

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 40 (1967)

Heft: 4

Artikel: Générateurs d'un mouvement et champs covariants

Autor: Poncet, J.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-113775>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Générateurs d'un mouvement et champs covariants¹⁾

par **J. Poncet**

Université de Lausanne (Suisse)

(25 X 66)

Abstract. A *N-field* is defined under weaker covariance conditions than for a local field. (*N* is a set in which $SL(2, C)$ operates, see def. 6.1., part II). In particular, the energy-momentum of an *N*-field is given by unitary representations $R(n) : a \rightarrow R_a(n)$ of the translations a , depending on n in *N*, which are covariant under a representation $M : A \rightarrow M_A$ of $SL(2, C)$ (M determines the *angular momentum*) in the sense: $R_{Aa}(An) = M_A R_a(n) M_A^{-1}$.

It is shown that if *N* is the set of timelike directions a definition of the «interaction picture» is possible, which resembles in some way the conventional one, and therefore permits bypassing the conclusions of Haag's theorem. An example of a *N*-field is constructed which is obtained by an «interaction picture» from a free field. Properties of its energy-momentum are discussed.

All this requires some results on *generators* of evolutions contained in part I.

PARTIE I

Remarques préliminaires. Nous appelons mouvement une fonction $\mathcal{U} : (\tau, \sigma) \rightarrow \mathcal{U}_{\tau, \sigma}$ à valeurs dans le groupe projectif d'un espace d'Hilbert, définie sur des paires de 3-surfaces dans l'espace M_4 de Minkowski, et telle que

$$\mathcal{U}_{\sigma_3, \sigma_2} \mathcal{U}_{\sigma_2, \sigma_1} = \mathcal{U}_{\sigma_3, \sigma_1}.$$

M_4 est supposé muni de la métrique définie par

$$(a, a) = a^2 = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2.$$

Pour les applications que nous avons en vue (voir no 6 où sont définis les *N*-champs) nous nous restreignons dans la suite au cas particulier où (τ, σ) sont des paires de 3-plans parallèles du genre espace.

Les *générateurs d'un mouvement* sont définis par certaines conditions de différentiabilité. Les générateurs étant des opérateurs symétriques non bornés en général, la question de l'existence et de l'unicité d'un mouvement de générateurs donnés n'est pas triviale, et nous l'avons considérée de deux points de vue différents.

Au no 1, les hypothèses de différentiabilité sont *fortes* et les générateurs sont des opérateurs symétriques définis sur un même domaine Δ (voir définitions D 1-3). Sous ces conditions on démontre un théorème d'unicité (théorème 1.1). Sa démonstration se ramène d'ailleurs à celle d'un théorème analogue pour des «mouvements sur la droite», dont nous notons une conséquence simple: soit T un opérateur symétrique

¹⁾ Ce travail a été préparé avec l'aide du Fonds National Suisse.

sur un domaine Δ , qui possède des extensions autoadjointes; alors, il en existe au plus une, soit A , telle que $e^{isA} \Delta = \Delta$.

Nous définissons ensuite les *constantes* d'un mouvement quelconque (qui ne possède pas nécessairement des générateurs) associées à un groupe (no 2), et nous considérons la notion de générateurs d'un point de vue différent (no 3); les conditions de différentiabilité sont plus faibles, mais les générateurs sont supposés essentiellement autoadjoints sur leur domaine (pas nécessairement constant comme dans la première définition). On peut alors énoncer un théorème d'existence et d'unicité d'un mouvement qui possède des générateurs et au moins une constante associée au groupe des translations de M_4 .

Au no 4, nous introduisons la notion de *variation* d'un mouvement et nous donnons des conditions sous lesquelles un *mouvement varié* possède une constante de moment d'impulsion $M: A \rightarrow M_A$, où M est représentation unitaire de $SL(2, C)$, et une *constante d'énergie-impulsion covariante relativement à M* (voir no 2). Nous montrons ensuite (no 5), qu'il existe des mouvements qui possèdent une telle constante covariante relativement à un moment M , et non triviale en ce sens que la classe de représentations qu'elle détermine ne peut pas être obtenue par une restriction au groupe des translations d'une représentation unitaire du groupe $SL(2, C)$ inhomogène.

Nous définissons pour terminer ce que nous appelons *l'application d'interaction* et les *N-distributions* (no 6). Celles-ci peuvent aussi avoir une énergie-impulsion covariante relativement à un moment M . Nous donnons alors un exemple de *N-champ* obtenu à partir d'un champ libre par une application d'interaction, qui possède une énergie-impulsion covariante relativement à un moment M (celui du champ libre considéré) et non triviale dans le sens que nous venons d'indiquer. Ceci montre en particulier qu'un *N-champ* a des propriétés différentes de celles d'un champ auquel serait applicable le *théorème de Haag*.

Comme on sait, les fonctions que nous appelons mouvements apparaissent en électrodynamique quantique formelle, spécialement en relation avec l'*«interaction picture»* (voir par ex. 8) que nous avons redéfinie par *l'application d'interaction* susmentionné. Notre but était de montrer que celle-ci peut être non-constante pour des *N-champs*. Ajoutons que la construction particulière que nous avons choisie pour obtenir un *N-champ* qui remplit les conditions imposées n'est pas la seule possible.

Dans un article récent [12], M. GUENIN a traité, en relation avec le théorème de Haag et l'*«interaction picture»*, une question qu'on peut à certains égards rapprocher de celle que nous avons considérée.

1. Générateurs d'un mouvement. Première définition

On désignera par $U(H)$ le groupe topologique unitaire, muni de la topologie forte, de l'espace d'Hilbert H , par $\mathcal{P}(H)$ le groupe projectif $U(H)/S$, S étant le sous-groupe des opérateurs unitaires scalaires. Les éléments (ou rayons) de $\mathcal{P}(H)$ seront notés $\mathcal{A}, \mathcal{U}, \mathcal{V}$ etc., ceux de $U(H)$ par A, U, V etc.

Si σ est un 3-plan dans l'espace de Minkowski M_4 , $\sigma + a$ sera le translaté de σ par la translation $a : x \rightarrow x + a$. Par définition, σ est du genre espace si pour $y \neq z$, on a $(y - z)^2 < 0$. L'ensemble Σ des σ forme une variété homéomorphe au produit d'une droite par la variété des vecteurs b tels que $b^2 = 1, b^0 > 0$.

On définit un mouvement \mathcal{U} par la donnée d'une fonction $\mathcal{U}_{\tau, \sigma}$ à valeurs dans $\mathcal{D}(H)$ définie sur les paires (τ, σ) de 3-plans du genre espace, avec $\tau = \sigma + a$ qui satisfait à la condition

$$a) \quad \mathcal{U}_{\sigma_3, \sigma_2} \mathcal{U}_{\sigma_2, \sigma_1} = \mathcal{U}_{\sigma_3, \sigma_1}.$$

Nous exigeons aussi généralement:

$$b) \quad \mathcal{U}_{\sigma+x, \sigma} = \mathcal{U}_{\sigma+(n, x)n, \sigma}$$

est continue de (σ, x) , $n = n_\sigma$ étant une normale à σ telle que $n^2 = 1$.

De la condition a) suit que $\mathcal{U}_{\sigma, \sigma}$ est l'élément neutre \mathcal{J} de $\mathcal{D}(H)$ et que $\mathcal{U}_{\tau, \sigma} = \mathcal{U}_{\sigma, \tau}^{-1}$.

Nous appelons *mouvement unitaire* une fonction $U_{\tau, \sigma}$ à valeurs dans $U(H)$, définie pour les mêmes paires (τ, σ) , et satisfaisant aux mêmes conditions a) et b); la projection $U(H) \rightarrow \mathcal{D}(H)$ définit de manière évidente un mouvement $\mathcal{U}_{\tau, \sigma}$ que nous dirons *induit* par $U_{\tau, \sigma}$.

Nous supposons dans ce no 1 que \mathcal{U} satisfait en outre à la condition D) ci-après, que nous modifierons au no 3.

D) Il existe un sous-espace dense Δ de H , des opérateurs $L(\sigma)$ symétriques de domaine Δ , associés aux σ , et pour tout σ des représentants unitaires $U_{\sigma+x, \sigma}$ de $U_{\sigma+x, \sigma}$ continus de (σ, x) tels que

- 1) $U_{\sigma+x, \sigma} \Delta = \Delta$, $U_{\sigma, \sigma} = E$, E étant l'opérateur identité de H ;
- 2) pour ψ dans Δ , la limite forte

$$\lim_{s \rightarrow 0} 1/s (U_{\sigma+x+s a, \sigma} - U_{\sigma+x, \sigma}) \psi$$

(s réel) existe et est continue de (σ, x) pour toute translation a ;

$$3) \quad \lim_{s \rightarrow 0} 1/s (U_{\sigma+s a, \sigma} - E) \psi = i L_a(\sigma) \psi = i(n, a) L(\sigma) \psi$$

pour ψ dans Δ , $n = n_\sigma$ étant une normale à σ , $n^2 = 1$.

Par ces conditions, les limites fortes de D 2) et D 3) sont linéaires en a , de rang un, $L_a(\sigma) = (n, a) L(\sigma)$, $L_a(\sigma) = 0$ si $\sigma + a = \sigma$, et $L_a(\sigma) \psi$ est continu en σ .

Les opérateurs $L_a(\sigma)$ seront appelés générateurs en σ de \mathcal{U} , associés à $U_{\sigma+x, \sigma}$ sur Δ .

On pourrait supposer plus généralement qu'on se donne des représentants unitaires $U_{\sigma+x, \sigma}$ locaux satisfaisant à D 1), 2), 3). Il existe toujours des représentants unitaires locaux continus d'un mouvement par le fait de la fibration

$$U(H) \rightarrow U(H)/S,$$

localement triviale par un théorème de A. M. GLEASON [7].

Pour simplifier nous supposons que \mathcal{U} a des représentants unitaires globaux vérifiant D 1), 2), 3), mais il est facile d'énoncer les analogues locaux des théorèmes et propositions démontrés dans la suite.

Soient ϱ_0 les éléments de Σ par un point 0. Si \mathcal{U} satisfait à D 1), 2), 3), $V_{\tau, \sigma} = U_{\tau, \varrho_0} U_{\varrho_0, \sigma}$ est un mouvement unitaire qui induit \mathcal{U} , mais qui ne satisfait pas nécessairement à D 2), 3).

Théorème d'unicité 1.1.

Si les opérateurs $L_a(\sigma)$ sont des générateurs sur Δ d'un mouvement qui satisfait à D 1), 2), 3), ce mouvement est unique.

Soient ϱ et a tels que $\varrho + a \neq \varrho$.

Définissons $\omega(\varrho, r, s)$ (complexe de module un) par

$$U_{\varrho+ra, \varrho+sa} U_{\varrho+sa, \varrho} = \omega(\varrho, r, s) U_{\varrho+ra, \varrho}$$

où $U_{\varrho+x, \varrho}$ sont des représentants unitaires auxquels sont associés les générateurs $L_a(\varrho)$ sur Δ .

On a $\omega(\varrho, s, s) = 1$ et les identités, où τ est mis pour $\varrho + s a$

$$\begin{aligned} 1) \quad U_{\tau+ua, \varrho} - U_{\tau, \varrho} &= (U_{\tau+ua, \tau} \omega^{-1}(\varrho, s + u, s) - E) U_{\tau, \varrho} \\ &= U_{\tau+ua, \tau} (\omega^{-1}(\varrho, s + u, s) - 1) U_{\tau, \varrho} + (U_{\tau+ua, \tau} - E) U_{\tau, \varrho}. \end{aligned}$$

On obtient, en utilisant 1), la limite forte

$$2) \quad \lim_{u \rightarrow 0} 1/u (\psi(s + u) - \psi(s)) = i (L(s) + \mu(s)) \psi(s)$$

en posant, pour a, ϱ supposés fixes et ψ dans Δ ,

$$U_{\varrho+sa, \varrho} \psi = \psi(s), \quad L_a(\varrho + sa) = L(s) i \mu(s) = \lim_{u \rightarrow 0} 1/u (\omega^{-1}(\varrho, s + u, s) - 1).$$

Cette dernière limite existe nécessairement par D 2) et D 3) appliqués respectivement au premier membre de la première égalité de 1) et au deuxième membre de la deuxième égalité de 1). En outre, $\mu(s)$ est réel puisqu'on peut poser $\omega^{-1}(\varrho, s + u, s) = e^{i\alpha(u)}$, $\alpha(u)$ réel, $\alpha(0) = 0$, et que $e^{i\alpha(u)}$ est alors dérivable en $u = 0$, ce qui entraîne bien que $\mu(s)$ doit être réel.

Par les conditions imposées à $U_{\varrho+x, \varrho} \psi$, $\mu(s)$ est une fonction continue en s . En effet le membre de gauche de 2) est continu par D 2); $(L(s) \psi(s), \varphi) = (\psi(s), L(s)\varphi)$ est continu en s puisque $\psi(s)$ et $L(s)\varphi$ le sont pour φ, ψ dans Δ , donc

$$(\mu(s) U_{\varrho+sa, \varrho} \psi, \varphi) = \mu(s) (U_{\varrho+sa, \varrho} \psi, \varphi)$$

l'est aussi; comme pour tout s on peut choisir φ, ψ dans Δ tels que $(U_{\varrho+sa, \varrho} \psi, \varphi) \neq 0$, il s'ensuit que $\mu(s)$ est continue en tout s .

Pour ψ dans Δ , $U_{\varrho+sa, \varrho} \psi = \psi(s)$ est une solution dans Δ de l'équation 2), qui satisfait la condition initiale $\psi(0) = \psi$. Mais c'est la seule. Car si $\varphi(s)$ dans Δ est une autre solution de 2) telle que $\varphi(0) = \psi$, la fonction numérique $(\varphi(s), \varphi(s))$ est évidemment dérivable et de dérivée nulle. En particulier, si $\varphi(0) = 0$, $\varphi(s)$ doit être nulle. Par la linéarité de l'équation 2), il n'y a donc qu'une solution $\psi(s)$ dans Δ telle que $\psi(0) = \psi$.

Supposons qu'il existe un deuxième mouvement $\psi_{\tau, \sigma}$ qui satisfait à D 1), 2), 3), avec des représentants unitaires $V_{\varrho+sa, \varrho}$ qui définissent les mêmes générateurs $L_a(\varrho)$ sur Δ . Alors on a une équation

$$3) \quad \lim_{u \rightarrow 0} (\theta(s + u) - \theta(s)) = i (L(s) + \nu(s)) \theta(s)$$

analogue à 2), $\nu(s)$ étant réelle et continue.

On sait d'après ce qui précède que la seule solution $\theta(s)$ dans \mathcal{A} telle que $\theta(0) = \psi$ est $\theta(s) = V_{\varrho+sa, \varrho} \psi$. Comme $\psi(s) = U_{\varrho+sa, \varrho} \psi$ est la solution de 2) dans \mathcal{A} telle que $\psi(0) = \psi$, la fonction $e^{i\beta(s)} \psi(s)$, où $d\beta/ds = \nu(s) - \mu(s)$, $\beta(0) = 0$, est solution de 3) pour la même condition initiale, donc on a $e^{i\beta(s)} U_{\varrho+sa, \varrho} \psi = V_{\varrho+sa, \varrho} \psi$. Comme \mathcal{A} est dense dans H , $\mathcal{U}_{\varrho+sa, \varrho}$ doit être égal à $\mathcal{V}_{\varrho+sa, \varrho}$.

Remarque 1.1

On peut démontrer une propriété simple d'opérateurs symétriques qui ont des extensions autoadjointes, comme conséquence d'un théorème analogue au Théorème 1.1.

Définissons *un mouvement sur la droite* une fonction $\mathcal{U} : (s, t) \rightarrow \mathcal{U}_{(s, t)}$ (s, t réels) à valeurs dans $\mathcal{D}(H)$ telle que $\mathcal{U}_{s_3, s_2} \mathcal{U}_{s_2, s_1} = \mathcal{U}_{s_3, s_1}$ et que $\mathcal{U}_{s+t, s}$ soit continu de (s, t) .

Si on impose à \mathcal{U} des conditions analogues aux conditions D 1), 2), 3), on a un théorème d'existence semblable au théorème 1.1, la démonstration restant la même.

Comme exemple de mouvement unitaire sur la droite qui satisfait à de telles conditions, on peut prendre $U_{t, s} = e^{i(t-s)A}$, où A est autoadjoint, pour \mathcal{A} le domaine de A ou un domaine plus petit \mathcal{A}' tel que $e^{isA} \mathcal{A}' = \mathcal{A}'$, et pour générateur $L(s)$ l'opérateur symétrique restriction de A à \mathcal{A}' .

Proposition 1.1. Soit T un opérateur symétrique dans H , défini sur \mathcal{A} , qui possède des extensions autoadjointes. Il en existe au plus une, soit A , telle que $e^{isA} \mathcal{A} = \mathcal{A}$.

En effet, si B satisfait aux mêmes hypothèses que A , les deux mouvements unitaires sur la droite $U_{t, s} = e^{i(t-s)A}$ et $V_{t, s} = e^{i(t-s)B}$ ont le même générateur (constant) $L(s) = T$ sur \mathcal{A} . Par l'unicité, $V_{t, s} = U_{t, s}$ d'où $A = B$ par le théorème de Stone.

2. Constantes d'un mouvement

Soit G un groupe de Lie, supposé d'abord connexe qui opère (éventuellement d'une manière triviale) sur l'ensemble Σ des 3-plans du genre espace. On suppose que les opérations $T : \sigma \rightarrow T\sigma$ conservent le parallélisme des 3-plans σ .

Dans la suite, lorsque G est connexe, nous entendrons toujours par représentation projective de G une représentation globale du revêtement universel \tilde{G} de G dans $\mathcal{D}(H)$, ce qui est équivalent à la donnée d'un homomorphisme local continu de G dans $\mathcal{D}(H)$ défini sur un voisinage connexe de l'élément neutre ([3], théorème 3, p. 49).

Soit \mathcal{U} un mouvement qui vérifie les conditions a), b), du no 1.

Une représentation continue $\mathcal{R} : T \rightarrow \mathcal{R}_T$ de G dans le groupe $\mathcal{D}(H)$ telle que

$$1) \quad \mathcal{U}_{T\tau, T\sigma} = \mathcal{R}_T \mathcal{U}_{\tau, \sigma} \mathcal{R}_T^{-1}$$

pour toute paire (τ, σ) , $\tau = \sigma + a$, sera dite constante de type G de \mathcal{U} .

La donnée d'une représentation projective \mathcal{R} de G est équivalente [1] à la donnée d'une représentation unitaire $R^{(u)}$ d'un groupe G_1 qui est une extension de G par un groupe isomorphe au tore S^1 .

Soient X un élément de l'algèbre de Lie $L(G_1)$ de G_1 , e^{sX} le groupe à un paramètre correspondant et $e^{isAX} = R^{(u)}(e^{sX})$, A_X étant le générateur autoadjoint de Stone de $R^{(u)}(e^{sX})$. Par un théorème de L. GÅRDING [5] il existe un sous-espace D dense dans H transformé dans lui-même par les opérateurs A_X , invariant par e^{isAX} , et tel que A_X

soit essentiellement autoadjoint sur D ([10]). En outre, l'application $X \rightarrow i A_X$ définit une représentation de $L(G_1)$ dans l'algèbre des endomorphismes de D .

Nous appellerons les opérateurs autoadjoints A_X les observables définies par la constante \mathcal{R} de type G ou aussi observables de type G . Eventuellement, on désignera \mathcal{R} et ses observables A_X par le même terme. Dans le cas où \mathcal{R} est définie par une représentation unitaire R , A_X est à une constante scalaire additive près le générateur autoadjoint de $R(e^{sX})$. Il en est ainsi en particulier si G est le groupe $SL(2, C)$ ou $SL(2, C)$ inhomogène. Pour $SL(2, C)$ cela tient au fait général [1] que les représentations projectives d'un groupe semi-simple sont induites par des représentations unitaires.

Si G est le groupe des translations $\alpha: \sigma \rightarrow \sigma + \alpha$, une constante de type G définie par une représentation unitaire R sera appelée une *énergie-impulsion* de \mathcal{U} . Nous noterons aussi $R_\alpha = e^{iP_\alpha}$, où P_α est le générateur de Stone du groupe à un paramètre $R_{s\alpha} = e^{isP_\alpha}$.

Une constante de *moment d'impulsion* sera une constante de type $SL(2, C)$, où $SL(2, C)$ opère de manière évidente sur Σ et sur M_4 (en laissant un point 0 fixe).

Lorsque G n'est pas connexe, une représentation globale \mathcal{R} de G dans le groupe $U'(H)$ (à deux composantes connexes) des transformations unitaires et antiunitaires de H , ou dans le groupe $\mathcal{P}'(H) = U'(H)/S$, sera aussi par définition une constante de \mathcal{U} si l'on a la même relation 1) que précédemment.

Soit encore G un groupe qui opère trivialement sur Σ , $\mathcal{R}: \alpha \rightarrow \mathcal{R}_\alpha$ une constante de \mathcal{U} de type G : on peut l'appeler une *charge généralisée* si les opérateurs unitaires ou antiunitaires R_α définis par les rayons \mathcal{R}_α commutent avec toutes les observables A_α de \mathcal{U} .

Dans la suite les différents groupes que nous considérons sont toujours connexes.

Une constante de type $SL(2, C)$ inhomogène détermine en particulier une constante d'énergie-impulsion par restriction au sous-groupe des translations, et différents moments d'impulsion équivalents par restriction aux sousgroupes isomorphes à $SL(2, C)$ (et conjugués entre eux).

Aux no 4, 5 et 6, nous aurons à considérer des constantes associées à un groupe en un sens plus général que nous allons définir.

Soit G un groupe qui opère (éventuellement d'une manière triviale) sur Σ en transformant en elle-même chaque famille de 3-plans parallèles, et tel que $A G A^{-1} = G$ pour les rotations A laissant un point 0 fixe (A = élément de $SL(2, C)$).

Soient \mathcal{U} un mouvement, $\mathcal{R}(\sigma): T \rightarrow \mathcal{R}_T(\sigma)$ une représentation projective de G donnée pour chaque σ , et soit $M: A \rightarrow M_A$ un moment d'impulsion de \mathcal{U} : $\mathcal{U}_{A\tau, A\sigma} = M_A \mathcal{U}_{\tau, \sigma} M_A^{-1}$, avec les relations

- a) $\mathcal{R}(\sigma) = \mathcal{R}(\sigma + b)$
- b) $\mathcal{R}_{A\tau A^{-1}}(A\sigma) = M_A \mathcal{R}_T(\sigma) M_A^{-1}$,
- c) $\mathcal{U}_{T\tau, T\sigma} = \mathcal{R}_T(\sigma) \mathcal{U}_{\tau, \sigma} \mathcal{R}_T(\sigma)^{-1}$.

Nous appellerons constante de type G de \mathcal{U} , covariante relativement à M , l'ensemble \mathcal{R} des représentations $\mathcal{R}(\sigma)$ de G muni des relations a), b), c). Si G est le groupe des translations, si $\mathcal{R}(\sigma)$ est définie par une représentation unitaire $R(\sigma)$ de G , la constante \mathcal{R} de type G sera dite énergie-impulsion covariante relativement à M .

3. Autres conditions pour les générateurs

Dans la suite, un mouvement est encore supposé vérifier les conditions a), b) du no 1, mais des générateurs sont définis sous des conditions différentes de D 1), 2), 3).

Nous n'énoncerons pas de théorème général d'unicité. Par contre, nous établirons deux théorèmes d'existence et d'unicité (Théorèmes 3.1. et 3.2.) pour un mouvement qui possède des générateurs et une constante d'énergie-impulsion donnés. Eventuellement, on peut se donner encore d'autres constantes à part celle d'énergie-impulsion.

Supposons

(L) qu'il existe des représentants unitaires $U_{\sigma+x, \sigma}$ (définis localement ou globalement) continus de (σ, x) , avec $U_{\sigma, \sigma} = E$, et des opérateurs autoadjoints $L(\sigma)$ dont la restriction à un sous-espace dense Δ_σ de H soit essentiellement autoadjointe, tels que pour φ dans Δ_σ

$$\lim_{s \rightarrow 0} 1/s (U_{\sigma+s, \sigma} - E)\varphi = iL_a(\sigma)\varphi = i(n, a) L(\sigma)\varphi,$$

où la limite de gauche est une *limite faible*.

Les opérateurs $L_a(\sigma)$ seront dits *générateurs de \mathcal{U} en σ sur Δ_σ* , associés aux représentants unitaires $U_{\sigma+x, \sigma}$, et générateurs au sens fort si la limite précédente est forte.

Théorème 3.1. Supposons donnés des opérateurs autoadjoints $M_a(\sigma)$ pour tout σ de Σ et toute translation a , une représentation unitaire $R: b \rightarrow e^{iP_b}$ du groupe G des translations, un sous-espace Δ_σ dense dans H pour tout σ de Σ , avec les *conditions a-d*:

- a) $M_a(\sigma)$ est essentiellement autoadjoint sur Δ_σ , $M_a(\sigma) = 0$ si $\sigma + a = \sigma$, $M_b(\sigma)$ φ est linéaire en b pour φ dans Δ_σ .
- b) le domaine de P_a contient Δ_σ et $e^{iP_a} \Delta_\sigma = \Delta_{\sigma+a}$ pour tout a et tout σ de Σ ;
- c) pour tout a et tout σ de Σ , l'opérateur $M_a(\sigma) - P_a$ est autoadjoint et sa restriction à Δ_σ est essentiellement autoadjointe; l'exponentielle $e^{i(M_a(\sigma) - P_a)}$ est continue de (σ, a) ;
- d) $M_a(\sigma + b) = e^{iP_b} M_a(\sigma) e^{-iP_b} + \mu_a(\sigma, b) E$ où $\mu_a(\sigma, b)$ est une fonction réelle linéaire en a .

Alors il existe un et un seul mouvement d'énergie-impulsion $R: a \rightarrow e^{iP_a}$ et de générateurs $M_a(\sigma)$ au sens de (L). Ceux-ci sont même des générateurs au sens fort et sont associés aux représentants unitaires

$$V_{\sigma+s, \sigma} = e^{isP_a} e^{is(M_a(\sigma) - P_a)}$$

ou aussi

$$V'_{\sigma+s, \sigma} = e^{is(n, a) P_n} e^{is(n, a) (M_n(\sigma) - P_n)} \quad (n = \text{normale à } \sigma, n^2 = 1).$$

L'application $S(\sigma): a \rightarrow e^{i(M_a(\sigma) - P_a)}$ induit une représentation projective du groupe G des translations a pour tout σ de Σ .

Démonstration de l'existence. Nous montrons d'abord qu'il existe un mouvement \mathcal{V} d'énergie-impulsion $R: a \rightarrow e^{iP_a}$ et de générateurs $M_a(\sigma)$.

Soit $n = n_\sigma$ une normale à σ telle que $n^2 = 1$. La condition 3.1.a) entraîne $M_a(\sigma) = (n, a) M_n(\sigma)$.

Posons

$$1) \quad V_{\sigma+s, \sigma} = e^{isP_n} e^{is(M_n(\sigma) - P_n)}$$

$$2) \quad V_{\sigma+a, \sigma} = V_{\sigma+(n, a)n, \sigma},$$

et montrons que les opérateurs $V_{\sigma+sa, \sigma}$ sont des représentants unitaires d'un mouvement \mathcal{V} .

Il suffit, tenant compte de 1), 2) de vérifier que $V_{\sigma+(r+s)n, \sigma+sn} V_{\sigma+sn, \sigma}$, r, s réels, appartient au même rayon unitaire de $\mathcal{D}(H)$ que $V_{\sigma+(r+s)n, \sigma}$. (La continuité de $\mathcal{V}_{\sigma+a, \sigma}$ est une conséquence immédiate de l'hypothèse 3.1 c) et de la dernière relation 2).

Par 3.1. b) et d) et pour φ dans $\Delta_{\sigma+b}$

$$(M_a(\sigma + b) - P_a)\varphi = e^{iP_b} (M_a(\sigma) - P_a) e^{-iP_b} \varphi + \mu_a(\sigma, b)\varphi.$$

Comme $M_a(\sigma + b) - P_a$ et $M_a(\sigma) - P_a$ sont essentiellement autoadjoints sur $\Delta_{\sigma+b}$, respectivement Δ_σ , et que $e^{-iP_b} \Delta_{\sigma+b} = \Delta_\sigma$, on déduit de cette égalité que $M_a(\sigma + b) - P_a = e^{iP_b} (M_a(\sigma) - P_a) e^{-iP_b} + \mu_a(\sigma, b) E$ et

$$3) \quad e^{i(M_a(\sigma+b) - P_a)} = e^{i\mu_a(\sigma, b)} e^{iP_b} e^{i(M_a(\sigma) - P_a)} e^{-iP_b}.$$

De là, on obtient

$$V_{\sigma+(r+s)n, \sigma+sn} V_{\sigma+sn, \sigma} = e^{ir\mu_n(\sigma, sn)} V_{\sigma+(r+s)n, \sigma}$$

ce qui montre que les opérateurs $V_{\sigma+a, \sigma}$ sont des représentants unitaires d'un mouvement.

On a ensuite

$$1/s (V_{\sigma+sn, \sigma} - E)\varphi = e^{iP_n} 1/s (e^{is(M_n(\sigma) - P_n)} - E)\varphi + 1/s (e^{isP_n} - E)\varphi$$

et si φ est dans Δ_σ , les deux termes de droite ont les limites fortes, pour $s \rightarrow 0$, $i(M_n(\sigma) - P_n)\varphi$ et $iP_n\varphi$, de somme $iM_n(\sigma)\varphi$. Par la définition 2) de $V_{\sigma+a, \sigma}$, ceci entraîne que $M_a(\sigma) = (n, a) M_n(\sigma)$ satisfait (L) au sens fort, ce qui établit l'existence d'un mouvement de générateurs $M_a(\sigma)$ et, d'après 3), de constante R .

Avant de démontrer l'unicité de \mathcal{V} et les autres conclusions du théorème 3.1., nous montrons qu'un mouvement qui possède une constante \mathcal{R} associée au groupe des translations, ne dépend que de \mathcal{R} et de la donnée, pour tout σ , d'une représentation projective $\mathcal{S}(\sigma) : a \rightarrow \mathcal{S}_a(\sigma)$ du même groupe.

Proposition 3.1. Soit $\mathcal{R} : a \rightarrow \mathcal{R}_a$ une représentation projective du groupe G des translations de M_4 . Un mouvement \mathcal{V} de constante \mathcal{R} associée aux translations, c'est-à-dire tel que

$$1) \quad \mathcal{V}_{\tau+x, \sigma+x} = \mathcal{R}_x \mathcal{V}_{\tau, \sigma} \mathcal{R}_x^{-1}$$

est de la forme

$$2) \quad \mathcal{V}_{\sigma+a, \sigma} = \mathcal{R}_a \mathcal{S}_a(\sigma)$$

où $\mathcal{S}(\sigma) : a \rightarrow \mathcal{S}_a(\sigma)$ est une représentation projective de G pour chaque σ de Σ , telle que

$$3) \quad \mathcal{R}_b \mathcal{S}_a(\sigma) \mathcal{R}_b^{-1} = \mathcal{S}_a(\sigma + b),$$

$\mathcal{S}_a(\sigma)$ est continu en (σ, a) , et

$$4) \quad \mathcal{S}_a(\sigma) = \mathcal{R}_a^{-1} \text{ si } \sigma + a = \sigma.$$

Réiproquement, si les représentations projectives \mathcal{R} et $\mathcal{S}(\sigma)$ de G satisfont ces relations 3) et 4), et si $\mathcal{S}_a(\sigma)$ est continu en (σ, a) , l'équation 2) définit un mouvement de constante \mathcal{R} .

En effet, si \mathcal{V} est un mouvement de constante \mathcal{R} , en posant $\mathcal{V}_{\sigma+a,\sigma} = \mathcal{R}_a \mathcal{S}_a(\sigma)$, les relations 1) et $\mathcal{V}_{\sigma+a+b,\sigma+b} \mathcal{V}_{\sigma+b,\sigma} = \mathcal{V}_{\sigma+a+b,\sigma}$ entraînent 3) 4) et $\mathcal{S}_a(\sigma) \mathcal{S}_b(\sigma) = \mathcal{S}_{a+b}(\sigma)$. La continuité en a de $\mathcal{S}_a(\sigma)$ est évidente.

Réiproquement, si $\mathcal{S}(\sigma) : a \rightarrow \mathcal{S}_a(\sigma)$ et $\mathcal{R} : a \rightarrow \mathcal{R}_a$ sont des représentations projectives de G avec les propriétés 3) et 4), $\mathcal{R}_a \mathcal{S}_a(\sigma)$ ne dépend que de σ et $\sigma + a$ par 4) et définit un mouvement $\mathcal{V}_{\sigma+a,\sigma}$ continu en (σ, a) , qui par 3) possède la constante \mathcal{R} associée à G .

Corollaire 3.1. *Tout mouvement $\mathcal{V}_{\tau,\sigma} = \mathcal{V}_{\sigma+sa,\sigma}$ de constante \mathcal{R} associée à G possède pour chaque σ des représentants unitaires de la forme*

$$V_{\sigma+sa,\sigma} = e^{isQ_a} e^{isT_a(\sigma)}.$$

On a en effet $\mathcal{V}_{\sigma+sa,\sigma} = \mathcal{R}_{sa} \mathcal{S}_{sa}(\sigma)$, et comme des représentations projectives telles que $s \rightarrow \mathcal{R}_{sa}$, $s \rightarrow \mathcal{S}_{sa}(\sigma)$ d'un groupe à un paramètre sont induites [1] par des représentations unitaires, Q_a et T_a seront les générateurs de Stone de celles-ci.

Soit maintenant $\mathcal{V}_{\tau,\sigma}^{(2)} = \mathcal{V}_{\sigma+s(n,a)n,\sigma}^{(2)}$ un deuxième mouvement qui satisfait aux hypothèses du théorème 3.1. et montrons qu'il est identique à celui dont l'existence est établie plus haut, autrement dit, si $V_{\sigma+s(n,a)n,\sigma}^{(2)}$ sont des représentants unitaires de $\mathcal{V}_{\sigma+s(n,a)n,\sigma}^{(2)}$ qui définissent le générateur $M_n(\sigma)$ sur \mathcal{A}_σ , ils appartiennent au même rayon que $e^{isP_n} e^{is(M_n(\sigma) - P_n)}$.

D'après les propositions et corollaire 3.1., on a $V_{\sigma+s(n,a)n,\sigma}^{(2)} = e^{isP_n} e^{i(sT_n + \alpha(s))}$, $\alpha(s)$ étant une fonction réelle, avec $\alpha(0) = 1$, qui, comme T_n , dépend de σ . Pour φ dans \mathcal{A}_σ , f dans H , on aura donc

$$\lim_{s \rightarrow 0} 1/s ((e^{isP_n} e^{i(sT_n + \alpha(s))} - E)\varphi, f) = i(M_n \varphi, f)$$

ce qui entraîne, comme $1/s ((e^{isP_n} - E)\varphi, f)$ a la limite $i(P_n \varphi, f)$, que la limite de

$$1/s ((e^{isP_n} e^{i(sT_n + \alpha(s))} - e^{isP_n})\varphi, f) \text{ est } i((M_n(\sigma) - P_n)\varphi, f).$$

On a encore

$$1/s ((e^{isP_n} e^{i(sT_n + \alpha(s))} - e^{isP_n})\varphi, f) = 1/s ((e^{i(sT_n + \alpha(s))} - E)\varphi, e^{-isP_n} f)$$

et la limite de cette dernière expression est aussi celle de

$$1/s ((e^{i(sT_n + \alpha(s))} - E)\varphi, f) = 1/s (e^{i\alpha(s)} - 1) (e^{isT_n} \varphi, f) + 1/s ((e^{isT_n} - E)\varphi, f)$$

car $1/s e^{isP_n} (e^{i(sT_n + \alpha(s))} - E)\varphi$ convergeant faiblement est borné, $(e^{-isP_n} - E)f$ converge fortement vers 0, donc $1/s ((e^{i(sT_n + \alpha(s))} - E)\varphi, (e^{-isP_n} - E)f)$ a une limite nulle.

Si en particulier f est dans le domaine de T_n , le deuxième terme de droite de la dernière égalité a la limite $i(\varphi, T_n f)$, donc le premier terme a aussi une limite, et en supposant en outre $(\varphi, f) \neq 0$, ce qui est toujours possible, on voit que $1/s (e^{i\alpha(s)} - 1)$ a une limite iA , A étant réel. En définitive, si φ est dans \mathcal{A}_σ , et f dans le domaine de T_n ,

$$(\varphi, Af) + (\varphi, T_n f) = ((M_n(\sigma) - P_n)\varphi, f).$$

Par la définition de l'adjoint d'un opérateur, ceci implique que $A + T_n$ est une extension autoadjointe de $M_n(\sigma) - P_n$ restreint à \mathcal{A}_σ . Comme $M_n(\sigma) - P_n$ est essentiellement autoadjoint sur \mathcal{A}_σ , on a $A + T_n = M_n(\sigma) - P_n$.

Ainsi $V_{\sigma+s\eta, \sigma}^{(2)}$ et $e^{isP_n} e^{is(M_n(\sigma) - P_n)}$ sont des représentants unitaires d'une même $\mathcal{V}_{\sigma+s\eta, \sigma}$.

Pour démontrer les autres conclusions du théorème 3.1., supposons choisie pour chaque σ une direction $a_\sigma = a$ non parallèle à σ , continue en σ et telle que $a_{\sigma+x} = a_\sigma$, et soit $r(b)$ la forme réelle linéaire en b définie par $\sigma + b = \sigma + r(b) a$.

En posant

$$V_{\sigma+b, \sigma}^{(3)} = V_{\sigma+r(b)a, \sigma}^{(3)}$$

et

$$V_{\sigma+sa, \sigma}^{(3)} = e^{isP_a} e^{is(M_a(\sigma) - P_a)}$$

on vérifie, comme dans le cas particulier $a_\sigma = n_\sigma = n_0$ que $V_{\sigma+b, \sigma}^{(3)}$ définit un mouvement qui satisfait aux hypothèses du théorème 3.1. Par l'unicité de $\mathcal{V}_{\sigma, \sigma}$, on en déduit que $e^{isP_a} e^{is(M_a(\sigma) - P_a)}$ sont des représentants unitaires de $\mathcal{V}_{\sigma+sa, \sigma}$, et par la proposition 3.1., en faisant $s = 1$, que l'application $a \rightarrow e^{i(M_a(\sigma) - P_a)}$ induit pour chaque σ de Σ une représentation projective des translations.

Remarque 3.1. $\mathcal{V}_{\sigma, \sigma}$ a les propriétés de continuité et de différentiabilité énoncées au no 1, si on ajoute aux hypothèses du théorème 3.1., que $\Delta_\sigma = \Delta$ ne dépend pas de σ , que $e^{i(M_a(\sigma) - P_a)}$ est continu de (σ, a) et laisse invariant Δ et que $M_a(\sigma) e^{i(M_a(\sigma) - P_a)} \varphi$ est continu en (σ, a) . En effet, les représentants unitaires $V_{\sigma+x, \sigma} = e^{i(n, x)P_n} e^{i(n, x)(M_n(\sigma) - P_n)}$ ont les propriétés D 2), 3) du no 1, car la limite forte, pour $s \rightarrow 0$, de $1/s (V_{\sigma+x+sa, \sigma} - V_{\sigma+x, \sigma}) \varphi$ est

$$i(n, a) e^{i(n, x)P_n} M_n(\sigma) e^{-i(n, x)P_n} V_{\sigma+x, \sigma} \varphi.$$

Ceci est aussi continu de (σ, x) , et la propriété b) du no 1 est évidente.

On peut aussi énoncer un théorème d'existence et d'unicité pour des mouvements qui possèdent une constante d'énergie-impulsion et des générateurs satisfaisant aux conditions D 1), 2), 3) du no 1. L'unicité est déjà garantie par le théorème 1.1. La démonstration utilisera essentiellement la proposition 1.1.

Théorème 3.2. Soit $a \rightarrow e^{iP_a}$ une représentation unitaire des translations a . soient $M_a(\sigma)$ des opérateurs symétriques dans H qui dépendent de a et σ , définis sur un domaine commun Δ , avec les propriétés:

- le domaine de P_a contient Δ et e^{iP_a} transforme Δ en lui-même;
- $M_a(\sigma) = (n, a) M_n(\sigma)$ (n est une normale à σ telle que $n^2 = 1$);
- $M_a(\sigma)$ a une extension autoadjointe $\tilde{M}_a(\sigma)$, $\tilde{M}_a(\sigma) - P_a$ est autoadjoint, $e^{isM_a(\sigma)}$ $\Delta = \Delta$, $e^{is(\tilde{M}_a(\sigma) - P_a)} \Delta = \Delta$ et $\tilde{M}_a(\sigma) e^{i(\tilde{M}_a(\sigma) - P_a)} \varphi$ est continu de (σ, a) ;
- $M_a(\sigma + b) = e^{iP_b} M_a(\sigma) e^{-iP_b} + \varrho_a(\sigma, b) E$, où $\varrho_a(\sigma, b) = (n, a) \varrho_n(\sigma, b)$ est une fonction réelle.

Alors il existe un et un seul mouvement \mathcal{V} d'énergie-impulsion $R : a \rightarrow e^{iP_a}$ et de générateurs $M_a(\sigma)$ sur Δ au sens de D 1), 2), 3) du no 1, associés aux représentants unitaires

$$V_{\sigma+sa, \sigma} = e^{isP_a} e^{is(\tilde{M}_a(\sigma) - P_a)}.$$

L'application $\tilde{S}(\sigma) : a \rightarrow e^{i(\tilde{M}_a(\sigma) - P_a)}$ induit pour chaque σ de Σ une représentation projective du groupe des translations a .

Démonstration. Par l'hypothèse c) et la proposition 1.1., les extensions auto-adjointes $\tilde{M}_a(\sigma)$, $\tilde{M}_a(\sigma) - P_a$ sont uniques et b) entraîne alors que

$$\tilde{M}_b(\sigma) = (n, b) \tilde{M}_n(\sigma) .$$

Par la propriété d), les opérateurs autoadjoints $\tilde{M}_a(\sigma + b)$ et $e^{iP_b} \tilde{M}_a(\sigma) e^{-iP_b} + \varrho_a(\sigma, b)E$ sont des extensions d'un même opérateur symétrique sur Δ , et comme les exponentielles $e^{is\tilde{M}_a(\sigma+b)}$ et $e^{iP_b} e^{is\tilde{M}_a(\sigma)}$ laissent Δ invariant, on en déduit encore par la proposition 1.1. que

$$\tilde{M}_a(\sigma + b) = e^{iP_b} \tilde{M}_a(\sigma) e^{-iP_b} + \varrho_a(\sigma, b) E .$$

Soit Δ_σ le domaine de $\tilde{M}_n(\sigma)$, donc aussi de $\tilde{M}_a(\sigma) = (n, a) \tilde{M}_n(\sigma)$: on a $e^{iP_b} \Delta_\sigma = \Delta_{\sigma+b}$. Ainsi $\tilde{M}_a(\sigma)$, Δ_σ et la représentation $R: b \rightarrow e^{iP_b}$ satisfont aux hypothèses du théorème 3.1., d'où l'existence d'un mouvement \mathbf{v} de générateurs $\tilde{M}_a(\sigma)$ au sens de L (fort) sur Δ_σ , de constante R , et la propriété indiquée de $\tilde{S}(\sigma)$.

On peut prendre $V_{\sigma+sa, \sigma} = e^{isP_a} e^{is(\tilde{M}_a(\sigma)-P_a)}$ comme représentantes unitaires de \mathbf{v} et ceux-ci transforme Δ en lui-même. Mais \mathbf{v} a aussi les générateurs symétriques $M_a(\sigma)$ au sens de D 1), 2), 3) sur le domaine constant Δ . Ceci se vérifie comme à la fin de la remarque 3.1. en considérant la limite forte de

$$1/s (V_{\sigma+x+sa, \sigma} - V_{\sigma+x, \sigma}) \varphi$$

pour φ dans Δ . Enfin le théorème 1.1. assure l'unicité du mouvement \mathbf{v} du théorème 3.2.

Remarque 3.2. Si l'on a une représentation unitaire $R': (a, A) \rightarrow R'_{(a, A)}$ du groupe $SL(2, C)$ inhomogène et les hypothèses 3.1. a), b), c), mais au lieu de 3.1. d) une identité

$$d') M_{Aa}(A\sigma + b) = R'_{(b, A)} M_a(\sigma) R'^{-1}_{(b, A)} + \nu_a(\sigma, A, b) E$$

où $Aa, A\sigma$ sont les transformés de a, σ par A de $SL(2, C)$, et $\nu_a(\sigma, A, b)$ est une fonction réelle linéaire en a , et des sous-espaces denses Δ_σ de H tels que $\Delta_{A\sigma+a} = R'_{(a, A)} \Delta_\sigma$, en prenant pour R la représentation $a \rightarrow e^{iP_a} = R'_{(a, 1)}$ les conclusions du théorème 3.1. permettent d'établir immédiatement l'existence et l'unicité d'un mouvement $\mathbf{v}_{\tau, \sigma}$ de générateurs $M_a(\sigma)$ qui possède une constante R' de type $SL(2, C)$ inhomogène, et en particulier, à part la constante d'énergie-impulsion $R: a \rightarrow e^{iP_a} = R'_{(a, 1)}$, les différentes constantes de moment d'impulsion équivalentes associées par R' aux sous-groupes conjugués à $SL(2, C)$ dans $SL(2, C)$ inhomogène.

De même, sous les hypothèses 3.2. a), b), c), et d') ci-dessus au lieu de 3.2. d), il existe un mouvement unique de générateurs $M_a(\sigma)$ au sens de D 1), 2), 3) du no 1, et les mêmes constantes déterminées par la représentation R' .

Remarque 3.3. Soient $\mathcal{R}(\sigma): a \rightarrow \mathcal{R}_a(\sigma)$ des représentations projectives données pour chaque σ de Σ , et N une représentation unitaire de $SL(2, C)$, satisfaisant aux relations qui définissent une constante covariante au no 2. La famille de 3-plans $\sigma + a$ parallèles à σ étant fixée, soit $s \rightarrow e^{isT(\sigma)}$ un groupe unitaire à un paramètre qui par passage au quotient $U(H) \rightarrow \mathcal{D}(H)$ induit la représentation projective $s \rightarrow \mathcal{R}_{s\sigma}(\sigma)$

(n normale à σ , $n^2 = 1$), et notons $R: a \rightarrow e^{iP_a} = e^{i(n,a)T(\sigma)}$. Si $M_a(\sigma)$ et e^{iP_a} satisfont aux conditions du théorème 3.1. et si $M_a(\sigma)$ est covariante relativement à N :

$$M_{Aa}(A\sigma) = N_a M_a(\sigma) N_A^{-1} + \mu_a(\sigma, A) E$$

où $\mu_a(\sigma, A)$ est réelle et linéaire en a , en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 3.1., on obtient l'existence et l'unicité d'un mouvement de moment N , de constante $\mathcal{R}(\sigma)$ covariante relativement à N et de générateurs $M_a(\sigma)$.

4. Variations d'un mouvement

Soit $\mathcal{V}^{(1)}$ un mouvement au sens des conditions a) b) du no 1. Si $\mathcal{A}: \sigma \rightarrow \mathcal{A}_\sigma$ est une fonction à valeurs dans $\mathcal{D}(H)$, définie sur l'ensemble Σ des 3-plans du genre espace, $\mathcal{V}_{\tau,\sigma}^{(2)} = \mathcal{A}_\tau \mathcal{V}_{\tau,\sigma}^{(1)} \mathcal{A}_\sigma^{-1}$ est aussi un mouvement. La fonction \mathcal{A} sera dite *variation*, et on dira que $\mathcal{V}^{(2)}$ s'obtient en faisant varier $\mathcal{V}^{(1)}$ de \mathcal{A} .

Proposition 4.1. a) $\mathcal{V}^{(1)}$ et $\mathcal{V}^{(2)}$ étant deux mouvements il existe une variation \mathcal{A} telle que $\mathcal{V}_{\tau,\sigma}^{(2)} = \mathcal{A}_\tau \mathcal{V}_{\tau,\sigma}^{(1)} \mathcal{A}_\sigma^{-1}$. En particulier tout mouvement \mathcal{V} est de la forme $\mathcal{V}_{\tau,\sigma} = \mathcal{A}_\tau \mathcal{A}_\sigma^{-1}$.

b) Supposons que $\mathcal{V}^{(1)}$, $\mathcal{V}^{(2)}$ aient des générateurs respectifs $L_a^{(1)}(\sigma)$, $L_a^{(2)}(\sigma)$ sur $D_\sigma^{(1)}$, $D_\sigma^{(2)}$ au sens de (L) du no 3, associés à des représentants unitaires (locaux ou globaux) $V_{\sigma+a,\sigma}^{(1)}$, $V_{\sigma+a,\sigma}^{(2)}$ continu de (σ, a) et que $D_\sigma^{(2)} = A'_\sigma D_\sigma^{(1)}$, A'_σ étant un représentant unitaire de \mathcal{A}_σ .

Alors, il existe des représentants unitaires $A_{\sigma+s a}$ de $\mathcal{A}_{\sigma+s a}$ tels que si φ est dans $D_\sigma^{(2)}$, $1/s (A_{\sigma+s a} A_\sigma^{-1} - E)\varphi$ ait une limite faible, lorsque $s \rightarrow 0$, égale à

$$i (L_a^{(2)}(\sigma) - A_\sigma L_a^{(1)}(\sigma) A_\sigma^{-1}) \varphi.$$

Pour démontrer 4.1. a), soit O un point de M_4 , et σ étant donné soit σ_0 le 3-plan par O parallèle à σ . En posant $\mathcal{A}_\sigma = \mathcal{V}_{\sigma,\sigma_0}^{(2)} \mathcal{V}_{\sigma_0,\sigma}^{(1)}$, on obtient $\mathcal{V}_{\tau,\sigma}^{(2)} = \mathcal{A}_\tau \mathcal{V}_{\tau,\sigma}^{(1)} \mathcal{A}_\sigma^{-1}$.

Pour 4.1. b), si $V_{\sigma+s a,\sigma}^{(1)}$ et $V_{\sigma+s a,\sigma}^{(2)}$ définissent les générateurs $L_a^{(1)}(\sigma)$ et $L_a^{(2)}(\sigma)$ sur $D_\sigma^{(1)}$ respectivement $D_\sigma^{(2)}$, comme $V_{\sigma+s a,\sigma}^{(2)}$ peut s'écrire $A_{\sigma+s a} V_{\sigma+s a,\sigma}^{(1)} A_\sigma^{-1}$ en choisissant convenablement les représentants unitaires $A_{\sigma+s a}$, A_σ de $\mathcal{A}_{\sigma+s a}$, \mathcal{A}_σ et que $A_{\sigma+s a}$ est alors continu en s par nos hypothèses, l'identité, pour φ dans $D_\sigma^{(2)}$,

$$1/s (V_{\sigma+s a,\sigma}^{(2)} - E) \varphi = 1/s (A_{\sigma+s a} A_\sigma^{-1} - E) \varphi + 1/s A_{\sigma+s a} (V_{\sigma+s a,\sigma}^{(1)} - E) A_\sigma^{-1} \varphi$$

donne la conclusion 4.1. b).

Remarque 4.1. Si la différence $L_a^{(2)}(\sigma) - A_\sigma L_a^{(1)}(\sigma) A_\sigma^{-1}$ est essentiellement auto-adjointe sur $D_\sigma^{(2)} = A_\sigma D_\sigma^{(1)}$ 4.1. b) montre que son extension autoadjointe est un générateur au sens de (L) du mouvement $A_\tau A_\sigma^{-1}$.

Notons encore que si $L_a^{(1)}(\sigma)$ resp. $L_a^{(2)}(\sigma)$ de 4.1. b) sont des générateurs de $\mathcal{V}^{(1)}$ resp. $\mathcal{V}^{(2)}$ au sens de D 1), 2), 3) du no 1 sur le même domaine constant Δ , que les représentants unitaires de \mathcal{A}_σ transforment en lui-même, on voit par la même identité que dans la démonstration de 4.1. b) que le mouvement $\mathcal{A}_\tau A_\sigma^{-1}$ a toujours des générateurs $L_a^{(2)}(\sigma) - A_\sigma L_a^{(1)}(\sigma) A_\sigma^{-1}$ au sens de D 1), 2), 3) sur Δ .

Energie-impulsion d'un mouvement varié. Considérons deux mouvements \mathcal{U} , \mathcal{V} sur H . Soit \mathcal{A}_σ une variation telle que $\mathcal{V}_{\tau,\sigma} = \mathcal{A}_\tau \mathcal{U}_{\tau,\sigma} \mathcal{A}_\sigma^{-1}$ et supposons que $\mathcal{U}_{\tau,\sigma}$ et $\mathcal{V}_{\tau,\sigma}$ possèdent des représentants unitaires respectifs $U_{\tau,\sigma}$, $V_{\tau,\sigma}$ et des générateurs associés $L_a(\sigma)$, $L'_a(\sigma)$ sur Δ_σ et $A'_\sigma \Delta_\sigma$ respectivement, A'_σ appartenant au rayon unitaire \mathcal{A}_σ .

Par la proposition 4.1. b), on obtient une relation (pour A_σ convenable)

$$L'_a(\sigma) = A_\sigma (L_a(\sigma) + K_a(\sigma)) A_\sigma^{-1}$$

valable sur $A_\sigma \Delta_\sigma$, et $i A_\sigma K_a(\sigma) A_\sigma^{-1} \varphi$ est la limite faible, pour $s \rightarrow 0$, de

$$1/s (A_{\sigma+s a} A_\sigma^{-1} - E) \varphi$$

avec φ dans $A_\sigma \Delta_\sigma$. $K_a(\sigma) \psi$, pour ψ dans Δ_σ , est alors la limite faible de

$$1/s (A_\sigma^{-1} A_{\sigma+s a} - E) \psi = A_\sigma^{-1} A_{\sigma+s a} 1/s (E - A_{\sigma+s a}^{-1} A_\sigma) \psi.$$

Supposons l'opérateur $K_a(\sigma)$ essentiellement autoadjoint sur son domaine Δ_σ et notons $J_a(\sigma)$ son extension autoadjointe $K_a^*(\sigma)$. $J_a(\sigma)$ sera dit *générateur à droite* du mouvement $\mathcal{A}_\sigma^{-1} \mathcal{A}_\tau$ au sens de (L) sur Δ_σ si $A_\sigma J_a(\sigma) A_\sigma^{-1}$ est un générateur de $\mathcal{A}_\tau \mathcal{A}_\sigma^{-1}$ sur Δ_σ , au sens de (L) défini au no 3, ou, ce qui revient au même par la dernière égalité et la continuité de $A_{\sigma+s a}$, si $-J_a(\sigma)$ est un générateur au sens de (L), que nous appellerons aussi *générateur à gauche*, de $\mathcal{A}_\tau^{-1} \mathcal{A}_\sigma$ sur Δ_σ . On définit de même un générateur à droite au sens de D 1), 2), 3) sur un sous-espace Δ . Aux théorèmes et propositions donnés jusqu'ici, correspondent évidemment des énoncés analogues lorsqu'on y remplace *générateurs à gauche* par *générateurs à droite*.

\mathcal{U} et $J_a(\sigma)$ étant donnés, soit $R : a \rightarrow e^{i P_a}$ une énergie-impulsion de \mathcal{U} .

La variation \mathcal{A}_σ , donc aussi $\mathcal{V}_{\tau, \sigma}$, est déterminée si $J_a(\sigma)$ est tel que

$$J_a(\sigma + b) = e^{i T_b} J_a(\sigma) e^{-i T_b} + \nu_a(\sigma, b) E,$$

($\nu_a(\sigma, b)$ réelle) et remplit les autres conditions qui par le théorème 3.1. en font un générateur à droite de $\mathcal{A}_\sigma^{-1} \mathcal{A}_\tau$ au sens de (L). Soit σ_0 un 3-plan qui parcourt les 3-plans du genre espace par O dans M_4 . On aura, comme expression possible pour $A_{\sigma_0}^{-1} A_{\sigma_0+a}$:

$$A_{\sigma_0}^{-1} A_{\sigma_0+a} = e^{i(J_a(\sigma_0) + T_a)} e^{-i T_a}.$$

$A_\sigma = A_{\sigma_0+a}$ est une solution qui ne dépend que de la donnée initiale A_{σ_0} , et l'application $c \rightarrow e^{i(J_c(\sigma) + T_c)}$ induit une représentation projective $c \rightarrow \mathcal{S}_c(\sigma)$ du groupe des translations par le théorème 3.1.

\mathcal{R} désignant la représentation projective induite par $R : c \rightarrow e^{i T_c} \mathcal{R}'(\sigma)$ celle qui est induite par l'application

$$c \rightarrow A_\sigma e^{i(J_c(\sigma) + T_c)} A_\sigma^{-1},$$

on vérifie immédiatement les relations 1), 2), 3) ci-après et la proposition 4.2.

Proposition 4.2. Les trois relations:

1)

$$\mathcal{R}'_c(\sigma) = \mathcal{A}_\sigma \mathcal{S}_c(\sigma) \mathcal{A}_\sigma^{-1}$$

2)

$$\mathcal{A}_\sigma^{-1} \mathcal{A}_{\sigma+b} = \mathcal{S}_b(\sigma) \mathcal{R}_b^{-1}$$

3)

$$\mathcal{S}_b(\sigma + c) = \mathcal{R}_c \mathcal{S}_b(\sigma) \mathcal{R}_c^{-1},$$

entraînent

$$\mathcal{R}'(\sigma + b) = \mathcal{R}'(\sigma) = \mathcal{R}'(\sigma_0)$$

et

$$\mathcal{V}_{\tau+c, \sigma+c} = \mathcal{A}_{\tau+c} \mathcal{U}_{\tau+c, \sigma+c} \mathcal{A}_{\sigma+c}^{-1} = \mathcal{R}'_c(\sigma_0) \mathcal{V}_{\tau, \sigma} \mathcal{R}'_c(\sigma_0)^{-1}.$$

$\mathcal{R}'(\sigma_0) = \mathcal{R}'(\sigma_0 + b)$ est donc une constante de \mathcal{V} associée au groupe des translations si $\mathcal{R}'(\sigma_0)$ ne dépend pas de σ_0 , ce qui n'est pas nécessairement le cas.

Supposons maintenant que $\nu_a(\sigma, b) = 0$ et que

$$S(\sigma_0) : x \rightarrow e^{i(J_x(\sigma_0) + T_x)}$$

soit une représentation unitaire des translations (qui induise $S(\sigma_0)$). On a alors, en posant $R'_x(\sigma) = A_\sigma S_x(\sigma) A_\sigma^{-1}$:

$$R'_x(\sigma) = e^{iT'_x(\sigma)} = A_\sigma S_x(\sigma) A_\sigma^{-1} = R'_x(\sigma_0)$$

et

$$R'(\sigma) \text{ induit } \mathcal{R}'(\sigma).$$

Prenons $A_{\sigma_0} = E$. Si \mathcal{U} a une constante de type $SL(2, C)$ inhomogène qui détermine $R : c \rightarrow e^{iT_c}$ par restriction aux translations et le moment $M : A \rightarrow M_A$ de \mathcal{U} , A étant mis pour $(0, A)$ et laissant le point 0 fixe, si $J_a(\sigma)$ possède encore la propriété de covariance relativement à M :

$$J_{Aa}(A\sigma) = M_A J_a(\sigma) M_A^{-1}$$

alors $\mathcal{R}'(\sigma) = \mathcal{R}'(\sigma_0)$ est une constante d'énergie-impulsion de \mathcal{V} covariante relativement à M (n° 2), et \mathcal{V} a même moment d'impulsion M que \mathcal{U} .

Comme $J_x(\sigma_0) = (n, x) J_n(\sigma_0)$ par définition ($n = \text{normale à } \sigma_0$, $n^2 = 1$), les composantes $T'_a(\sigma_0)$ suivant des directions a telles que $(n, a) = 0$, $a^2 = -1$, c'est-à-dire les composantes de l'impulsion, sont égales aux composantes de l'impulsion T_a de \mathcal{U} , tandis que l'énergie $T'_n(\sigma_0)$ est égale à $T_n + J_n(\sigma_0)$.

Plus généralement, si $\nu_a(\sigma, b)$ n'est pas nulle et si

$$J_a(A\sigma) = M_A J_a(\sigma) M_A^{-1} + \varrho_a(\sigma, A) E,$$

$\varrho_a(\sigma, A)$ réelle, les relations 1), 2), 3), de la proposition 4.2. et les conditions initiales $A_{\sigma_0} = E$ entraînent que le mouvement varié \mathcal{V} à le même moment d'impulsion M que \mathcal{U} et une constante $\mathcal{R}'(\varrho)$ associée aux translations, covariante (no 2) relativement à la représentation M .

Le théorème 4.1.) résume ce qui a été démontré jusqu'ici dans ce no 4.

Théorème 4.1. Soient $R : a \rightarrow e^{iT_a}$ une représentation unitaire des translations, $J_a(\sigma)$ une famille d'opérateurs autoadjoints satisfaisant aux conditions qui en font (par le théorème 3.1.) des générateurs à droite d'un mouvement, au sens de (L) sur Δ_σ :

- le domaine de T_a contient Δ_σ et $e^{iT_a} \Delta_\sigma = \Delta_{\sigma+a}$;
- la restriction de $J_a(\sigma)$ à Δ_σ est essentiellement autoadjointe, $J_a(\sigma) = (n, a) J_n(\sigma)$;
- $J_a(\sigma) + T_a$ est autoadjoint, sa restriction à Δ_σ est essentiellement autoadjointe, $e^{i(J_a(\sigma) + T_a)}$ est continu de (σ, a) ;
- $J_a(\sigma + b) = e^{iT_b} J_a(\sigma) e^{-iT_b} + \nu_a(\sigma, b)$, $\nu_a(\sigma, b)$ réelle.

Soient $\mathcal{A}_\sigma \mathcal{A}_\sigma^{-1}$ le mouvement (unique par le théorème 3.1.) de générateurs à droite $J_a(\sigma)$ au sens de (L) et de constante R associée aux translations, et \mathcal{U} un mouvement de même constante R .

Alors si $\mathcal{V}_{\tau, \sigma} = \mathcal{A}_\tau \mathcal{U}_{\tau, \sigma} \mathcal{A}_\sigma^{-1}$ et si $S(\sigma) : a \rightarrow S_a(\sigma)$ est la représentation projective induite par $a \rightarrow e^{i(J_a(\sigma) + T_a)}$ la représentation $\mathcal{R}'(\sigma) : a \rightarrow \mathcal{R}'_a(\sigma) = \mathcal{A}_\sigma S_a(\sigma) \mathcal{A}_\sigma^{-1}$ a les propriétés:

$$\mathcal{R}'(\sigma + b) = \mathcal{R}'(\sigma), \mathcal{V}_{\tau+c, \sigma+c} = \mathcal{R}'_c(\sigma) \mathcal{V}_{\tau, \sigma} \mathcal{R}'_c(\sigma)^{-1},$$

$\mathcal{R}'(\sigma)$ est une constante covariante relativement à un moment M (no 2) du mouvement varié $\mathcal{V}_{\tau, \sigma} = \mathcal{A}_\tau \mathcal{U}_{\tau, \sigma} \mathcal{A}_\sigma^{-1}$ si \mathcal{U} a une constante de type $SL(2, C)$ inhomogène qui définit R et un moment d'impulsion M de \mathcal{U} par restriction aux translations resp. à un sous-groupe $SL(2, C)$, et si pour A dans ce sous-groupe, $J_A a(A_\sigma) = M_A J_a(\sigma) M_A^{-1} + \varrho_a(\sigma, A)$, ($\varrho_a(\sigma, A)$ réelle), sous les conditions initiales $A_{\sigma_0} = E$, σ_0 passant par un point O fixe par les rotations A .

Remarque 4.2. a) Si \mathcal{U} possède les générateurs $L_a(\sigma)$ au sens de L sur \mathcal{A}_σ et si la restriction de $L_a(\sigma) + J_a(\sigma)$ à \mathcal{A}_σ est essentiellement autoadjointe, l'adjoint de

$$A_\sigma (L_a(\sigma) + J_a(\sigma)) A_\sigma^{-1}$$

est un générateur de \mathcal{V} au sens de L sur $A_\sigma \mathcal{A}_\sigma$.

b) Ajoutons qu'en supposant $\mathcal{A}_\sigma = \mathcal{A}$ et en imposant à T_a , $J_a(\sigma)$, $T_a + J_a(\sigma)$ des conditions semblables à a), b), c), d) du théorème 3.2. (pour P_a , $M_a(\sigma)$, $P_a - M_a(\sigma)$ respectivement) on obtient une variante du théorème 4.1. qui s'énonce de manière évidente: les opérateurs symétriques $J_a(\sigma)$ sont alors des générateurs à droite de $\mathcal{A}_\sigma^{-1} \mathcal{A}_\tau$ au sens de D 1), 2), 3) du no 1.

c) Lorsqu'on ne suppose pas l'existence de générateurs pour \mathcal{U} et $\mathcal{A}_\sigma^{-1} \mathcal{A}_\tau$, mais seulement l'existence d'une constante commune \mathcal{R} associée aux translations, on peut toujours poser les relations 1), 2), 3) de la proposition 4.2., dont on déduit un mouvement varié $\mathcal{A}_\tau \mathcal{U}_{\tau, \sigma} \mathcal{A}_\sigma^{-1} = \mathcal{V}_{\tau, \sigma}$ et des représentations projectives $\mathcal{R}'(\sigma) : a \rightarrow \mathcal{R}'_a(\sigma)$ telles que $\mathcal{R}'(\sigma + b) = \mathcal{R}'(\sigma)$ et $\mathcal{V}_{\tau+c, \sigma+c} = \mathcal{R}'_c(\sigma) \mathcal{V}_{\tau, \sigma} \mathcal{R}'_c(\sigma)^{-1}$.

Cela donne en particulier la proposition 4.3.

Proposition 4.3. Supposons que \mathcal{U} ait une constante de type $SL(2, C)$ inhomogène qui définit la constante d'énergie-impulsion R et le moment $M : A \rightarrow M_A$ de \mathcal{U} (A désignant les rotations qui laissent un point O fixe).

Alors les relations 1), 2), 3) de la proposition 4.2. jointes à la relation

$$\mathcal{S}_{Ab}(A\sigma) = M_A \mathcal{S}_b(\sigma) M_A^{-1},$$

et les conditions initiales $A_{\sigma_0} = \mathcal{I}$ pour tout σ_0 de Σ par O , entraînent que le mouvement varié $\mathcal{V}_{\tau, \sigma} = \mathcal{A}_\tau \mathcal{U}_{\tau, \sigma} \mathcal{A}_\sigma^{-1}$ possède une constante

$$\mathcal{R}'(\sigma) : a \rightarrow \mathcal{R}'_a(\sigma) = \mathcal{A}_\sigma \mathcal{S}_a(\sigma) \mathcal{A}_\sigma^{-1}$$

covariante relativement à M .

PARTIE II

5. Produit tensoriel de mouvements

$H^{(1)}, H^{(2)}$ étant deux espaces d'Hilbert, $H = H^{(1)} \hat{\otimes} H^{(2)}$ désignera l'espace d'Hilbert défini par l'espace préhilbertien $H^{(1)} \otimes H^{(2)}$ muni de la forme hermitienne (x, f) telle que

$$(f \otimes g, h \otimes j) = (f, h)^{(1)} (g, j)^{(2)},$$

$(f, h)^{(1)}, (g, j)^{(2)}$ étant les formes hermitiennes de $H^{(1)}$ et $H^{(2)}$ respectivement.

Soient A, B des opérateurs bornés sur $H^{(1)}$ resp. $H^{(2)}$ et $A \hat{\otimes} B$ l'extension fermée de $A \otimes B$ à H .

Si $\mathcal{U}^{(1)}, \mathcal{U}^{(2)}$ sont des mouvements sur $H^{(1)}$ et $H^{(2)}$ respectivement, $U_{\tau, \sigma}^{(1)}, U_{\tau, \sigma}^{(2)}$ des représentants unitaires de ceux-ci, les opérateurs $U_{\tau, \sigma} = U_{\tau, \sigma}^{(1)} \hat{\otimes} U_{\tau, \sigma}^{(2)}$ sur H sont des représentants unitaires d'un mouvement \mathcal{U} . \mathcal{U} sera dit *produit tensoriel* de $\mathcal{U}^{(1)}$ et $\mathcal{U}^{(2)}$ et sera noté $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{(1)} \otimes \mathcal{U}^{(2)}$ où $U_{\tau, \sigma} = U_{\tau, \sigma}^{(1)} \otimes U_{\tau, \sigma}^{(2)}$. (Le produit tensoriel de plus de deux mouvements se définit de manière évidente).

Généralement, le produit $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$ de deux éléments \mathcal{A} de $\mathcal{D}(H^{(1)})$, \mathcal{B} de $\mathcal{D}(H^{(2)})$ sera par définition l'élément de $\mathcal{D}(H^{(1)} \hat{\otimes} H^{(2)})$ de représentant unitaire $A \hat{\otimes} B$, A, B appartenant aux rayons unitaires \mathcal{A}, \mathcal{B} respectivement.

Lorsque $\mathcal{U}^{(1)}$ possède la constante $\mathcal{R}^{(1)} : a \rightarrow \mathcal{R}_a^{(1)}$, $\mathcal{U}^{(2)}$ la constante $\mathcal{R}^{(2)} : a \rightarrow \mathcal{R}_a^{(2)}$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{(1)} \hat{\otimes} \mathcal{U}^{(2)}$ peut s'écrire par la proposition 3.1.

$$U_{\sigma+a, \sigma} = (\mathcal{R}_a^{(1)} \hat{\otimes} \mathcal{R}_a^{(2)}) (S_a^{(1)}(\sigma) \hat{\otimes} S_a^{(2)}(\sigma)) = \mathcal{R}_a S_a(\sigma)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \mathcal{R}^{(1)} \hat{\otimes} \mathcal{R}^{(2)} : a \rightarrow \mathcal{R}_a^{(1)} \hat{\otimes} \mathcal{R}_a^{(2)}, \\ S(\sigma) &= S_a^{(1)} \hat{\otimes} S_a^{(2)} : a \rightarrow S_a^{(1)}(\sigma) \hat{\otimes} S_a^{(2)}(\sigma) \end{aligned}$$

sont des représentations projectives, et $\mathcal{R} : a \rightarrow \mathcal{R}_a$ est une constante de \mathcal{U} associée au groupe des translations.

Plus généralement, une constante de $\mathcal{U}^{(1)}$ et une constante de même type de $\mathcal{U}^{(2)}$ déterminent une constante de $\mathcal{U}^{(1)} \hat{\otimes} \mathcal{U}^{(2)}$ qu'on appellera leur produit tensoriel.

Si $\mathcal{U}^{(1)}$ et $\mathcal{U}^{(2)}$ ont les générateurs respectifs $M_a^{(1)}(\sigma), M_a^{(2)}(\sigma)$ au sens de (L), sur $\mathcal{A}_\sigma^{(1)}, \mathcal{A}_\sigma^{(2)}$, posons

$$M_a^{(1,2)}(\sigma) = M_a^{(1)}(\sigma) \otimes E^{(2)} + E^{(1)} \otimes M_a^{(2)}(\sigma),$$

$E^{(1)}$ et $E^{(2)}$ désignant les opérateurs identités de $H^{(1)}, H^{(2)}$ respectivement;

$M_a^{(1,2)}(\sigma)$ est considéré comme opérateur symétrique sur $\mathcal{A}_\sigma^{(1)} \otimes \mathcal{A}_\sigma^{(2)}$. Soient $F_\lambda^{(1)}, F_\lambda^{(2)}$ les projecteurs spectraux (qui dépendent de a et σ) des opérateurs autoadjoints $M_a^{(1)}(\sigma)$ resp. $M_a^{(2)}(\sigma)$. Les opérateurs autoadjoints $L_a^{(1)}(\sigma), L_a^{(2)}(\sigma)$ dans $H = H^{(1)} \hat{\otimes} H^{(2)}$ dont les projecteurs spectraux sont $F_\lambda^{(1)} \hat{\otimes} E^{(2)}$ resp. $E^{(1)} \hat{\otimes} F_\lambda^{(2)}$, sont des extensions de $M_a^{(1)}(\sigma) \otimes E^{(2)}$ resp. $E^{(1)} \otimes M_a^{(2)}(\sigma)$, et l'opérateur symétrique $L_a^{(1)}(\sigma) + L_a^{(2)}(\sigma)$ est une extension de $M_a^{(1,2)}(\sigma)$. Comme les projecteurs $F_\lambda^{(1)} \hat{\otimes} E^{(2)}$ commutent avec les projecteurs $E^{(1)} \hat{\otimes} F_\lambda^{(2)}$, $L_a^{(1)}(\sigma)$ et $L_a^{(2)}(\sigma)$ sont fonctions d'un même opérateur autoadjoint. $L_a^{(1)}(\sigma) + L_a^{(2)}(\sigma)$ possède alors une extension autoadjointe $L_a(\sigma)$ (7, p. 342) qui est un générateur de $\mathcal{U}^{(1)} \hat{\otimes} \mathcal{U}^{(2)}$ sur $\mathcal{A}_\sigma = \mathcal{A}_\sigma^{(1)} \otimes \mathcal{A}_\sigma^{(2)}$ au sens de (L) si sa restriction $M_a^{(1,2)}(\sigma)$ à \mathcal{A}_σ est essentiellement autoadjointe.

D'autre part, si $M_a^{(1)}(\sigma), M_a^{(2)}(\sigma)$ sont des générateurs de $\mathcal{U}^{(1)}, \mathcal{U}^{(2)}$ au sens de D 1), 2), 3) sur $\mathcal{A}^{(1)}, \mathcal{A}^{(2)}$ respectivement, $\mathcal{U}^{(1)} \hat{\otimes} \mathcal{U}^{(2)}$ a les générateurs $M_a^{(1,2)}(\sigma)$ dans le même sens sur $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(1)} \otimes \mathcal{A}^{(2)}$, et c'est le seul mouvement qui possède ces générateurs sur \mathcal{A} par le théorème d'unicité 1.1.

Si $H^{(1)} = H^{(2)}, \mathcal{U}^{(1)} = \mathcal{U}^{(2)}$, le produit $U_{\tau, \sigma}^{(1)} \hat{\otimes} U_{\tau, \sigma}^{(1)}$ du représentant unitaire $U_{\tau, \sigma}^{(1)}$ par lui-même transforme en eux-mêmes les deux sous-espaces $H^{(1)} \otimes_s H^{(1)}$ et $H^{(1)} \otimes_a H^{(1)}$ formés respectivement des éléments symétriques et antisymétriques de l'espace $H^{(1)} \otimes H^{(1)}$, d'où l'existence de deux mouvements notés $\mathcal{U}^{(1)} \hat{\otimes}_s \mathcal{U}^{(1)}$ et $\mathcal{U}^{(1)} \hat{\otimes}_a \mathcal{U}^{(1)}$ sur les sous-espaces complétés $H^{(1)} \hat{\otimes}_s H^{(1)}$ et $H^{(1)} \hat{\otimes}_a H^{(1)}$ de $H = H^{(1)} \hat{\otimes} H^{(2)}$. Comme pour le produit tensoriel de deux mouvements, la donnée de générateurs de $\mathcal{U}^{(1)}$ détermine sous certaines conditions des générateurs de $\mathcal{U}^{(1)} \hat{\otimes}_s \mathcal{U}^{(1)}$ ou $\mathcal{U}^{(1)} \hat{\otimes}_a \mathcal{U}^{(1)}$. C'est toujours le cas si $\mathcal{U}^{(1)}$ a des générateurs au sens de D 1), 2), 3) du no 1.

On définit de manière évidente les produits symétriques $\mathcal{R}^{(1)} \otimes_s \mathcal{R}^{(1)}$ et antisymétrique $\mathcal{R}^{(1)} \otimes_a \mathcal{R}^{(1)}$ d'une constante $\mathcal{R}^{(1)}$ par elle-même. Ce sont des constantes de $\mathcal{U}^{(1)} \otimes_s \mathcal{U}^{(1)}$ resp. $\mathcal{U}^{(1)} \otimes_a \mathcal{U}^{(1)}$.

Soit \mathcal{U} un produit de plusieurs mouvements qui peut être symétrique ou antisymétrique en des facteurs égaux, et formons de même les produits de leurs constantes de type donné.

Soit \mathcal{A}_σ une variation d'un tel produit \mathcal{U} : on appellera *générateur d'interaction* un générateur à droite de $\mathcal{A}_\sigma^{-1} \mathcal{A}_\tau$.

Construction de générateurs d'interaction

Supposons le mouvement unitaire $U^{(i)}$, $i = 1, 2$, muni de la constante $F^{(i)} : (a, A) \rightarrow F_{(a, A)}^{(i)}$ de type $SL(2, C)$ inhomogène. Soient $R^{(i)}$ une énergie-impulsion et $M^{(i)}$ un moment induits par $F^{(i)}$, c'est-à-dire

$$R^{(i)} : (a, 1) \rightarrow F_{(a, 1)}^{(i)} = R_a^{(i)}, M^{(i)} : (0, A) \rightarrow F_{(0, A)}^{(i)} = M_A^{(i)},$$

et

$$F = F^{(1)} \hat{\otimes} F^{(2)}, R = R^{(1)} \hat{\otimes} R^{(2)}, M = M^{(1)} \otimes M^{(2)}$$

les constantes correspondantes de $U = U^{(1)} \hat{\otimes} U^{(2)}$. Soient encore O le point de M_4 fixe par les rotations $(0, A)$, et σ_0 les 3-plans de Σ passant par O .

Nous allons montrer qu'il existe U , des variations unitaires A_σ (avec les conditions initiales $A_{\sigma_0} = E$) de U et des générateurs d'interaction correspondants $J_a(\sigma)$, tels que

$$V_{\tau, \sigma} = A_\tau U_{\tau, \sigma} A_\sigma^{-1}$$

ait une constante d'énergie-impulsion $R'(\sigma)$ covariante relativement à un moment M de U , avec les propriétés:

- 1) $R'_n(\sigma)$ - donc aussi $J_n(\sigma)$ - ne commute pas avec R_n ($n = n_\sigma$ = normale à σ , $n^2 = 1$),
- 2) il n'existe pas de représentation unitaire de $SL(2, C)$ inhomogène qui induise la classe des représentations $R'(\sigma)$ par restriction aux translations.

Supposons d'abord les représentations $F^{(i)}$, $R^{(i)}$, $M^{(i)}$ données. Pour $U^{(i)}$ nous prenons le mouvement défini par

$$U_{\sigma+s n, \sigma}^{(i)} = R_{s n}^{(i)} = e^{i s T_n^{(i)}}$$

qui a les générateurs au sens de (L)

$$M_a^{(i)}(\sigma) = (n, a) T_n^{(i)}$$

sur le domaine $\Delta_\sigma^{(i)} = \Delta_{\sigma+c}^{(i)} = \Delta_n^{(i)}$ de $T_n^{(i)}$, et les constantes $F^{(i)}$, $R^{(i)}$, $M^{(i)}$. Le produit $U = U^{(1)} \otimes U^{(2)}$ est de la forme

$$U_{\sigma+s n, \sigma} = R_{s n}^{(1)} \hat{\otimes} R_{s n}^{(2)} = e^{i s T_n}$$

et possède les générateurs

$$L_a(\sigma) = (n, a) T_n$$

au sens de (L) sur le domaine $\Delta_\sigma = \Delta_{\sigma+c} = \Delta_n$ de T_n .

Fixons maintenant un 3-plan τ_0 par O , de normale n_0 , $n_0^2 = 1$. Pour construire des opérateurs A_σ et $J_a(\sigma)$ d'un type assez général, satisfaisant à 1) et 2), on peut utiliser un opérateur autoadjoint et positif B^0 tel que

- a) le domaine de B^0 contient le domaine Δ_{n_0} de T_{n_0} ;
- b) $B^0 + T_{n_0}$ est autoadjoint sur Δ_{n_0} ;
- c) $R_a B^0 R_a^{-1} = B^0$ si $(n_0, a) = 0$, $M_A B^0 M_A^{-1} = B^0$ si $A n_0 = n_0$.

Ces relations entraînent l'existence d'une fonction $\sigma \rightarrow B(\sigma)$ telle que

$$B(\tau_0) = B^0, M_A B(\sigma) M_A^{-1} = B(A\sigma), B(\sigma + b) = R_b B(\sigma) R_b^{-1},$$

donc aussi

$$B(A\sigma) + T_{n_A\sigma} = M_A (B(\sigma) + T_{n_\sigma}) M_A^{-1}, B(\sigma + b) + T_{n_\sigma} = R_b (B(\sigma) + T_{n_\sigma}) R_b^{-1}.$$

Si l'on pose $J_a(\sigma) = (n, a) B(\sigma)$, avec $n = n_\sigma$, on vérifie directement que c'est un générateur (fort) à droite, au sens de (L) sur le domaine $\Delta_\sigma = \Delta_n$ de T_n , d'un mouvement (qui est unique par le théorème 3.1. et qui n'est pas défini comme U par un groupe unitaire $s \rightarrow e^{isT}$)

$$A_\sigma^{-1} A_{\sigma+a} = e^{i(n, a)(J_n(\sigma) + T_n)} e^{-i(n, a)T_n}$$

et que pour $A_{\sigma_0} = E$, $V_{\sigma+a, \sigma} = A_{\sigma+a} U_{\sigma+a, \sigma} A_\sigma^{-1}$ a l'énergie-impulsion $R'(\sigma) = R'(\sigma_0)$ ($\sigma = \sigma_0 + c$) covariante relativement à M , définie par

$$R'_a(\sigma) = R'_a(\sigma_0) = e^{iT_a^{'}(\sigma_0)} = e^{i(n, a)(J_n(\sigma_0) + T_n)} e^{iT_a - (n, a)n}.$$

Si donc $R^{(i)}$, $M^{(i)}$ et B^0 sont donnés, il suffira de vérifier que $R'(\sigma)$ satisfait aux conditions 1), 2), ce que nous ferons, l'énergie T_n étant positive, en utilisant essentiellement le fait que B^0 est choisi positif et de bonne inférieure non nulle. L'énergie

$$T'_n(\sigma_0) = J_n(\sigma_0) + T_n$$

est positive si T_n l'est, puisque $J_n(\sigma_0) = B(\sigma_0)$ est unitairement semblable à B^0 .

$R^{(i)}$, $M^{(i)}$ sont donnés de la manière suivante.

Soient σ_p , σ_q les deux hypersurfaces $p^2 = m_1^2$, $p^0 > 0$, $q^2 = m_2^2$, $m_1, m_2 \neq 0$, et $d\sigma_p$, $d\sigma_q$ les mesures invariantes correspondantes, $H^{(1)}$, $H^{(2)}$ les espaces d'Hilbert associés à ces mesures. $H^{(1)}$ s'identifie à l'espace des fonctions de carré sommable $f(p) = f(p^1, p^2, p^3)$ pour la mesure $1/p^0 d^3p$, de même pour $H^{(2)}$, et $H^{(1)} \hat{\otimes} H^{(2)} = H$ est associé à la mesure $d\sigma_{p,q} = d\sigma_p d\sigma_q$. $R^{(1)}$ et $M^{(1)}$ sont définis par

$$R_a^{(1)}(f)(p) = e^{ip\cdot a} f(p), M_A^{(1)}(f)(p) = f(A^{-1}p),$$

de même pour $R^{(2)}$, $M^{(2)}$, d'où en particulier

$$R_a(f)(p, q) = (R_a^{(1)} \hat{\otimes} R_a^{(2)})(f)(p, q) = e^{i(p+q)\cdot a} f(p, q) = e^{iT_a} f.$$

T_a étant comme jusqu'ici le générateur de Stone de $s \rightarrow R_{sa}$, par la dernière relation T_a est ainsi l'opérateur de multiplication par $(p + q) a$.

τ_0 étant fixé comme précédemment et de normale n_0 , $n^2 = 1$, soient n_1, n_2, n_3 trois vecteurs orthonormés dans τ_0 tels que $T^j = T_{nj}$, $j = 0, 1, 2, 3$, soit l'opérateur de

multiplication par $p^j + q^j$. Nous désignons par λ ou μ les retations (dans $SU(2)$) de M_4 qui laissent O et n_0 fixes, et par \underline{a} le vecteur (a^1, a^2, a^3) si $a = (a^0, a^1, a^2, a^3)$.

Soit $\alpha: (\underline{p}, \underline{q}) \rightarrow (\underline{r}, \underline{s})$ une transformation inversible (qui s'identifie à une transformation inversible de $\sigma_p \times \sigma_q$) telle que $r^i + s^i = p^i + q^i$, $i = 1, 2, 3$, $\alpha(\underline{O}, \underline{O}) = (\underline{O}, \underline{O})$ et que le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial (\underline{r}, \underline{s})}{\partial (\underline{p}, \underline{q})},$$

son inverse, et les fonctions $r^0/p^0, p^0/r^0, s^0/q^0, q^0/s^0$, soient bornés et positifs. Ils s'ensuit que l'opérateur

$$A(\alpha): f(p, q) \rightarrow f(\alpha)(p, q)$$

est borné sur H ainsi que son inverse $A(\alpha)^{-1}$: on a en effet

$$\| A(\alpha) f \|^2 \leq C \| f \|^2$$

où C est la borne supérieure de

$$\theta = \theta(r, s) = \frac{\partial(\underline{p}, \underline{q})}{\partial(\underline{r}, \underline{s})} r^0 s^0 (p^0)^{-1} (q^0)^{-1};$$

l'adjoint de $A(\alpha)$ est

$$A(\alpha)^* = \theta A(\alpha)^{-1}: f(u, v) \rightarrow \theta(u, v) f(\alpha^{-1}(u, v)),$$

et comme θ^{-1} et $A(\alpha)^*$ sont bornés, $A_{(\alpha)}^{-1}$ l'est aussi. De telles transformations α existent, par exemple

$$r^i = p^i + \frac{1}{2} e^{-(p^i)^2}, s^i = q^i - \frac{1}{2} e^{-(p^i)^2}, i = 1, 2, 3.$$

$A(\alpha)$ et $A(\alpha)^*$ commutent avec e^{iT_a} si $\tau_0 + a = \tau_0$, ce qui provient du fait que

$$r^i + s^i = T^i = p^i + q^i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3,$$

mais ne commutent pas avec e^{isT^0} .

Soit

$$A^0 = \int M_\lambda A(\alpha) M_\lambda^{-1} d\lambda$$

où $d\lambda$ est la mesure invariante sur $SU(2)$. A^0 est borné et commute avec les opérateurs M_λ et e^{iT_a} si $\lambda \tau_0 = \tau_0 = \tau_0 + a$, il en est donc de même de l'opérateur positif $A^{0*} A^0$. Mais $A^{0*} A^0$ ne commute pas avec T^0 , ce que nous allons vérifier.

Si V est un voisinage compact de $(0, 0)$ et φ la fonction caractéristique d'un ensemble compact qui contient la réunion des ensembles $\lambda \alpha \lambda^{-1} \mu \alpha^{-1} \mu^{-1} V$, où λ, μ parcourrent $SU(2)$, les restrictions à V des fonctions (éléments de H)

$$(T^0 A^{0*} A^0 \varphi)(p, q) \quad \text{et} \quad (A^{0*} A^0 T^0 \varphi)(p, q)$$

sont égales respectivement à

$$(p^0 + q^0) \int \theta(\mu p, \mu q) d\lambda d\mu \quad \text{et} \quad \int \theta(\mu p, \mu q) g^0(\lambda \alpha \lambda^{-1} \mu \alpha^{-1} \mu^{-1} (p, q)) d\lambda d\mu$$

avec

$$g^0(u, v) = u^0 + v^0, \mu(p, q) = (\mu p, \mu q),$$

et sont continues sur V .

Ces deux fonctions sont des éléments différents dans H si elles diffèrent dans V , ou encore, par la continuité de leur restriction à V , si elles diffèrent en $(\underline{O}, \underline{O})$. Or il existe λ, μ tels que

$$\lambda \alpha \lambda^{-1} \mu \alpha^{-1} \mu^{-1} (0, 0) = \lambda \alpha \lambda^{-1} \mu \alpha^{-1} (0, 0) + (0, 0)$$

ou

$$\lambda^{-1} \mu \alpha^{-1} (0, 0) + \alpha^{-1} (0, 0),$$

puisque $\alpha^{-1}(O, O) \neq (O, O)$, ce qui a pour conséquence

$$(m_1 + m_2) \int \theta(0, 0) d\lambda d\mu < \int \theta(0, 0) g^0(\lambda \alpha \lambda^{-1} \mu \alpha^{-1} (0, 0)) d\lambda d\mu$$

et

$$(T^0 A^{0*} A^0 \varphi) (0, 0) < (A^{0*} A^0 T^0 \varphi) (0, 0)$$

en tenant compte du fait que $g^0(p, q) = p^0 + q^0$ a un minimum $m_1 + m_2$ en $(\underline{O}, \underline{O})$. Donc $A^{0*} A^0$ ne commute pas avec T^0 .

L'opérateur $B^0 = A^{0*} A^0$ satisfait aux conditions a), b), c). Mais il en existe d'autres, positifs, bornés ou non, de borne inférieure non nulle, vérifiant a), b), c) par exemple $A^{0*} A^0 + \varepsilon E$ et $A^{0*} A^0 + \varepsilon T^0$ avec $\varepsilon > 0$.

Soit donc B^0 un opérateur positif, borné ou non, de borne inférieure non nulle, vérifiant a), b), c), et soit $J_a(\sigma) = (n, a) B(\sigma)$.

Comme $R_{s n_0} = e^{is T^0}$ et

$$R'_{s n_0}(\tau_0) = e^{is(J_{n_0}(\tau_0) + T_{n_0})} = e^{is(B^0 + T^0)}$$

ne commutent pas, il reste seulement à voir que $R'(\sigma)$, ou la représentation semblable

$$R'(\tau_0) : a \rightarrow R'_a(\tau_0) = e^{i(n_0, a)(B^0 + T^0)} e^{i T_a - (n, a) n} = e^{i T'_a(\tau_0)}$$

n'est pas la restriction d'une représentation de $SL(2, C)$ inhomogène au sous-groupe des translations.

Soit $X : (a, A) \rightarrow X_{(a, A)}$ une représentation de $SL(2, C)$ inhomogène telle que $X(a, 1) = R'_a(\tau_0)$. Si D est un domaine de Gårding pour la représentation X , on a

$$X_{(a, A)} D = D, T'_a D \subseteq D.$$

Soit $T'^j = T'_{n_j}$, $j = 0, 1, 2, 3$, c'est-à-dire

$$T'^0 = B^0 + T^0, T'^i = T^i, i = 1, 2, 3.$$

L'opérateur $X_{(0, A)} T'^0 X_{(0, A)}^{-1}$, considéré sur D , est de la forme

$$(a, T') = a_0 T'^0 - (\underline{a}, \underline{T})$$

où

$$\begin{aligned} a_0 &\geq 1, a_0^2 - \underline{a}^2 = 1, a = (a_0, a_1, a_2, a_3) = A(1, 0, 0, 0), \\ & - (\underline{a}, \underline{T}) = a_1 T^1 + a_2 T^2 + a_3 T^3. \end{aligned}$$

Si $\gamma (> m_1 + m_2)$ est la borne inférieure de l'opérateur positif $B^0 + T^0 = T'^0$ sur D , c'est aussi celle de $X_{(0, A)} T'^0 X_{(0, A)}^{-1}$ égal à $(a, T') = a_0 B^0 + (a, T)$ sur D ; l'opérateur $(a, T) = a_0 T^0 + a_1 T^1 + a_2 T^2 + a_3 T^3$ est une restriction de T_a , et son domaine contient D par la dernière identité; la borne inférieure de (a, T) considéré comme opérateur symétrique positif sur D est $\geq m_1 + m_2$; en effet $m_1 + m_2$ est celle de T_a sur son

domaine, puisque cet opérateur est unitairement semblable à T^0 . Si donc $\delta > 0$ est la borne inférieure de B^0 sur D , on aura

$$\gamma \geq a_0 \delta + m_1 + m_2 ,$$

ce qui est impossible car $a_0 \geq 1$ peut être arbitrairement grand, donc $X_{(a,1)}$ ne peut pas être égal à $R'_a(\tau_0)$.

Le raisonnement précédent démontre évidemment la proposition suivante:

Proposition 5.1. Soit $a \rightarrow e^{ia_0 T^0} e^{ia_1 T^1} e^{ia_2 T^2} e^{ia_3 T^3}$ une représentation unitaire, qui est une restriction au sous-groupe des translations a de M_4 d'une représentation de $SL(2, C)$ inhomogène. On suppose T^0 positif. Si B^0 est un opérateur positif, de borne inférieure non nulle, tel que $T^0 + B^0$ soit autoadjoint et commute avec $e^{ia_j T^j}$ pour $j = 1, 2, 3$, alors la représentation $a \rightarrow e^{ia_0(T^0+B^0)} e^{ia_1 T^1} e^{ia_2 T^2} e^{ia_3 T^3}$ ne peut pas être une restriction d'une représentation de $SL(2, C)$ inhomogène au sous-groupe des translations.

Si $m_1 = m_2$, on peut montrer d'une manière analogue qu'il existe une variation A_σ du produit $U^{(1)} \otimes_s U^{(1)}$ où $U^{(1)} \otimes_a U^{(1)}$ (ou d'un produit plus général symétrique ou anti-symétrique en des facteurs égaux) et un générateur d'interaction tels que l'énergie-impulsion $R'(\sigma)$ du mouvement varié satisfasse aux conditions 1) 2).

Pour $m_1 = m_2$, l'espace $H^{(1)}$ que nous avons considéré est l'espace des états à une particule d'un champ scalaire libre, $H^{(1)} \hat{\otimes}_s H^{(1)}$ celui des états à deux particules. Généralement, si $N \geq 2$ on construit facilement, sur les espaces $H^{(N)}$ à N particules d'un chomplibre de spin quelconque ([11], p. 103), une variation $A_\sigma^{(N)}$ des mouvements de la forme $U_{\sigma+t_n, \sigma}^{(N)} = R_{t_n}^{(N)}$ et un générateur d'interaction correspondant, tels que l'énergie-impulsion du mouvement varié satisfasse à 1), 2). Si on a un nombre fini de telles variations $A_\sigma^{(N)}$, en passant à la somme hilbertienne H des $H^{(N)}$, on obtient une variation A_σ du mouvement unitaire $U_{\sigma+t_n, \sigma} = R_{t_n}$, R étant l'énergie-impulsion $a \rightarrow F_{(a,1)}$ du champ libre, et une énergie-impulsion $R'(\sigma)$ du mouvement varié qui satisfait à 1), 2) et qui est covariante relativement au moment $M : A \rightarrow M_A = H_{(0,A)}$ du même champ libre.

Si on a deux champs libres $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ sur la somme hilbertienne H_1 des sous-espaces $H_1^{(M)}$, respectivement la somme hilbertienne H_2 de sous-espaces $F_2^{(N)}$, et les mouvements correspondants

$$U_{i, \sigma+s_n, \sigma} = R_{i, s_n}, i = 1, 2$$

on peut procéder de manière analogue sur des sous-espaces $H^{(M,N)}$ (au lieu des $H^{(N)}$ précédents) de somme H , avec $H^{(M,N)} = H_1^{(M)} \hat{\otimes} H_2^{(N)}$ (ou $H_1^{(M)} \hat{\otimes}_s H_2^{(N)}$, ou $H_1^{(M)} \hat{\otimes}_a H_2^{(N)}$ si $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ sont identiques), $H = H_1 \hat{\otimes} H_2$ (ou $H_1 \hat{\otimes}_s H_2$, ou $H_1 \hat{\otimes}_a H_2$), pour construire une variation A_σ de $U = U_1 \hat{\otimes} U_2$ (ou $U_1 \hat{\otimes}_s U_2$, ou $U_1 \hat{\otimes}_a U_2$) telle que l'énergie-impulsion $R'(\sigma)$ du mouvement varié ait encore les mêmes propriétés.

Nous montrerons au paragraphe suivant que la donnée de la variation A_σ implique assez généralement une certaine transformation des distributions $\psi_1(x) \otimes E_2$, $E_1 \otimes \psi_2(x)$.

6. Application $I(\mathcal{A}_\sigma)$ et N-distributions

A chaque σ dans l'ensemble Σ faisons correspondre un ensemble B_σ d'opérateurs de l'espace hilbertien H . Soit B la réunion des B_σ et soit \mathcal{U} un mouvement. Nous

supposons que $B_\sigma = \mathcal{U}_{\sigma, \tau} B_\tau \mathcal{U}_{\tau, \sigma}$. Si F est dans B_σ , nous notons F_τ l'opérateur $\mathcal{U}_{\tau, \sigma} F \mathcal{U}_{\sigma, \tau}$ dans B_τ . En particulier $F_\sigma = F$. L'ensemble des opérateurs F_τ sera noté (F) : on a $(F) = (F_\sigma) = (F_\tau)$; c'est la classe de F dans B pour la relation d'équivalence $X_\tau = \mathcal{U}_{\tau, \sigma} X_\sigma \mathcal{U}_{\sigma, \tau}$ définie par \mathcal{U} entre éléments X_σ, X_τ de B (X_σ dans B_σ, X_τ dans $B_\tau, \tau = \sigma + c$).

Nous supposerons toujours, lorsque des classes (F) sont données dans B , qu'il n'existe qu'un mouvement \mathcal{U} qui les définit; ce sera le cas si les B_σ sont unitairemement irréductibles, c'est-à-dire: si W est unitaire et $W X_\sigma W^{-1} = X_\sigma$ pour tout X_σ de B_σ , alors W est scalaire.

Soit alors $\mathbf{n}: T \rightarrow \mathbf{n}_T$ une représentation projective d'un groupe G qui opère (éventuellement d'une manière triviale) sur Σ en conservant le parallélisme des 3-plans. Si

$$B_{T\sigma} = \mathbf{n}_T B_\sigma \mathbf{n}_T^{-1}$$

et si en outre les classes (F) définies par \mathcal{U} sont permutées entre elles par les applications

$$(F) \rightarrow \mathbf{n}_T (F) \mathbf{n}_T^{-1}$$

alors N est une constante de type G de \mathcal{U} .

En effet, soient $F'_{T\sigma} = \mathbf{n}_T F_\sigma \mathbf{n}_T^{-1}$ les éléments de la classe $\mathbf{n}_T (F) \mathbf{n}_T^{-1}$; on a

$$\mathcal{U}_{T\tau, T\sigma} F'_{T\sigma} \mathcal{U}_{T\sigma, T\tau} = F'_{T\tau}$$

et

$$\mathbf{n}_T \mathcal{U}_{\tau, \sigma} \mathbf{n}_T^{-1} F'_{T\sigma} \mathbf{n}_T \mathcal{U}_{\tau, \sigma} \mathbf{n}_T^{-1} = F'_{T\tau}$$

pour tout T ; ainsi les deux mouvements $\mathcal{U}_{T\tau, T\sigma}$ et $\mathbf{n}_T \mathcal{U}_{\tau, \sigma} \mathbf{n}_T^{-1}$ définissent les mêmes classes dans B pour chaque T et sont donc identiques par nos hypothèses, et \mathbf{n} est une constante de type G de \mathcal{U} .

Inversement, si \mathbf{n} est une constante de type G de \mathcal{U} telle que $B_{T\sigma} = \mathbf{n}_T B_\sigma \mathbf{n}_T^{-1}$, G opère sur les classes (F) de \mathcal{U} par les applications $(F) \rightarrow \mathbf{n}_T (F) \mathbf{n}_T^{-1}$.

Soit encore $\mathcal{J}(\sigma) = \mathcal{J}(\sigma + c)$ une constante covariante relativement à un moment $M: A \rightarrow M_A$ de \mathcal{U} . Si $M_A B_\sigma M_A^{-1} = B_{A\sigma}$ et $\mathcal{J}_T(\sigma) B_\sigma \mathcal{J}_T(\sigma)^{-1} = B_{T\sigma}$, et si (X) est une classe pour \mathcal{U} , les opérateurs

$$X'_{T\tau} = \mathcal{J}_T(\sigma) X_\tau \mathcal{J}_T(\sigma)^{-1}, \quad (\tau = \sigma + c)$$

sont aussi les éléments d'une classe.

\mathcal{A}_σ étant une variation de \mathcal{U} , les classes (Y) définies par $\mathcal{A}_\tau \mathcal{U}_{\tau, \sigma} \mathcal{A}_\sigma^{-1}$ dans l'ensemble C réunion des ensembles $C_\sigma = \mathcal{A}_\sigma B_\sigma \mathcal{A}_\sigma^{-1}$ sont en correspondance biunivoque avec les classes (X) de \mathcal{U} dans B , par l'application

$$I(\mathcal{A}_\sigma): X_\sigma \rightarrow Y_\sigma = \mathcal{A}_\sigma X_\sigma \mathcal{A}_\sigma^{-1}$$

qui sera dite *application d'interaction*.

N-distributions. Nous désignons par \mathcal{S}_σ l'espace de SCHWARTZ [9] (Vol. II) des fonctions à décroissance rapide sur l'élément σ de Σ et par $\mathcal{S}(M_A)$ l'espace analogue sur M_A . Si f_σ est dans \mathcal{S}_σ , $\tau = \sigma + sn$ ($n = n_\sigma, n^2 = 1$), la fonction $f\tau = f\sigma + sn$ sera par définition la fonction de \mathcal{S}_τ telle que $f_\tau(x + sn) = f_\sigma(x)$.

Pour chaque σ nous considérons une famille E_σ de distributions

$\varphi_\sigma^{(j)} : f_\sigma^{(j)} \rightarrow \varphi_\sigma(f_\sigma)$, (j dans l'ensemble d'indices J) sur σ , notées aussi $\varphi_\sigma^{(j)}(x)$, à valeurs opérateurs de domaine commun D et satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $\varphi_\sigma^{(j)}(f_\sigma)$ D est dans D et

$$f_0 \rightarrow (\varphi_\sigma^{(j)}(f_\sigma) h_1, h_2)$$

est tempérée pour h_1, h_2 dans D ;

2) il existe un mouvement \mathcal{U} , et un seul, tel que $U_{\tau, \sigma} D = D$ ($U_{\tau, \sigma}$ représentant unitaire de $\mathcal{U}_{\tau, \sigma}$) et

$$\mathcal{U}_{\tau, \sigma} \varphi_\sigma^{(j)}(f_\sigma) \mathcal{U}_{\sigma, \tau} = \varphi_\tau^{(j)}(f_\tau)$$

(les opérateurs $X_\sigma^{(j)} = \varphi_\sigma^{(j)}(f_\sigma)$ forment donc des classes pour \mathcal{U} dans l'ensemble B de ces opérateurs);

3a) pour chaque direction $n = n_\sigma$, $n^2 = 1$, et chaque j dans J , il existe une distribution $g \rightarrow \psi^{(j)}(n, g)$ D sur M_4 , notée aussi $\psi^{(j)}(n, x)$, à valeurs opérateurs de domaine D , telle que $\psi^{(j)}(n, g)$ D soit dans D et

$$g \rightarrow (\psi^{(j)}(n, g) h_1, h_2)$$

soit tempérée pour h_1, h_2 dans D , et il existe un sous-espace $\mathcal{S}(n)$ dense dans $\mathcal{S}(M_4)$ tel que pour γ dans $\mathcal{S}(n)$, h dans D et tout j , la fonction $\varphi_{\sigma+s n}^{(j)}(\gamma/\sigma + s n) h$ de s soit intégrable et

$$\psi^{(j)}(n, \gamma) h = \int \varphi_{\sigma+s n}^{(j)}(\gamma | \sigma + s n) h ds;$$

$(\gamma | \sigma + s n)$ signifie la restriction de γ à $\sigma + s n$;

b) $\psi^{(j)}(n, x)$ et $\mathcal{S}(n)$ déterminent univoquement $\varphi_{\sigma+t n}^{(j)}(x)$ pour tout t , par les égalités de 3a) (autrement dit, si $\varphi'^{(j)}(x)$ satisfait 1, 2, 3a) pour les mêmes D , $\psi^{(j)}(n, x)$ et $\mathcal{S}(n)$, alors $\varphi'^{(j)}_{\sigma+t n}(x) = \varphi^{(j)}_{\sigma+t n}(x)$).

L'intégrale de 3a) ne change évidemment pas si on remplace σ par $\sigma + c$.

Comme $\mathcal{S}(n)$ est dense dans $\mathcal{S}(M_4)$, $g \rightarrow (\psi^{(j)}(n, g) h_1, h_2)$ est déterminée par les valeurs qu'elle prend sur $\mathcal{S}(n)$.

Les conditions 2) et 3) ont pour conséquence que si $\mathcal{S}(n)$ est invariant par les translations $g(x) \rightarrow g(x + a)$, si $R : a \rightarrow R_a$ est une représentation unitaire telle que $R_a D = D$ et $\psi^{(j)}(n, x + a) = R_a \psi^{(j)}(n, x) R_a^{-1}$, alors on a aussi $\varphi_{\tau+a}^{(j)}(x + a) = R_a \varphi_\tau^{(j)}(x) R_a^{-1}$ d'où le fait que \mathcal{U} est induit par un mouvement unitaire de la forme $U_{\sigma+s n, \sigma} = R_{s n}$. De même on obtiendrait d'autres constantes de \mathcal{U} (de moment M , d'énergie-impulsion covariante relativement à M , ou de type charge) en utilisant d'autres propriétés d'invariance ou de covariance de la famille des distributions $\psi^{(j)}(n, x)$ et des $\mathcal{S}(n)$. Inversément $R_a D = D$ et $\varphi_{\tau+a}^{(j)}(x + a) = R_a \varphi_\tau^{(j)}(x) R_a^{-1}$ entraînent $\psi^{(j)}(n, x + a) = R_a \psi^{(j)}(n, x) R_a^{-1}$.

Définissons maintenant une *N-distribution*.

Définition 6.1. Soit N un ensemble sur lequel $SL(2, \mathbb{C})$ opère et M une représentation unitaire de $SL(2, \mathbb{C})$. A chaque élément α de N , on fait correspondre une représentation projective

$$\mathcal{R}(\alpha) : a \rightarrow \mathcal{R}_a(\alpha)$$

des translations de M_4 , et un ensemble fini de distributions $g \rightarrow \phi_i(\alpha, g)$ sur M_4 , $i = 1, 2, \dots, m$, notées aussi $\phi_i(\alpha, x)$, à valeurs opérateurs de domaine D , telles que $g \rightarrow (\phi_i(\alpha, g) h_1, h_2)$ soit tempérée pour h_1, h_2 dans D . On suppose

$$N_1) \quad M_A D = D, R_a(\alpha) D = D, \phi_i(\alpha, g) D \text{ est dans } D,$$

$$N_2) \quad R_{Aa}(A\alpha) = M_A R_a(\alpha) M_A^{-1}, \phi_i(A\alpha, Ax) = \sum_k S_{ik}(A) M_A \phi_k(\alpha, x) M_A^{-1} \\ \phi_i(\alpha, x + a) = R_a(\alpha) \phi_i(\alpha, x) R_a(\alpha)^{-1},$$

où $A \rightarrow (S_{ik}(A))$ est une représentation de degré m de $SL(2, C)$.

Dans ces conditions, nous appelons l'ensemble fini ϕ de ces distributions $\phi_i(\alpha, x)$ une *N-distribution*; M sera dit un *moment d'impulsion* de ϕ , l'application $\mathcal{R}: \alpha \rightarrow \mathcal{R}(\alpha)$ sera une *constante* de ϕ covariante relativement à M , ou aussi l'*énergie-impulsion* de ϕ si $\mathcal{R}(\alpha)$ provient d'une représentation unitaire $R(\alpha)$ des translations.

Si $M_A = F_{(a, A)}$, $A\alpha = \alpha$ pour tout A et tout α , $R_a(\alpha) = R_a = F_{(a, 1)}$, où $F: (a, A) \rightarrow F_{(a, A)}$ est une représentation de $SL(2, C)$ inhomogène, et $\phi_i(\alpha, x) = \phi_i(x)$, les relations $N_1), N_2)$ sont de celles qu'on impose à un champ [11, chap. 3]. Généralement, on pourra ajouter à $N_1)$ et $N_2)$ des conditions d'irréductibilité de l'ensemble des opérateurs $\phi_i(\alpha, g)$ (pour chaque α), analogues à celles d'un champ. (Voir par exemple [11]).

N sera dorénavant l'ensemble des directions n , $n^2 = 1$. Soit $\phi^{(k)}(n, x)$ un système de N -distributions (indexées par k dans K). On suppose que celles-ci ont une énergie-impulsion commune $R(n)$, covariante relativement à un même moment M , et qu'il existe des $\varphi_\sigma^{(j)}(x)$ qui satisfont aux conditions 1) à 3) plus haut en prenant la famille des $\phi_i^{(k)}(n, x)$ ($i = 1 \dots m_k$, k dans K) pour la famille des $\psi^{(j)}(n, x)$, et pour $\mathcal{S}(n)$ des sous-espaces de $\mathcal{S}(M_4)$ invariants par les translations et permutés entre eux par les applications $g(x) \rightarrow g(A^{-1}x)$ ($\mathcal{S}(A n)$ comprenant les fonctions $g(A^{-1}x)$ si $g(x)$ est dans $\mathcal{S}(n)$). \mathcal{U} est alors induit comme on sait par le mouvement unitaire $U_{\sigma+s n, \sigma} = R_s(n)$. Cela étant, on appellera les $\phi_k(n, x)$ des *N-champs* si en outre les $\varphi_\sigma^{(j)}(x)$ sont telles que $N_3)$ tous les commutateurs $[\varphi_\sigma^{(j)}(f_\sigma), \varphi_\sigma^{(j)}(g_\sigma)]_-$ – ou bien tous les anticommutateurs $[\varphi_\sigma^{(j)}(f_\sigma), \varphi_\sigma^{(j)}(g_\sigma)]_+$ – sont nuls si $f_\sigma(x) g_\sigma(x) = 0$ pour x dans σ .

A_σ étant une variation unitaire de U telle que $A_\sigma D = D$ (et $A_{\sigma_0} = E$), par l'application d'interaction correspondante

$$I(A_\sigma): \varphi_\sigma^{(j)}(f_\sigma) \rightarrow A_\sigma \varphi_\sigma^{(j)}(f_\sigma) A_\sigma^{-1} = \varphi'_\sigma(f_\sigma),$$

on obtient de nouvelles distributions $\varphi'_\sigma(x)$ sur σ qui satisfont à 1), 2) pour les mêmes $\mathcal{S}(n)$ et $A_\tau U_{\tau, \sigma} A_\sigma^{-1}$ au lieu de $U_{\tau, \sigma}$, mais il n'existe pas nécessairement de $\psi'^{(j)}(n, x)$ correspondantes telles que 3a), 3b) soient aussi vérifiées (en prenant les $\varphi'^{(j)}(x)$ pour les $\varphi^{(j)}(x)$). Cependant, en partant d'un champ $\psi(x)$ de spin 1/2, auquel cas $D = H$, nous allons montrer qu'il existe une application $I(A_\sigma)$, un *N-champ* $\psi'(n, x)$ de même moment M , et d'énergie-impulsion $R'(n)$, covariante relativement à M , possédant les mêmes propriétés 1), 2) que $R'(\sigma) = R'(\sigma + c)$ du no 5:

1') $R'_n(n)$ ne commute pas avec R_n

2') $R'(n): a \rightarrow R'_a(n)$ n'est pas une restriction au sous-groupe des translations d'une représentation de $SL(2, C)$ inhomogène.

La propriété 2') montre en particulier que le *N-champ* $\psi'(n, x)$ n'a pas l'énergie-impulsion d'un champ local de Wightman.

Une construction analogue serait possible en partant de deux (ou plus) champs libres de spin demi-entier $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ sur H_1 , H_2 respectivement; plus précisément, la famille des distributions $\psi^{(i)}(n, x) = \psi^{(i)}(x)$ serait formée des distributions

$$\psi_{1,\alpha}(x) \hat{\otimes} E_2, E_1 \hat{\otimes} \psi_{2,\alpha}(x)$$

à valeurs opérateurs sur $H = H_1 \hat{\otimes} H_2$ (éventuellement $H_1 \hat{\otimes}_a H_2$ si $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ sont identiques).

Si l'on partait de champs libres tels que $D \neq H$, une construction d'une application $I(A_\sigma)$, des N -champs correspondants et de $R'(n)$ telle que 1') et 2') soient vraies, est possible mais plus compliquée.

Remarque 6.1. Comme la construction de A_σ et de $R'(n)$ sera semblable à celle du no 5, où on écrivait $R'(\sigma) = R'(\sigma + c)$ au lieu de $R'(n)$, on peut remarquer ici déjà qu'on aura

$$R'_a(n) = e^{i T'_a(\sigma_0)} = e^{i(n,a)(J_{n(\sigma_0)} + T_n)} e^{i T_{a-(n,a)n}}, (n = n_{\sigma_0} = n_\sigma)$$

si $R_a = e^{iT_a}$ est l'énergie-impulsion de $\psi(x)$ et $J_n(\sigma)$ un générateur à droite de $A_\sigma^{-1} A_\tau$.

Pour $(n, a) = 0$ et $An = n$ on aura aussi

$$R'_a(n) = R_a, M_A R_a M_A^{-1} = R_a$$

d'où, une représentation $(a, A) \rightarrow R_a M_A$ de $SU(2)$ inhomogène. Désignant par $\varphi_\sigma(x)$, $\varphi'_\sigma(x)$ les distributions déterminées sur chaque σ de normale n sous les conditions 1), 2), 3) de ce no 6 par $\psi(x)$ et $\psi'(n, x)$ respectivement, on voit que $\varphi_\sigma(x)$ et $\varphi'_\sigma(x)$ seront toutes deux invariantes par cette représentation de $SU(2)$ inhomogène:

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma(Ax + a) &= S(A) M_A R_a \varphi_\sigma(x) R_a^{-1} M_A^{-1} \\ \varphi'_\sigma(Ax + a) &= S(A) M_A R_a \varphi'_\sigma(x) R_a^{-1} M_A^{-1} \end{aligned}$$

pour $(n, a) = 0$, $An = n$, $A \rightarrow S(A)$ étant une représentation spinorielle de degré quatre de $SL(2, \mathbb{C})$, restreinte ici à un sous-groupe $SU(2)$ de $SL(2, \mathbb{C})$.

Par les dernières égalités, si $\psi'(n, x)$ était indépendant de la direction n et représentait un champ auquel serait applicable un théorème de Haag (11, théorème 4.14, p. 162), A_σ serait constante et $I(A_\sigma)$ triviale. Il en est tout autrement si l'on demande seulement que le résultat d'une application d'interaction, comme on la définit ici, soit un N -champ.

Construction de $\psi'(n, x)$ et de $I(A_\sigma)$.

Soit σ_β la surface $\not{p}^2 = (\not{p}^0)^2 - (\not{p}^1)^2 - (\not{p}^2)^2 - (\not{p}^3)^2 = M^2$, $\not{p}^0 > 0$, et $d\sigma_\beta$ sa mesure invariante. On note \not{p} le vecteur à trois composantes $(\not{p}^1, \not{p}^2, \not{p}^3)$.

Nous définissons d'abord le champ $\psi(x)$ et les distributions correspondantes $\varphi_\sigma(x)$. Pour simplifier, nous choisissons un champ $\psi(x)$ particulier, mais on raisonnerait de manière analogue dans un cas plus général.

Soit \tilde{H} l'espace d'Hilbert des paires de fonctions $g(\not{p}) = (g_\beta(\not{p}))$, $\beta = 1, 2$, muni de la forme hermitienne

$$(g, h) = \int d\sigma_\beta \overline{h(\not{p})} \not{p}/M g(\not{p})$$

avec (cf. [11], p. 23)

$$\tilde{p} = \sum_{\mu} p_{\mu} \tau^{\mu}, \tau^0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix}, \tau^1 = \begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix}, \tau^2 = \begin{pmatrix} 0-i \\ i0 \end{pmatrix}, \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous noterons $g(\beta, \tilde{p})$ pour $g_{\beta}(\tilde{p})$.

On a une représentation F de $SL(2, \mathbb{C})$ inhomogène sur \tilde{H} donnée par

$$(F_{(\alpha, A)} g)(\tilde{p}) = e^{i \tilde{p} \alpha} A g(A \tilde{p}^{-1}).$$

Pour définir ces distributions, nous utilisons des opérateurs bornés η_m , $m = 1, 2, \dots$, sur un autre espace d'Hilbert H , formant avec les adjointes η_m^* une représentation irréductible des relations d'anticommuation, pour laquelle existent un «nombre» et un état du vide [6].

Soit $g_k(\tilde{p}) = (g_k(\beta, \tilde{p}))$ une base orthonormée de \tilde{H} . Si $\hat{f}(\tilde{p}) = 1/(2\pi)^2 \int e^{-i\tilde{p}x} f(x) dx$ est la transformée de Fourier de $f(x)$ dans $\mathcal{S}(M_4)$, soit $\psi_{\alpha}^-(f)$ l'opérateur égal à

$$\sum_k c_k(\alpha, f) \eta_k \quad \text{avec} \quad c_k(\alpha, f) = \int d\sigma_{\tilde{p}} \hat{f}(\tilde{p}) \sum_{\beta} (\tilde{p}/M)_{\alpha\beta} g_k(\beta, \tilde{p}).$$

Montrons que cette série a un sens.

Soient $E_1(\tilde{p})$, $E_2(\tilde{p})$ des vecteurs propres normés de \tilde{p}/M , $\varepsilon_1(\tilde{p})$, $\varepsilon_2(\tilde{p})$ les valeurs propres correspondantes, et

$$g_k(\tilde{p}) = h_{1k}(\tilde{p}) E_1(\tilde{p}) + h_{2k}(\tilde{p}) E_2(\tilde{p});$$

on peut choisir $E_1(\tilde{p})$, $E_2(\tilde{p})$ continus presque partout sur $\sigma_{\tilde{p}}$; $(\varepsilon_1(\tilde{p}))^{1/2} h_{1k}(\tilde{p})$, $(\varepsilon_2(\tilde{p}))^{1/2} h_{2k}(\tilde{p})$ sont alors deux bases orthonormées de l'espace $L^2(d\sigma_{\tilde{p}})$ qu'on peut même supposer identiques. Comme \tilde{p}/M est positive, et

$$\varepsilon_1(\tilde{p}) + \varepsilon_2(\tilde{p}) = 2 \tilde{p}^0/M, \varepsilon_1(\tilde{p}) \varepsilon_2(\tilde{p}) = 1,$$

on en déduit, par les propriétés de décroissance à l'infini de $\hat{f}(\tilde{p})$, que $\sum_k |c_k(\alpha, f)|^2$ converge et que $(\sum_k |c_k(\alpha, f)|^2)^{1/2}$ est inférieure à la norme, dans $L^2(d\sigma_{\tilde{p}})$, d'une fonction $\hat{f}(\tilde{p}) u(\alpha, \tilde{p})$ restreinte à $\sigma_{\tilde{p}}$, où

$$u(\alpha, \tilde{p}) = (\varepsilon_1(\tilde{p}))^{1/2} E_1(\alpha, \tilde{p}) + (\varepsilon_2(\tilde{p}))^{1/2} E_2(\alpha, \tilde{p});$$

$\sum_k c_k(\alpha, f) \eta_k$ converge en norme sur H et définit ainsi un opérateur borné de norme inférieure à $(\sum_k |c_k(\alpha, f)|^2)^{1/2}$ donc inférieure à celle de $\hat{f}(\tilde{p}) u(\alpha, \tilde{p})$ dans $L^2(d\sigma_{\tilde{p}})$:

$$\| \psi_{\alpha}^-(f) \| \leq \| \hat{f}(\tilde{p}) u(\alpha, \tilde{p}) \|_{\sigma_{\tilde{p}}},$$

$\| F(\tilde{p}) \|_{\sigma_{\tilde{p}}}$ désignant la norme dans $L^2(d\sigma_{\tilde{p}})$ de la restriction de $F(\tilde{p})$ à $\sigma_{\tilde{p}}$.

Comme $\| \hat{f}(\tilde{p}) u(\alpha, \tilde{p}) \|_{\sigma_{\tilde{p}}}$ tend vers zéro si f tend vers zéro dans $\mathcal{S}(M_4)$, la distribution $f \rightarrow \psi_{\alpha}^-(f)$ est tempérée.

Par cette définition de $\psi_{\alpha}^-(f)$, on peut maintenant écrire symboliquement

$$\psi^-(x) = (1/2\pi)^2 \sum_k \int d\sigma_{\tilde{p}} e^{-i\tilde{p}x} (\tilde{p}/M) \eta_k g_k(\tilde{p}).$$

Soit encore, de manière analogue,

$$\psi^+(x) = (1/2\pi)^2 \sum_k \int d\sigma_p e^{+i\vec{p} \cdot \vec{x}} \zeta(\vec{p}/M) \overline{g_k(p)},$$

avec $\zeta = i \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, et soit

$$\psi(x) = \psi^-(x) \oplus \psi^+(x) = \begin{pmatrix} \Psi^-(x) \\ \Psi^+(x) \end{pmatrix}.$$

Les propriétés d'invariance de $\psi(x)$ relativement à $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ inhomogène se vérifient immédiatement et tiennent au fait que si $(V)_{ik}$ est une matrice infinie unitaire, les opérateurs

$$\eta'_i = \sum_k (V)_{ik} \eta_k, \quad \eta'^*_i = \sum_k \overline{(V)}_{ik} \eta_k^*$$

forment une nouvelle représentation des relations d'anticommuation avec le même état du vide, et q'il existe W unitaire sur H , qui ne dépend que de $(V)_{ik}$, tel que $\eta'_i = W \eta_i W^{-1}$, $\eta'^*_i = W \eta_i^* W^{-1}$. En outre, $[\psi(x), \psi(y)]_+ = 0$ pour $(x - y)^2 < 0$ se vérifie facilement (en remarquant par exemple qu'on peut exiger pour tout \vec{p}

$$E_2(\vec{p}) = \zeta \overline{E_1(\vec{p})}, \quad \zeta E_2(\vec{p}) = - \overline{E_1(\vec{p})}.$$

Nous définissons maintenant $\varphi_{\alpha, \sigma+s}^-(x)$ et $\mathbf{S}(n)$, qui avec $\psi_\alpha^-(x)$ satisfont aux conditions 1) à 3) de ce no 6.

Fixons $n = n_\sigma$ et soient (x^0, x^1, x^2, x^3) des coordonnées telles que σ soit le plan $x^0 = 0$ et $n = (1, 0, 0, 0)$. $\mathbf{S}(n)$ sera le sous-espace de $\mathbf{S}(M_4)$ engendré par les fonctions de la forme $g(x) = b(x^0) B(\underline{x})$ et leurs translatées $g(x + a)$, $b(x^0)$ et $B(\underline{x})$ étant à décroissance rapide sur R et R^3 respectivement.

Nous écrirons $\varphi_{\alpha, s}^-(x)$ pour $\varphi_{\alpha, \sigma+s}^-(x)$. Posons

$$\varphi_{\alpha, x^0}^-(B) = (1/2\pi)^{1/2} \sum_k \eta_k \int d\sigma_p e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}^0} \hat{B}(\underline{p}) \sum_\beta (\vec{p}/M)_{\alpha\beta} g_k(\beta, \vec{p}),$$

où

$$\hat{B}(\underline{p}) = (1/2\pi)^{3/2} \int e^{i\vec{p} \cdot \underline{x}} B(\underline{x}) d^3 \underline{x}$$

Cette série converge en norme pour tout x^0 . Les sommes partielles, donc aussi sa somme, sont bornées par

$$K(B) = (1/2\pi)^{1/2} \| \hat{B}(\underline{p}) u(\alpha, \vec{p}) \|_{\sigma_p},$$

et $K(B)$ est indépendant de x^0 et tend vers 0 si $B(\underline{x})$ tend vers 0 dans $\mathbf{S}(R^3)$, ce qui entraîne que $B \rightarrow \varphi_{\alpha, x^0}^-(B)$ est une distribution tempérée sur R^3 pour tout x^0 .

Par les propriétés de transformation des η_k ,

$$\varphi_{\alpha, x^0+s}^-(B) = V_s \varphi_{\alpha, x^0}^-(B) V_s^{-1}$$

avec V_s unitaire, donc $\varphi_{\alpha, x^0}^-(B)$ est continue en x^0 . En multipliant les sommes partielles de la série représentant $\varphi_{\alpha, x^0}^-(B)$ par $b(x^0)$, on obtient des fonctions de x^0 inférieures en norme à $K(B)|b(x^0)|$ auxquelles s'applique le théorème de Lebesgue ([2], chap. IV), d'où

$$\int b(x^0) \varphi_{\alpha, x^0}^-(B) dx^0 = \sum_k \eta_k \int d\sigma_p \hat{b}(\vec{p}^0) \hat{B}(\underline{p}) \sum_\beta (\vec{p}/M)_{\alpha\beta} g_k(\beta, \vec{p})$$

ou

$$\int \varphi_{\alpha, \sigma+s n}^-(g(x) \mid \sigma + s n) ds = \psi_{\alpha}^-(g(x)).$$

Par la définition de $\varphi_{\alpha, \sigma+s n}^-(x)$, on a une identité analogue à cette dernière pour $\psi_{\alpha}^-(g(x+a))$, et de même pour $\psi_{\alpha}^+(g(x+a))$. Donc 3a) est vérifiée. La continuité de $\varphi_{\alpha, x^0}^-(B)$ en x^0 et 3a) entraînent alors 3b).

La condition 2) est vérifiée par le fait que $D = H$ et que les fonctions sur σ_p de la forme $\hat{B}(\rho) u(\alpha, \rho)$ engendrent un sous-espace dense dans $L^2(d\sigma_p)$, l'irréductibilité de l'ensemble des η_k entraînent celle de l'ensemble B_σ des opérateurs $\varphi_{\alpha, \sigma}^{\pm}(B(x))$, et l'unicité de U , qui est ainsi donné par $U_{\sigma+s a, \sigma} = V_s = R_{s n}$, où $R_a = F(a, 1)$ est l'énergie-impulsion de $\psi(x)$.

Soit A_σ une variation unitaire de U , et

$$I(A_\sigma) : \varphi_{\alpha, \sigma}^{\pm}(x) \rightarrow \varphi_{\alpha, \sigma}^{\pm}(x) = A_\sigma \varphi_{\alpha, \sigma}^{\pm}(x) A_\sigma^{-1}$$

l'application d'interaction correspondante. Soient

$$\psi_{\alpha}^{'-}(n, g(x)) = \psi_{\alpha}^{'-}(n, b(x^0) B(\underline{x})) = \int \varphi_{\alpha, s}^{'-}(g(x) \mid \sigma + s n) ds = \int b(s) \varphi_{\alpha, s}^{'-}(B(\underline{x})) ds$$

où

$$g(x) = b(x^0) B(\underline{x}), \varphi_{\alpha, s}^{'-}(x) = \varphi_{\alpha, \sigma+s n}^{'-}(x),$$

et une identité analogue pour $\psi_{\alpha}^{'-}(n, g(x))$. Cette intégrale a un sens car $\varphi_{\alpha, s}^{'-}(B(x))$ est continue et bornée uniformément en s . Comme

$$\| \psi_{\alpha}^{'-}(n, g(x)) \| \leq K(B) \int |b(s)| ds$$

$\psi_{\alpha}^{'-}(n, b(x^0) B(x))$ est une forme bilinéaire séparément continue sur $\mathcal{S}(R) \times \mathcal{S}(R^3)$ qui détermine par le théorème des noyaux ([4]) une distribution tempérée $\psi_{\alpha}^{'-}(n, x)$ à valeurs opérateurs sur H ; ces distributions et $U'_{\tau, \sigma} = A_\tau U_{\tau, \sigma} A_\sigma^{-1}$ et les mêmes $\mathcal{S}(n)$ satisfont aux conditions 1), 2), 3), ce qui se vérifie comme plus haut pour $\psi_{\alpha}^{\pm}(x)$, $\varphi_{\alpha, \sigma}^{\pm}(x)$.

Si A_τ est déterminée par un générateur à droite $J_a(\sigma)$ de $A_\sigma^{-1} A_\tau$ ($A_\sigma^{-1} A_{\sigma+s n}$ n'est pas un groupe à un paramètre s comme $U_{\sigma, \sigma+s n}$ et $U'_{\sigma, \sigma+s n}$), qui a les mêmes propriétés de covariance relativement à R et M du champ $\psi(x)$ (avec $R_a = F_{(a, 1)}$, $M_A = F_{(0, A)}$) qu'aux numéros 4 et 5, les distributions $\psi_{\alpha, \sigma}^{\pm}(x)$ sont covariantes par M , si $A_{\sigma_0} = E$, et

$$R'_a(n) = e^{iT'_a(n)} = e^{i(n, a)(J_n(\sigma_0) + T_n)} e^{iT a - (n, a)n}.$$

D'où finalement des N -champs

$$\psi'(n, x) = \psi^{'-}(n, x) \oplus \psi^{'-}(n, x) = \begin{pmatrix} \psi^{'-}(n, x) \\ \psi^{'-}(n, x) \end{pmatrix}$$

d'énergie-impulsion $R'(n)$ covariante relativement à M .

Il faut encore montrer qu'il existe effectivement des variations A_σ telles que $R'(n)$ remplisse les conditions imposées 1'), 2').

L'espace H sur lequel opèrent les η_k est somme hilbertienne d'espaces $H^{(N)}$ définis comme suit :

$H^{(0)}$ est l'espace à une dimension engendré par l'état du vide ϕ_0 , H^1 est l'espace \tilde{H} utilisé plus haut, et $H^{(N)}$ sera le produit antisymétrique complété de N facteurs $H^{(1)}$.

En posant que

$$\eta_{k_1} \eta_{k_2} \cdots \eta_{k_N} \phi_0$$

est le produit antisymétrique (élément de $H^{(N)}$) de N fonctions $g_{k_j}(\vec{p})$, $j = 1 \dots N$, $g_k(\vec{p})$ formant la base orthonormale de $\tilde{H} = H^{(1)}$ introduite plus haut, on définit les opérateurs η_k sur H . Ces produits antisymétriques forment une base orthonormale de $H^{(N)}$.

La représentation unitaire $F : (a, A) \rightarrow F_{(a, A)}$ relativement à laquelle $\psi(x)$ était invariante provenait de la transformation $g_k(\vec{p}) \rightarrow e^{i\vec{p} \cdot a} A^{-1} g_k(A\vec{p})$ qui se transposait aux η_k :

$$\eta_k \rightarrow F_{(a, A)} \eta_k F_{(a, A)}^{-1} ;$$

sur $H^{(1)}$, F se réduit donc à $F_{(a, A)} : h(\vec{p}) \rightarrow e^{-i\vec{p} \cdot a} A^{-1} h(A\vec{p})$.

Cela étant, une construction de A_σ et $R'(n)$ analogue à celle du no 5 est maintenant possible sur $H^{(2)}$ (plus généralement sur $H^{(N)}$, $N > 2$ voir les remarques de la fin du no 5) au moyen d'une application $A(\alpha)$ qui transforme un élément de $H^{(2)}$ de la forme

$$h(\beta, \gamma, \vec{p}, q) - h(\gamma, \beta, q, \vec{p}) \quad \text{en} \quad h(\beta, \gamma, \alpha(\vec{p}, q)) - h(\gamma, \beta, \alpha(q, \vec{p})) ,$$

où α est une transformation inversible de $\sigma_p \times \sigma_q$ identique à celle du no 5.

Le raisonnement restant le même, nous pouvons énoncer le résultat suivant:

il existe un N -champ $\psi'(n, x)$ de même moment M que le champ donné $\psi(x)$, d'énergie-impulsion $R'(n)$ covariante relativement à M , et qui peut être obtenu par une application $I(A_\sigma)$ à partir de $\psi(x)$. La classe des représentations $R'(n) : a \rightarrow R'_a(n)$ n'est pas équivalente à une restriction d'une représentation unitaire de $SL(2, C)$ inhomogène au sous-groupe des translations.

Bibliographie

- [1] V. BARGMANN, *On unitary representations of continuous groups*, Ann. Math. 59, 1 (1954).
- [2] N. BOURBAKI, *L'intégration*, Hermann, Paris.
- [3] C. CHEVALLEY, *Theory of Lie Groups*, Princeton.
- [4] L. EHRENPREIS, *On the Theory of Kernels of Schwartz*, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956).
- [5] L. GÅRDING, *Note on continuous representations of Lie groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 33, 331 (1947).
- [6] L. GÅRDING, A. S. WIGHTMAN, *Representations of anticommutation relations*, Proc. Nat. Acad. Sci., USA 40, 617 (1954).
- [7] A. M. GLEASON, *Spaces with a compact Lie group of transformations*, Proc. Amer. Math. Soc. 1, 35 (1950).
- [8] J. M. JAUCH and F. ROHRLICH, *The Theory of Photons and Electrons*, Addison-Wesley (1955).
- [9] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1950-1951.
- [10] I. E. SEGAL, *A class of operators which are determined by groups*, Duke Math. J. 18, 221 (1951).
- [11] R. F. STREATER, A. S. WIGHTMAN, *PCT, Spin and Statistics*, Mathematical Physics Monograph Series, New-York (1964).
- [12] M. GUENIN, *On the Interaction Picture*, Comm. math. Phys. 3, 120 (1966).