

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta

**Band:** 40 (1967)

**Heft:** 5

**Artikel:** Supraconductivité et potentiels électromagnétiques

**Autor:** Rothen, F. / Rivier, D.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-113784>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Supraconductivité et potentiels électromagnétiques

par F. Rothen<sup>1)</sup> et D. Rivier

Institut de Physique Expérimentale de l'Université de Lausanne

(24 II 67)

*Summary:* This paper is concerned with the various connections existing between the phenomenology of superconductivity and the so-called observability of the electromagnetic potentials. The starting point is a classical model – essentially due to F. LONDON – for the flow of the superconducting electrons: a relativistic fluid, charged, incompressible and non-viscous.

The quantum version of this model presents a striking property, namely the quantization of a certain quantity, the generalized fluxoid, of which two main aspects are the well-known LONDON fluxoid on one side and the *periodic differential action* on the other side. The quantization of this last quantity, closely connected with the existence of a periodicity for the Josephson currents, suggests a new effect involving the scalar potential.

Finally, the main implications of the electrodynamics with non-vanishing photon mass on the phenomenology of superconductivity are established.

## 1. Introduction

Soumis à un champ magnétique suffisamment faible, un supraconducteur de dimensions macroscopiques voit s'annuler en son intérieur le champ d'induction magnétique aussi bien que le champ électrique, pour autant, bien sûr, que l'on ne mesure pas ces champs dans le voisinage immédiat de la surface. En revanche, les potentiels électromagnétiques ne s'y annulent pas en général. Bien plus, malgré l'arbitraire de la jauge, il n'est en général pas possible de les annuler en même temps que les champs, notamment si le spécimen supraconducteur n'est pas simplement connexe.

On le voit bien: pour celui qui s'intéresse à *des effets physiques éventuels des potentiels électromagnétiques*, les supraconducteurs constituent alors un terrain de choix, ces effets ne courant pas le risque d'y être masqués par les phénomènes incomparablement plus grands dûs aux champs eux-mêmes. Par «effets physiques éventuels des potentiels électromagnétiques», on entend ici deux types de phénomènes très différents: en premier lieu, ce qu'il est convenu d'appeler *l'observabilité des potentiels électromagnétiques ou effets AHARONOV-BOHM* [1] et en second lieu *l'action directe de ces potentiels consécutive à l'attribution d'une masse non nulle* [2] donnée au photon.

C'est ainsi qu'on se propose d'analyser dans les pages qui suivent ces deux types d'effets en présence de la supraconductivité. Le modèle initialement adopté pour le supraconducteur est plus général et plus idéalisé encore que celui de LONDON [3]. Par la suite toutefois, on reviendra à des modèles plus réalistes chaque fois qu'il

<sup>1)</sup> Adresse actuelle: Institut für Theoretische Physik (V) der Philipps-Universität, Marburg (L), Germany.

s'avérera nécessaire de discuter de plus près les effets prévus par le modèle élémentaire. Voici les deux questions principales auxquelles plus précisément cette étude se propose de répondre.

*Y a-t-il en supraconductivité un phénomène qui corresponde à la quantification du fluxoïde comme le potentiel scalaire correspond au potentiel vecteur de l'électrodynamique ?*

*Le fait d'attribuer au photon une masse très petite, mais différente de zéro, entraîne-t-il un phénomène tant soit peu observable en supraconductivité ?*

La première partie présente l'étude de certains problèmes concernant la jauge électromagnétique dans les systèmes non simplement connexes ou périodiques; cette étude est nécessaire à la compréhension de ce qui suit. La deuxième partie propose une extension classique (non quantique) du modèle phénoménologique donné par LONDON pour le supraconducteur. La quantification de ce modèle est l'affaire de la troisième partie, qui traite ensuite des conséquences de cette quantification, notamment en ce qui concerne le potentiel scalaire, parent pauvre de la phénoménologie de la supraconductivité jusqu'en 1962, date de la prédiction par Josephson du courant alternatif par effet tunnel qui porte son nom [5]. Enfin, toujours à l'aide du même modèle pour le supraconducteur, la dernière partie étudie les effets physiques éventuels liés à des potentiels électromagnétiques rendus observables par l'attribution au photon d'une masse différente de zéro.

## 2. Première partie

### La jauge électromagnétique dans le cas de systèmes non simplement connexes ou périodiques

Il s'agit essentiellement, dans cette première partie, de préciser le groupe de jauge convenable à la description des phénomènes électromagnétiques dans les deux classes de systèmes envisagés par la suite, à savoir les systèmes non simplement connexes et les systèmes périodiques.

#### 2.1. Systèmes non simplement connexes

Par *système non simplement connexe* (noté  $\Sigma^0$ ) on entend ici un système matériel évoluant dans *une portion non simplement connexe  $\Sigma$  de l'espace-temps*.

Parmi ces systèmes, il est deux catégories spécialement importantes: les systèmes non simplement connexes dans l'espace, et les systèmes non simplement connexes dans le temps.

Un système  $\Sigma_s^0$  est non simplement connexe dans l'espace si toute intersection avec une surface  $S(\tau)$  quelconque du genre temps (c'est-à-dire dont toutes les *normales* sont des quadrivecteurs du genre temps) constitue un domaine connexe ayant un nombre de connexité<sup>2)</sup> fixe.

Semblablement un système  $\Sigma_t^0$  est non simplement connexe dans le temps (figure 2) si toute intersection avec une hypersurface  $S(\tau)$  quelconque du genre temps con-

<sup>2)</sup> Si l'on appelle *section dans un domaine  $\mathcal{D}$  connexe* une surface  $\Sigma$  contenue dans  $\mathcal{D}$  et s'appuyant sur une courbe fermée simple inscrite sur la frontière de  $\mathcal{D}$ , on a la définition suivante: le *nombre de connexité h* de  $\mathcal{D}$  est le nombre maximal de sections  $\Sigma_i$  ( $i = 1, \dots, h$ ) que l'on peut opérer dans  $\mathcal{D}$  en sorte que  $\mathcal{D} - U_i \Sigma_i$  soit encore connexe. (Voir l'article de M. R. SCHAFROTH dans Solid State Phys. 10, Seitz et Turnbull éd., Academic Press 1960).

stitue un domaine comportant un nombre quelconque de composantes connexes, chacune de ces composantes étant simplement connexe.

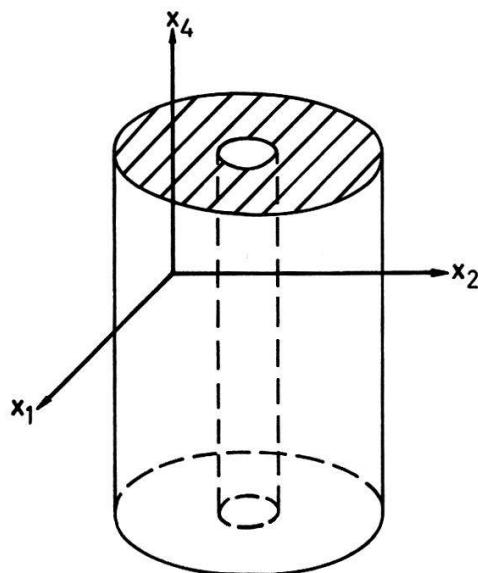


Figure 1

Système non simplement connexe dans l'espace

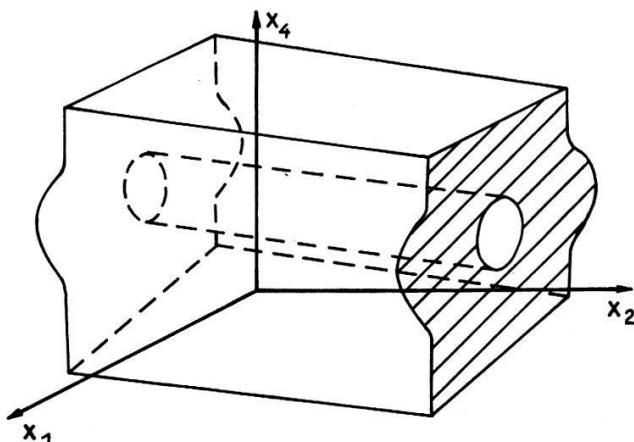


Figure 2

Système non simplement connexe dans le temps

On choisit la jauge des potentiels e.m.  $A_\mu$  en sorte que toute intégrale de la forme  $\Phi_c = \oint_C dx^\mu = A_\mu$ <sup>3)</sup>, où  $C$  appartient à  $\Sigma^0$ , soit *invariante dans le groupe des transformations de jauge* ou, en abrégé, soit un *invariant de jauge*. Cela revient à exiger que  $\Phi_c$  puisse s'exprimer uniquement à l'aide du champ e.m.  $B_{\mu\nu}(x)$  intérieur ou extérieur à  $\Sigma^0$ . En conséquence ne sont admises que les transformations de jauge uniformes. Cette condi-

<sup>3)</sup> Dans les pages qui suivent, nous utilisons fréquemment le formalisme relativiste:  $x \equiv (\mathbf{x}, t)$  désigne le quadrivecteur événement de composantes  $x^\mu$  (l'indice grec prend les valeurs 1, 2, 3, 4 alors que l'indice latin ne désigne que les composantes spatiales 1, 2, 3).  $A(x) \equiv (\mathbf{A}, U/c)$  est le quadrivecteur potentiel.  $B_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu(x)$  est le tenseur du champ électromagnétique. Le produit scalaire  $(a, b)$  de 2 quadrivecteurs  $a, b$  est défini par  $(a, b) = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$  où  $g_{\mu\nu} = 0$   $\mu + \nu$   $g_{ii} = -1$   $g_{44} = 1$ . Par ailleurs, le système d'unités MKSA est utilisé tout au long de ce travail.

tion d'uniformité doit être valable aussi bien pour un système classique que pour un système quantique. Dans ce dernier cas, on sait que le carré du module de la fonction d'ondes doit être uniforme, qu'il s'agisse de systèmes simplement ou multiplement connexes, le raisonnement de SCHROEDINGER [6] pouvant être généralisé sans gêne de la première éventualité à la seconde<sup>4).</sup>

## 2.2. Systèmes périodiques

Considérons un système  $\Sigma$  dont le mouvement peut être complètement décrit par un ensemble de champs  $\{\mathcal{F}(x)\}$  dépendant du quadrivecteur événement  $x$ , les champs  $\{\mathcal{F}(x)\}$  étant *périodiques* de période  $a$ , c'est-à-dire satisfaisant à l'identité

$$\{\mathcal{F}(x + a)\} \equiv \{\mathcal{F}(x)\}$$

où  $a$  est un quadrivecteur de genre quelconque. Par définition, le système  $\Sigma$  est alors *un système périodique de période a*.

Considérons maintenant une courbe  $\bar{c}_k$ <sup>5)</sup> reliant deux événements  $A$  et  $B$  séparés par un multiple, entier ou nul, de la période  $a$ .

$$x_A - x_B = ka \quad k \text{ entier ou nul.} \quad (1)$$

En général,  $\bar{c}_k$  n'est pas une courbe fermée. On voit donc qu'il n'est pas possible d'étendre aux systèmes périodiques le raisonnement invoqué pour l'uniformité de la jauge dans le cas des systèmes non simplement connexes dans le temps. Il n'est notamment pas possible de raisonner sur l'intégrale  $\chi_{\bar{c}_k} = \int_{\bar{c}_k} dx^\mu A_\mu$  pour exiger, par exemple, la périodicité de la jauge.

C'est ainsi que dans le cas des systèmes quantiques il n'existe pas de condition analogue à la condition d'uniformité du carré du module de la fonction d'onde valable pour les systèmes non simplement connexes. Tout au plus peut-on relever que, conformément au théorème de Floquet, une fonction d'onde  $\psi$  qui décrit *un état périodique* satisfait à la relation bien connue

$$\psi_k(x + a) = e^{i(k, a)} \psi_k(x) \quad (1')$$

sans qu'il existe en général de restriction sur la valeur du facteur de phase  $e^{i(k, a)}$ .

## 3. Deuxième partie

### Extension classique du modèle phénoménologique de London pour le supraconducteur

Il est bien connu que, eu égard au caractère non dissipatif de la supraconductivité, la forme des équations du mouvement du supercourant peut apparaître comme indépendante du système de référence, à l'opposé de ce qui se produit dans la conduction normale où le système de référence lié au conducteur joue évidemment un rôle très privilégié. Cette propriété, conforme au principe de relativité, est à l'origine du cadre relativiste que F. et H. LONDON imposèrent tout d'abord à leurs équations [3], cadre

<sup>4)</sup> On peut se référer aussi au travail de TASSIE et PESHKIN [7].

<sup>5)</sup> Toute courbe dont les extrémités satisfont à l'équation (1) est représentée par une lettre soulignée et affectée d'un indice  $k$  qui est l'entier apparaissant au second membre de cette équation.

qui est déjà suggéré par le fait que le champ d'induction et *le champ électrique* s'annullent simultanément à l'intérieur d'un supraconducteur macroscopique. Par rapport aux équations non relativistes, ce modèle introduit des corrections en  $v/c$  qui n'ont apparemment pas de sens; d'un point de vue heuristique pourtant, le modèle relativiste est déjà fort utile dans certaines situations, comme l'a montré notamment la théorie des supraconducteurs tournants de London. Mais lorsqu'il s'agit de mettre en évidence des phénomènes directement liés aux propriétés du quadrivecteur potentiel, le modèle relativiste de LONDON se trouve tout particulièrement bien adapté.

Le propos des pages qui suivent<sup>6)</sup> est de généraliser le modèle phénoménologique de LONDON notamment afin de décrire les phénomènes périodiques dont l'aspect quantique est déterminant pour les réponses à donner aux questions posées dans l'introduction.

Dans sa première analyse [3], LONDON a déjà montré qu'un supraconducteur obéissant aux équations qui portent son nom se comporte classiquement comme *un fluide parfait chargé et incompressible animé d'un mouvement irrotationnel*.

C'est ce modèle hautement idéalisé plutôt qu'un modèle plus réaliste qui sert de fondement à cette étude. En raison de sa simplicité même, ce modèle s'adapte parfaitement au formalisme quadridimensionnel. Par ailleurs, il se prête admirablement à diverses extensions, et notamment à sa quantification, quantification dont LONDON avait déjà lui-même suggéré l'intérêt [3].

*Le superfluide chargé* est donc défini comme un fluide parfait, en mouvement irrotationnel et tel que le rapport de la densité de charge  $\varrho$  à la masse  $m$  soit une constante dans l'espace-temps selon

$$\begin{aligned}\varrho(x) &= n(x) e^* \\ m(x) &= n(x) M^*\end{aligned}$$

où  $n(x)$  est le nombre spécifique de particules chargées et où les constantes  $e^*$  et  $M^*$  sont encore indéterminées. Il est avantageux<sup>7)</sup> d'associer à la description relativiste du mouvement du superfluide chargé le quadrivecteur *momentoïde classique* défini par

$$p_\mu^c(x) = (M^* u_\mu + e^* A_\mu)(x)$$

fonction du quadrivecteur événement  $x$  où  $u_\mu$  est la quadrititesse normalisée d'un élément de fluide<sup>8)</sup>

$$\begin{aligned}u^\alpha(x) &= \left( \frac{\mathbf{v}(x, t)}{(1 - (v/c)^2)^{1/2}}, \frac{c}{(1 - (v/c)^2)^{1/2}} \right) \\ u_\alpha u^\alpha &= c^2.\end{aligned}$$

Les équations de mouvement du superfluide chargé relativiste entraînent pour le momentoïde la relation

$$p_\mu^c = -\partial_\mu S^c(x) \quad (2)$$

où  $S^c(x)$  est une fonction scalaire quelconque<sup>9)</sup> du quadrivecteur  $x$ .

<sup>6)</sup> Le lecteur est ici prié de se reporter à une première publication [8] désignée ici par le symbole PI – et qui a traité ce problème en détail. L'essentiel seul est ici repris.

<sup>7)</sup> Voir PI.

<sup>8)</sup> C'est, bien sûr, la description d'Euler du mouvement d'un fluide qui est ici utilisée.

<sup>9)</sup> Voir PI.

Si l'on définit le supercourant  $j_\alpha^s$  par

$$j_\alpha^s = ne^* u_\alpha$$

la relation (2) est équivalente à la forme relativiste des équations de LONDON<sup>10)</sup>

$$\partial_\alpha (\Lambda j_\beta^s + A_\beta) - \partial_\beta (\Lambda j_\alpha^s + A_\alpha) = 0 \quad \text{où } \Lambda = \frac{M^*}{e^{*2} n}. \quad (3)$$

$S^c(x)$  n'est pas nécessairement une fonction uniforme. Considérons maintenant l'intégrale curviligne le long d'une courbe fermée  $\gamma$

$$\Delta_\gamma S^c(Q) = - \oint_\gamma dx^\mu p_\mu^c. \quad (4)$$

A cause de (2), sa valeur ne dépend que de la classe d'homotopie à laquelle appartient la courbe  $\gamma$  inscrite dans le domaine de validité  $\mathcal{D}$  des équations<sup>11)</sup>, et cette valeur est nulle lorsque la courbe  $\gamma$  est homotope à 0. L'intégrale curviligne  $\Delta_\gamma S^c(G)$  est donc une grandeur caractéristique des systèmes non simplement connexes. Par ailleurs, une déformation infinitésimale de  $\gamma$  ne change pas la valeur de  $\Delta_\gamma S^c(G)$ ; c'est ce que l'on symbolise par l'équation

$$\delta \Delta_\gamma S^c(Q) = 0. \quad (5)$$

A ces propriétés caractéristiques de l'intégrale curviligne  $\Delta_\gamma S^c(Q)$  correspondent des propriétés importantes pour chacun des cas particuliers de superfluide chargé, non simplement connexe dans l'espace, non simplement connexe dans le temps et périodique. Les voici:

### 3.1. Le cas du superfluide chargé non simplement connexe dans l'espace<sup>12)</sup>

Si  $\gamma$  est une courbe  $C$  fixe dans l'espace, la relation (5) exprime simplement la conservation du fluxoïde au cours du temps

$$\frac{\delta}{\delta t} \Delta_c S^c(Q) = \frac{\delta}{\delta t} e^* \oint_c d\mathbf{x} (\Lambda \mathbf{j}_s + \mathbf{A}) = 0. \quad (5')$$

### 3.2. Le cas du superfluide chargé non simplement connexe dans le temps

En vertu de la définition d'un tel système, il est facile de voir que le superfluide évolue dans un grand domaine  $\mathcal{D}$  décomposable en un nombre fini de domaines  $\mathcal{D}', \mathcal{D}'' \dots$  simplement connexes qui, joints à un instant donné, se séparent pendant un intervalle de temps fini pour se rejoindre ensuite. Si deux points  $P' \in \mathcal{D}'$  et  $P'' \in \mathcal{D}''$  appartenant au superfluide suivent le mouvement global du domaine  $\mathcal{D}'$  ou  $\mathcal{D}''$  donc chacun fait partie, une courbe fermée  $\gamma$  peut être construite de la manière suivante:

<sup>10)</sup> Dans le cas d'un supraconducteur de London  $n$  et par conséquent  $\Lambda$  sont des constantes, ce qui revient à dire que le fluide est incompressible. Ceci peut se réaliser si l'on plonge le superfluide dans un milieu homogène relativement «rigide» et de charge opposée (le reste du métal). L'introduction de ce nouveau fluide ne modifie guère le résultat autrement que par le fait qu'alors  $j_\alpha^s \approx (\mathbf{j}^s, 0)$  [3].

<sup>11)</sup> Voir PI.

<sup>12)</sup> Voir PI.

Soient  $t_1$  et  $t_2$  deux instants où  $P'$  et  $P''$  peuvent être reliés dans le référentiel choisi par des courbes  $\Gamma(t_1)$  et  $\Gamma(t_2)$  de l'espace, courbes entièrement inscrites dans le superfluide;

Soient encore  $L'$  et  $L''$  les segments des lignes d'univers de  $P'$  et  $P''$  entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ .  $\gamma'$  est alors la courbe de l'espace-temps formée des segments  $\Gamma(t_1)$ ,  $L'$ ,  $\Gamma(t_2)$  et  $L''$  (figure 4).

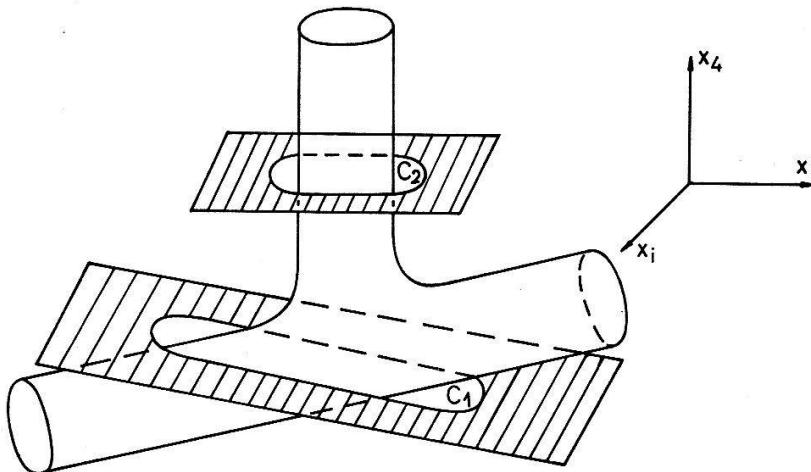


Figure 3

Exemples de courbes ( $C_1$ ,  $C_2$ ) inscrites dans un hyperplan de genre temps

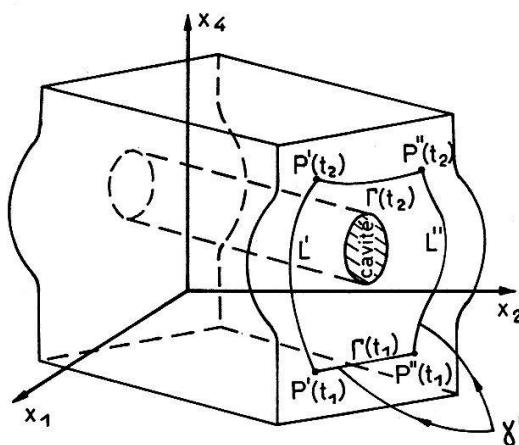


Figure 4

Courbe fermée  $(L, \Gamma)_{t_2}(L'' \Gamma(t_1))$  non homotope à un point, inscrite dans un système non simplement connexe dans le temps, et pour lequel le fluxoïde correspondant n'est pas trivial

Relativement à la courbe  $\gamma'$ , l'invariant (4) devient

$$\begin{aligned} A_{P''P'} S^c(\mathbb{Q}) = & \int_{t_1}^{t_2} dt \{ [(\mathbf{p}^c \cdot \mathbf{v}) (P'') - (\mathbf{p}^c \cdot \mathbf{v}) (P')] - [c p_4^c (P'')] \\ & - c p_4^c (P')] \} - \int_{P'}^{P''} d\mathbf{x} [\mathbf{p}^c(t_2) - \mathbf{p}^c(t_1)] \end{aligned} \quad (6)$$

où  $\mathbf{v}(P, t)$  est la vitesse du point  $P$  (sur sa trajectoire). Quant à la relation (5), elle montre que l'invariant ne dépend pas du point  $P$  particulier choisi à l'intérieur d'un domaine connexe du supraconducteur

$$\frac{\delta}{\delta P} \Delta_{PP_0} S^c (\mathbb{Q}) = 0 . \quad (5'')$$

Considérons le cas particulier où tout champ magnétique est exclu ( $A = 0$ ), en prenant un référentiel tel que  $\mathbf{j}(t_1) = \mathbf{J}(t_2) = 0$ . La relation (6) donne simplement en écriture conventionnelle

$$\begin{aligned} \Delta_{PP_0} S^c (\mathbb{Q}) &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \left[ M^* c^2 \left( 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right)^{1/2} + e^* U \right] (P) \right. \\ &\quad \left. - \left[ M^* c^2 \left( 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right)^{1/2} + e^* U \right] (P_0) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

La relation (5) affirme notamment que cet invariant est le même pour deux points voisins  $P$  et  $P'$ :

$$\frac{\delta}{\delta P} \Delta_{PP_0} S^c (\mathbb{Q}) = 0 .$$

Il est ici naturel de généraliser la notion de fluxoïde en introduisant le *fluxoïde généralisé* défini par la quantité

$$\phi_\gamma^c = \frac{1}{e^*} \Delta_\gamma S^c (\mathbb{Q})$$

à la fois invariant de jauge et invariant relativiste.

### 3.3. Le cas du superfluide chargé à structure périodique<sup>12a)</sup>

Si dans un système constitué par un superfluide chargé dans un domaine  $\bar{\Sigma}$  à structure simplement connexe et périodique,  $c(x_i)$  désigne un segment dont les deux extrémités  $x_i$  et  $x_f = x_i + a$  sont séparées par le quadrivecteur période  $a$  du système, l'expression

$$\Delta_{\bar{c}(x_i)} S(a) = - \int_{\bar{c}(x_i)} p_\mu^c dx^\mu$$

ne change pas si l'on remplace  $\bar{c}(x_i)$  par un autre segment  $\bar{c}(x'_i)$  défini de la même manière mais dont l'origine est un autre point  $x'_i$  quelconque; on symbolise ce fait par

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \Delta_{\bar{c}} S(a) = 0 . \quad (8)$$

Si  $\bar{\Sigma}$  est *périodique* et *non simplement connexe*, – chacune des composantes connexes de  $\bar{\Sigma}$  étant simplement connexe –, la relation (8) n'est valable qu'à l'intérieur d'une même composante connexe.  $\Delta_{\bar{c}} S(a)$  ne dépend pas du choix particulier de  $\bar{c}$  mais dépend en général de la composante connexe à laquelle appartient  $\bar{c}$ .

<sup>12a)</sup> Dans PI, ce cas a été traité d'une façon différente qui limite notamment la généralité des résultats obtenus par une condition supplémentaire (p. 131, ligne 6).

En vertu des conditions imposées aux transformations de jauge dans la première partie,  $\Delta_{\bar{c}} S(a)$  n'est en général pas un invariant de jauge. En revanche la différence

$$\delta \Delta_{\alpha\beta} S(a) = \Delta_{\bar{c}_\alpha} S(a) - \Delta_{\bar{c}_\beta} S(a)$$

relative aux courbes  $\bar{c}_\alpha$  et  $\bar{c}_\beta$  appartenant aux composantes connexes  $\Sigma_\alpha$  et  $\Sigma_\beta$  respectivement, est un véritable invariant de jauge. Le rapport de cet invariant à la quantité  $e^*$ , soit

$$A_a(\alpha, \beta) \equiv \frac{1}{e^*} \delta \Delta_{\alpha\beta} S(a) \quad (9)$$

est par définition l'action périodique différentielle  $A_a(\alpha, \beta)$  du système superfluide chargé à structure périodique. La valeur de l'action périodique différentielle ne dépend que des origines des courbes  $\bar{c}_\alpha$  et  $\bar{c}_\beta$ ; elle est nulle lorsque ces deux origines appartiennent à la même composante connexe. Ainsi l'action périodique différentielle  $A_a(\alpha, \beta)$  est une grandeur caractéristique des systèmes non connexes.

Dans le cas particulier où le mouvement est périodique, c'est-à-dire si la période  $a$  est temporelle, il existe un référentiel où  $a$  prend la forme  $a \equiv (0, 0, 0, cT)$ .

L'invariant caractéristique  $\Delta_{\bar{c}_\alpha} S^c(a)$  devient

$$\Delta_{\bar{c}_\alpha} S^c(T) = -c \int_{\bar{c}_\alpha} dt p_4^c .$$

La relation (4) permet notamment d'affirmer que cet invariant ne change pas de valeur lorsque l'origine de  $\bar{c}_\alpha$  se déplace dans la même composante connexe  $\Sigma_\alpha$

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{x}} \Delta_{\bar{c}_\alpha} S^c(T) = 0 .$$

Dans le cas où la période est de genre espace, il existe un référentiel tel que  $a \equiv (a_1, a_2, a_3, 0) \equiv (\mathbf{a}, 0)$ . Dans ce cas particulier

$$\Delta_{\bar{c}_\alpha} S^c(\mathbf{a}) = 0$$

et ici encore

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{x}} \Delta_{\bar{c}_\alpha} S^c(\mathbf{a}) = 0$$

pour autant que le déplacement  $\delta \mathbf{x}$  soit entièrement à l'intérieur d'une même composante connexe  $\Sigma_\alpha$ .

### 3.4. Forme de l'action périodique dans un supraconducteur de London

Les équations de LONDON sous forme conventionnelle

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \text{rot } A \mathbf{j}_s + \mathbf{B} = 0 \\ \text{b)} \quad & \partial_t A \mathbf{j}_s - \mathbf{E} = 0 \quad A = \text{cte} \end{aligned} \quad (10)$$

auxquelles il faut ajouter la condition de quasistationnarité

$$\text{div } \mathbf{j}_s = 0 \quad (11)$$

– qui implique que  $\mathbf{E}$  lui-même est un champ conservatif – ne coïncident pas exactement avec la limite non relativiste des équations de mouvement du superfluide chargé,

(10b) étant remplacé dans ce dernier cas par

$$\partial_t A \mathbf{j}_s + \text{grad} \frac{e^*}{2 M^*} A^2 \mathbf{j}_s^2 - \mathbf{E} = 0 . \quad (10b')$$

La condition (11) a pour effet de simplifier la forme de l'action périodique dans un supraconducteur de LONDON obéissant aux relations (10). Cette action prend la forme

$$A_T^c = - \int_{t_0}^{t_0+T} dt' U(t')$$

dans un système dont le mouvement est périodique dans le temps<sup>14)</sup>.

Une modification correspondante est requise pour le fluxoïde généralisé caractéristique d'un système non simplement connexe dans le temps.

#### 4. Troisième partie

##### La quantification du modèle du superfluide chargé et ses conséquences

###### 4.1. La quantification du fluxoïde généralisé et de l'action périodique différentielle

La quantification de la théorie<sup>15)</sup> relativiste du superfluide chargé donnée plus haut s'obtient formellement par l'introduction d'une fonction d'onde scalaire  $\psi(x_\nu)$  relative à une particule de charge  $e^*$  et de masse  $M^*$ <sup>16)</sup>. Si l'on explicite la phase  $1/\hbar S^Q(x)$  de  $\psi$ :

$$\psi(x^\nu) = | \psi(x^\nu) | \exp \frac{i}{\hbar} S^Q(x^\nu)$$

on constate qu'elle obéit aux mêmes relations que la fonction  $S^c(x_\nu)$  introduite plus haut, à condition de définir un courant  $j_\alpha^Q(x_\nu)$  de la manière usuelle:

$$j_\mu^Q(x_\nu) = \frac{\hbar e^*}{2 M^*} (\psi^* \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \psi)^* \psi) - \frac{e^{*2}}{M^*} |\psi|^2 A_\mu$$

et le quadrivecteur  $p_\alpha^Q$  par

$$p_\alpha^Q = \frac{M^*}{e^* |\psi|^2} j_\alpha^Q + e^* A_\alpha .$$

Du fait que  $\psi(x)$  est une fonction scalaire et uniforme<sup>17)</sup>,  $S^Q$  jouit d'une propriété supplémentaire: la variation  $\Delta_\gamma S^Q(Q)/\hbar$  le long d'une courbe fermée  $\gamma$  du domaine occupé par le superfluide doit être un multiple entier de  $2\pi$ .

D'où la relation

$$\Delta_\gamma S^Q(Q) \equiv - \oint dx^\mu p_\mu^Q = 2\mu n \hbar = n h . \quad (12)$$

$n = \text{entier quelconque}$

<sup>13)</sup> LONDON [3] et SOROKIN [9] précisent les conditions dans lesquelles un passage de (10b') à (10b) et (11) peut se justifier.

<sup>14)</sup> Les relations (10) ne restent valables que si la période  $T$  du système reste supérieure à  $h/kTc$  ( $k = \text{cte de Boltzmann}$ ,  $Tc = \text{température de transition du supraconducteur}$ ).

<sup>15)</sup> Voir PI.

<sup>16)</sup> Voir PI.

<sup>17)</sup> Voir PI.

Dans un système *périodique* et simplement connexe de période  $a$ , la variation de la phase de la fonction d'onde le long du segment  $\bar{c}_K$  reliant deux points  $x_i$  et  $x_f = x_i + a$  de la  $K^{\text{ième}}$  composante  $C_K$  du système  $\bar{\Sigma}$  s'écrit

$$\Delta_{\bar{c}_K} \frac{S^Q(a)}{\hbar} = - \frac{1}{\hbar} \int_{\bar{c}_K} dx^\nu \rho_\nu^Q \quad (K = 1, 2 \dots N).$$

En vertu de la relation (1'), on a bien sûr

$$\Delta_{\bar{c}_K} \frac{S^Q(a)}{\hbar} = k(a). \quad (13)$$

Il est toujours possible d'écrire

$$k(a) = 2\pi (n_K + r_K).$$

où  $n_K$  est un entier éventuellement fonction de  $K$  et  $r_K$  un nombre dépendant aussi de  $K$  compris entre 0 et 1.

Envisageons l'union de deux systèmes  $\bar{\Sigma}_L$  et  $\bar{\Sigma}_K$  caractérisés par la même période  $a$ . L'action périodique différentielle relative à  $\bar{\Sigma}$  union de  $\bar{\Sigma}_L$  et  $\bar{\Sigma}_K$  s'écrit

$$\delta \Delta_{KL} \frac{S^Q(a)}{\hbar} \equiv \Delta_L \frac{S^Q(a)}{\hbar} - \Delta_K \frac{S^Q(a)}{\hbar} = 2\pi [(n_L - n_K) + (r_L - r_K)] \quad (L, K = 1, 2).$$

Si  $\bar{\Sigma}_L$  et  $\bar{\Sigma}_K$  sont isolés l'un de l'autre,  $r_L - r_K$  est arbitraire. En revanche, s'il existe un couplage entre les deux,  $\Sigma_K$  et  $\Sigma_L$  sont parties dépendantes d'un même système  $\bar{\Sigma}$  et alors  $r_K = r_L$ . Il vient donc

$$\delta \Delta_{KL} \frac{S^Q(a)}{\hbar} = 2\pi n_{KL}. \quad (13')$$

Les relations (12) et (13') expriment la quantification du fluxoïde généralisé  $\phi_\gamma^Q = A_\gamma S^Q(\mathbb{G})/e^*$  et de l'action périodique différentielle<sup>18)</sup>  $\delta \Delta_{KL} S^Q/\hbar$ .

- a)  $\phi_\gamma^Q = n' \frac{h}{e^*}$
- b)  $A_a^Q(K, L) = n'' \frac{h}{e^*} \quad n', n'' = \text{nombres entiers quelconques}^{19)}$

#### 4.2. Les confirmations expérimentales des propriétés du modèle du superfluide chargé

C'est ici le moment de commenter les confirmations expérimentales de la quantification du fluxoïde généralisé et de l'action périodique différentielle, invariants pour lesquels les comportements du superfluide chargé et du supraconducteur de LONDON sont identiques, même si leurs expressions diffèrent légèrement : cette distinction sera donc passée sous silence.

<sup>18)</sup> Nous réservons le nom d'action périodique différentielle à la différence  $\delta \Delta_{KL} (S^Q(a)/\hbar)$  relative à deux composantes connexes du même système non connexe.

<sup>19)</sup> Ces relations permettent ainsi de déterminer expérimentalement la constante  $e^*$ . Quant au rapport  $e^*/M^*$ , on l'obtient en mesurant le moment magnétique d'un supraconducteur en rotation uniforme [10].  $e^*$  et  $M^*$  correspondent respectivement au double de la charge et de la masse électroniques, conformément à l'hypothèse de COOPER [11].

#### 4.2.1. *Les systèmes de supraconducteurs non simplement connexes dans l'espace*

Le comportement bien connu de ces systèmes caractérisés avant tout par la quantification du fluxoïde a déjà été discutée dans PI (ch. III) mémoire auquel le lecteur peut se reporter.

#### 4.2.2. *Les systèmes de supraconducteurs non simplement connexes dans le temps*

Un système non simplement connexe du point de vue temporel peut (du moins en principe) être constitué de la manière suivante: Deux éléments  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  d'un supraconducteur sont en contact aussi étroit que possible, excluant notamment la présence d'une couche isolante à la surface de contact. A l'instant  $t_i$ ,  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont séparés pour être soumis à une différence potentiel  $U(\mathcal{D}_2) - U(\mathcal{D}_1)$  durant un certain intervalle de temps  $\Delta t$ , après quoi  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ , étant à nouveau au même potentiel, sont à nouveau mis en contact. On peut s'attendre à voir les phases des fonctions d'ondes relatives à  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  interférer pour donner naissance à des courants de frontière entre  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ , un état d'équilibre *stationnaire* s'établissant dès l'instant  $t_f > t_i$  (voir section 4.4.). La quantification du fluxoïde généralisé donne alors, en vertu de (7), la relation suivante pour les différences de potentiel  $U(\mathcal{D}_2) - U(\mathcal{D}_1)$

$$\int_{t_i}^{t_f} dt (U(P_2) - U(P_1)) = n \frac{\hbar}{e^*}. \quad (14')$$

Il convient de noter que *la présence des courants de frontière entre  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  est l'effet d'une action directe du potentiel scalaire seul, la condition*

$$\mathbf{E} \psi = 0 \quad (15)$$

*étant constamment et parfaitement réalisée dans le supraconducteur jusqu'à l'apparition des courants.*

Dans l'expérience d'interférence électronique imaginée par AHARANOV-BOHM pour mettre en évidence cette même action directe du potentiel scalaire, la relation (15) n'est pas strictement réalisée à l'intérieur des 2 conducteurs où se déplacent les 2 groupes d'électrons qui vont interférer au voisinage de l'écran.

#### 4.2.3. *La quantification de l'action périodique différentielle et la période des supracourants de Josephson*

Deux supraconducteurs séparés par une étroite barrière diélectrique peuvent être le siège de courants par effet tunnel au travers de celle-ci. Dans son ensemble, si, dans une première expérience, ce système peut être considéré comme un supraconducteur non connexe, chacun des supraconducteurs est soumis à un potentiel électrique périodique  $U(1, t)$  ou  $U(2, t)$ , les courants dans le système sont également périodiques. Par contre lorsque, dans une seconde expérience, le système des 2 supraconducteurs est soumis, en régime stationnaire, à un champ d'induction parallèle à la barrière diélectrique, les répartitions du courant et du champ sont, si la géométrie le permet, périodiques au voisinage de cette barrière. Dans les deux expériences précitées, il

apparaît que toutes les conditions sont satisfaites pour mettre en évidence la quantification de l'action périodique différentielle. Les relations (7) et (14') donnent en effet

$$\int_{t_0}^{t_0+T} dt (U(1, t) - U(2, t)) = n' \frac{h}{e^*} \quad (16a)$$

pour la première expérience, et

$$\int_{\tilde{c}(\mathbf{x}_1)}^{\tilde{c}(\mathbf{x}_2)} d\mathbf{x} (\Lambda \mathbf{j}_s + \mathbf{A}) - \int_{\tilde{c}(\mathbf{x}_2)}^{\tilde{c}(\mathbf{x}_1)} d\mathbf{x} (\Lambda \mathbf{j}_s + \mathbf{A}) = n'' \frac{h}{e^*} \quad (16b)$$

$n'$  et  $n''$  entiers quelconques

pour la seconde, selon que la période est du genre temps ou du genre espace. Prévue par FERREL et PRANGE [11], la périodicité des courants stationnaires par effet tunnel, a été observé pour la première fois par ANDERSON et ROWELL [12].

Lorsqu'il existe en plus une périodicité spatiale dans le système supraconducteur, la relation (16b) traduit la proposition suivante: *Le fluxoïde  $\psi_c$  relatif à une courbe fermée simple  $C$ , frontière de la portion de surface  $\Sigma_c$  engendrée par le déplacement parallèle du vecteur-période  $\mathbf{a}$  est quantifié aux valeurs  $n h/e^*$  ( $n$  entier).*

Dans le cas simple étudié par FERREL et PRANGE,  $n$  ne peut prendre que les valeurs 1, 0, -1.

Si les points  $P_1$  et  $P_2$  sont des distances  $d_1$  et  $d_2$  de  $S$  notablement supérieures à la profondeur de pénétration  $\lambda$ , le fluxoïde  $\psi_c$  se réduit au flux d'induction magnétique  $\phi_{\Sigma_c}$  à travers  $\Sigma_c$ . En effet  $\mathbf{j}_s$  est nul le long des trajets  $P_1 P'_1$  et  $P_2 P'_2$  alors que la périodicité entraîne la compensation des contributions restantes. On a donc

$$\lim (\psi_c - \phi_{\Sigma_c}) = 0$$

$$\frac{d_1}{\lambda}, \frac{d_2}{\lambda} \rightarrow \infty .$$

#### 4.3. Le système d'équations pour la fonction d'onde du système supraconducteur

Aucun des raisonnements avancés jusqu'ici ne s'est explicitement référé au système d'équations suivies par la fonction d'onde  $\psi(x)$  du système supraconducteur. En régime stationnaire, ces équations sont évidemment celles de GINZBURG-LANDAU [12]<sup>20)</sup>, pour autant que les conditions qui en assurent la validité soient remplies.

Parmi les généralisations de ces équations aux phénomènes non stationnaires [14] le système suivant convient bien au cas d'un régime quasi-stationnaire dans un supraconducteur homogène du type I:

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{he^*}{2M^* i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{e^{*2}}{M^*} |\psi|^2 \mathbf{A} \right) (\mathbf{x}, t) \quad (17a)$$

$$\left( \frac{he^*}{2Mi^*} (\psi \partial_t \psi^* - \psi^* \partial_t \psi) - \frac{e^{*2}}{M^*} |\psi|^2 U \right) (\mathbf{x}, t) = 0 \quad (17b)$$

$$\left( \mathbf{n} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - e^* \mathbf{A} \right) \psi \right) (\mathbf{y}, t) = 0 \quad (17c)$$

<sup>20)</sup> Nous usons du symbole *GL* pour les désigner.

où  $\mathbf{x}$  désigne un point intérieur au supraconducteur et  $\mathbf{y}$  un point de sa surface, de normale  $\mathbf{n}$ . Il importe ici surtout de signaler que ce système d'équations (17), obtenu sous une autre forme par STEPHEN et SUHL [13], possède une solution approchée  $\psi_0(\mathbf{x}, t)$  de module constant

$$|\psi_0(\mathbf{x}, t)| = \Psi_0(T) \quad (17')$$

$\Psi_0(T)$  étant une constante positive dépendant de la température.

Si l'on pose

$$\psi(\mathbf{x}, t) = |\psi(\mathbf{x}, t)| e^{i\varphi(\mathbf{x}, t)}$$

le système (17) se simplifie en

$$\left( \mathbf{j}_s = \frac{e^*}{M^*} |\psi|^2 [\hbar \nabla \varphi - e^* \mathbf{A}] \right) (\mathbf{x}, t) \quad (18a)$$

$$(|\psi|^2 (\hbar \partial_t \varphi + \varepsilon^* U)) (\mathbf{x}, t) = 0 \quad (18b)$$

$$\left( \mathbf{n} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - e^* \mathbf{A} \right) \psi \right) (\mathbf{y}, t) = 0. \quad (18c)$$

Dans l'approximation (17'), ce système se réduit aux équations de LONDON : il suffit pour cela de prendre d'abord le rotationnel, puis la dérivée par rapport au temps de (17a), et d'y insérer (17b) :

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(T) \mathbf{j}_s(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (19a)$$

$$\partial_t \mathbf{A}(T) \mathbf{j}_s(\mathbf{x}, t) - \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (19b)$$

où l'on pose  $A(T) = M^*/e^{*2} \Psi_0^2(T)$ .

A titre d'exemple, appliquons le système d'équations (17) au cas particulier du système de 2 supraconducteurs séparés par une étroite barrière diélectrique, tel qu'il a été envisagé, sous le chiffre 4.2.3.

La relation (17c) devient ici

$$\mathbf{n} \left[ \left( \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - e^* \mathbf{A} \right) \psi \right) (\mathbf{y}_1, t) - \left( \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - e^* \mathbf{A} \right) \psi \right) (\mathbf{y}_2, t) \right] = 0 \quad (20)$$

les symboles  $\mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{y}_2$  désignant des points situés sur chacun des côtés de la barrière diélectrique. Cette relation (20) ne suffit pas à déterminer la densité du supercourant à travers la barrière ; pour l'obtenir, l'expression  $(\mathbf{n} ((\hbar/i) \nabla - e^* \mathbf{A}) \psi)$  peut être développée en puissance de  $\psi(\mathbf{y}_1)$  et  $\psi(\mathbf{y}_2)$  jusqu'au deuxième ordre  $|\psi(\mathbf{y}_1)|^2$  et  $|\psi(\mathbf{y}_2)|^2$ . Si l'on a  $J_s(\mathbf{y}_2^1) \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_s(\mathbf{y}_2^1)$ , les conditions d'invariance de jauge, de symétrie de la barrière ( $J_s$  doit changer de signe lorsqu'on permute les rôles de  $\psi_1$  et  $\psi_2$ ), et de conservation de la charge au travers de la barrière (absence de source de supercourant dans la barrière) conduisent nécessairement à l'expression suivante pour la densité de supercourant à travers la barrière :

$$J_s(\mathbf{y}) = \frac{e^* K}{2 M_i^*} (\psi_1 \psi_2^* - \psi_1^* \psi_2) \quad (21)$$

où  $K$  est un nombre réel quelconque.

#### 4.4. Retour sur un cas particulier de système non simplement connexe dans le temps

Il existe une autre façon d'introduire une discontinuité de phase à la frontière de deux supraconducteurs: c'est d'envisager un système non simplement connexe dans le temps, tel qu'il a été déjà décrit sous chiffre 4.2.2.

Détaillée et précisée, l'évolution de ce système est la suivante: les deux éléments supraconducteurs  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont initialement en contact électrostatique, réalisé alors dans tout le système. En l'absence de champ magnétique, les éléments  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont séparés à l'instant  $t_0$  puis soumis à une différence de potentiel  $\Delta U(t)$  ainsi définie

$$\Delta U(t) = \begin{cases} 0 & t_0 \leq t < t_1 \\ \Delta V(t) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & t_2 < t \leq t_3 \end{cases}$$

A l'instant  $t_3 > t_2$ , et encore en l'absence de champ magnétique,  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont à nouveau mis en contact électrique. Égales pour des temps  $t \leq t_0$ , les phases  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  de la fonction d'onde aux deux points  $P_1 \in \mathcal{D}_1$  et  $P_2 \in \mathcal{D}_2$  satisfont, pour les temps  $t$  compris entre  $t_2$  et  $t_3$ , à la relation suivante

$$\Delta\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) = - \int_{t_1}^{t_2} dt' e^* \frac{\Delta V(t')}{\hbar} \quad t_2 \leq t \leq t_3 \quad (21')$$

aisément déduite de (19b)

A la condition que le contact soit assez bon pour qu'un couplage puisse réellement s'établir entre les deux supraconducteurs  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ , la différence de phase (21') entraîne en général entre ces derniers, l'existence d'un courant dont la densité normale est donnée au temps  $t_3$  par

$$J_s(t_3) = \frac{e^* K}{M^*} |\psi|^2 \sin \Delta\varphi \quad (21'')$$

comme le montre la relation (21) où l'on a fait  $|\psi(\mathbf{y}_1)|^2 = |\psi(\mathbf{y}_2)|^2 = |\psi|^2$  et où  $K$  est une constante dépendant du couplage entre les supraconducteurs.

L'expression (21'') ne donne que la valeur instantanée au temps  $t_3$  de  $J$ , lequel évolue par suite du contact rétabli entre  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ . Pour trouver sa valeur à un temps quelconque postérieur à  $t_3$ , il suffit de connaître l'évolution de la différence de phase  $\Delta\varphi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$   $t > t_3$ . A cet effet, on élimine la différence de potentiel  $\Delta U(t) = U_2(t) - U_1(t)$  entre les 3 équations<sup>21)</sup>

$$a) \quad \left( \partial_t \Delta\varphi + \frac{e^*}{\hbar} \Delta U \right) (t) = 0 \quad (22a)$$

$$b) \quad (J_s - J_0 \sin \Delta\varphi) (t) = 0 \quad (22b)$$

$$c) \quad \left( J - \frac{e}{L} \partial_t \Delta U \right) (t) = 0. \quad (22c)$$

La première est une conséquence immédiate de (18b), la seconde n'est autre que (21) réécrite en posant  $J_0 = e^* K / M^*$ . Quant à la troisième, c'est la relation de Maxwell-

<sup>21)</sup> Le champ magnétique est certainement négligeable si les dimensions de la jonction sont inférieures à la profondeur de pénétration de JOSEPHSON.

Ampère appliquée à la discontinuité  $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2$ .  $\epsilon$  est la constante diélectrique effective<sup>22)</sup> du «milieu» séparant les points  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .  $L$  étant la distance entre ces points. Quant à la densité de courant  $J$  apparaissant au (22c), elle se décompose en deux termes selon

$$J = J_n(\Delta U) + J_s$$

où  $J_s$  est la densité de supercourant figurant dans (21) et (22b), tandis que  $J_n(\Delta U)$  correspond au courant normal dissipatif ( $T \neq 0$ ) franchissant la discontinuité  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sous l'effet de la différence de potentiel  $\Delta U$ .

L'élimination de  $\Delta U$  entre les 3 équations (22) donne

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta\varphi + \frac{e^* L}{\epsilon \hbar} J_n \left( \frac{\hbar}{e^*} \frac{d}{dt} \Delta\varphi \right) + \frac{J_0 e^* L}{\epsilon \hbar} \sin \Delta\varphi = 0 \quad (23)$$

équation différentielle non linéaire pour la différence de phase  $\Delta\varphi$  décrivant une marche vers l'équilibre, identique à l'équation du mouvement pour l'elongation angulaire du pendule mathématique dont la force de frottement serait proportionnelle à la fonction  $J_n(\hbar/e^* d/dt \Phi)$ .

Quant aux conditions initiales de l'équation (23), elle sont évidemment

$$\begin{cases} \Delta\varphi(t_3) = \int_{t_1}^{t_2} dt' \frac{e^*}{\hbar} \Delta V(t') \\ \left( \frac{d}{dt} \Delta\varphi \right)(t_3) = 0 . \end{cases} \quad (24)$$

Non linéaire et implicite du fait de la fonction a priori inconnue  $J_n(\hbar/e^* d/dt \Delta\varphi)$ , l'équation (23) admet pourtant dans les deux cas limites  $T/T_c \rightarrow 0$  et  $T/T_c \rightarrow 1$  des solutions faciles à écrire.

#### 4.4.1. Discussion du cas limite $T/T_c \rightarrow 0$

Il est raisonnable dans ce cas d'admettre que le terme en  $J_n(\hbar/e^* d/dt \Delta\varphi)$  tend aussi vers zéro. Compte tenu des conditions aux limites (24), la solution de (23) s'écrit alors<sup>23)</sup>.

$$\begin{aligned} \sin \Delta\varphi(t) &= \\ &= 2 \sin \frac{\Delta\varphi(t_3)}{2} \sin \left( \frac{t-t_3}{\tau_J} + K, k \right) \operatorname{dn} \left( \frac{t-t_3}{\tau_J} + K, k \right) \\ \text{où } k \text{ vaut } |\sin \frac{\Delta\varphi(t_3)}{2}|, \quad K \text{ vaut } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1-k^2 \sin^2 x)^{1/2}} \text{ et} \end{aligned}$$

la quantité  $\tau_J$  est donnée par

$$\tau_J = \left( \frac{\epsilon \hbar}{J_0 e^* L} \right)^{1/2} .$$

<sup>22)</sup> Ce «milieu» comprend une portion du supraconducteur  $\mathcal{D}_1$ , la discontinuité et une portion du supraconducteur  $\mathcal{D}_2$ .

<sup>23)</sup>  $\operatorname{sn}(u, k)$  et  $\operatorname{dn}(u, k)$  sont respectivement les fonctions Sinus amplitudinis et Delta amplitudinis de paramètre  $k$ .

Quant à  $J_0$ , un calcul d'AMBEGAOKAR et BARATOFF permet de l'écrire, en assimilant la discontinuité à une jonction de supraconducteurs

$$J_0 = \frac{\pi}{2 r_n e^*} \Delta(0) \quad (25)$$

où  $r_n$  est un coefficient dépendant de la discontinuité et  $\Delta(0)$  la valeur de la bande d'énergie interdite pour  $T = 0$ .

Prenant alors  $r_n \approx 10^{-8}$  ohm,  $m^2$  et  $L = 10^{-9}$  m (ordre de grandeur caractéristique des quantités correspondantes pour les jonctions de supraconducteurs<sup>16</sup>) et  $\Delta(0) \approx 10^{-22}$  joule, on obtient pour la période du courant oscillatoire la valeur approchée de  $10^{-10}$  s. Dans cette limite  $T \rightarrow T_c$ , la théorie microscopique [17] suggère d'écrire

$$\begin{cases} J_n(\Delta U) = -r_n^{-1} \Delta U \\ J_0 = \frac{\pi \Delta^2(T)}{4 r_n e^* k T_c} \end{cases} \quad (27)$$

où  $r_n$  est égale au quotient de la résistance de la discontinuité par la surface de celle-ci, et où  $\Delta(T)$  est la bande d'énergie interdite à la température  $T$ .

Une évaluation des ordres de grandeurs analogue à celle effectuée dans le cas  $T/T_c \rightarrow 0$  justifie l'approximation (27) qui permet de donner à l'équation (23) la forme suivante :

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta\varphi + \frac{L}{\epsilon_0 r_n} \frac{d}{dt} \Delta\varphi + \frac{\pi L \Delta^2}{2 r_n \epsilon_0 \hbar k T_c} \sin \Delta\varphi = 0. \quad (27')$$

C'est l'équation d'un pendule mathématique soumis à un frottement visqueux ; pour  $t \rightarrow \infty$ , ses solutions se comportent comme celles de l'équation linéarisée

$$\frac{d^2}{dt_2^2} \Delta\varphi + \frac{L}{\epsilon_0 r_n} \frac{d}{dt} \Delta\varphi + \frac{\pi L \Delta^2}{2 r_n \epsilon_0 \hbar k T_c} \Delta\varphi = 0$$

dont la discussion est triviale. On en déduit les temps de relaxation

$$\tau \cong \frac{r_n \epsilon_0}{L} \approx 10^{-10} \text{ s} \quad \text{et} \quad \tau \cong \frac{\hbar k T_c}{4 \pi \Delta^2} > 10^{-10} \text{ s} \quad (28)$$

dans les 2 cas extrêmes, où  $\Delta\varphi$  subit des oscillations amorties de la différence des phases (pour  $\Delta \geq (L \hbar k T_c / 2 \pi \epsilon_0 r_n)^{1/2} \approx 10^{-2} \Delta(0)$ ) et où  $\Delta\varphi$  tend asymptotiquement vers zéro (pour  $\Delta \ll (L \hbar k T_c / 2 \pi \epsilon_0 r_n)^{1/2}$ ).

Ainsi, sous réserve de l'identification des ordres de grandeurs d'une jonction de supraconducteur à ceux qui caractérisent le système non simplement connexe dans le temps ici considéré, il apparaît que l'intervalle de temps nécessaire pour que coïncident à nouveau les phases  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  des fonctions d'ondes dans  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  est très court (de l'ordre de  $10^{-10}$  s) à condition toutefois que l'expérience ait lieu à une température peu inférieure à  $T_c$ . Alors l'intégrale

$$\int_{t'}^t dt' \Delta U(t') \quad t > t_3 + \tau$$

est nécessairement quantifiée à  $n h/e^*$  ( $n$  entier).

## 5. Quatrième partie

### La supraconductivité dans une électrodynamique à masse du photon différente de zéro

#### 5.1. Les équations du supraconducteur dans l'électrodynamique à masse du photon différente de zéro

Étant donné le rôle de premier plan joué par les potentiels électromagnétiques en supraconductivité, il est naturel de se demander ce que devient le modèle phénoménologique de LONDON si l'on donne au photon une masse  $M_\gamma$  différente de zéro.

Pour procéder à cette généralisation, il est commode de partir d'un principe variationnel. A cet effet l'on définit l'action d'une particule de charge  $Q$  et de masse de repos  $M$  dans un champ électromagnétique par l'invariant

$$S = \int_{\gamma} M_c^2 d\tau + Q \int_{\gamma} A_\mu dx^\mu + \frac{1}{4\mu_0} \int_{\Omega} d\Omega (B_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} - 2\kappa^2 A^\alpha A_\alpha)$$

$\Omega$  étant une portion de l'espace-temps,  $\gamma$  l'intersection de la ligne d'univers de la particule avec  $\Omega$  et enfin  $B_{\alpha\beta}$  étant comme de coutume relié au quadripotential par la relation  $B_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ .

La condition  $\delta S = 0$  conduit, pour les premières variations, aux équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\alpha B^{\alpha\beta} + \kappa^2 A^\beta - \mu_0 j^\beta = 0 \\ M \frac{du^\alpha}{d\tau} = Q B^{\alpha\beta} u_\beta \end{array} \right. \quad (29a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\alpha B^{\alpha\beta} + \kappa^2 A^\beta - \mu_0 j^\beta = 0 \\ M \frac{du^\alpha}{d\tau} = Q B^{\alpha\beta} u_\beta \end{array} \right. \quad (29b)$$

la première généralise la deuxième équation de Maxwell sous forme covariante et la seconde n'est autre que l'équation de mouvement de la particule comprenant la force de Lorentz. La conservation de la charge, impliquant

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

(29a) s'écrit aussi [2]

$$\square A^\mu - \kappa^2 A^\mu = -\mu_0 j^\mu.$$

$A$  est la généralisation du potentiel vecteur dans une électrodynamique où le photon, particule neutre, a la masse  $M_\gamma = \hbar/c\kappa$ . Le potentiel électrodynamique  $A_\mu(x)$  est alors une grandeur mesurable: il n'y a plus de transformations de jauge.

De l'équation (29a) l'équation de LONDON relativiste

$$\partial_\alpha A j_\beta - \partial_\beta A j_\alpha + B_{\alpha\beta} = 0 \quad (30)$$

se déduit des relations (29) exactement comme dans le cas où  $\kappa = 0$ . Toutes les conclusions tirées de cette équation dans PI sont ici encore valables à cela près que le quadrivecteur  $P_\mu = M^* u_\mu(x) + e^* A_\mu(x)$  est maintenant une observable physique comme le quadripotential. Si considérant  $A$  comme constante, on combine les équations (29) et (30), il vient

$$\square \lambda'^2 B_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} \quad \text{avec} \quad \lambda'^2 = \frac{\lambda}{\mu_0(1 + (\kappa^2 \lambda / \mu_0))} = \frac{\lambda^2}{1 + \kappa^2 \lambda^2}. \quad (31)$$

Dans le cas particulier d'un champ magnétique statique, cette équation (31) se réduit à la forme familière

$$\Delta \lambda'^2 \mathbf{B} = \mathbf{B} \quad (32)$$

qui traduit l'existence d'un effet Meissner caractérisé par une profondeur de pénétration  $\lambda'$ . La divergence de la relation (31) combinée à (29a) donne

$$\square \lambda'^2 \left( \mathbf{j}^\beta - \frac{\kappa^2}{\mu_0} \mathbf{A}^\beta \right) = \mathbf{j}^\beta - \frac{\kappa^2}{\mu_0} \mathbf{A}^\beta$$

qui, dans le cas d'un champ magnétique statique se réduit à

$$\Delta \lambda'^2 \left( \mathbf{j} - \frac{\kappa^2}{\mu_0} \mathbf{A} \right) = \mathbf{j} - \frac{\kappa^2}{\mu_0} \mathbf{A}. \quad (33)$$

Compte tenu des bornes supérieures données dans la littérature [18, 19],  $10^{-8} \text{ m}^{-1}$ ,  $\kappa \lambda \ll 1$  et  $\lambda'$  ne diffèrent pratiquement pas de  $\lambda$ <sup>24)</sup>.

Examinons maintenant les modifications apportées par la masse non nulle du photon aux équations macroscopiques à grande échelle, obtenues en faisant  $\lambda^{12} = 0$  dans (33). On obtient alors à la place de (32) et (33)

$$\text{a)} \quad \mathbf{B} = 0 \quad \text{b)} \quad \mathbf{j} = \frac{\kappa^2}{\mu_0} \mathbf{A} \quad (34)$$

équations valables à l'intérieur d'un supraconducteur de grandes dimensions à une distance  $d \gg \lambda$  de la frontière. De ces relations (34) on déduit

$$\mathbf{j} = \frac{\kappa^2}{\mu_0} \operatorname{grad} f. \quad (35)$$

Ainsi la généralisation du modèle phénoménologique de LONDON à masse photonique non nulle prévoit l'existence d'une densité de courant irrotationnel, caractéristique d'un transport de charge. En raison de l'équation de continuité, la fonction  $f$  est harmonique. En l'absence de charge superficielle à la surface  $\Sigma$  séparant deux supraconducteurs, la conservation de la charge entraîne la continuité des composantes normales de  $\mathbf{j}$ . La continuité des composantes tangentielles du vecteur potentiel  $\mathbf{A}$  est la conséquence de valeurs *finies* pour le champ  $\mathbf{B}$  sur  $\Sigma$ . C'est ainsi que désignant par  $\mathbf{A}_+(\mathbf{y})$  la valeur de  $\mathbf{A}$  en un point  $\mathbf{y}$  situé immédiatement à *l'extérieur* de  $\Sigma$ , la fonction  $f$  se trouve entièrement déterminée par les équations

$$\begin{aligned} \Delta f(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \text{ à l'intérieur de } \Sigma \\ (\mathbf{n} \operatorname{grad} f)(\mathbf{y}) &= 0 & \mathbf{y} \in \Sigma \\ (\mathbf{n} \wedge \operatorname{grad} f)(\mathbf{y}) &= \mathbf{n} \wedge \mathbf{A}_+(\mathbf{y}) & \mathbf{y} \in \Sigma \end{aligned} \quad (36)$$

$\mathbf{n}(\mathbf{y})$  étant le vecteur unité normal à  $\Sigma$  en  $\mathbf{y}$ .

La solution  $\operatorname{grad} f$  de ces équations est unique, que le système soit simplement connexe ou non. Dans ce dernier cas, le flux  $\phi_c$  à travers une cavité  $C$  pratiquée dans le supraconducteur est égal à  $\oint_C \mathbf{d}\mathbf{x} \cdot \operatorname{grad} f$ , où  $\gamma$  est une courbe fermée simple embrassant la cavité  $C$  à l'exclusion de tout autre.

<sup>24)</sup> BASS et SCHROEDINGER [18] comme STUECKELBERG [2] montrent par ailleurs que «les photons longitudinaux» dus à une masse photonique  $M_\gamma \neq 0$  ont avec la matière une interaction trop faible pour être détectée.

### 5.2. Le cas de supraconducteurs tournants

*Il est facile d'appliquer le modèle précédent au cas des supraconducteurs animés d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe.* Ce problème, déjà traité par LONDON dans l'électrodynamique traditionnelle habituelle, permet la mise en service d'un effet caractéristique de la nouvelle théorie: le moment cinétique attaché au courant de volume (35).

Soit un supraconducteur animé d'une vitesse de rotation constante  $\omega$  autour d'un axe fixe. Pour référentiel inertiel  $R$ , il est indiqué de choisir celui dont l'origine coïncide avec un point de cet axe. Dans  $R$  les équations de LONDON relativistes (30) s'écrivent<sup>25)</sup>

$$\text{rot } \frac{M^*}{e^*} \mathbf{V} + \mathbf{B} = 0 \quad (37)$$

sous la réserve explicite d'une vitesse suffisamment petite pour sauvegarder la métrique pseudoeuclidienne. Dans l'hypothèse d'un état stationnaire la relation d'Ampère s'écrit

$$\text{rot } \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} + \frac{\varkappa^2}{\mu_0} \mathbf{A} = n_s e^* (\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) . \quad (38)$$

L'élimination  $\mathbf{v}$  entre les 2 équations (37) et (38) donne

$$\text{rot rot } \mathbf{B} + \mathbf{B} \left( \varkappa^2 + \frac{n_s e^* \mu_0}{M^*} \right) + 2 n_s e^* \mu_0 \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (39)$$

avec

$$g' = \frac{g}{1 + \varkappa^2 \lambda^2} \equiv \frac{2 M^*}{e^* (1 + \varkappa^2 \lambda^2)}$$

cette équation (39) devient

$$\text{rot rot } \lambda'^2 (\mathbf{B} + g' \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{B} + g' \boldsymbol{\omega}) = 0 . \quad (40)$$

Une dernière substitution

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} - \frac{\varkappa^2}{\mu_0 n_s e^*} \mathbf{A}$$

combinée aux équations (37) et (38) aboutit aux relations simples

$$\text{rot rot } \lambda'^2 \mathbf{w} + \mathbf{w} = 0 \quad (41)$$

et

$$\text{div } (\mathbf{B} + g' \boldsymbol{\omega}) = 0 \quad \text{div } \mathbf{w} = 0$$

qui, à l'intérieur d'un supraconducteur aux grandes dimensions par rapport à  $\lambda$ , deviennent

$$\text{a)} \quad \mathbf{B} + g' \boldsymbol{\omega} = 0 \quad \text{b)} \quad \mathbf{w} = 0 .$$

### 5.3. L'observabilité de la masse du photon dans les supraconducteurs

Les modifications apportées aux répartitions des champs et des courants électromagnétiques par l'attribution d'une masse non nulle au photon sont extrêmement minces [19]. C'est une raison de plus pour considérer les supraconducteurs comme des

<sup>25)</sup> Il est préférable d'user ici du champ de vitesses  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  plutôt que de la densité de courant.

systèmes privilégiés en vue d'une éventuelle mise en évidence expérimentale de la masse du photon.

Si la «contribution potentiel-vecteur» apparaissant dans la relation d'Ampère

$$\text{rot } \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} + \frac{\kappa^2}{\mu_0} \mathbf{A} = \mathbf{j} \quad (42)$$

est en général masquée par le terme  $\text{rot } \mathbf{B}/\mu_0$ , ce n'est plus le cas à l'intérieur d'un supraconducteur de grandes dimensions où la relation (34b) est valable<sup>26)</sup>.

Dans ce sens il est donc possible, dans ces supraconducteurs, de rechercher une borne à la masse du photon qui soit plus précise que celles proposées par de BROGLIE ou BASS et SCHROEDINGER.

#### 5.4. Mesure du champ critique d'un supraconducteur non simplement connexe

Envisageons dans ce but un supraconducteur de grandes dimensions non simplement connexe et dans la cavité duquel se trouve un solénoïde sans contact direct avec le supraconducteur. A l'intérieur du solénoïde le champ magnétique peut dépasser largement le champ critique du supraconducteur tout en conservant une intensité négligeable dans le voisinage immédiat du supraconducteur. Quant au potentiel-vecteur et au courant de volume associés ils sont proportionnels au flux à l'intérieur du solénoïde puisque d'après (34b)

$$\oint_C d\mathbf{x} \mathbf{j} = \frac{\kappa^2}{\mu_0} \Phi_c,$$

$C$  étant une courbe fermée simple entourant la cavité où se trouve le solénoïde.

L'énergie  $\Delta E_\phi$  associée à ce flux a pour expression approchée

$$\Delta E_\phi \approx \int_{V_s} dV \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}}{2} = \frac{\kappa^2}{2\mu_0} \int_{V_s} dV \mathbf{A}^2 \quad (27)$$

–  $V_s$  étant le volume du supraconducteur – une transformation élémentaire donne

$$\Delta E_\phi \approx \frac{\kappa^2}{2\mu_0} \phi \int_{\Sigma} dV \text{grad} \varphi = \frac{\kappa^2}{2\mu_0} \phi \int_{\Sigma} dV \mathbf{A}$$

où  $\Sigma$  est une surface telle que  $V_s - \Sigma$  soit simplement connexe. Dans le cas particulier où le volume du supraconducteur est limité par deux cylindres circulaires concentriques de rayon  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ) et où le solénoïde est lui-même un cylindre circulaire de rayon  $c < a$ , de même axe de symétrie, l'expression de l'énergie devient

$$\Delta E_\phi \approx \frac{\kappa^2 \phi^2 l}{4\pi\mu_0} \log \frac{b}{a}.$$

<sup>26)</sup> Les solutions de l'équation  $\nabla \cdot \mathbf{B} + \kappa^2 \mathbf{B} = 0$  que satisfait le champ  $\mathbf{B}$  stationnaire en l'absence de sources sont évidemment à rotationnel non nul.

<sup>27)</sup> Il conviendrait d'étudier la thermostatique des champs électromagnétiques à masse photonique non nulle pour pouvoir écrire des formules exactes. Bien qu'approchée toutefois, la relation (43) suffit à l'évaluation d'un ordre de grandeur.

Il faut la comparer à la différence d'énergie  $\Delta E_c$  existant entre la phase normale et la phase supraconductrice à champ nul et qui s'exprime à l'aide du champ  $B_c(T)$  à la température  $T$ .

$$\Delta E_c \equiv \int_{V_s} dV \frac{B_c^2(T)}{2\mu_0} = \pi l (b^2 - a^2) \frac{B_c^2(T)}{2\mu_0}.$$

Ainsi la différence d'énergie  $\Delta E_c^\phi$  entre les deux phases normale et supraconductrice en présence du flux  $\phi$ , qui est évidemment donnée par la différence  $\Delta E_c^\phi = \Delta E_c - \Delta E_\phi$  peut aussi s'écrire

$$\Delta E_c^\phi = \pi l (b^2 - a^2) \frac{B_c^2(T, \phi)}{2\mu_0}$$

en introduisant le champ critique  $B_c(T, \phi)$  modifié par la présence du flux  $\phi$ . La variation relative du champ critique est donnée par

$$\left| \frac{\Delta B_c}{B_c} \right| \equiv \left| \frac{B_c(T, \phi) - B_c(T)}{B_c(T)} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{\Delta E_\phi}{\Delta E_c} \right| = \frac{\kappa^2 \phi^2 \log b/a}{4\pi^2 (b^2 - a^2) B_c^2(T)}$$

d'où l'on tire, remarquant  $\phi = B \pi c^2$ .

$$\kappa^2 = \frac{b^2 B_c^2(T) 4 [(b/a)^2 - 1]}{c^4 B^2 \log b/a} \left| \frac{\Delta B_c}{B_c} \right|.$$

Le minimum de  $b^2 4 [(b/a)^2 - 1]/c^2 \log b/a$  est atteint pour  $b = a = c$  et vaut 8. Si l'on prend pour  $B_c(T)/B$  la valeur  $10^{-3}$  et pour  $|\Delta B_c/B_c|$  la valeur  $10^{-2}$ , ce qui est certainement à la limite des possibilités expérimentales, il vient en notant  $\kappa_{min}$  la borne inférieure de  $\kappa$  observable par l'intermédiaire du rapport  $|\Delta B_c/B_c|$

$$\kappa_{min}^2 \cong \frac{1}{c_{max}^2} 10^{-5}.$$

Comme d'autre part,  $C_{max}$ , la valeur maximale de  $C$  peut être située aux alentours de  $10^{-1}$  m, la méthode proposée pour déterminer une borne inférieure à  $\kappa$  donne

$$\kappa_{min}^2 \approx 10^{-3}$$

ce qui correspond à une masse photonique de  $10^{-44}$  kg.

## 6. Appendix

### *Solution des équations de London à masse photonique non nulle dans un cas particulier*

Il est possible de résoudre entièrement les équations de LONDON à masse non nulle dans nombre de cas particuliers simples. Cet appendice traite de celui d'un cylindre supraconducteur présentant un axe de symétrie  $\delta$  et dont une section normale à  $\delta$  est constituée par une couronne circulaire limitée par deux cercles concentriques de rayons  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ). Le supraconducteur est plongé dans le vide. La symétrie du système suggère les coordonnées cylindropolaires habituelles  $\{\rho, \theta, z\}$ . Dans la solution possédant la symétrie maximale, les composantes des champs  $B$ ,  $A$  et  $j_s$  ne dépendent que de la coordonnée  $\rho$ . Les trois domaines  $\rho \ll a \ll \rho \ll b$  et  $\rho \gg b$  sont à distinguer.

1)  $\varrho \leq a$ 

Dans ce premier domaine, le courant  $j_s$  est identiquement nul. La loi d'Ampère (42) permet d'écrire l'équation pour le potentiel vecteur

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \kappa^2 \mathbf{A} = 0 \quad (\text{A.1})$$

ou, explicitement,

$$\frac{d^2 A_\theta}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dA_\theta}{d\varrho} - \left( \frac{1}{\varrho^2} + \kappa^2 \right) A_\theta = 0$$

équation dont la solution générale est de la forme

$$A_\theta(\varrho) = BK_1(\varrho\kappa) + CI_1(\varrho\kappa)$$

$B$  et  $C$  étant des constantes arbitraires: quant à  $K_\nu(x)$  et  $I_\nu(x)$  ( $\nu = 0, 1, \dots$ ), ce sont 2 solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle

$$\kappa^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + \nu^2) y = 0. \quad (\text{A.2})$$

$I_\nu(x)$  est finie pour  $x = 0$ , mais croît exponentiellement pour  $x \rightarrow \infty$  tandis que  $K_\nu(x)$  qui est singulière à l'origine  $x = 0$  tend exponentiellement vers zéro pour  $x$  tendant vers l'infini. Pour  $x = iz$ , l'équation différentielle (A.2) est l'équation de Bessel ordinaire. La condition  $A_\theta(\varrho)$  définie pour  $\varrho = 0$  annule la constante  $B$ . Quant à la constante  $C$ , elle dépend de la valeur du flux au travers du cylindre  $\varrho \leq a$ :

$$\phi = 2\pi a A_\theta(a)$$

Ainsi la solution symétrique cherchée est donnée par

$$A_\theta(\varrho) = \frac{\phi}{2\pi a} \frac{I_1(a\kappa)}{I_1(\kappa a)} \quad B_z(\varrho) = \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} (\varrho A_\theta(\varrho)) = \frac{\kappa \phi I_0(\varrho\kappa)}{2\pi a I_1(a\kappa)}. \quad (\text{A.3})$$

2)  $a \leq \varrho \leq b$ 

Dans ce second domaine, le champ d'induction satisfait à l'équation (32) qui s'écrit ici

$$\frac{d^2 B_z(\varrho)}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dB_z(\varrho)}{d\varrho} - \frac{1}{\lambda^2} B_z(\varrho) = 0$$

et dont la solution générale est de la forme

$$B_z(\varrho) = DI_0\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right) + EK_0\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right) = \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} (\varrho A_\theta(\varrho)) \quad (\text{A.4})$$

où  $D$  et  $E$  sont deux nouvelles constantes arbitraires. La valeur de  $A_\theta(\varrho)$  s'obtient par intégration de (A.4) qui, compte tenu de (A.3) et de la continuité de  $\mathbf{A}$  en  $\varrho = a$ , donne

$$A_\theta(\varrho) = \frac{\phi}{2\pi a} + \lambda' \left[ D \left( I_1\left(\frac{\varrho}{\lambda'}\right) - \frac{a}{\varrho} I_1\left(\frac{a}{\lambda'}\right) \right) - E \left( K_1\left(\frac{\varrho}{\lambda'}\right) - \frac{a}{\varrho} K_1\left(\frac{a}{\lambda'}\right) \right) \right].$$

3)  $b \leq \varrho$ 

Dans ce dernier domaine  $A_\theta(\varrho)$  et  $B_z(\varrho)$  satisfont aux mêmes équations que dans le premier domaine  $\varrho \leq 0$ . L'allure à l'infini des fonctions de Bessel modifiées conduit

à choisir la solution

$$A_\theta(\varrho) = G K_1(\varrho \kappa) \quad B_z(\varrho) = -\kappa G K_0(\varrho \kappa)$$

$G$  étant encore une constante arbitraire.

La continuité du potentiel-vecteur à la limite  $\varrho = b$  ainsi que de celle du champ d'induction  $B$  aux deux surfaces  $\varrho = a$  et  $\varrho = b$  permet de fixer les 3 constantes  $D$ ,  $E$  et  $G$ . Il vient

$$\begin{aligned} D &= \frac{\phi}{\pi a^2 \Delta} \left\{ \frac{(\kappa a/2) I_0(a\kappa)}{I_1(a\kappa)} \left[ K_0(b/\lambda') - \kappa \lambda' \frac{K_0(b\kappa)}{K_1(b\kappa)} (K_1(b/\lambda') - a/b K_1(a/\lambda')) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa a^2 K_0(a/\lambda') K_0(b\kappa)}{2 b K_1(b\kappa)} \right\} \\ E &= -\frac{\phi}{\pi a^2 \Delta} \left\{ \frac{(\kappa a/2) I_0(a\kappa)}{I_1(a\kappa)} \left[ I_0(b/\lambda') + \kappa \lambda' \frac{K_0(b\kappa)}{K_1(b\kappa)} (I_1(b/\lambda') - a/b I_1(a/\lambda')) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa a^2 I_0(a/\lambda') K_0(b\kappa)}{2 b K_1(b\kappa)} \right\} \end{aligned}$$

avec

$$\Delta = I_0(a/\lambda') K_0(b/\lambda') - K_0(a/\lambda') I_0(b/\lambda') + \kappa \lambda' \frac{K_0(b\kappa)}{K_1(b\kappa)}$$

$$[I_0(a/\lambda') ((a/b) K_1(a/\lambda') - K_1(b/\lambda')) + K_0(a/\lambda') ((a/b) I_1(a/\lambda') - I_1(b/\lambda'))].$$

Quant à la densité de courant  $\mathbf{j} \equiv (0, j_\theta(\varrho), 0)$ , elle s'écrit à la limite  $\kappa \rightarrow 0$ ,

$$j_\theta(\varrho) = \frac{\kappa^2}{\mu_0} \left[ \frac{\phi}{2\pi\varrho} + \frac{a}{\varrho} \left( \frac{K_1(a/\lambda) I_0(b/\lambda) + K_0(b/\lambda) I_1(a/\lambda)}{I_0(b/\lambda) K_0(a/\lambda) - I_0(a/\lambda) K_0(b/\lambda)} \right) \right].$$

## 7. Conclusion

A la première question posée au début de ce travail, existe-t-il dans les supraconducteurs un effet qui soit au potentiel scalaire ce que la quantification du flux est au potentiel-vecteur ? il a été possible de répondre par l'affirmative en proposant une expérience de principe consistant à disjoindre temporairement des supraconducteurs pour les soumettre pendant leur séparation à une différence de potentiel. L'effet observé dans ce système, étroitement apparenté à l'effet tunnel alternatif de Josephson, fait intervenir le potentiel électrodynamique scalaire de manière décisive. Ces deux effets sont d'ailleurs suggérés par la théorie phénoménologique de LONDON comme l'est aussi la quantification du flux. Le présent mémoire a démontré que tous ces effets sont des manifestations particulières d'une propriété générale du *modèle très simple constitué par le superfluide chargé relativiste quantifié dont la quantification du fluxoïde généralisé pour les systèmes non simplement connexes et la quantification de l'action périodique différentielle pour les systèmes périodiques* sont les deux aspects fondamentaux.

A la seconde question posée au début de ce travail: les supraconducteurs recèlent-ils un effet lié à une valeur hypothétique de la masse du photon ? il a aussi été répondu par l'affirmative en suggérant une expérience de principe consistant à faire des mesures de champ critique dans un système formé d'un supraconducteur et d'un solé-

noïde coaxiaux. Toutefois les ordres de grandeur calculés montrent qu'il n'est pour le moment pas question d'améliorer, par voie de la supraconductivité, la borne supérieure jusqu'ici impartie à la masse du photon par d'autres méthodes.

### 8. Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier les professeurs E. STUECKELBERG DE BREIDENBACH, J. PIRENNE et C. PIRON pour de fructueuses discussions, ainsi que le Fonds National Suisse de la Recherche scientifique pour son aide financière.

### Références

- [1] Y. AHARONOV et D. BOHM, Phys. Rev. 72, 1511 (1941).
- [2] YUKAWA, Proc. Phys.-Math. Soc. (Japan) 17, 48 (1935) et 19, 1084 (1937). E. C. G. STUECKELBERG, Phys. Rev. 52, 41 (1937) et Helv. phys. Acta 11, 225 (1938).
- [3] F. LONDON, *Superfluids*, Vol. 1 Dover Publications, 2nd edition, New York (1960).
- [4] N. BYERS et C. N. YANG, Phys. Rev. Lett. 7, 46 (1961). – J. M. BLATT, *Theory of Superconductivity*, Academic Press, New York and London (1964).
- [5] B. D. JOSEPHSON, Phys. Lett. 1, 251 (1962).
- [6] E. SCHROEDINGER, Ann. Phys. (Germany) 5. Folge 32, 49 (1938).
- [7] L. J. TASSIE et M. PESHKIN, Ann. Phys. (USA) 16, 177 (1961).
- [8] F. ROTHEN, C. GRUBER et D. RIVIER, Helv. phys. Acta 38, 125 (1965).
- [9] V. S. SOROKIN Zh. eksp. teor. Fiz. 19, 553 (1949).
- [10] A. HILDEBRANDT, Phys. Rev. Lett. 12, 190 (1964).
- [11] L. N. COOPER, Phys. Rev. 104, 1189 (1956).
- [12] P. W. ANDERSON et J. M. ROWELL, Phys. Rev. Lett. 10, 230 (1963). – J. M. ROWELL, Rev. Lett. 11, 200 (1963). – R. C. JAKLEVIC, J. LAMBE, A. H. SILVER, J. E. MERCEREAU, Phys. Rev. Lett. 12, 159 (1964). – T. I. SMITH, Phys. Rev. Lett. 15, 460 (1965).
- [13] V. L. GINZBURG et L. D. LANDAU, Zh. eksp. teor. Fiz. 20, 1064 (1950).
- [14] K. MAKI, Progr. Theor. Phys. 30, 573 (1963). – P. W. ANDERSON, N. R. WERTHAMER et J. M. LUTTINGER, Phys. Rev. 138, A 1157 (1965). – M. J. STEPHEN et SUHL, Phys. Rev. Lett. 13, 195 (1964). – P. W. ANDERSON et A. H. DAYEM, Phys. Rev. Lett. 13, 195 (1964).
- [15] L. GIAVER, Phys. Rev. Lett. 5, 464 (1960).
- [16] A. H. AMBEGAOKAR et A. BARATOFF, Phys. Rev. Lett. 10, 486 (1963).
- [17] G. RICKAYZEN, *Theory of Superconductivity*, John Wiley and Sons (1965).
- [18] L. BASS et E. SCHROEDINGER, Proc. Roy. Soc. 232A, 1, (1955).
- [19] L. DE BROGLIE, *Une nouvelle Théorie de la Lumière*, p. 39, Hermann, Paris (1940).
- [20] E. C. G. STUECKELBERG, Helv. phys. Acta 14, 51 (1941) et 30, 209 (1957).