T' f_{(\mu)}, \varphi\rangle \text{ pour tout } \varphi \in D$$

d'où la conclusion.

Par contre la réciproque n'est pas nécessairement vraie même si $\mu_i \in R$. En effet le spectre de ${}^T B_i$ peut être beaucoup plus grand que celui de B_i (Dunford et Schwartz 1963, p. 1399; Roberts 1966). Mais en fait ce que nous avons montré c'est que le développement ne faisait intervenir que les fonctions propres associées uniquement au spectre de l'observable physique soit B_i^*.

Enfin, on voit immédiatement que, puisque les sous espaces propres $D'_{(\mu)}$ sont unidimensionnels, on a bien obtenu une décomposition spectrale au sens précédent de la fonction φ puisque

$$\Psi(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i, \ldots) = \tilde{\varphi}(\mu) .$$

La fonction $\Psi(\mu)$ coïncide sur l'espace $D'_{(\mu)}$ des fonctionnelles propres $F_{(\mu)}$ avec $\tilde{\varphi}_{(\mu)}$. Par suite si $\tilde{\varphi}_{(\mu)} = 0$ alors $\Psi((\mu)) = 0$ et comme la correspondance entre $L_p^2\,(\Pi\, \Lambda_i)$ et $L_\sigma^2\left(\prod_i \{\mu_i\}\right)$ est isométrique on en déduit que

$$\tilde{\varphi}_{(\mu)} = 0 \Rightarrow \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

c'est-à-dire que l'ensemble des fonctionnelles propres est complet au sens où nous l'avons défini précédemment.

VIII. Exemples; Notion de coefficient de Clebsch-Gordan

Ils sont évidemment fort nombreux mais ce qui est en général sous estimé c'est l'importance des conditions mathématiques imposées pour pouvoir rendre compte du schéma de Dirac. Rappelons qu'il est nécessaire que le domaine D soit invariant par chaque opérateur B_i et qu'il puisse être muni d'une topologie strictement plus fine que la topologie initiale. De plus, condition presque unanimement oubliée, B_i doit être essentiellement auto-adjoint sur ce domaine de sorte que B_i représente l'observable physique.

Signalons encore que le problème suppose résolue la détermination de l'isométrie entre les deux représentations.

1° *Base $L - S$*

Les changements de base dans l'ensemble des états d'une particule libre relativiste ou non sont très simples. Le passage de la représentation spectrale associée à la base $(\boldsymbol{P}, S_j^3)$ à celle correspondant à la base $((\boldsymbol{P}^2)^{1/2}\, \boldsymbol{L}^2, L^3, S_j^3)$ dans le cas d'une particule de masse $m \neq 0$ et de spin j quelconque, relativiste ou non est bien connu. L'isométrie s'écrit simplement

$$F(|\boldsymbol{p}|, l, l_3, s) = \int d\omega\, \bar{Y}_{l\, l_3}(\omega)\, f_s(|\boldsymbol{p}|\, \omega)$$

ω est un point de la sphère unité S_2 de R^3, extrémité du vecteur unité $\omega = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ d'origine 0. $d\omega$ est la mesure sur S_2 habituelle, invariante par SU(2). Les fonctions (ou mieux les classes de fonctions presque partout égales) $F(|\boldsymbol{p}|, l, l_3, s)$ forment un espace d'Hilbert muni du produit scalaire suivant

$$(F, G) = \int \frac{|\boldsymbol{p}|^2 \, d|\boldsymbol{p}|}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}} \sum_{-j \leqslant s \leqslant +j} \sum_{l=0,1,2,\ldots} \sum_{-l \leqslant l_3 \leqslant +l}$$

$$\overline{F}(|\boldsymbol{p}|, l, l_3, s) \, G(|\boldsymbol{p}| \, l, l_3, s) \, .$$

Or l'on sait que la représentation spectrale associée à la base $(\boldsymbol{P}, S_j^3)$ est celle associée au formalisme canonique; dans ce cas les observables sont toutes définies sur $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ ou sur $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$ et elles sont essentiellement auto-adjointes. On sait, de plus que $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ (resp. $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$) est un espace nucléaire et que l'application canonique $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ (resp. $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})) \to L^2_\mu \, (\Omega_m, \mathcal{H}_{2j+1})$ est continue.

On peut donc appliquer les résultats généraux précédents. Néanmoins la structure même de l'isométrie nous invite, par suite du changement de variables $\boldsymbol{p} \to (|\boldsymbol{p}|, \omega)$ à considérer un domaine de définition des observables légèrement différent de $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ et de $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$. Précisons le changement de variables précédent. Soient donc Ω_m, S_2 la sphère unité de R^3, $\Omega_{m_0} = \Omega_m - \{(m, \boldsymbol{0})\}$, R^+ la droite réelle positive. Tout point de Ω_{m_0} peut s'écrire uniquement sous la forme $|\boldsymbol{p}| \, \omega$ où $|\boldsymbol{p}| \in R^+$ et $\omega \in S_2$ et l'application $(|\boldsymbol{p}|, \omega) \to |\boldsymbol{p}| \, \omega$ est un homéomorphisme de $R^+ \times S$ sur Ω_m. On doit alors, comme dans le cas de l'hélicité, considérer les domaines $\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ et $\mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ sur lesquels les observables qui constituent le système complet sont essentiellement auto-adjointes, comme nous l'avons vu; $\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ et $\mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ sont tous les deux denses dans $L^2_\mu \, (\Omega_m, \mathcal{H}_{2j+1})$. De plus, comme ils sont des sous espaces vectoriels fermés respectivement de $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{2j+1})$ et de $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$ ce sont des espaces nucléaires complets. L'application canonique $\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ (resp. $\mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j+1})) \to L^2_\mu(\Omega_m, \mathcal{H}_{2j+1})$ est continue. L'ensemble $\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ (resp. $\mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$), $L^2_\mu(\Omega_m, \mathcal{H}_{2j+1})$ $\mathcal{D}'_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ (resp. $\mathcal{S}'_0(\mathcal{H}_{2j+1})$) forme un triplet de Guelfand.

On peut donc appliquer les resultats généraux précédents et écrire l'isométrie sous la forme habituelle aux physiciens.

$$F(|\boldsymbol{p}|, l, l_3, s) = \sum_s \int |\boldsymbol{p}'|^2 \, d\,|\boldsymbol{p}'| \, d\omega \, \overline{Y}_{l\,l_3}(\omega) \, \delta\,(|\boldsymbol{p}'| - |\boldsymbol{p}|) \;\; \delta_{s\,s'} \, f_{s'}(|\boldsymbol{p}'| \, \omega)$$

où nous avons adopté la notation intégrale pour noter la distribution. Le produit direct de distributions $\overline{Y}_{l\,m}(\omega) \otimes \delta(|\boldsymbol{p}'| - |\boldsymbol{p}|) \otimes \delta_{s\,s'} \, I$, où I est la matrice identité de $\mathcal{H}_{2j+1}$, est la fonctionnelle propre, élément de $\mathcal{S}'_0(\mathcal{H}_{2j+1})$, du système $((\boldsymbol{P}^2)^{1/2}$, $\boldsymbol{L}^2$, L^3, $S_j^3)$ pour l'ensemble des valeurs propres $(|\boldsymbol{p}|, l, l_3, s)$. Par le théorème de Hahn Banach, cette fonctionnelle propre se prolonge à $\mathcal{S}'(\mathcal{H}_{2j+1})$. Néanmoins cette extension n'est pas unique, deux d'entre elles diffèrant d'une distribution de support le point $\{(m, \boldsymbol{0})\}$. $\mathcal{S}'_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ s'identifie au quotient de $\mathcal{S}'(\mathcal{H}_{2j+1})$ par le sous espace vectoriel fermé des distributions de support $\{(m, \boldsymbol{0})\}$ (Antoine 1966). Ce résultat nous permet d'apprécier la perturbation apportée à la structure de la fonctionnelle propre lorsqu'on substitue $\mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j+1})$ à $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2j+1})$.

2° *Coefficient de Clebsch-Gordan du groupe de Poincaré et du groupe de Galilée*[6])

L'exemple précédent est très élémentaire; ceux qui suivent le sont beaucoup moins car ils débouchent sur la théorie de la décomposition en représentations irréductibles des représentations unitaires des groupes de Lie.

Dans ce qui suit, on considérera une somme directe d'espace d'Hilbert comme le cas particulier de l'intégrale hilbertienne correspondant à une mesure discrète. Néanmoins rappelons qu'il existe une différence fondamentale entre ces deux notions. En effet le caractère discret de la mesure permet d'identifier canoniquement chacun des espaces $\mathcal{H}_n$ à un sous espace hilbertien de la somme directe alors que dans le cas de l'intégrale directe ceci n'est plus possible car la valeur d'un champ de vecteurs n'a plus de sens.

Soit $g \to \mathcal{U}(g)$ une représentation unitaire d'un groupe G qui opère sur un espace d'Hilbert $\mathcal{H}$ séparable. Décomposer cette représentation irréductibles, c'est établir une isométrie de $\mathcal{H}$ avec une intégrale hilbertienne $\int_X^{\oplus} \mathcal{H}_x \, d\mu(x)$ telle que:

$$\mathcal{U} \simeq \int_X^{\oplus} \mathcal{U}_x \, d\mu(x)$$

où X est un espace localement compact et où $\mathcal{U}_x$ est une représentation unitaire irréductible de G qui opère dans l'espace d'Hilbert séparable $\mathcal{H}_x$. En particulier, l'algèbre faiblement fermée engendrée par les opérateurs $g \to \mathcal{U}_x(g)$ est un facteur. Ce qui est intrinsèque au problème c'est la classe de la mesure μ et non pas la mesure elle-même, ainsi évidemment que le champ $x \to \mathcal{U}_x$; choisir une mesure ν équivalente à la mesure μ revient à faire une nouvelle isométrie qui ne change pas le résultat obtenu. Il importe de remarquer que l'isométrie entre les deux espaces hilbertiens ne sera bien déterminée que lorsque le choix de la mesure sera fixé ainsi que la forme de la représentation $\mathcal{U}_x$ et l'espace d'Hilbert $\mathcal{H}_x$. Se pose alors le problème de l'unicité de la décomposition précédente. Ce problème a été résolu favorablement dans les cas qui nous intéressent (groupes du type I) et il suffit de se rapporter à MACKEY (1952) pour avoir toutes les informations nécessaires.

L'exemple du produit tensoriel de deux représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie est un exemple particulièrement important de représentation unitaire dont on se propose de connaître la structure en fonction des représentations unitaires irréductibles.

Le problème se pose de la manière suivante dans le cas du groupe de Poincaré, considérons le produit tensoriel de deux représentations unitaires irréductibles indexées par $[m_1, j_1]$ et par $[m_2, j_2]$. Le résultat de la décomposition de ce produit tensoriel est bien connu (WIGTMAN 1961). La décomposition peut être faite de plusieurs manières (MAC FARLANE 1962; 1963 et les références qui s'y trouvent) parmi lesquelles l'application du théorème d'induction-réduction de MACYEK (1952) semble être la méthode la plus adaptée à la structure de représentations induites des représentations (MOUSSA et STORA 1964; RIDEAU 1966).

---

[6]) L'auteur est particulièrement reconnaissant au Dr R. STORA de lui avoir suggéré ce problème.

On a (MAC FARLANE 1962; 1963)

$$[m_1, j_1] \otimes [m_2, j_2] \simeq \int_{m_1+m_2}^{\oplus} \sigma(m)\, dm \bigoplus_{j,\eta} [m, j]_\eta$$

où $\sigma(m)\, dm$ est une mesure positive sur R.

Chaque représentation $[m, j]$ peut intervenir un certain nombre de fois dans la décomposition, au plus dénombrable dans le cas général et fini dans ce cas particulier; la dégénérescence est alors levée par les paramètres η. Ce résultat est intrinsèque, à la levée de la dégénérescence près qui ne l'est pas et à condition de ne considérer que la classe des mesures équivalentes à $\sigma(m)\, dm$.

On peut désirer être plus précis et vouloir déterminer l'isométrie entre

$$L^2_{\mu_1}(\Omega_{m_1}, \mathcal{H}_{2j_1+1}) \otimes L^2_{\mu_2}(\Omega_{m_2}, \mathcal{H}_{2j_2+1}) = L^2_{\mu_1\times\mu_2}(\Omega_{m_1} \times \Omega_{m_2}, \mathcal{H}_{2j_1+1} \otimes \mathcal{H}_{2j_2+1})$$

l'espace d'Hilbert de base du produit tensoriel $[m_1, j_1] \otimes [m_2, j_2]$ avec

$$\int^{\oplus} \sigma(m)\, dm \bigoplus_{j,\eta} L^2_\mu(\Omega_m, \mathcal{H}_{2j+1})$$

où $L^2_\mu(\Omega_m, \mathcal{H}_{2j+1})$ est l'espace de base de la représentation $[m, j]$ qui intervient dans la décomposition. Mais pour que ce problème ait un sens il est nécessaire de préciser un certain nombre de conventions à savoir

(1) La forme des représentations initiales et celle des représentations finales.

(2) Le choix d'une mesure $\sigma(m)\, dm$ dans la classe canoniquement associée à la décomposition.

(3) La levée de la dégénérescence.

On voit donc qu'on a un très grand choix; les physiciens se sont limités à un certain nombre déterminés uniquement par des raisons physiques.

D'une manière générale, les deux représentations du départ $[m_1, j_1]$ et $[m_2, j_2]$ sont choisies simultanément soit dans le formalisme canonique soit dans le formalisme hélicité; les représentations spectrales associées sont particulièrement adaptées à la description de l'état d'une particule d'un faisceau; on fait souvent le même choix pour la représentation d'arrivée.

Mais comme la décomposition est utilisée pour obtenir une décomposition d'éléments de la matrice S en ondes partielles relativistes (MAC FARLANE 1962) il se peut que la représentation spectrale qu'on obtient finalement soit particulièrement mal adaptée à la dynamique de la réaction étudiée. Il est alors préférable de considérer une base de moment angulaire totale dans la représentation finale comme l'ont fait JACOB et WICK (1959), ou bien des développements multipolaires généraux (STORA 1962); la théorie des pôles de Regge est venue renforcer cette opinion.

Le fait important pour un physicien est de reconnaître que la décomposition du produit tensoriel n'est rien d'autre qu'un changement de représentation spectrale dans l'ensemble des observables de deux particules libres. D'une manière générale l'étude des produits tensoriels de représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré n'est qu'un moyen d'étudier le problème à n-corps relativiste, qui n'est pas encore entièrement résolu. On connait la représentation de l'algèbre de Lie associée

à la représentation $[m_1, j_1] \otimes [m_2, j_2]$. Si X^1 est l'opérateur infinitésimal associé à un sous groupe à un paramètre dans la représentation $[m_1, j_1]$, X^2 l'opérateur infinitésimal du même sous groupe dans la représentation $[m_2, j_2]$, alors $X^1 \otimes I + I \otimes X^2$ est l'opérateur infinitésimal associé au même sous groupe dans la représentation $[m_1, j_1] \otimes [m_2, j_2]$. Les deux invariants P^2 et W^2 ne sont plus de simples scalaires et en décomposant la représentation unitaire on obtient une représentation spectrale des deux invariants et ceci dans tous les cas, c'est-à-dire indépendamment de toutes les conditions qui déterminent l'isométrie. P^2 et W^2 seront donc toujours membres de la nouvelle sous algèbre abélienne maximale. En précisant les conditions pour lesquelles l'isométrie est définie, on définit automatiquement les autres membres. Parmi tous les cas, celui où l'on s'est fixé le formalisme canonique aussi bien pour les représentations initiales que pour les représentations finales est très important; ce qu'on appelle le couplage (l, s) permet de lever la dégénérescence. Il a été très étudié (Mac Farlane 1962; 1963; Moussa et Stora 1964). Nous suivons les notations de (Mac Farlane 1963). Ainsi, par hypothèse, la représentation spectrale du départ est celle de la sous algèbre abélienne maximale constituée par $(\boldsymbol{P}_1, S^3_{j_1})$ $(\boldsymbol{P}_2, S^3_{j_2})$.

On considérera deux cas

α) $j_1 = j_2 = 0 \qquad m \neq 0,\ m_2 \neq 0$

Dans ce cas

$$[m_1, 0] \otimes [m_2, 0] \simeq \int_{m_1+m_2}^{\oplus} \sigma(m)\, dm \bigoplus_{l=0,1,2,\ldots} [m, l]\,.$$

Il n'y a pas de dégénérescence.

L'isométrie entre

$$L^2_{\mu_1 \times \mu_2}(\Omega_{m_1} \times \Omega_m) \text{ et } \int_{m_1+m_2}^{\oplus} \sigma(m)\, dm \bigoplus_l L^2_\mu(\Omega_m, \mathcal{H}_{2l+1})$$

s'écrit alors simplement (Mac Farlane 1963)

$$f^{(m_1, m_2)}(p_1, p_2) = m^{1/2}\, \lambda^{-1/4}(m) \sum_{l\, l_3} Y_{l\, l_3}(\boldsymbol{e})\, \phi^{(l,m)}_{l_3}(\boldsymbol{p}) \tag{7}$$

avec

$$p = p_1 + p_2 \qquad m^2 = p^2 = (p_1 + p_2)^2 \qquad -l \leqslant l_3 \leqslant l$$

$$\lambda(m) = m^4 - 2\, m^2\, (m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2$$

$$q = m\ \lambda^{-1/2}(m) \left(p_1 - p_2 - \frac{m_1^2 - m_2^2}{m^2}\, (p_1 + p_2)\right)$$

c'est l'équivalent relativiste de l'impulsion relative.

$$(0, \boldsymbol{e}) = \Lambda^{-1}(A^c_p)\, q \text{ où } (A^c_p)$$

est la transformation de Lorentz pure le long de p telle que $p = (A^c_p)\, (m, \mathbf{0})$.

En particulier

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{q} - \frac{q^0\, \boldsymbol{p}}{[m + (m^2 + \boldsymbol{p}^2)^{1/2}]}\,.$$

Il importe de ramarquer que lorsque $p_1 = (m_1, \mathbf{0})$, $p_2 = (m_2, \mathbf{0})$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} = \boldsymbol{e} = 0$ et le changement de variables précédent n'est défini que lorsque $p_1 \neq (m_1, \mathbf{0})$ et $p_2 \neq (m_2, \mathbf{0})$. Aussi comme dans le cas d'une seule particule on considérera par la suite $\Omega_{m_{10}}$ et $\Omega_{m_{20}}$ à la place de Ω_{m_1} et de Ω_{m_2}.

Ce choix, suivant les conventions habituelles, caractérise le formalisme canonique pour la représentation finale. De plus son sens à la fois physique et géométrique est clair: $\Lambda^{-1}(A_p^c)$ est la transformation qui fait passer au système du centre de masse.

$$\sigma(m)\, dm = m^{-1}\, \lambda^{1/2}(m)\, dm\,.$$

L'isométrie peut formellement se mettre sous la forme suivante pour une fonction $f(p_1, p_2)$ élément de $\mathcal{S}_0(\Omega_{m_1} \times \Omega_{m_2})$ ou de $\mathcal{D}_0(\Omega_{m_1} \times \Omega_{m_2})$

$$\phi_{l_3}^{(l,m)}(p) = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}_1}{p_1^0} \frac{d^3\boldsymbol{p}_2}{p_2^0}\, m^{1/2}\, \lambda^{-1/4}(m)\, p^0\, \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)$$

$$\delta\,(m - [(p_1 + p_2)^2]^{1/2})\, \overline{Y}_{l l_3}(\boldsymbol{e})\, f(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)\,. \tag{8}$$

On définit alors le coefficient de Clebsch-Gordan, soit la distribution

$$m^{1/2}\, \lambda^{-1/4}(m)\, p^0\, \delta\,(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)\, \delta\,\big(m - [(p_1 + p_2)^2]^{\,1/2}\big)\, \overline{Y}_{l l_3}(\boldsymbol{e})\,. \tag{9}$$

On justifie entièrement l'existence d'une telle distribution et sa forme à l'aide des résultats précédents. En effet, comme nous l'avons déjà signalé cette décomposition est équivalente à un changement de représentation spectrale dans l'ensemble des états des deux particules libres sans spin. La représentation du départ est associée au système $(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2) \cdot P^2 = (P_1 + P_2)^2$ fait automatiquement partie du nouveau système. Imposer le formalisme canonique c'est obtenir la représentation spectrale de $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2$, de la 3ème composante du spin S_l^3, ainsi que $\boldsymbol{S}_l^2$; or le spin du système réduit n'est rien d'autre que «le moment angulaire dans le système du centre de masse», soit l'opérateur $-\, i\, \boldsymbol{e} \wedge \partial/\partial \boldsymbol{e} = \boldsymbol{L}$[7]).

En résumé, l'isométrie (7) est l'isométrie entre les deux représentations spectrales associées aux deux systèmes complets d'observables suivants:

$$(\boldsymbol{P}_1\, \boldsymbol{P}_2) \text{ et } P^2 = (P_1 + P_2)^2,\ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2\,,\ \left[-\, i\, \boldsymbol{e} \wedge \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{e}}\right]^2,\ \left(-\, i\, \boldsymbol{e} \wedge \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{e}}\right)^3$$

l'exposant (2) indique que l'opérateur este levé au carré; l'exposant (3) indique que c'est la 3ème composante.

En fait tous ces opérateurs sont définis sur le domaine dense $\mathcal{S}_0(\Omega_{m_1} \times \Omega_{m_2})$ (resp. $\mathcal{D}_0(\Omega_{m_1} \times \Omega_{m_2})$). Ces domaines sont stables par ces deux systèmes. Ce sont des espaces nucléaires; l'application canonique: $\mathcal{S}_0$ (resp. $\mathcal{D}_0$) $\rightarrow L^2_{\mu_1 \times \mu_2}(\Omega_{m_1} \times \Omega_{m_2})$ est continue. Avec $\mathcal{S}'$ (resp. $\mathcal{D}'$), l'ensemble forme un triplet de GUELFAND. Les opérateurs sont continus pour la topologie de $\mathcal{S}_0$ (resp. de $\mathcal{D}_0$).

L'expression (8) n'est qu'une replique de la formule (6) et la distribution (9) s'interprète alors comme la fonctionnelle propre du nouveau système complet associé à l'ensemble $(m, \boldsymbol{p}, l, l_3)$ des valeurs propres et (8) exprime bien le développement d'une fonction suivant les fonctionnelles propres du nouveau système.

---

[7]) C'est l'expression de l'opérateur cherché, après qu'on ait effectué le changement de variables $(p_1, p_2) \rightarrow (m, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{e})$ (MAC FARLANE 1963).

β) Le cas général de deux représentations quelconques $[m_1, j_1]$ et $[m_2, j_2]$ est évidemment plus complexe mais l'esprit reste le même. L'isométrie entre

$$L^2_{\mu_1 \times \mu_2}(\Omega_{m_1} \times \Omega_{m_2}, \mathcal{H}_{2j_1+1} \otimes \mathcal{H}_{2j_2+1})$$

et

$$\int_{m_1+m_2}^{\oplus} \sigma(m)\, dm \bigoplus_{\substack{j=l+j' \\ j'=j_1+j_2 \\ l=0,1,2,\ldots}} L^2_{\mu}(\Omega_m, \mathcal{H}_{2j+1})_{[l,s]}$$

s'écrit

$$f_{s_1 s_2}(p_1, p_2) = m^{1/2} \lambda^{-1/4}(m) \sum_l \sum_{j'} \sum_j \sum_s \sum_{s'_1, s'_2, s', l_3} D^{j_1}_{s_1 s'_1}(R_1)\, D^{j_2}_{s_2 s'_2}(R_2)$$

$$C(j', j_1, j_2; s', s'_1, s'_2)\, C(j\, l\, j'; s, l_3, s')\, Y_{l l_3}(\boldsymbol{e})\, \phi^{[j,m]}_{(l,j')s}(p)\ ^{8)}\ .$$

Si on note $R(p, A)$ la rotation $\in \mathrm{SU}(2)$: $A_p^{c-1}\, A\, A^c_{A^{-1}p}$, alors

$$R_1 = R(p_1, A_p^{c^{-1}}) \qquad R_2 = R(p_2, A_p^{c^{-1}})\ .$$

Les coefficients $C(j', j_1, j_2; s', s'_1, s'_2)$ et $C(j, l, j'; s, l_3, j')$ sont les coefficients de Clebsch-Gordan de SU(2) habituels. Nous suivons à leur sujet les conventions de Rose (1957). On peut alors écrire formellement

$$\phi^{[j,m]}_{(l,j')s}(p) = \sum_{s_1, s_2} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}_1}{p_1^0} \frac{d^3\boldsymbol{p}_2}{p_2^0}\, m^{1/2} \lambda^{-1/4}(m)\, \delta\,(m - [(p_1 + p_2)^2]^{1/2})$$

$$\delta\,(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2) \sum_{s_1', s_2', l_3, s'} \overline{D^{j_1}_{s_1 s'_1}}(R_1)\, \overline{D^{j_2}_{s_2 s'_2}}(R_2)\, C(j', j_1, j_2; s', s'_1, s'_2$$

$$C(j, l, j'; s, l_3, s')\, \overline{Y_{l l_3}}(\boldsymbol{e})\, f_{s_1, s_2}(p_1, p_2)\ .$$

On définit le coefficient de Clebsch-Gordan:

$$m^{1/2} \lambda^{-1/4}(m)\, p^0\, \delta\,(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)\, \delta\,(m - [(p_1 + p_2)^2]^{1/2})$$

$$\sum_{s', l_3, s'_1, s'_2} \overline{D^{j_1}_{s_1 s'_1}}(R_1)\, \overline{D^{j_2}_{s_2 s'_2}}(R_2)\, C(j', j_1, j_2; s', s'_1, s'_2)$$

$$C(j, l, j'; s, l_3, s')\, \overline{Y_{l l_3}}(\boldsymbol{e})\ .$$

L'existence de ce coefficient et ses propriétés sont démontrées toujours suivant le même principe. Là encore cette décomposition est équivalente à un changement de représentations spectrales. Le nouveau système complet auquel on aboutit contient nécessairement les deux invariants P^2 et W^2, ainsi que $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2$, et la 3ème composante du spin final. Dire qu'il y a dégénérescence c'est affirmer que ces observables ne forment pas une sous algèbre abélienne maximale, on lève cette dégénérescence en considérant de plus près la définition du spin du système final. Heuristiquement la démarche est bien connue. Elle consiste à se placer dans le système du centre de masse, puis à construire le spin du système par addition du moment orbital relatif des deux particules et des deux spins de chacun des deux particules.

---

8) Les sommes $j = l + j'$, $j' = j_1 + j_2$ doivent être comprises comme des couplages de moments angulaires et chacune des sommations $\sum_l \sum_{j'} \ldots$ etc. doit être compatible avec les règles d'addition des moments angulaires.

On lève la dégénérescence en choisissant la manière dont on couple les trois moments angulaires. Le couplage $(l\,s)$ (ici (l, j')) est alors le couplage du moment orbital avec la somme des deux spins. Plus précisément, le spin $\boldsymbol{S}_j(p)$ doit être la somme des trois moments angulaires

$$\boldsymbol{S}_j(p) = -\,i\,\boldsymbol{e} \wedge \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{e}} + \boldsymbol{S}_{j_1}(p_1) + \boldsymbol{S}_{j_2}(p_2) = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}_{j_1}(p_1) + \boldsymbol{S}_{j_2}(p_2)\,.$$

Cette équation n'est valable que si l'on se place dans le système du centre de masse, c'est-à-dire si $p = (m, \boldsymbol{0})$: on peut à partir de là donner les expressions analytiques de ces différents opérateurs (STORA 1962). Nous ne le ferons pas ici. En résumé le nouveau système complet est constitué des éléments suivants: $(P^2, W^2, \boldsymbol{P}, S_j^3(p), \boldsymbol{L}^2, (\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2)^2)$.

Le coefficient de Clebsch-Gordan n'est alors que la fonctionnelle propre de ce système, associée à l'ensemble $(m, j, \boldsymbol{p}, s, l, j')$ des valeurs propres. Ceci se justifie d'une manière strictement identique à condition de substituer à $\mathcal{S}_0$ ou $\mathcal{D}_0$ qui précédent, les espaces nucléaires $\mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j_1+1} \otimes \mathcal{H}_{2j_2+1})$ et $\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j_1+1} \otimes \mathcal{H}_{2j_2+1})$ sur lesquels les opérateurs précédents sont définis et continus.

Nous n'avons considéré ici que le cas de deux particules de masses positives et nous n'avons utilisé que le formalisme canonique. On peut aussi substituer le formalisme hélicité au formalisme canonique, à la fois pour les représentations du départ et pour la représentation finale. On définit alors (MOUSSA et STORA 1964; WERLE 1966) un coefficient de Clebsch-Gordan qui suivant le même principe, s'interprète comme la fonctionnelle propre de la nouvelle base; dans ce cas elle est constituée des éléments suivants (WERLE 1966):

$$\left(P^2, W^2, \boldsymbol{P}, \frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{J}}{|\boldsymbol{P}|}, \frac{W_1\cdot P}{[(P_1\cdot P)^2 - m_1^2\,m^2]^{1/2}}, \frac{W_2\cdot P}{[(P_2\cdot P)^2 - m_2^2\,m^2]^{1/2}}\right).$$

Les deux dernières observables sont égales aux polarisations longitudinales individuelles dans le système du centre de masse. Elle est souvent préférée à la précédente: en effet la levée de la dégénérescence est plus simple que dans le cas précédent puisqu'elle se fait par l'intermédiaire des deux polarisations longitudinales dans le système du centre de masse; on évite le couplage des trois moments angulaires; Si l'on part du formalisme canonique on peut encore utiliser dans ce cas les espaces $\mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{2j_1+1} \otimes \mathcal{H}_{2j_2+1})$ et $\mathcal{S}_0(\mathcal{H}_{2j_1+1} \otimes \mathcal{H}_{2j_2+1})$.

On doit considérer aussi le cas des masses nulles et des couplages multipolaires, ainsi que le cas d'un nombre quelconque de particules (WICK 1962; WERLE 1966; STORA 1962). Comme l'ont montré VOISIN (1964) et LEVY-LEBLOND (1965), le cas du groupe de Galilée est strictement analogue au cas du groupe de Poincaré et n'exige aucune mention particulière.

Dans tous les cas la justification mathématique est la même. Le coefficient de Clebsch-Gordan est alors une distribution caractéristique de l'isométrie entre l'espace d'Hilbert, base de la représentation unitaire et l'intégrale hilbertienne, base de la décomposition en représentations irréductibles. De plus cette distribution est toujours la fonctionnelle propre d'un système complet d'observables qui commutent, différent de celui du départ. D'un point de vue strictement mathématique il importe d'insister sur l'existence d'un espace nucléaire, dense et sur lequel tous les opérateurs sont définis. Seules les modalités de la démonstration varient d'un cas à l'autre suivant la complexité de l'exemple particulier considéré.

APPENDICE I

Représentations unitaires et irréductibles des groupes de Poincaré et de Galilée

1° *Définition des différents groupes rencontrés*

Conformément à la théorie des représentations projectives (BARGMAN 1954) nous entendons par groupe de Poincaré, le groupe de recouvrement universel du groupe de Lorentz inhomogène.

Le groupe de Lorentz $\mathcal{L}$ est l'ensemble des transformations linéaires, laissant invariante la forme bilinéaire définie sur R^4: $X \cdot Y = X^0\, Y^0 - \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y}$ [9]) qu'on notera $y = \Lambda\, x$ ou $y^\mu = \Lambda^\nu_\mu\, x^\nu$, de déterminant égal à 1 et telles que $\Lambda^0_0 \geqslant 1$.

Le groupe de Lorentz inhomogène est formé des transformations de R^4 dans lui-même suivantes $y^\mu = \Lambda^\mu_\nu\, x^\nu + a^\mu$, il est muni de la loi de composition suivante:

$$(a, \Lambda)\,(a', \Lambda') = (a + \Lambda\, a', \Lambda\, \Lambda')\,.$$

Le groupe de recouvrement universel ou *groupe de Poincaré* est un produit semi direct du groupe des translations d'espace temps par SL(2, C). C'est un revêtement d'ordre 2 du groupe de Poincaré $\pm\, A \in$ SL(2, C) déterminent la même transformation de Lorentz $\Lambda(A)$ définie par la formule

$$A(x\,.\,\sigma)\, A^T = \Lambda(A)\, x\,.\,\sigma \quad \text{où} \quad x\,.\,\sigma = x_\mu\, \sigma^\mu = \underset{\sim}{x}$$

et où $\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma)$ sont les matrices de Pauli habituelles

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on note (a, A) un élément du groupe de Poincaré la loi de groupe s'écrit alors:

$$(a_1, A_1)\,(a_2, A_2) = (a_1 + \Lambda(A_1)\, a_2, A_1\, A_2)\,.$$

Toute représentation projective unitaire du groupe de Poincaré provient d'une représentation continue unitaire de son revêtement universel (WIGNER 1939; BARGMAN 1954).

Le groupe de Galilée est l'ensemble des transformations de l'espace et du temps comprenant les rotations spatiales R, les accélérations $\boldsymbol{v}$ ou encore transformations de Galilée pures, les translations d'espace $\boldsymbol{a}$ et de temps b. On note l'un de ses éléments

$$g = (b; \boldsymbol{a}; \boldsymbol{v}; R)$$

---

[9]) Où $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y} = X^1 \cdot Y^1 + X^2 \cdot Y^2 + X^3 \cdot Y^3$ est le produit scalaire habituel dans $\boldsymbol{R}^3$. $\boldsymbol{X}$ note le vecteur de $\boldsymbol{R}^3$ de composantes (X^1, X^2, X^3). et X le quadrivecteur de R^4 de composantes (X^0, X^1, X^2, X^3). De plus R^4 est toujours suppose muni du produit scalaire $X \cdot Y = X^0 \cdot Y^0 - X^1 \cdot Y^1 - X^2 \cdot Y^2 - X^3 \cdot Y^3 = X^0 \cdot Y^0 - \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y}$. Enfin $\boldsymbol{X}^2 = |\,\boldsymbol{X}\,|^2 = (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2$.

avec par définition

$$\boldsymbol{x}' = R\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}\,t + \boldsymbol{a}$$

$$t' = t + b$$

la loi de groupe est donc

$$(b_1;\, \boldsymbol{a}_1;\, \boldsymbol{v}_1;\, R_1)\,(b_2;\, \boldsymbol{a}_2;\, \boldsymbol{v}_2;\, R_2) = (b_1 + b_2;\, \boldsymbol{a}_1 + R_1\,\boldsymbol{a}_2 + b_2\,\boldsymbol{v}_1;\, \boldsymbol{v}_1 + R_1\,\boldsymbol{v}_2;\, R_1\,R_2)\,.$$

Le groupe de recouvrement universel est alors simplement le groupe obtenu en substituant au sous groupe des rotations son recouvrement universel SU(2). Les matrices $\pm\, B \in \mathrm{SU}(2)$ déterminent la même rotation $R(B)$ donnée par la formule.

$$B\,\boldsymbol{x}\,.\,\sigma\,B^T = R(B)\,\boldsymbol{x}\,.\,\sigma$$

avec

$$\boldsymbol{x}\,.\,\sigma = x^1\,\sigma^1 + x^2\,\sigma^2 + x^3\,\sigma^3$$

si on note $\tilde{g} = (b,\, \boldsymbol{a};\, \boldsymbol{v};\, B)$ l'élément générique, la loi de groupe s'écrit

$$(b_1;\, \boldsymbol{a}_1;\, \boldsymbol{v}_1;\, B_1)\,(b_2;\, \boldsymbol{a}_2;\, \boldsymbol{v}_2;\, B_2) = (b_1 + b_2,\, \boldsymbol{a}_1 + R(B_1)\,\boldsymbol{a}_2 + b_2\boldsymbol{v}_1;\, \boldsymbol{v}_1 + R(B_1)\,\boldsymbol{v}_2;\, B_1\,B_2)\,.$$

Bargman (1954) a démontré que la dimension de l'espace vectoriel réel des classes d'équivalence d'exposants locaux est l'unité. Il existe donc des extensions non triviales du groupe de Galilée. Ainsi tous les exposants inéquivalents sont obtenus à partir d'un exposant et lui sont tous proportionnels la constance de proportionnalité notée m s'interprète comme la masse.

Le choix de l'exposant de base sera

$$\xi_0(\tilde{g}_1,\, \tilde{g}_2) = \left(\boldsymbol{v}_1\,.\,R(B_1)\,\boldsymbol{a}_2 + \frac{1}{2}\,b_2\,\boldsymbol{v}_1^2\right).$$

C'est le choix habituel (Wightman 1962; Levy-Leblond 1965).

On est donc amené à étudier les représentations unitaires et continues du groupe H_m dont on notera l'élément générique

$$h = (\theta,\, g)$$

et dont la loi de groupe est simplement

$$h_1\,h_2 = (\theta_1,\, \tilde{g}_1)\,(\theta_2,\, \tilde{g}_2) = (\theta_1 + \theta_2 + m\,\xi_0(\tilde{g}_1,\, \tilde{g}_2),\, \tilde{g}_1\,\tilde{g}_2)\,.$$

Comme on se limite aux représentations irréductibles, toute représentation irréductible de H_m restreinte au recouvrement universel du groupe de Galilée, qu'on appellera dorénavant sans crainte de confusion encore groupe de Galilée, sera une représentation projective irréductible du groupe de Galilée. Dans tous les cas en effet, le centre isomorphe à Z_2 s'applique bien sur le rayon unité.

Lorsque $m = 0$ on obtient évidemment les «vraies» représentations du groupe de Galilée. Notons enfin que toutes les extensions H_m sont isomorphes comme l'a montré Bargman.

Enfin rappelons que le *groupe euclidien de l'espace tridimensionnel* E_3 est défini par l'ensemble des couples $(\boldsymbol{a},\, R)$ où $\boldsymbol{a}$ est un trivecteur et R un élément de $S\,O(3)$ muni de la loi de groupe suivante:

$$(\boldsymbol{a}_1,\, R_1)\,(\boldsymbol{a}_2,\, R_2) = (\boldsymbol{a}_1 + R_1\,\boldsymbol{a}_2,\, R_1\,R_2)\,.$$

Le recouvrement universel $\tilde{E}_3$ est l'ensemble des couples $(\boldsymbol{a}, B)$ où $B \in \mathrm{SU}(2)$ muni de la loi de groupe

$$(\boldsymbol{a}_1, B_1)\,(\boldsymbol{a}_2, B_2) = (\boldsymbol{a}_1 + R(B_1)\,\boldsymbol{a}_2, B_1\,B_2)\,.$$

Le groupe E_2 est formé de l'ensemble des transformations du plan suivantes:

$$\boldsymbol{x}' = R_\phi\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$$

où $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ et $\boldsymbol{a}$ sont des vecteurs du plan et R_ϕ la rotation d'angle ϕ autour de l'origine. Elles forment un groupe de Lie pour la loi suivante:

$$(\boldsymbol{a}_1, R_{\phi_1})\,(\boldsymbol{a}_2, R_{\phi_2}) = (\boldsymbol{a}_1 + R_{\phi_1}\,\boldsymbol{a}_2, R_{\phi_1+\phi_2})\,.$$

Le groupe de recouvrement universel a une infinité de «feuillets» mais la théorie des représentations induites n'utilise que le groupe dit spinoriel qu'on note $\tilde{E}_2$ qui est le recouvrement «a deux feuillets» de E_2. Le groupe spinoriel est le groupe des matrices 2×2 suivantes

$$(z; \phi) = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ z & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

$$\phi \in R$$

$$z \in C$$

muni de la loi de composition suivante

$$(z; \phi)\,(z'; \phi') = (z\,e^{-i\phi'/2} + z'\,e^{i\phi/2};\ \phi + \phi')\,.$$

L'homomorphisme de $\tilde{E}_2$ sur E_2 est le suivant:

$$(z; \phi) \to (\boldsymbol{a}\,(i\,z\,e^{i\phi/2});\ R_\phi)$$

où $\boldsymbol{a}(i\,z\,e^{i\phi/2})$ désigne le vecteur $(R_e\,(i\,z\,e^{i\phi/2}),\ \mathrm{Im}\,(i\,z\,e^{i\phi/2}))$.

2° *Algèbres de Lie correspondantes*

En reportant ici les relations de commutation habituelles entre les différents générateurs, nous ferons la remarque suivante: on peut y voir apparaître en effet le nombre complexe $i = \sqrt{-1}$. Nous avons ainsi sacrifié à l'habitude des physiciens qui pensent surtout plus en termes de représentations qu'en termes d'algèbre de Lie elle-même et il faut considérer ces expressions comme une représentation fidèle des algèbres de Lie telles que les obtient Bargman (1954) par des opérateurs hermitiens dans le cas d'une représentation de dimension finie, et essentiellement auto-adjoints dans le cas de la dimension infinie.

Notations

On notera

J^i $(i = 1, 2, 3)$ les générateurs des rotations spatiales.

P^0, le générateur des translations du temps dans le cas du groupe de Poincaré.

E, le générateur des translations du temps dans le cas du groupe de Galilée.

P^i $(i = 1, 2, 3)$ ceux des translations d'espace.

N^i $(i = 1, 2, 3)$ ceux des transformations de Lorentz pures.

K^i $(i = 1, 2, 3)$ ceux des transformations de Galilée pures.

A celui du sous groupe des phases $(\theta, \mathbf{1})$ de l'extension H_m du groupe de Galilée.

Dans une représentation donnée, $e^{-i\theta \boldsymbol{n}\cdot \boldsymbol{J}}$ est alors une rotation de paramètres $(\boldsymbol{n}; \theta)$; $e^{-i\chi \boldsymbol{m}.\boldsymbol{N}}$ (resp. $e^{-i\chi \boldsymbol{m}.\boldsymbol{K}}$) une transformation de Lorentz pure (resp. de Galilée pure) de paramètres $(\chi, \boldsymbol{m})$; $e^{ia_\mu P^\mu}$ une translation de vecteur a_μ.

Relations de commutation

a) *cas du groupe de Poincaré*

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \qquad [J^k, P^0] = 0 \qquad [J^k, P^l] = i\,\varepsilon^{klm} P^m$$

$$[N^k, P^0] = -\,i\,P^k \qquad [N^k, P^l] = -\,i\,\delta^{kl} P^0$$

$$[J^k, J^l] = i\,\varepsilon^{klm} J^m$$

$$[J^k, N^l] = i\,\varepsilon^{klm} N^m$$

$$[N^k, N^l] = i\,\varepsilon^{klm} J^m$$

générateurs du centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie:

$$P_\mu P^\mu \text{ et } W^\mu W_\mu \text{ où } (W^0 = \boldsymbol{P}\,.\,\boldsymbol{J} \text{ et } \boldsymbol{W} = P^0\,\boldsymbol{J} - \boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{N})\,.$$

Les indices sont levés et abaissés à l'aide du tenseur métrique habituel

$$g_{\mu\nu}\,(g_{00} = 1,\, g_{ij} = -\,\delta_{ij})\,.$$

b) *cas de H_m*

$$[J^i, J^j] = i^{ijk} J^k \qquad [N^i, E] = i\,P^i$$

$$[J^i, N^j] = i\,\varepsilon^{ijk} N^k \qquad [P^i, P^j] = 0$$

$$[N^i, N^j] = 0 \qquad [P^i, E] = 0$$

$$[J^i, P^j] = i\,\varepsilon^{ijk} P^k$$

$$[N^i, P^j] = i\,\delta^{ij}\,m\,A$$

$$[J^i, E] = 0\,.$$

Les relations de commutation du groupe de Galilée proprement dit se déduisent des précédentes en faisant $m = 0$.

Générateurs du centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie:

$$E - \frac{\boldsymbol{P}^2}{2\,m} \text{ et } \left(\boldsymbol{J} - \frac{1}{m}\,\boldsymbol{K} \wedge \boldsymbol{P}\right)^2.$$

c) *Cas de* E_3

Comme les relations de commutation sont déjà contenues dans les précédentes n'indiquons que les générateurs du centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie soient $\boldsymbol{P}^2$ et $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{J}$.

3° *Représentations unitaires et irréductibles*

L'application de la théorie de Wigner-Mackey fournit les résultats suivants.

A. *Cas du groupe de Poincaré*

α) *masse* $m > 0$ *et spin* j

Soient Ω_m l'hyperboloïde de masse m c'est-à-dire la sous variété R^4 défini par $\Omega_m = \{p^2 = m^2;\, p^0 > 0\}$ où $p^2 = p^\mu\, p_\mu$. $p^\mu \in R^4$, $d\mu(p) = d^3\boldsymbol{p}/p^0$ est la mesure habituelle définie sur Ω_m et invariante par SL(2, C) et $\mathcal{H}_{2j+1}$ un espace d'Hilbert de dimension $2\,j + 1$ (j entier ou demi-entier) espace de base de la représentation D^j de SU(2) qu'on induit. La représentation est alors définie dans l'espace d'Hilbert $L^2_\mu(\Omega_m, \mathcal{H}_{2j+1})$ c'est-à-dire l'espace d'Hilbert des classes de fonctions F définies sur Ω_m, à valeurs dans $\mathcal{H}_{2j+1}$ telles que si (,) note le produit scalaire dans $\mathcal{H}_{2j+1}$

$$\int_{\Omega_m} \big(F(p),\, F(p)\big)\, \frac{d^3\boldsymbol{p}}{p^0} < +\infty\,.$$

La représentation $(a, A) \to \mathcal{U}^{[m,j]}(a, A)$ est alors

$$\{\mathcal{U}^{[m,j]}(a, A)\, F\}\,(p) = e^{i\,a\,p}\, D^j(A_p^{-1}\, A\, A_{\Lambda^{-1}(A)p})\, F\big(\Lambda^{-1}(A)\, p\big)\,.$$

L'écriture de la représentation dépend de la donnée d'un champ de transformations de Lorentz $p \to A_p$ tel que pour presque tout p on ait

$$A_p\, \overset{\circ}{p} = p \text{ où } \overset{\circ}{p} = (m, 0, 0, 0)\,.$$

Ce choix est important car, si deux choix différents conduisent à deux représentations unitairement équivalentes, d'un point de vue strictement physique il n'y aura pas nécessairement équivalence. En effet à la donnée du champ $p \to A_0$, correspond la «diagonalisation» d'une sous algèbre abélienne maximale de l'algèbre des observables d'une particule de masse m et de spin j; aussi à deux choix différents correspondent deux représentations spectrales différentes (Jauch et Misra 1965).

Il existe deux choix physiquement intéressants.

a) $\Lambda(A_p)$ est la transformation de Lorentz pure le long de p.

Elle s'écrit, en matrice 2×2:

$$A_p^c = \frac{m + \underset{\sim}{p}}{[2\,m\,(m + p^0)]^{1/2}}$$

le formalisme associé au choix de ce champ est dit «*canonique*» (FOLDY 1956; WIGHTMAN 1961; MAC FARLANE 1962, 1963; CHAKRABARTI 1965).

b) $\Lambda(A_p)$ est le produit d'une transformation de Lorentz pure amenant $\mathring{p}$ sur $(p_0, 0, 0, |\boldsymbol{p}|)$, suivie d'une rotation R_p^H dans le plan $(0\,z; \boldsymbol{p})$ d'angle $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|)$ où $\boldsymbol{k}$ est le vecteur unitaire de l'axe $0\,z$. En matrice 2×2

$$A_p^H = \frac{1}{[2\,m\,(m+p_0)^{1/2}]} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\,(m - p_0 - |\boldsymbol{p}|); & -\sin\frac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi}\,(m + p_0 + |\boldsymbol{p}|) \\ \sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\varphi}\,(m + p_0 - |\boldsymbol{p}|); & \cos\frac{\theta}{2}\,(m + p_0 + |\boldsymbol{p}|) \end{pmatrix}.$$

Le formalisme associé est le formalisme *hélicité* (MICHEL et WIGHTMAN 1955; BOUCHIAT et MICHEL 1958; JACOB et WICK 1959; WICK 1962).

Notons que dans le cas du formalisme canonique on a

$$A_p^{c-1}\,B\,A_{\Lambda^{-1}(B)p} \equiv B \text{ pour tout } B \in \mathrm{SU}(2)\,.$$

C'est la propriété fondamentale qui caractérise le formalisme car elle nous assure que la 3ème composante du spin est automatiquement diagonalisée.

Cette propriété disparaît évidemment dans le formalisme hélicité puisque l'on a

$$A_p^{H^{-1}}\,B\,A^H_{\Lambda^{-1}(B)p} \equiv B_{\boldsymbol{p}}^{-1}\,B\,B_{R^{-1}(B)\boldsymbol{p}}$$

où $B_{\boldsymbol{p}}$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\,; & -\sin\frac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi} \\ \sin\frac{\theta}{2}\,; & e^{i\varphi}\,\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{1}$$

où θ et φ sont les angles polaires de $\boldsymbol{p}$.

Donnons la forme des opérateurs infinitésimaux, uniquement dans le formalisme canonique

$$(\boldsymbol{J}\,F)\,(p) = \left\{\left(-\,i\,\boldsymbol{p} \wedge \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} + \boldsymbol{S}\right) F\right\}(p)$$

$$(\boldsymbol{N}\,F)\,(p) = \left\{\left(-\,i\,p_0\,\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{S}}{p_0 + m}\right) F\right\} p\,.$$

Les opérateurs S sont les générateurs des transformations infinitésimales de la représentation D^j de SU(2). Par définition $D^j\,(R^k) = 1 - i\,\theta\,S^k$ où R^k est une rotation infinitésimale d'angle θ autour du $k^{\text{ème}}$-axe.

β) Cas $m = 0$ spin discret

Soient Ω le cône de lumière: $\Omega = \{p^2 = 0;\ p^0 > 0\}$ et L^j la représentation, indexée par j entier ou demi-entier de $\tilde{E}_2$ suivante: $(z; \phi) \to e^{-ij\phi}$.

Soit enfin un champ de transformations de Lorentz $p \to A_p$ telles que pour presque tout p on ait

$$A_p\,\mathring{p} = p \text{ où } \mathring{p} = (1, 0, 0, 1)\,.$$

La représentation $(a, A) \to \mathcal{U}^{[j]}(a, A)$ est définie dans l'espace d'Hilbert $L^2_\mu(\Omega)$ par

$$\{\mathcal{U}^{[j]}(a; A)\, F\}\,(p) = e^{i a p}\, L^j(A_p^{-1}\, A\, A_{\Lambda^{-1}(A)p})\, F\,(\Lambda^{-1}(A)\, p)\,.$$

Il y a deux choix essentiels pour la fonction $p \to A_p$.

a) celui fait par WIGHTMAN (1961)

$$A_p^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{2}{|\boldsymbol{p}|+p^3}}; & -\dfrac{(p^1 - i\, p^2)}{\sqrt{2\,(|\boldsymbol{p}|+p^3)}} \\ 0; & \sqrt{\dfrac{|\boldsymbol{p}|+p^3}{2}} \end{pmatrix}.$$

b) le choix correspondant au formalisme hélicité (LOMONT et MOSES 1962; GUILLOT et PETIT 1966)

$$A_p^{(2)} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2}\, |\boldsymbol{p}|^{-1/2}; & -\sin\dfrac{\theta}{2}\, |\boldsymbol{p}|^{1/2}\, e^{-i\varphi} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}\, |\boldsymbol{p}|^{-1/2}\, e^{i\varphi}; & \cos\dfrac{\theta}{2}\, |\boldsymbol{p}|^{1/2} \end{pmatrix}$$

où θ et φ sont les angles polaires de $\boldsymbol{p}$.

B. *Cas du groupe de Galilée* $m \neq 0$

Soit Ω_m la sous variété de R^4 définie par

$$\Omega_{m,\mathcal{V}} = \left\{(E, \boldsymbol{p}) \in R^4;\; E - \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\,m} = \mathcal{V}\right\}.$$

La mesure sur $\Omega_{m,\mathcal{V}}$ invariante par le groupe, est égale à $\delta\,(E - \boldsymbol{p}^2/2\,m - \mathcal{V})\, dE\, d^3\boldsymbol{p}$.

Comme dans le cas relativiste $\mathcal{H}_{2j+1}$ est l'espace de base de la représentation D^j de SU(2) qu'on induit. Le point de $\Omega_{m,\mathcal{V}}$ stabilisé est ici simplement $(\mathcal{V}, \mathbf{0})$. On doit considérer un champ $(E, \boldsymbol{p}) \to \Lambda_{(E,\boldsymbol{p})}$ de transformations de Galilée telle que $\Lambda_{(E,\boldsymbol{p})}(\mathcal{V}, 0) = (E, \boldsymbol{p})$ pour presque tout $(E, \boldsymbol{p})$.

Deux choix

a) $\Lambda_{(E,\boldsymbol{p})}$ est la transformation de Galilée pure le long de $\boldsymbol{p}$:
$\Lambda^c_{(E,\boldsymbol{p})} = (0, 0, \boldsymbol{p}/m, \mathbf{1})$. Le formalisme correspondant est le *formalisme canonique.*

b) Le *formalisme hélicité* correspond au choix

$$\Lambda^H_{(E,p)} = \left(0, 0, \frac{\boldsymbol{p}}{m}, B_{\boldsymbol{p}}\right)$$

où $B_{\boldsymbol{p}}$ est la matrice 2×2 [appendice I; (1)].

L'espace d'Hilbert de la représentation est $L^2_\mu(\Omega_{m,\mathcal{V}}, \mathcal{H}_{2j+1})$ c'est-à-dire l'ensemble des classes de fonctions définies sur $\Omega_{m,\mathcal{V}}$, à valeurs dans $\mathcal{H}_{2j+1}$, telles que

$$\int_{\Omega_{m,\mathcal{V}}} (f(E, \boldsymbol{p}), f(E, \boldsymbol{p}))\, \delta\left(E - \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\,m} - \mathcal{V}\right) dE\, d^3\boldsymbol{p} < +\infty\,.$$

Dans cet espace la représentation $(b, \boldsymbol{a}; \boldsymbol{v}, B) \to \mathcal{U}^{[m, \mathcal{V}, j]}(b, a, \boldsymbol{v}, B)$ s'écrit simplement

$$\{\mathcal{U}^{[m, \mathcal{V}, j]}(b, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, B) f\}(E, \boldsymbol{p}) = e^{i(bE - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a})} D^j(\Lambda^{-1}_{(E,\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{v}, B) \Lambda_{(\boldsymbol{v},B)^{-1}(E,\boldsymbol{p})})$$
$$f\left(E + \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}; R^{-1}(B)(\boldsymbol{p} - m\boldsymbol{v})\right).$$

On peut écrire cette représentation sous une forme légèrement différente en tenant compte que $\Omega_{m.\mathcal{V}}$ est difféomorphe à R^3; l'espace de Hilbert de la représentation est alors $L^2_\nu(R^3, \mathcal{H}_{2j+1})$, ν est la mesure de Lebesgue sur R^3.

On montre alors facilement que la représentation s'écrit alors

(1) dans le cas du formalisme canonique

$$(\mathcal{U}^{[m, \mathcal{V}, j]}(b, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, B) f)(\boldsymbol{p}) = e^{i(\boldsymbol{p}^2/2m + \mathcal{V})b - i\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}} D^j(B) f(R^{-1}(B)(\boldsymbol{p} - m\boldsymbol{v})) \quad (2)$$

(2) dans le cas du formalisme hélicité

$$(\mathcal{U}^{[m, v, j]}(b, \boldsymbol{a}, v, B) f)(\boldsymbol{p})$$
$$= e^{i(\boldsymbol{p}^2/2m + \mathcal{V})b - i\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}} D^j(B^{-1}_{\boldsymbol{p}} B B_{R^{-1}(B)(\boldsymbol{p} - m\boldsymbol{v})}) f(R^{-1}(B)(\boldsymbol{p} - m\boldsymbol{v})).$$

Représentation de l'algèbre de Lie dans le formalisme canonique.

$$\boldsymbol{J} = -i\boldsymbol{p} \wedge \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} + \boldsymbol{S} \qquad \boldsymbol{K} = -i m \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}.$$

APPENDICE II

Espaces nucléaires et triplets de Guelfand

Les espaces d'Hilbert considérés seront tous supposés séparables.

1° *Opérateurs nucléaires*

La notion d'opérateur nucléaire est une particularisation de la notion d'opérateur compact ou complètement continu et de celle d'opérateur du type d'Hilbert-Schmidt.

Un opérateur linéaire A défini dans un espace d'Hilbert $\mathcal{H}_1$ à valeurs dans un espace d'Hilbert $\mathcal{H}_2$ est un opérateur compact s'il transforme tout borné en un ensemble relativement compact (c'est-à-dire à fermeture compacte).

On peut préciser la structure d'un opérateur compact en considérant sa décomposition polaire (Dixmier 1957). Soit en effet $A = U T$, une telle décomposition, on sait que $T = (A^* A)^{1/2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ (où $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ est l'ensemble des opérateurs continus de $\mathcal{H}_1$ dans lui-même) et que U est un opérateur partiellement isométrique de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$ dont le support est $T(H_1)$. On montre que T est un opérateur défini positif compact et auto-adjoint. Son spectre est ponctuel et il existe une base totale orthonormée de $\mathcal{H}_1$:

$$\{e_n\}_{n \in N} \text{ telle que } T e_n = \lambda_n e_n \text{ avec } \lambda_n > 0 \text{ et } \lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$$

si donc $f = \sum_n (e_n, f)\, e_n$ est un élément de $\mathcal{H}_1$, on a:

$$A\, f = \sum_n \lambda_n\, U\, e_n (e_n, f) = \sum_n \lambda_n (e_n, f)\, h_n \text{ avec } \lambda_n > 0 \text{ et } h_n = U\, e_n\,.$$

Les vecteurs h_n forment un système orthonormé.

Réciproquement tout opérateur de cette forme est un opérateur compact.

Un opérateur compact $A = U\, T$ est du type *d'Hilbert-Schmidt* si de plus $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$ où les λ_n sont les valeurs propres de l'opérateur T.

Un opérateur compact est appelé *nucléaire* si $\sum_{n=1} \lambda_n < \infty$. Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2 < +\infty$. Tout opérateur nucléaire est du type d'Hilbert-Schmidt. Pour des opérateurs définis positifs, le concept d'un opérateur nucléaire coïncide avec celui d'un opérateur ayant une trace finie, c'est-à-dire un opérateur A tel que $\sum_{n=1}^{\infty} (A\, f_n, f_n)$ converge pour toute base totale orthonormée dans $\mathcal{H}$.

2° *Espaces dénombrablement hilbertiens*

Un espace dénombrablement hilbertien F est un espace vectoriel topologique séparé dont la topologie est définie par une suite dénombrable de produits scalaires définis sur F et qu'on notera $(\ ,\ )_n$. On notera $\|\ .\ \|_n$ la norme associée à $(\ ,\ )_n$.

Les normes sont supposées toutes ordonnées c'est-à-dire $\|\ .\ \|_1 \leqslant \|\ .\ \|_2 \leqslant \ldots \ldots \leqslant \|\ .\ \|_n \leqslant \ldots$ et elles doivent vérifier la condition de compatibilité suivante: si la suite $x_j \in F$ tend vers 0 pour la norme $\|\ .\ \|_m$ et si c'est une suite de Cauchy pour la norme $\|\ .\ \|_n$ $(n \geqslant m)$, alors elle tend aussi vers 0 pour la norme $\|\ .\ \|_n$.

La topologie est alors définie en considérant pour système fondamental de voisinages de l'origine l'ensemble des boules $U_{n,\epsilon} = \{\varphi \in F, \|\varphi\|_n \leqslant \epsilon\}$ pour tout n et pour tout ϵ.

Cette topologie est métrisable (c'est-à-dire qu'elle est identique à la topologie sous-jacente définie par une métrique) et l'espace est complet.

On dit alors que c'est un espace de Frechet. Ce n'est pas un espace normé sauf si toutes les normes sont identiques à partir d'un certain rang.

Soit F_n le complété de F pour le produit scalaire $(\ ,\ )_n$; pour $m \leqslant n$ notons $T_{n,m}$ l'application identique de F muni de $(\ ,\ )_n$ sur F muni de $(\ ,\ )_m$; $T_{n,m}$ se prolonge en une application linéaire continue de F_n dans F_m qu'on notera encore $T_{n,m}$; comme les produits scalaires vérifient la condition de compatibilité, $T_{n,m}$ est injective et si l'on identifie F_n à une partie de F_m on peut écrire:

$$F \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots \subset F_1$$

comme l'espace est complet, on a $F = \bigcap_n F_n$.

Précisions la structure du dual F' de F, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires et continues de F dans C. Pour tout n notons F'_n le sous espace de F' formé des formes linéaires sur F continues pour $(\ ,\ )_n$; F'_n est un espace hilbertien dont le produit scalaire sera noté $(\ ,\ )_n$. Et l'on a:

$$F'_1 \subset \ldots \subset F'_n \subset \ldots \subset F'$$

De plus $F' = \bigcup_n F'_n$ puisque tout élément de F' est borné sur un voisinage de 0 dans F, donc continu pour un certain $(\ ,\ )_n$.

Les espaces dénombrablement hilbertiens sont des espaces de Frechet réflexifs (c'est-à-dire $F'' = F$).

3° *Espaces nucléaires*

Un espace dénombrablement hilbertien F est dit nucléaire si pour tout m, il existe un $n \geqslant m$ tel que l'application $T_{n,m}(F_n \to F_m)$ soit nucléaire, c'est-à-dire si elle est de la forme:

$$T_{n,m}\, x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x_i, x)_n\, y_i \quad \text{où} \quad x \in F_n$$

où $\{x_i\}$ et $\{y_i\}$ sont des bases orthonormées de F_n et F_m et λ_i des nombres positifs tels que $\lambda_i > 0$ et $\sum_i \lambda_i < \infty$. Remarquons qu'au lieu d'exiger que T^n_m soit nucléaire, il suffit d'exiger que cet opérateur soit du type d'Hilbert-Schmidt. En effet $T^p_m = T^n_m\, T^p_n$ si $m \leqslant n \leqslant p$ et le produit de deux opérateurs d'Hilbert-Schmidt est un opérateur nucléaire.

Tout sous espace vectoriel d'un espace nucléaire est un espace nucléaire. Le quotient d'un espace nucléaire par un sous espace fermé est encore un espace nucléaire. Tout produit d'espace nucléaire est nucléaire. Toute somme directe topologique dénombrable d'espaces nucléaires est nucléaire. Signalons une propriété importante: les espaces nucléaires sont des espaces de Montel: tout ensemble borné (tout ensemble sur lequel chaque norme est borné séparément) est relativement compact. Sur un espace nucléaire et sur son dual, la topologie faible (pour cette topologie une suite $\varphi_n \in F$ est convergente si et seulement si $\langle f, \varphi_n \rangle \to 0$ pour tout $f \in F'$) et la topologie coïncident. Un espace nucléaire est complet relativement à la convergence faible.

Néanmoins la définition précédente d'un espace nucléaire est beaucoup trop restrictive pour convenir à l'ensemble de nos besoins, car on ne peut se limiter aux espaces dénombrablement normés ou hilbertiens; il faut considérer les limites inductives de tels espaces. Il faut alors généraliser la définition précédente aux espaces vectoriels topologiques localement convexes et on dira que dans ce cas E est un espace nucléaire si et seulement si toute application linéaire continue de E dans un Banach est nucléaire. La notion d'opérateur nucléaire doit être aussi convenablement généralisée (SCHWARTZ 1953/54, exp. n° 12); avec cette nouvelle définition l'essentiel des propriétés précédentes est conservé.

Quelques exemples d'espaces nucléaires

Un espace vectoriel de dimension finie est nucléaire, alors qu'un espace d'Hilbert ou un espace de Banach de dimension infinie puisque la boule unité fermée, qui est bornée, n'est pas compacte.

L'espace $\mathcal{S}$, par définition est formé de toutes les fonctions $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ définies sur R^n à valeurs dans C, indéfiniment différentiables et pour lesquelles les produits:

$$(1 + |x|^2)^p\, |D^k \varphi(x)|$$

$$\text{avec} \quad 1 \leqslant p < \infty,\ 0 \leqslant k \leqslant p$$

et

$$D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial^{k_1}_{x_1} \dots \partial^{k_n}_{x_n}} \qquad \begin{array}{l} |k| = k + \dots + k_n \leqslant n \quad \text{et } k_i \in N \\ |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \end{array}$$

sont bornés et continus.

La topologie de $\mathcal{S}$ est alors définie par l'ensemble dénombrable des normes

$$\|\varphi\|_p = \max_{0 \leqslant |k| \leqslant p} \sup_x |(1 + |x|^2)^p D^k \varphi(x)| .$$

Muni de cet ensemble de normes, $\mathcal{S}$ est un espace dénombrablement normé et un espace nucléaire. Il est plus pratique de faire apparaître un système de produits scalaires équivalents au précédent qui en fera un espace dénombrablement hilbertien.

Soit μ une mesure positive sur R^n; s'il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que:

$$(1 + |x|^2)^{-p}$$

soit une fonction μ-sommable, alors le système de normes $\|\varphi\|_n$ est équivalent au système de normes associées aux produits scalaires suivants:

$$(\varphi, \Psi)_p = \int_{R^n} (1 + |x|^2)^{2p} \Big(\sum_{0 \leqslant q \leqslant p} \overline{D^q \varphi}\, D^q \Psi \Big) \, d\mu(x) .$$

Un autre exemple important car nous le rencontrerons dans les applications est $\mathcal{S}(\mathcal{H})$. C'est l'ensemble des fonctions définies sur R^n, à valeurs dans un espace d'Hilbert $\mathcal{H}$ de *dimension finie*, à décroissance rapide et indéfiniment différentiable. C'est un espace dénombrablement normé pour l'ensemble des normes $\| \, . \, \|_n$ suivantes (SCHWARTZ 1955).

$$\|\varphi\|_p = \max_{0 \leqslant |k| \leqslant p} \sup_x | (1 + |x|^2)^p D^k \boldsymbol{\varphi}(x) |$$

où $| \, . \, |$ est la norme associée au produit scalaire dans l'espace d'Hilbert $\mathcal{H}$ qu'on notera ( ). De plus, c'est un espace nucléaire.

Ceci résulte du théorème 1 de l'exposé n° 10 et de la proposition 8 de l'exposé du séminaire SCHWARTZ (1953/54). En effet le premier théorème affirme que $S(\mathcal{H}) = \mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{H}$ (les topologies $\in$ et π coïncident car $\mathcal{S}$ est nucléaire) et la proposition 18 affirme que $\mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{H}$ est un espace nucléaire puisque $\mathcal{S}$ et $\mathcal{H}$ le sont.

Le système de norme est équivalent au système de normes associées aux produits scalaires suivants

$$(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\Psi})_p = \int_{R^n} (1 + |x|^2)^{2p} \sum_{0 \leqslant |q| \leqslant p} (D^q \boldsymbol{\varphi}(x), D^q \boldsymbol{\Psi}(x)) \, d\mu(x) .$$

C'est un espace dénombrablement hilbertien.

L'espace $\mathcal{D}$

Soit K un compact de R^n, on désignera par $\mathcal{D}_K$ l'espace vectoriel des fonctions $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ à valeurs complexes, indéfiniment différentiables et dont le support est

contenu dans K. C'est un espace dénombrablement normé pour l'ensemble des normes $\| \ . \ \|_n$ suivantes:

$$\|\varphi\|_n = \sup_{|p|<n} \left\{ \sup_{x \in K} D^p \varphi \right\} .$$

C'est aussi un espace nucléaire (voir SCHWARTZ 1953/54, exposé 18). On définit $\mathcal{D}$ comme la réunion de tous les ensembles $\mathcal{D}_K$ lorsque le compact K devient infiniment grand et on introduit une notion de convergence sur $\mathcal{D}$. On dira que les φ_j convergent vers 0 dans si elles gardent leurs supports dans un compact K fixe et si elles convergent vers 0 dans $\mathcal{D}_K$. $\mathcal{D}$ est alors la limite inductive des espaces $\mathcal{D}_K$ (voir par exemple GARSOUX 1963). Par suite (voir SCHWARTZ 1953/54, exposé 18) c'est aussi un espace nucléaire.

4° *Espace d'Hilbert équipé* (ou triplet de Guelfand ou Sainte Trinité)

Soit F un sous espace dense d'un espace d'Hilbert $\mathcal{H}$; supposons que F soit un espace nucléaire et que de plus, l'application $T: F \to \mathcal{H}$ soit continue. En particulier c'est toujours le cas lorsque la topologie de F est strictement plus fine que celle de $\mathcal{H}$. Alors l'application T est nucléaire. Considérons le dual F' de F; T' l'adjoint de T est un opérateur appliquant $\mathcal{H}'$ (le dual de $\mathcal{H}$) dans F': il est défini par l'égalité suivante:

$$\langle T' h', \varphi \rangle = \langle h', T \varphi \rangle \; h' \in \mathcal{H}' \text{ et } \varphi \in F . \tag{1}$$

Mais on sait d'après le théorème de Riesz que $h'(h) = (h_1, h)$ ce qui nous permet d'identifier $\mathcal{H}'$ à $\mathcal{H}$ ($\mathcal{H}'$ est anti isomorphe à $\mathcal{H}$) et T' a une application de $\mathcal{H}$ dans F' mais alors T' est un opérateur *antilinéaire* injectif.

On appellera un triplet d'espaces tels que F, $\mathcal{H}$, F' ($F \subset \mathcal{H} \subset F'$) ayant les propriétés ci-dessus, un espace d'Hilbert équipé; on trouve aussi la terminologie suivante: triplet de Guelfand ou Sainte Trinité.

Cette situation générale peut se particulariser de la manière suivante lorsque l'on a affaire à un espace dénombrablement hilbertien et nucléaire.

Soit donc F un espace dénombrablement hilbertien et nucléaire; sa topologie est définie par un système dénombrable de produits scalaires $(\ , \ )_n$. Supposons que sur F on puisse définir un produit scalaire supplémentaire qu'on notera sans indice $(\ , \ )$, défini positif et tel qu'il soit continu vis à vis de la topologie d'espace dénombrablement hilbertien c'est-à-dire si

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi \text{ dans } F \text{ alors } \lim_{n \to \infty} (\varphi_n, \psi) = (\varphi, \psi) .$$

De cette condition, il résulte que le produit scalaire est continu par rapport à une norme $\| \ . \ \|_m$ c'est-à-dire que l'on peut trouver des nombres $m \in N$ et $M > 0$ tels que:

$$|(\varphi, \psi)| \leqslant M \, \|\varphi\|_m \, \|\psi\|_m$$

car toute forme linéaire et continue sur un espace dénombrablement hilbertien F est bornée pour une certaine norme $\| \ . \ \|_m$ et réciproquement toute forme linéaire f sur F bornée pour une certaine norme de F est continue. $(\ , \ )$ fait de F un préhilbertien séparé et on notera $\mathcal{H}$ le complété de F vis à vis de ce produit scalaire. Les éléments de F forment une partie partout dense de $\mathcal{H}$ ce qui définit une application continue T bijective de F dans $\mathcal{H}$. On identifiera dans la suite F à cette partie dense de $\mathcal{H}$. T est continue pour une des normes $\| \ . \ \|_m$ qui définissent la topologie dans dé l'espace nombra-

blement hilbertien. Il se prolonge donc sur F_n $n \geqslant m$ en un opérateur qu'on notera T_n et on sait qu'il existe une valeur n pour laquelle T_n soit un opérateur nucléaire. L'opérateur T'_n est aussi nucléaire.

On peut montrer qu'on a les inclusions suivantes, après avoir effectué les identifications nécessaires.

$$F' \supset \ldots \supset F'_n \supset \ldots F_1 \supset \mathcal{H} \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots \supset F .$$

Exemples

1° Considérons l'espace $\mathcal{S}$ que nous avons défini au paragraphe précédent. On peut le munir du produit scalaire supplémentaire suivant:

$$(\varphi, \Psi) = \int_{R^n} \overline{\varphi(x)}\, \psi(x)\, d\mu(x) .$$

Ce produit scalaire sépare les éléments de $\mathcal{S}$ et de plus il est continu pour la topologie $\mathcal{S}$ car

$$\|\varphi\| < \|\varphi\|_p \quad \forall\, p \geqslant 1 .$$

Comme on peut le voir par simple inspection des produits scalaires, le complété de cet espace vis à vis de ce produit scalaire est $L^2_\mu(R^n)$ et nous avons bien un triplet de Guelfand

$$\mathcal{S} \subset L^2_\mu\,(R^n, C) \subset \mathcal{S}' .$$

De même en ce qui concerne $\mathcal{S}(\mathcal{H})$, il suffit de le munir du produit scalaire supplémentaire

$$(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\Psi}) = \int_{R^n} (\boldsymbol{\varphi}(x), \boldsymbol{\Psi}(x))\, d\mu(x)$$

on a bien:

$$\|\boldsymbol{\varphi}\| \leqslant \|\boldsymbol{\varphi}\|_p .$$

Le complété de $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ par rapport à ce nouveau produit scalaire est $L^2_\mu(R^n, \mathcal{H})$ et on a bien le triplet de Guelfand suivant

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) \subset L^2_\mu\,(R^n, H) \subset \mathcal{S}'(\mathcal{H}) .$$

Remarques

1° Nous savons très bien que par rapport à la topologie de $L^2_\mu(R^n)$ les opérateurs de multiplication par les variables x_j, les opérateurs de dérivations partielles $\partial/\partial x^j$ et d'une manière générale les opérateurs de dérivations d'ordre fini ne sont pas des opérateurs continus. Par contre en tant qu'opérateurs définis sur $\mathcal{S}$ et pour la topologie d'espace nucléaire, ce sont tous des opérateurs continus; c'est ce qui fait l'intérêt d'introduire une topologie plus fine que la topologie initiale, car les opérateurs qui n'étaient pas continus le deviennent. Par contre la nouvelle topologie n'est pas celle d'un espace normé, elle est seulement métrisable.

2° L'exemple suivant est très important: Soient G un groupe de Lie, $g \to \mathcal{U}(g)$ une représentation unitaire de ce groupe dans un espace d'Hilbert $\mathcal{H}$ séparable. MAURIN (1959) a montré qu'à partir du domaine de Gårding, on peut construire un domaine dense D, stable à la fois par la représentation globale du groupe et par la représentation de l'algèbre de Lie enveloppante; de plus ce domaine peut être muni d'une topologie strictement plus fine que la topologie initiale, pour laquelle c'est un espace nucléaire. De plus l'application identique de D est continue si bien que l'ensemble $D \subset \mathcal{H} \subset D'$ forme bien un triplet de Guelfand.

Remerciements

Je suis particulièrement reconnaissant au Professeur J. M. JAUCH pour son accueil à l'Institut de Physique Théorique de Genève, ses nombreuses suggestions ainsi que pour la lecture attentive et critique du manuscrit.

Je remercie les docteurs FLATO, MISRA, PIRON et D. STERNHEIMER pour de nombreuses conversations sur ce sujet et pour leurs remarques.

Je tiens à remercier les docteurs BKOUCHE, BROISE, ENZ, GEORGE, PETIT, RIDEAU et STORA pour l'intérêt qu'ils ont apporté à ces recherches.

Bibliographie

ANTOINE, J. P. (1966), Thèse (Louvain).
BACRY, H. (1963), Annls. Phys. *8*, 199.
BARGMANN, B. (1947), Ann. Math. *48*, 568; (1954), Ann. Math. *59*, 1; (1962), Rev. mod. Phys. *34*, 829.
BERG, R. A. (1965), J. math. Phys. *6*, 34.
BOUCHIAT, C., et MICHEL, L. (1958), Nucl. Phys. *5*, 416.
CHAKRABARTI, A. (1965), Thèse (Orsay).
DIXMIER (1957), *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien* (Gauthier-Villars).
DUNFORD et SCHWARTZ (1958), Tome I; (1963), Tome II, *Linear Operators* (Interscience Publishers).
FOLDY, L. L. (1956), Phys. Rev. *102*, 568.
GÅRDING, L. (1947), Proc. natn. Acad. Sci. USA *33*, 331; (1960), Bull. Soc. math. Fr. *88*, 73.
GARSOUX, J. (1963), *Espaces vectoriels topologiques et distributions* (Dunod).
GERLACH, E. (1965), Ann. de l'Institut Fourier de Grenoble, XV, *2*, 537.
GROTHENDIECK, A. (1955), Mem. Ann. Math. Soc. n° 16.
GROSSMANN, A. (1964), J. math. Phys. *5*, 1025; (1965), J. math. Phys. *6*, 54; (1966), Communs. Math. Phys. *2*, 1.
GUELFAND, I. M., et VILENKIN, N. Y. (1964), *Generalized functions* vol. 4 (Academic Press).
GUILLOT, J. C., et PETIT, J. L. (1966), Helv. phys. Acta *39*, 711.
HILLE et PHILIPS (1957), *Functional Analysis and Semi Groups* (AMC).
JACOB, M., et WICK, G. C. (1959), Ann. Phys. *7*, 404.
JAUCH, J. M. (1960), Helv. phys. Acta *33*, 711.
JAUCH, J. M., et MISRA, B. (1965), Helv. phys. Acta *38*, 30.
LEVY-LEBLOND, J. M. (1965), Thèse (Orsay).
MAC FARLANE, A. J. (1962), Rev. mod. Phys. *34*, 41; (1963), J. math. Phys. *4*, 490.
MACKEY, G. W. (1952), Ann. Math. *55*, 101.
MAURIN, K. (1959), Bull. Acad. pol. Sci. *7*, 471.
MAYER, E. (1965), Representations of locally compact groups on rigged Hilbert spaces and their possible uses (Preprint).
MICHEL, L. (1959), Nuovo Cim. Suppl., p. 95; (1963/64), Cours sur les interactions faibles I.H.E.S.
MICHEL, L., et WIGHTMAN, A. S. (1955), Phys. Rev. *98*, 1190.
MOUSSA, P., et STORA, R. (1965), Lectures in theoretical Physics VIIa, Boulder, p. 37.
NAIMARK, M. A. (1962), *Les représentations linéaires du groupe de Lorentz* (Dunod).
NELSON, E. (1959), Ann. Math. *70*, 572.
NELSON, E., et STINESPRING, W. F. (1959), Am. J. Math. *81*, 547.
RIDEAU, G. (1966), Preprint.
ROBERTS, J. E. (1966), J. math. Phys. *7*, 1097.
ROSE (1957), Elementary theory of angular momentum (Wiley).
SCHWARTZ, L. (1953/54), Séminaire Faculté des Sciences de Paris; (1954/55), J. Analyse math. *4*, 88.
SEGAL, I. E. (1951), Duke math. J. *18*, 221; (1952), Proc. Am. math. Soc. *3*, 13.
STORA, R. (1962), University of Maryland: Technical report n° 250.
VOISIN, J. (1965), J. math. Phys. *6*, 1519; 1822.
WERLE (1966), *Relativistic Theory of Reactions* (North Holland).
WICK, G. C. (1962), Ann. Phys. *18*, 65.
WIGHTMAN, A. S. (1962), Rev. mod. Phys. *34*, 845; (1961), *Ecole d'été des Houches*.
WIGNER, E. P. (1939), Ann. Math. *40*, 149.