

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 40 (1967)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Zur Formulierung der mathematischen Theorie der natürlichen Linienbreite  
**Autor:** Ingólfsson, Ketill  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-113766>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Zur Formulierung der mathematischen Theorie der natürlichen Linienbreite<sup>1)</sup>

von **Ketill Ingólfsson**

Mathematisches Institut, Universität Zürich

(26. IX. 66)

*Summary.* The Quantum Field Theory, defined in an infinite space and developed on the ideas of V. FOCK and K. FRIEDRICHS, gives the foundation for a general method of solution for quantum field problems. The Laplace transform of the time dependent state vector in the Schrödinger picture is proved to be a solution of the Laplace transform of the wave equation. The conditions for the identity of the inverse transform of that solution with the original state vector and also some other rules for the Laplace transformed space will be derived. The method of solution consists then in the following procedure: 1) The Laplace transform of the wave equation is solved; 2) The solution is retransformed. – The well known physical problem of the emission of light from an excited electron in a bound state and the corresponding calculation of the line width is to be treated by means of this method. The following discussion shows, that the conditions for the solution are fulfilled, if we use the ordinary Hamiltonians in a Hilbert space, corresponding to lowest order perturbation theory. At the end, the calculation of this solution is briefly pointed out. A connection to the method of HEITLER and MA is easily found. The use of a Hilbert space, corresponding to general perturbation theory is sketched.

## INHALT

	Seite
Einführung . . . . .	238
Kap. I. Allgemeine Betrachtungen zur Begründung der Lösungsmethode . . . . .	239
§ 1 Die Laplacetransformation von Zustandsvektoren im Hilbertraum . . . . .	239
§ 2 Die Darstellung von Zustandsvektoren und Operatoren infolge der Entwicklung zusammengesetzter Felder nach Teilchenzahl . . . . .	242
Kap. II. Die natürliche Linienbreite . . . . .	246
§ 1 Die Formulierung der physikalischen Aufgabe . . . . .	246
§ 2 Die formale Lösung der Wellengleichung . . . . .	249
§ 3 Die Anwendung einer nichtrelativistischen Wechselwirkung . . . . .	253
§ 4 Die Auswertung der formalen Lösung . . . . .	257
Kap. III. Der Übergang zu einer vollständigen, relativistisch invarianten Theorie . . .	259
§ 1 Die Quantisierung und die Formulierung des Wechselwirkungsoperators . . . . .	259
§ 2 Vollständige Zustandsvektoren . . . . .	261
Anhang . . . . .	262
Literatur . . . . .	263

<sup>1)</sup> Eine Dissertation vorgelegt der Philosophischen Fakultät II der Universität Zürich und begutachtet von Herrn Professor Dr. B. L. VAN DER WAERDEN.

### Einführung

Eines der wichtigsten Probleme der modernen Feldtheorie besteht im Mangel an mathematisch einwandfreien Lösungsmethoden. Als ein Beitrag zu der Diskussion um dieses Thema soll im folgenden eine allgemeine Lösungsmethode besprochen werden, die auf der Laplacetransformation von Zustandsvektoren im Hilbertraum beruht. Die Grundlage dazu bildet die Feldtheorie im unendlichen Raum. Als eine Anwendung dieser Methode wird die formale Lösung für die Auswertung jener Wahrscheinlichkeitsamplituden untersucht, die für eine Theorie der natürlichen Linienbreite erforderlich sind. Dieser Teil der Arbeit wird in einem möglichst einfachen Hilbertraum ausgeführt.

Zuerst gehen wir allgemein von einigen wichtigen Sätzen über den Raum Laplacetransformierter Zustandsvektoren aus. Die Feldzustände sollen als Lösungen der üblichen Wellengleichung hervorgehen. Die grundlegende Annahme der S-Matrixtheorie, die adiabatische Hypothese, wird hier vermieden, da wir keinen «Randwert» zu negativ unendlicher Zeit betrachten. Wir nehmen einen Anfangszustand zu einer endlichen Zeit an, die wir gleich 0 setzen.

Wenn wir den Anfangsvektor  $\Psi(0)$  nennen, können wir die zwei Schritte unserer Lösungsmethode wie folgt beschreiben:

(i) Die Laplacetransformierte Wellengleichung

$$(g + i H) \bar{\Psi}(g) = \Psi(0), \quad \text{Re}(g) > 0 \quad (1)$$

wird in bezug auf den Laplacetransformierten Zustandsvektor  $\bar{\Psi}(g)$  gelöst.

(ii) Der Zustandsvektor  $\Psi(t)$  wird durch die übliche Zurücktransformation

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} e^{gt} \bar{\Psi}(g) dg, \quad \xi > 0 \quad (2)$$

berechnet.

Das Definitionsgebiet des Energieoperators  $H$  sei jetzt mit  $D(H)$  bezeichnet. Die Sätze über die Laplacetransformierten Feldvektoren können dann in dem, was sie wesentliches über die Lösungsmethode (i)/(ii) auszusagen haben, in dem folgenden Hauptsatz (A) zusammengefasst werden:

(A) Wenn  $\Psi(0)$  ein Vektor des Hilbertraumes ist, gibt es immer eine Lösung der Laplacetransformierten Wellengleichung (1). Wenn die Bedingung

$$\Psi(0) \in D(H)$$

auch erfüllt ist, so ist durch die Umkehrtransformation (2) ein Zustandsvektor  $\Psi(t)$  definiert, der die zeitabhängige Schrödingergleichung erfüllt und für  $t \rightarrow 0$  gegen  $\Psi(0)$  strebt.

Wenn der Laplacetransformierte Zustandsvektor  $\bar{\Psi}(g)$  für ein physikalisches Problem bekannt ist, nennen wir das Integral (2) die formale Lösung des Problems.

Die Quantentheorie der Wellenfelder wurde in letzter Zeit von verschiedenen Autoren so formuliert, dass sie im unendlichen Raum exakt begründet ist. In einer kürzlich erschienenen Abhandlung hat B. L. VAN DER WAERDEN [1] im Anschluss an V. FOCK [2] und K. FRIEDRICHS [3] und auf Grund der Distributionentheorie von L. SCHWARTZ [4] die wesentlichen Züge der Theorie zusammengefasst. Es wird eine

mathematisch einwandfreie Formulierung der Quantentheorie gegeben, die sich weder der üblichen Periodizitätsbedingungen (Feld im «Kasten») noch der indefiniten Metrik bedienen muss. Der Inhalt dieser Abhandlung, besonders der Abschnitt über die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes, wird für das folgende als bekannt vorausgesetzt.

In der Untersuchung dieses Themas von VAN DER WAERDEN wurden ausschliesslich freie Felder behandelt. In der vorliegenden Arbeit aber sollen Probleme untersucht werden, in denen Wechselwirkungen zwischen Teilchen und Strahlungsfeld auftreten. Es werden somit die Felder zusammengesetzter Systeme formuliert. Der Energieoperator wird in den Operator der «freien» Energie und den Wechselwirkungsoperator aufgeteilt, der in der Literatur meistens als ein Störungsglied aufgefasst wird. Die Ausführung der Lösungsmethode (i)/(ii) lässt somit eine Auswertung im Sinne der Störungsrechnung erwarten. Zur vorhin erwähnten Anwendung der Lösungsmethode wird ein Hilbertraum formuliert, dessen Zustandsvektoren nur eine minimale Anzahl Teilchen beschreiben können. Das Lösungsverfahren entspricht dann einer Störungsrechnung niedrigster Ordnung<sup>2)</sup>.

Im folgenden wird ein Maßsystem gewählt, in dem  $c = \hbar = 1$  ist. Vektoren des Impuls- oder des Ortsraumes, z. B.  $q$  oder  $x$ , werden i.A. ohne besondere Vektorbezeichnungen geschrieben, und das Skalarprodukt beider Vektoren schreiben wir  $qx$ .

Im ersten Kapitel wird die Theorie der allgemeinen Lösungsmethode (i)/(ii) formuliert. Als ihre Anwendung wird im zweiten Kapitel die formale Lösung jener Zustandsvektoren untersucht, deren Auswertung die natürliche Linienbreite der spontanen Lichtemission begründet. Das Problem wird nichtrelativistisch und in einem Hilbertraum behandelt, der einer Störungsrechnung erster Ordnung entspricht. Die Herleitung der formalen Lösung ist dann leicht auszuführen und die Aufgabe sie auszuwerten wird auf das Studium einer einzigen Funktion  $I_\omega(g)$  zurückgeführt. Wir zeigen, dass die Auswertung vollständig durchgeführt werden kann. Im dritten Kapitel wird ein kurzer Ausblick auf die relativistisch invariante Theorie gegeben, sowie auf Zustandsvektoren, die eine unbeschränkte Anzahl Teilchen berücksichtigen können.

## KAPITEL I

### Allgemeine Betrachtungen zur Begründung der Lösungsmethode

#### § 1 Die Laplacetransformation von Zustandsvektoren im Hilbertraum

Die Vektoren  $\Psi$  des Hilbertraumes  $R$  seien Zustandsvektoren genannt, wenn sie physikalische Vorgänge, die sich in einem System von Teilchen verschiedener Art abspielen, vollständig beschreiben. Im Schrödinger-Bild der Feldtheorie seien die Zustandsvektoren  $\Psi^s(t)$  Lösungen der Wellengleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi^s = H \Psi^s. \quad (1)$$

Diese Lösungen können durch die Anwendung des unitären Operators  $e^{-iHt}$  angegeben werden. Im Sinne der Theorie der Spektraldarstellung linearer Operatoren definieren

<sup>2)</sup> In einer weiteren Arbeit wird die Einschränkung des Hilbertraumes fallengelassen. Die Störungsrechnung bekommt dann eine neue Form.



wir (siehe J. VON NEUMANN [5])

$$e^{-iHt} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} dE(\lambda) . \quad (2)$$

Hier bedeutet  $E(\lambda)$  die zum Operator  $H$  gehörende Zerlegung der Einheit. Der Operator (2) ist unitär und somit auf den ganzen Hilbertraum definiert:

$$D(e^{-iHt}) = R .$$

Zu einem bestimmten Anfangszustand des Teilchensystems,  $\Psi(0)$ , kann die Lösung der Wellengleichung (1) immer in der Form

$$\Psi^s(t) = e^{-iHt} \Psi(0) \quad (3)$$

angegeben werden. Wenn  $\Psi(0)$  im Definitionsgebiet von  $H$  liegt, kann man aus (3) umgekehrt auf die Wellengleichung (1) schliessen.

Für die Laplacetransformation von Vektoren im Hilbertraum in bezug auf die Zeit benutzen wir die folgende Definition:

Es sei  $g = \xi + i\kappa$  eine komplexe Zahl. Man bilde das Integral

$$\bar{\Psi}(g) = \int_0^{\infty} e^{-gt} \Psi(t) dt .$$

Die Laplacetransformierte  $\bar{\Psi}(g)$  des Vektors  $\Psi(t)$  existiert dann und nur dann, wenn ihre Norm  $N \bar{\Psi}(g)$  endlich ist, d. h. wenn sie auch als ein Vektor des Hilbertraumes gelten kann.

Wir setzen nun voraus, dass der Parameter der Laplacetransformation  $g$  einen positiven Realteil hat, d. h. dass  $\xi > 0$  ist. Die folgenden Sätze können dann bewiesen werden:

I) Jeder Vektor  $\Psi(t)$  im Hilbertraum  $R$ , dessen Norm  $N \Psi(t)$  als Funktion der Zeit beschränkt bleibt und der für alle positive Zeiten eine stetige oder stückweise stetige Funktion der Zeit ist, besitzt eine Laplacetransformierte  $\bar{\Psi}(g)$ .

II) Wenn der Vektor  $\Psi(t)$  zum Definitionsgebiet des Operators  $H$  gehört, so gilt das gleiche für die Laplacetransformierte des Vektors.

III) Wenn  $\Psi^s(t)$  eine Lösung der Wellengleichung im Schrödinger-Bild ist, so ist ihre Laplacetransformierte  $\bar{\Psi}^s(g)$  eine Lösung der folgenden Gleichung:

$$(g + iH) \bar{\Psi}^s(g) = \Psi(0) , \quad \text{für} \quad \Psi(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \Psi^s(t) .$$

Die Gleichung wird als die Laplacetransformierte Wellengleichung bezeichnet.

IV) Wenn der Raum aller Vektoren  $H \bar{\Psi}^s(g)$  mit  $L(H)$  bezeichnet wird, so ist  $L(H) \subset D(H)$ .

V) Wenn  $\Psi(0)$  zum Definitionsgebiet des Operators  $H$  gehört, und wenn  $\bar{\Psi}^s(g)$  eine Lösung der Laplacetransformierten Wellengleichung ist, so ist dieser zweite Vektor die Laplacetransformierte der Lösung der Wellengleichung im Schrödinger-Bild, die den Anfangswert  $\Psi(0)$  hat. Diese Lösung ergibt sich dann durch die Aus-

wertung des Integrals

$$\Psi^s(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} e^{gt} \bar{\Psi}^s(g) dg.$$

Die Gültigkeit des ersten Satzes folgt aus der Abschätzung,

$$\begin{aligned} N \bar{\Psi}(g) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-g^* t'} e^{-gt} (\Psi(t'), \Psi(t)) dt' dt \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\xi(t+t')} |(\Psi(t'), \Psi(t))| dt' dt \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\xi(t+t')} \|\Psi(t')\| \cdot \|\Psi(t)\| dt' dt \leq \frac{1}{\xi^2} \text{Sup } N \Psi(t). \end{aligned}$$

Wenn die Norm  $N \Psi(t)$  für alle positive Zeiten endlich bleibt, ist auch die Norm  $N \bar{\Psi}(g)$  endlich; damit ist der Satz I) bewiesen. Aus der Lösung (3) der Wellengleichung folgt, dass die Norm der Zustandsvektoren  $N \Psi^s(t) = 1$  für alle Zeiten ist. Damit gilt für ihre Laplacetransformierten, dass

$$N \bar{\Psi}^s(g) \leq \frac{1}{\xi^2}$$

d. h. dass ihre Norm umso kleiner wird, je weiter wir nach rechts in der komplexen Parameterebene gehen. Wenn  $H\Psi$  eine endliche Norm besitzt, so gilt infolge I) das gleiche für  $\overline{H\Psi}$ . Weil nun der Operator  $H$  zeitunabhängig ist, kann man behaupten, dass

$$\overline{H\Psi} = H \bar{\Psi}$$

ist; damit ist der Satz II) bewiesen. Nun multipliziere man beide Seiten der Wellengleichung (1) mit  $e^{-gt}$  und integriere über die Zeit von 0 bis  $\infty$ . Da eine Lösung  $\Psi^s(t)$  der Wellengleichung differenzierbar ist, muss sie auch stetig sein und besitzt somit infolge I) eine Laplacetransformierte  $\bar{\Psi}^s(g)$ . Bei dieser Umformung der Wellengleichung überzeugt man sich, dass für  $\xi > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-gt} \Psi^s(t) = 0$$

ist, und man erhält die Laplacetransformierte Wellengleichung; damit ist der Satz III) bewiesen. Der Operator  $H$  kommutiert mit dem unitären Operator  $e^{-iHt}$ . Damit folgt aus (3), dass  $\Psi^s(t) \in D(H)$ , wenn  $\Psi(0) \in D(H)$  ist. Dann ist aber auch infolge II)  $\bar{\Psi}^s(g) \in D(H)$  und infolge III)  $H \bar{\Psi}^s(g) \in D(H)$ ; damit ist der Satz IV) bewiesen. Den Vektor  $\bar{\Psi}^s(g)$  kann man infolge der Laplacetransformierten Wellengleichung durch den Ausdruck

$$\bar{\Psi}^s(g) = (g + iH)^{-1} \Psi(0) \quad (4)$$

angeben, was wiederum die Laplacetransformierte der Lösung (3) ist, wenn  $\Psi \in D(H)$  ist. Damit ist der erste Teil des Satzes V) bewiesen. Aus der Literatur über die Theorie

der Laplacetransformation<sup>3)</sup> zitieren wir jetzt einen Satz über die Umkehrtransformation, den wir auf Elemente des Hilbertraumes leicht übertragen: In jedem endlichen Zeitintervall  $(T_1, T_2)$  sei die Schwankung des Vektors  $\Psi^s(t)$  beschränkt, d. h. die Summe

$$\sigma(z) = \sum_{i=1}^n \| \Psi^s(t_i) - \Psi^s(t_{i-1}) \|, \quad z: T_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T_2$$

sei für jede Zerlegung  $z$  des Zeitintervalles beschränkt. Dann ist die Umkehrtransformation ausführbar und die Zurücktransformierte im Satz (V) ist der ursprüngliche Vektor.

Die Lösung der Wellengleichung ist auf jeden Fall stetig differenzierbar. Wir dürfen dann den Mittelwertsatz auf jeden der Vektoren  $\Psi^s(t)$  in dem Intervall  $(T_1, T_2)$  anwenden. In jedem der kleinen Intervalle  $t_{i-1} \leq t < t_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) gibt es ein  $\bar{t}_i$ , für welches folgendes gilt,

$$\| \Psi^s(t_i) - \Psi^s(t_{i-1}) \| = \| \dot{\Psi}^s(\bar{t}_i) \| (t_i - t_{i-1}).$$

Weil die Ableitung  $\dot{\Psi}^s(t)$  stetig ist, muss der absolute Betrag des Vektors im ganzen Intervall beschränkt sein. Es sei z. B.

$$\| \dot{\Psi}^s(t) \| \leq N.$$

Wir können dann die Summe  $\sigma(z)$  wie folgt abschätzen:

$$\sigma(z) = \sum_{i=1}^n \| \dot{\Psi}^s(\bar{t}_i) \| (t_i - t_{i-1}) \leq N \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = N (T_2 - T_1).$$

Daraus folgt, dass die Bedingung im obenstehenden Satz erfüllt ist; damit ist der Satz V) bewiesen.

In einer Theorie der Halbgruppen beschränkter, linearer Operatoren über einem lokal konvexen, linearen, topologischen Raum haben E. HILLE und K. YOSIDA [8] eine neue Grundlage zur Herleitung der Ergebnisse dieses Abschnittes gefunden. Sie haben Gleichungen diskutiert, die unser Leraplacetransformierten Wellengleichung und ihrer Umkehr (4) entsprechen. (Siehe Anhang.)

## § 2 Die Darstellung von Zustandsvektoren und Operatoren infolge der Entwicklung zusammengesetzter Felder nach Teilchenzahl

Die Sätze des ersten Abschnittes wurden allgemein für den abstrakten Hilbertraum hergeleitet. Im folgenden soll nun die Struktur des von uns benutzten Raumes näher festgelegt werden. Die Entwicklung der Felder nach Teilchenzahl wird begründet, und wir sehen, wie die Operatoren des Hilbertraumes durch die elementaren Grundoperatoren ausgedrückt werden können. Dadurch wird es uns möglich, noch weitere allgemeine Aussagen über die Ausführung der Lösungsmethode (i)/(ii) anzugeben.

<sup>3)</sup> Für die weitere allgemeine Diskussion um die Laplacetransformation siehe CARSLAW und JAEGER [6] oder VAN DER POL und BREMMER [7].

Wir betrachten zuerst ein System von Photonen und Teilchen, die in ihren unterschiedlichen Eigenschaften durch verschiedenen Felder dargestellt werden können. Jedem dieser Felder, deren Anzahl etwa  $\alpha$  sei, ordnen wir einen Hilbertraum zu. Diese einzelnen Hilberträume können so definiert werden, wie es B. L. VAN DER WAERDEN in seiner Arbeit getan hat, die im folgenden als «Q. W.» zitiert wird.

Der Raum  $R^j$  des  $j$ -ten Feldes besteht aus allen Funktionenfolgen

$$\phi^j = (\varphi_0^j, \dots, \varphi_n^j(q)_n, \dots) \quad (1)$$

deren Norm

$$N \phi^j = \sum_{n=1}^{\infty} N \varphi_n^j \quad (2)$$

endlich ist. Der Ausdruck  $(q)_n$  soll hier sämtliche Impulse und andere dazugehörige Bestimmungsgrößen von  $n$  Teilchen darstellen. Im Falle des Elektron-Positron-Feldes soll somit  $(q)$  die drei Bestimmungsgrößen  $(p, s, \varepsilon)$ , d. h. den Impuls  $p$ , die Spinrichtung  $s$  und das Energievorzeichen  $\varepsilon$ , bezeichnen, während im Falle des elektromagnetischen Feldes  $(q)$  die zwei Bestimmungsgrößen  $(k, r)$ , d. h. den Impuls  $k$  und die Polarisationsrichtung  $r$ , bezeichnet. Die einzelnen Funktionen  $\varphi_n$  müssen in den Argumenten

$$(q)_n = (q^1, \dots, q^n)$$

symmetrisch für das Bosonenfeld und antisymmetrisch für das Fermionfeld sein. Die Zustände des gesamten Systems können nur dann von den richtig normierten Vektoren  $\phi^j$  beschrieben werden, wenn die Wechselwirkung der Teilchen jeder Sorte mit den anderen ausbleibt.

Wenn die Wechselwirkung eintritt, können die Zustände des Systems aber auf einen Hilbertraum  $R$  der zusammengesetzten Felder bezogen werden. Der Zustand eines Feldes, das  $n_1$  Teilchen von der Sorte 1 bis  $n_\alpha$  Teilchen von der Sorte  $\alpha$  enthält, sei durch die endlich normierte Wahrscheinlichkeitsamplitude

$$W_{n_1, \dots, n_\alpha} ((q_1)_{n_1}, \dots, (q_\alpha)_{n_\alpha}) \quad (3)$$

gegeben. Wie oben stellt  $(q_i)_{n_i}$  die Bestimmungsgrößen von  $n_i$  Teilchen des  $i$ -ten Feldes im Impulsraum dar. Wenn wir jeder Zahlenfolge  $n_1, \dots, n_\alpha$  eineindeutig eine natürliche Zahl  $m$  zuordnen, können wir eine allgemeine Funktion in den gleichen Argumenten wie  $W$  nach (3) mit  $\psi_{m(n_1, \dots, n_\alpha)}$  bezeichnen. Der Hilbertraum  $R$  besteht dann aus allen Funktionenfolgen

$$\Psi = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_m, \dots), \quad (4)$$

deren Norm als endlich vorausgesetzt wird. Die Funktionen (3) und (4) sollen auch von der Zeit abhängen können.

Nach J. VON NEUMANN [5] können wir den Hilbertraum  $R$  als einen sogenannten Produktraum der  $\alpha$  kleinen Hilberträume  $R^j$  auffassen. Die diesbezüglichen Beweise von Neumanns, die zwei Feldern gelten, können sofort auf mehrere Felder ausgedehnt werden. Der Raum  $R^j$  wird durch das vollständige System orthonormierter Vektoren  $\phi_{l_j}^j$  ( $l_j = 1, 2, \dots$ ) aufgespannt. Wir ordnen wieder jeder Zahlenfolge  $l_1, \dots, l_\alpha$  einein-

deutig die Zahl  $m$  zu und bilden die Produktvektoren

$$\Psi_{m(l_1, \dots, l_\alpha)} = \prod_{j=1}^{\alpha} \phi^j. \quad (5)$$

Jeder Vektor stellt eine Folge von  $\alpha$ -fachen Funktionenprodukten dar. Die Produktvektoren bilden für sämtliche  $m$  eine vollständige Schar orthogonaler Vektoren im Raum  $R$ . Durch die Summe

$$\Psi = \sum_m u_m \Psi_m \quad (6)$$

können wir somit jeden Vektor des Raumes  $R$  ausdrücken. Umgekehrt ist jeder Vektor von der Form (6) ein Element von  $R$ , wenn die Summe

$$\sum_m |u_m|^2$$

endlich ist.

Die Menge der Funktionenfolgen (4), die bei einer maximalen Teilchenzahl für jede Art,  $n_1^{max}, \dots, n_\alpha^{max}$ , abgebrochen werden, stellt den Hilbertraum  $R(m^{max})$  dar. Der einfachste solcher Räume gibt die Grundlage zur Auswertung der natürlichen Linienbreite im zweiten Kapitel. Wenn die Teilchenzahl nicht eingeschränkt wird, nennen wir die Vektoren vollständig. Die vollständige Ausführung der Lösungsmethode (i)/(ii) führt dann zu Renormierungsaufgaben.

Durch die Berücksichtigung der Beziehungen (5) und (6) kann nun die Wirkung der Grundoperatoren der einzelnen Hilberträume  $R^j$  auf Vektoren im grossen Hilbertraum  $R$  verstanden werden. In  $R$  haben wir dann  $2 \cdot \alpha$  solche Operatoren, die wir hier einheitlich bezeichnen wollen: Es sei  $c_j^-(q)$  der Vernichtungsoperator und  $c_j^+(q)$  der Erzeugungsoperator, die auf das  $j$ -te Feld wirken. Durch die folgende Schreibweise kürzen wir zwei wichtige Produkte ab:

$$\begin{aligned} c^-(q)^m &= c_1^-(q_1^1) \dots c_1^-(q_1^{n_1}) \dots c_\alpha^-(q_\alpha^1) \dots c_\alpha^-(q_\alpha^{n_\alpha}), \\ c^+(q)^m &= c_\alpha^+(q_\alpha^{n_\alpha}) \dots c_\alpha^+(q_\alpha^1) \dots c_1^+(q_1^{n_1}) \dots c_1^+(q_1^1). \end{aligned}$$

Die Argumente des zusammengesetzten Feldes kürzen wir in der selben Art ab:

$$(q)^m = ((q_1)_{n_1}, \dots, (q_\alpha)_{n_\alpha}).$$

Wir betrachten jetzt einen Operator  $A_{Gr}$ , der den Vektor  $\Psi$  zu  $\Psi'$  überführt:

$$\Psi' = A_{Gr} \Psi. \quad (7)$$

Von dem Operator wird verlangt, dass er auf einen überall dichten Teilraum des Hilbertraumes definiert ist. Die Bezeichnung  $Gr$  soll angeben, dass er durch die Grundoperatoren der  $\alpha$  Felder ausgedrückt werden kann. Nun sind die Grundoperatoren bekanntlich nicht als eigentliche Operatoren, sondern als Distributionen zu verstehen. Das bedeutet, dass in der Form der Operators  $A_{Gr}$  eine Integration über die Impulse  $(q)$  enthalten sein muss. Um die Struktur des Operators zu ermitteln, können wir von ihm einen Integraloperator ableiten, der auf den Vektor  $\Psi$  die gleiche Wirkung hat wie er. Zuerst führen wir  $\phi_0$ , den Zustandsvektor des Vakuums, ein:

$$\phi_0 = (1, 0, 0, \dots).$$



Dann bezeichnen wir mit  $\mathcal{A}$  die Gesamtheit der Funktionen

$$a((q)^m/(q')^{m'}) = (n_1! \dots n_\alpha! n'_1! \dots n'_\alpha!)^{-1/2} (\phi_0, c^-(q)^m A_{Gr} c^+(q')^{m'} \phi_0). \quad (8)$$

Diese Funktionen bilden den Kern des Integraloperators. Die Gesamtheit  $\mathcal{A}$  ist analog einer Matrix, aber die einzelnen Matrixelemente hängen ausser von den diskreten Zahlen  $n_i$  ( $i = 1, \dots, \alpha$ ) noch von den Teilchenkoordinaten  $(q)^m$  und  $(q')^{m'}$  ab. Wir werden die durch (8) definierten  $a((q)^m/(q')^{m'})$  trotzdem «Matrixelemente» und ihre Gesamtheit «Matrix» nennen. Aus (7) können wir dann für eine Funktion des Vektors  $\Psi'$  die folgende Gleichung ableiten:

$$\psi'_m = \sum_{m'} \int dq'_1 \dots dq'_{n'_\alpha} a((q)^m/(q')^{m'}) \psi_{m'}. \quad (9)$$

Das Definitionsgebiet  $D(A_{Gr})$  wird durch die Forderung bestimmt, dass die Norm  $N A_{Gr} \Psi$  endlich sei. Wir erhalten somit den Satz:

VI) Der Operator  $A_{Gr}$  ist auf den ganzen Hilbertraum definiert, d. h.  $D(A_{Gr}) = R$ , wenn das Integral

$$\sum \int |\mathcal{A}|^2 dq dq' \quad (10)$$

endlich ist.

Das Integral ist so zu berechnen, dass über das absolute Quadrat der Matrixelemente nach sowohl den Zeilen- wie auch den Spaltenargumenten integriert und summiert wird. Umgekehrt ist aber die Konvergenz des Integrals (10) nicht eine Folgerung aus  $D(A_{Gr}) = R$ . Im Folgenden wird die Bezeichnung  $Gr$  am Operator weggelassen, ausser wenn seine konkrete Abhängigkeit von den Grundoperationen betont werden soll.

In der Abhandlung Q. W. hat VAN DER WAERDEN die Zustandsvektoren der einzelnen Felder,  $\phi$ , auf zweierlei Arten dargestellt, indem die Argumentenräume der Vektorfunktionen entweder der Ortsraum ( $x$ -Raum) oder der Impulsraum ( $q$ -Raum) sind. Wir sprechen deshalb hier von der  $\{x\}$ - und der  $\{q\}$ -Darstellung des Hilbert-raumes. Mit Rücksicht auf die bekannten Transformationsgesetze, nach welchen Zustandsvektoren, Operatoren und Wellengleichung ins Dirac-Bild (Wechselwirkungsbild) übergehen, können wir feststellen, dass die in Q. W. eingeführten Zustandsvektoren in der  $\{x\}$ -Darstellung auf das Schrödinger-Bild und in der  $\{q\}$ -Darstellung auf das Dirac-Bild bezogen sind.

Wir können die Laplacetransformation auf die Wellengleichung im Dirac-Bild ausüben, so wie wir es im ersten Abschnitt im Schrödinger-Bild getan haben. Dabei erhalten wir, wie zu erwarten ist, die gleiche Laplacetransformierte Wellengleichung. Wir zeigen das, indem wir zuerst die folgende Laplacetransformation jeder Funktion  $\psi_m^D((q)^m, t)$  eines Zustandsvektors im Dirac-Bild ausführen:

$$\bar{\psi}_m^D((q)^m, g + i\omega^m) = \int_0^\infty e^{-(g + i\omega^m)t} \psi_m^D((q)^m, t) dt.$$

Die Grösse  $\omega^m$  stellt hier die Energie aller derjenigen Teilchen dar, die in  $\psi_m^D$  vertreten sind<sup>4)</sup>. Wir unterscheiden weiterhin das Schrödinger-Bild und das Dirac-Bild durch

<sup>4)</sup> Für die Bedeutung der Energien  $\omega$  in kontinuierlichen Feldern siehe Q. W.



das Hinzufügen der oberen Indices  $S$  und  $D$ . Es folgt für jede Vektorfunktion die Identität

$$\bar{\psi}_m^D((q)^m, g + i \omega^m) = \bar{\psi}_m^S((q)^m, g). \quad (11)$$

Wenn jede Komponentengleichung der Wellengleichung im Dirac-Bild mit  $e^{-(g+i\omega^m)t}$  multipliziert wird, und  $\omega^m$  die zur betreffenden Gleichung gehörende Energie ist, integrieren wir über die Zeit von 0 bis  $\infty$  und erhalten aus der Gesamtheit aller dieser Gleichungen die Laplacetransformierte Wellengleichung in der schon bekannten Form. Im folgenden werden die Wahrscheinlichkeitsamplituden im Schrödinger-Bild berechnet. Von der Identität (11) wird dann Gebrauch gemacht, wenn parallele Resultate im Dirac-Bild gewünscht werden.

Im allgemeinen Hilbertraum, der durch die Entwicklung der Felder nach Teilchenzahl dargestellt wird, entspricht die Laplacetransformierte Wellengleichung einer Anzahl Gleichungen folgender Art:

$$(g + i \omega^m) \bar{\psi}_m^S((q)^m, g) + i \int \sum d^3 m' q' h_i((q)^m / (q')^{m'}) \bar{\psi}_{m'}^S((q')^{m'}, g) = \psi_m((q)^m, 0). \quad (12)$$

Wenn die Zustandsvektoren vollständig sind und die Wechselwirkung  $h_i$  solcher Art ist, dass sie die Teilchenzahl stets ändert, wird die Anzahl der Gleichungen (12) unbeschränkt, die zur Bestimmung der Amplituden nötig sind. Wenn aber der Hilbertraum  $R$  ( $m^{max}$ ) benutzt wird, können wir unter Umständen aus den Gleichungen (12) ein exaktes Resultat erhalten, ohne eine unendliche Reihe aufsummieren zu müssen. Das einfachste Beispiel solcher Auswertung wird im nächsten Kapitel diskutiert.

## KAPITEL II

### Die natürliche Linienbreite

#### § 1 Die Formulierung der physikalischen Aufgabe

Das vorliegende Kapitel bringt eine Anwendung der schon getroffenen mathematischen Vorbereitungen in der Quantentheorie der Wellenfelder. Die Theorie der spontanen Lichtemission von einem angeregten, im Atom gebundenen Elektron wird im Sinne des ersten Kapitels neu formuliert. Die spektrale Intensitätsverteilung und die damit verknüpfte natürliche Linienbreite soll ausgewertet werden.

Für die quantentheoretische Behandlung dieser Aufgabe steht wie gewohnt die Berechnung von Wahrscheinlichkeitsamplituden im Vordergrund. Die alte Störungstheorie lieferte dafür ein System von Differentialgleichungen, die durch geeignete Vereinfachungen gelöst wurden. In diesem Sinne haben WEISSKOPF und WIGNER [9] die Aufgabe untersucht. Für die gesuchte Intensitätsverteilung der emittierten Strahlung haben sie den folgenden Ausdruck bekommen:

$$J(\omega) d\omega = \omega_0 \frac{\gamma}{2\pi} \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4}. \quad (1)$$

Die Halbwertsbreite  $\gamma$  in dieser Resonanzformel ist die gesuchte natürliche Linienbreite. Bei der Annahme von zwei möglichen Elektronenzuständen ist  $\gamma$  die totale

spontane Übergangswahrscheinlichkeit des Elektrons pro Zeiteinheit, und  $\omega_0$  ist die betreffende Energiedifferenz. Die klassische Elektrodynamik ermittelt genau den gleichen Ausdruck wie (1) für diese Intensitätsverteilung.

Die bis jetzt genauesten Resultate aus der Theorie der natürlichen Linienbreite stammen aus den Arbeiten von HEITLER [10, 11, 12], MA [11], ARNOUS [12, 13] und ZIENAU [13]. Sie haben ihre Untersuchungen im Zusammenhang mit der Theorie der allgemeinen Dämpfungsphänomene ausgeführt. Die Auswertung der natürlichen Linienbreite mit der Anwendung der Laplacetransformation ist von A. MESSIAH [14] und G. KÄLLÉN [15] diskutiert worden. MESSIAH behandelt allgemein die Laplacetransformation von Operatoren, was in dieser Arbeit nicht zur Sprache kommt. KÄLLÉN leitet einen Teil der formalen Lösung her, die wir in diesem Kapitel kennenlernen werden. Die Anwendung der Laplacetransformation in der vorliegenden Arbeit knüpft an ein ähnliches Verfahren in einer Dissertation von MARIANNE FRIEDRICH [16] an. Frl. FRIEDRICH geht von einem Feld in einem endlichen Volumen  $V'$  aus, macht dann in der Laplacetransformierten den Grenzübergang  $V' \rightarrow \infty$ , während hier von Anfang an der unendliche Raum zugrunde gelegt wird.

Die Formulierung der physikalischen Aufgabe besteht nun darin, dass die Form der Vektoren bestimmt wird, die den hier besprochenen physikalischen Fall beschreiben können. In dem vorliegenden Kapitel soll ein solcher Teilraum des Hilbertraumes bestimmt werden, der einer Störungsrechnung erster Ordnung entspricht. Wir untersuchen das Verhalten eines angeregten Atomelektrons, das im Begriffe ist, ein Photon zu emittieren. Es muss somit der Zustandsvektor eines Systems, zusammengesetzt von einem Elektron im Felde des Atomkerns und von höchstens einem Photon, formuliert werden.

Wir behandeln im folgenden zuerst das diskrete Elektronfeld auf eine Art, die der Formulierung der kontinuierlichen freien Felder in der Abhandlung Q. W. entspricht. Der Vektor des zusammengesetzten Feldes folgt dann direkt aus den Ergebnissen des Kap. I, § 2. Der Hilbertraum  $R^{pe}$  sei aus Vektoren gebildet, die das Elektron-Positron-Feld allgemein beschreiben. Von diesen Vektoren betrachten wir solche, die nur ein Teilchen beschreiben, und deren Vektorfunktionen  $\varphi(x, \nu)$  Lösungen der Dirac-Gleichung<sup>5)</sup>

$$(\not{p}_0 - \beta_1 \sigma \not{p} - \beta_3 \mu - e V) \varphi(x, \nu) = 0 \quad (2)$$

sind. Nun kann jede solche Vektorfunktion als ein Wellenpaket

$$\varphi(x, \nu) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{n,s,\varepsilon} \int \varphi(n; p, s, \varepsilon) \chi(x, \nu, t | p, s, \varepsilon) d^3p \quad (3)$$

aufgefasst werden. Die Ausdrücke  $\chi$  stellen die Spinorfunktionen

$$\chi(x, \nu, t | p, s, \varepsilon) = C_\nu(s, \varepsilon) e^{i(p x - \omega t)}$$

dar. Die Wahrscheinlichkeitsamplituden  $\varphi(n; p, s, \varepsilon)$  können wir schreiben als

$$\varphi(n; p, s, \varepsilon) = u(n; p, s, \varepsilon) e^{i(\omega - E_n)t}, \quad (4)$$

<sup>5)</sup> Die Schreibweise der Dirac-Gleichung knüpft an Q. W., Seite 952, an.

wenn die Funktionen  $u(n; p, s, \varepsilon)$  so bestimmt werden, dass der zeitunabhängige Ausdruck

$$\sum_{s, \varepsilon} \int u(n; p, s, \varepsilon) C_v(s, \varepsilon) e^{i p x} d^3 p$$

eine Lösung der Eigenwertgleichung der Energie mit dem Eigenwert  $E_n$  ist. Aus dem Ausdruck (3) sehen wir, dass für jedes feste  $n$  ein Vektor in der  $\{q\}$ -Darstellung,

$$\phi_n = (\varphi(n; p, s, \varepsilon)) \quad (5)$$

gegeben ist, der ein Teilchen mit der Energie  $|E_n|$  beschreibt. Wegen der Entartung der Energieeigenwertzustände ist er nicht durch  $V$  eindeutig bestimmt. Die Gesamtheit der Vektoren  $\phi_n$  für jedes  $n$  bildet den Raum  $R^{p^e/n}$ . Die Summe aller  $R^{p^e/n}$  bildet wiederum einen Unterraum von  $R^{p^e}$ . Wenn wir die zeitunabhängigen  $u$ -Funktionen betrachten, bedeutet dies folgendes: Wir beschränken uns auf den Teilraum des Funktionenraumes, der von den Funktionen  $u(n; p, s, \varepsilon)$  aufgespannt wird, d. h. wir lassen das kontinuierliche Spektrum ausser Betracht. Wir können nun, wie aus der Theorie des wasserstoffähnlichen Atoms bekannt ist, ein System von orthonormierten Vektoren herleiten.

$$U_{(n,f)} = (u_{(n,f)}(p, s, \varepsilon)) ,$$

die durch das Potential  $V$  eindeutig bestimmt sind und den Funktionenraum  $\{u(n; p, s, \varepsilon)\}$  aufspannen. Die Anzahl der möglichen Zahlen  $f$  für ein bestimmtes  $n$  ist gleich dem Grad der Entartung. Eine Funktion  $u(n; p, s, \varepsilon)$  kann also durch jede Linearkombination

$$u(n; p, s, \varepsilon) = \sum_f \varphi(n, f) u_{(n,f)}(p, s, \varepsilon) \quad (6)$$

angegeben werden, wenn die Summe

$$\sum_{n,f} |\varphi(n, f)|^2$$

endlich ist. Die Summierung über  $n$  ist für diese Bedingung nötig, damit der Ausdruck (3) für das Wellenpaket auch einen Sinn hat. Wir führen nun eine neue Spinorfunktion ein,

$$\chi_v(n, f, x, t) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{s, \varepsilon} \int e^{i(\omega - E_n)t} u_{(n,f)}(p, s, \varepsilon) \chi(x, v, t) | p, s, \varepsilon d^3 p . \quad (7)$$

Wenn wir dann die Beziehung (6) für  $u(n; p, s, \varepsilon)$  unter der Berücksichtigung von (4) in den Ausdruck (3) einsetzen, erhalten wir für die ursprüngliche Vektorfunktion die Linearkombination

$$\varphi(x, v) = \sum_{n,f} \varphi(n, f) \chi_v(n, f, x, t) \quad (8)$$

Aus der Definition (7) folgt, dass die Norm des betreffenden Vektors durch die Summe

$$N \varphi(x, v) = \sum_{n,f} |\varphi(n, f)|^2 \quad (9)$$

gegeben ist. Die Ausdrücke (8) und (9) zeigen uns, dass der gebundene Zustand in einer  $\{nf\}$ -Darstellung neben der  $\{x\}$ -Darstellung gegeben werden kann. Wir stellen deshalb folgendes auf Grund der bisherigen Herleitungen fest:

Die zum Hilbertraum  $R^{pe}$  gehörenden Vektoren

$$\phi = (\varphi(x, v)) \quad (10)$$

bilden in der  $\{x\}$ -Darstellung einen Teilraum von  $R^{pe}$ , den wir  $R^{peV}$  nennen wollen. Dieser Teilraum stellt die Gesamtheit der gebundenen Zustände dar. Die einzelnen Vektoren des Raumes werden in der  $\{q\}$ -Darstellung durch eine Linearkombination von den Vektoren  $\phi_n$  nach (5) angegeben. Das bedeutet, dass der Raum  $R^{peV}$  als die Summe der Teilräume  $R^{pe/n}$  aufzufassen ist.

$$R^{peV} = \sum_n R^{pe/n}$$

Die Vektoren  $\phi$  werden in der  $\{nf\}$ -Darstellung durch die Wahrscheinlichkeitsamplituden  $\varphi(n, f)$  beschrieben,

$$\phi = (\varphi(n, f)) \quad (11)$$

Alle Vektoren der Form (11), die eine endliche Norm besitzen, bilden in dieser Darstellung somit den Raum  $R^{peV}$ .

In diesem Raum werden nun Grundoperatoren wirken können,  $a^\pm(x, v)$  in der  $\{x\}$ -Darstellung und  $a^\pm(n, f)$  in der  $\{nf\}$ -Darstellung<sup>6</sup>). Der Zusammenhang der Grundoperatoren beider Darstellungen wird durch die folgenden Beziehungen gegeben

$$a^-(x, v) = \sum_{nf} a^-(n, f) \chi_v(n, f, x, t), \quad (12)$$

$$a^+(x, v) = \sum_{nf} a^+(n, f) \chi_v^*(n, f, x, t). \quad (13)$$

Der Hilbertraum  $R^{el}$  soll aus Zustandsvektoren des elektromagnetischen Feldes gebildet werden, die höchstens ein Photon beschreiben können. Wir können dann infolge der Ergebnisse des ersten Kapitels den Vektor des zusammengesetzten Systems von Elektron und Photon in der Form

$$\Psi = (\psi_0(n, f; t), \psi_1(n, f; k, s; t)) \quad (14)$$

als ein Element des Produktraumes  $R^{peV+el}$  bilden. Dabei haben wir die  $\{nf\}$ -Darstellung von  $R^{peV}$  gebraucht. Der Index 0 bedeutet kein Photon, der Index 1 ein Photon, und  $n$  bezeichnet die betreffende Elektronenergie.

## § 2 Die formale Lösung der Wellengleichung

Im folgenden soll die Laplacetransformierte Wellengleichung gelöst werden und die Zustandsvektoren im Schrödinger-Bild durch das Integral der Zurücktransformation formal angegeben werden. Gleichzeitig soll die Bedingung für exakte Lösbarkeit auf Grund der Sätze im Kap. I hergeleitet werden.

Der Zustandsvektor (14) aus dem letzten Abschnitt ist aus Feldfunktionen hergeleitet worden, die zu dem Dirac-Bild gehören. Der Vektor kann aber in gewöhnlicher Weise ins Schrödinger-Bild transformiert werden. Wir betrachten somit in diesem

<sup>6</sup>) Siehe zum Vergleich Q. W., S. 955, (17)/(18), für das kontinuierliche Feld.

Bild die Laplacetransformierte des Vektors in der Form

$$\bar{\Psi}^s = \{\bar{\psi}_0^s(n, f, g), \bar{\psi}_1^s(n, f, k, r, g)\}. \quad (1)$$

Die Laplacetransformierte Wellengleichung wird jetzt auf die übliche Art in der Matrixdarstellung aufgefasst<sup>7)</sup>. Mit Anwendung der Vektorform (1) erhält man dann die folgenden Gleichungen,

$$(g + i\omega_n) \bar{\psi}_0^s(n, f, g) + i \sum_{n', f'} h_i(n, f | n' f') \bar{\psi}_0^s(n', f', g) + i \int \sum_{n', r', f'} h_i(n, f | n', f', k', r') \bar{\psi}_1^s(n', f', k', r', g) d^3k' = \psi_0^s(n, f, 0). \quad (2)$$

$$(g + i(\omega_n + \omega_k)) \bar{\psi}_1^s(n, f, k, r, g) + i \sum_{n', f'} h_i(n, f, k, r | n', f') \bar{\psi}_0^s(n', f', g) + i \int \sum_{n', r', f'} h_i(n, f, k, r | n', f', k', r') \bar{\psi}_1^s(n', f', k', r', g) d^3k' = \psi_1^s(n, f, k, r, 0). \quad (3)$$

Für die Herleitung dieser Gleichungen hat man davon Gebrauch gemacht, dass der Operator der ungestörten Energie,  $H_{0Gr}$ , die Form

$$H_{0Gr} = \int \sum_r \omega_k b^+(k, r) b^-(k, r) d^3k + \sum_{nf} \omega_n a^+(nf) a^-(nf) \quad (4)$$

hat, und dass somit  $\mathcal{H}_0$  diagonal ist. Die Zahl  $\omega_n$  ist die Energie des gebundenen Elektrons, ( $\omega_n = E_n$ ), und  $\omega_k$  ist die Energie des Photons (in unserem Maßsystem gleich  $|k|$ ).

Jetzt wird über das Wesen des Wechselwirkungsoperators vorausgeschickt, dass dieser auf jeden Fall immer die Teilchenzahl ändert. Damit wird für alle  $nf$  und  $n'f'$

$$h_i(n f | n' f') = h_i(n f k r | n' f' k' r') = 0 \quad (5)$$

und aus den Gleichungen (2) und (3) fällt je ein Summand weg. Man darf auch von der Wechselwirkung fordern, dass sie eine Senkung der Elektronenenergie nur bei der Emission eines Photons und die Hebung dieser Energie nur bei der Absorption eines Photons zulässt.

Um die folgenden Rechnungen zu vereinfachen, wird ferner angenommen, dass die Elektronquantenzahlen des Systems, d. h.  $nf$ , nur zwei verschiedene Wertepaare annehmen können, etwa  $n_1 f_1$  und  $n_2 f_2$ <sup>8)</sup>. Die beiden Paare unterscheiden wir mit dem Index  $m$ , der dann nur zwei Werte, 1 und 2, annehmen kann. Die entsprechenden

<sup>7)</sup> Die Absorptionsoperatoren, die man zur Bildung der Matrixelemente braucht, sind  $a^-(nf)$  für das Elektronfeld der diskreten Zustände (Kap. II, § 1) und  $b^-(kr)$  für das elektromagnetische Feld (Q. W., S. 960). Die allgemeine Form der Gleichungen (2) und (3) haben wir im Kap. 1, § 2 (12) angegeben.

<sup>8)</sup> Wenn wir einen Anfangszustand mit einer bestimmten Spinrichtung annehmen, so bleibt diese bei der Lichtemission erhalten, d. h. sie bestimmt einen Teilraum des Hilbertraumes, in dem sich der weitere Prozess abspielt. In so einem Teilraum können wir den Grundzustand als nicht entartet und den angeregten als dreifach entartet betrachten. Die Polarisierung des emittierten Lichtes unterscheidet dann drei getrennte Fälle, von denen jeder der obenstehenden Annahme entspricht.



Energiewerte des ungestörten gebundenen Elektrons sind dann  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , wenn  $\omega_1$  die höhere und  $\omega_2$  die tiefere Energie ist. Wir schreiben somit im folgenden das zweiwertige  $m$  allein statt  $nf$  als Argument in Operatoren und Funktionen.

Wir wenden nun die Anfangsbedingung

$$\psi_0(1,0) = 1, \quad \psi_0(2,0) = \psi_1(1, k, r, 0) = \psi_1(2, k, r, 0) = 0 \quad (6)$$

an. Sie bedeutet, dass zur Zeit  $t = 0$  das Elektron im höheren Energiezustand sei, und dass dann kein Photon anwesend sei. Aus den Gleichungen (2) und (3) werden unter diesen Voraussetzungen die folgenden vier Gleichungen hervorgehen:

$$(g + i \omega_1) \bar{\psi}_0^s(1, g) + i \int \sum_{r'} h_i(1/2, k', r') \bar{\psi}_1^s(2, k', r', g) d^3k' = 1, \quad (7)$$

$$\bar{\psi}_0^s(2, g) = 0, \quad (8)$$

$$\bar{\psi}_1^s(1, k, r, g) = 0, \quad (9)$$

$$(g + i(\omega_2 + \omega_k)) \bar{\psi}_1^s(2, k, r, g) + i h_i(2, k, r/1) \bar{\psi}_0^s(1, g) = 0. \quad (10)$$

Aus (8) und (9) folgen die Lösungen

$$\psi_0^s(2, t) = 0, \quad (11)$$

$$\psi_1^s(1, k, r, t) = 0. \quad (12)$$

Wir führen jetzt die Funktion

$$\Gamma_\omega(g) = \int \sum_{r'} \frac{|h_i(1/2, k', r')|^2}{g + i(\omega + \omega_{k'})} d^3k' \quad (13)$$

ein, setzen (10) in (7) ein und bekommen für die Laplacetransformierten der übrigen zwei Wahrscheinlichkeitsamplituden durch die Anwendung der Definition (13) die Ausdrücke

$$\bar{\psi}_0^s(1, g) = \frac{1}{g + i \omega_1 + \Gamma_{\omega_2}(g)}, \quad (14)$$

$$\bar{\psi}_1^s(2, k, r, g) = \frac{-i h_i(2, k, r/1)}{(g + i(\omega_2 + \omega_k)) (g + i \omega_1 + \Gamma_{\omega_2}(g))}. \quad (15)$$

Wenn man annehmen darf, dass das Integral  $\Gamma_{\omega_2}(g)$  absolut konvergiert, bilden die Ausdrücke (8)/(9) und (14)/(15) die richtige und bei den gegebenen Voraussetzungen die einzige Lösung der Laplacetransformierten der Wellengleichung. Wir nehmen jetzt an, dass der Realteil von  $g$  positiv sei, d. h.  $\xi > 0$ , und schätzen den absoluten Betrag der Funktion (13) für ein beliebiges, reelles  $\omega$  ab:

$$\begin{aligned} |\Gamma_\omega(g)| &= \left| \int \sum_{r'} \frac{|h_i(1/2, k', r')|^2}{g + i(\omega + \omega_{k'})} d^3k' \right| < \int \sum_{r'} \frac{|h_i(1/2, k', r')|^2}{|g + i(\omega + \omega_{k'})|} d^3k' \\ &\leq \frac{1}{\xi} \int \sum_{r'} |h_i(1/2, k', r')|^2 d^3k'. \end{aligned} \quad (16)$$



Wir beweisen dann den Hauptsatz

(B) Das vorliegende physikalische Problem hat bei den Voraussetzungen, die in diesem Kapitel über die Form des Zustandsvektors und über die Beschaffenheit der Wechselwirkung gegeben wurden, dann und nur dann eine Lösung in der Form der Zurücktransformation, wenn das Integral

$$\int \sum_{r'} |h_i(1/2, k', r')|^2 d^3k' \quad (17)$$

endlich ist.

Wegen der Abschätzung (16) muss  $\Gamma_\omega(g)$  absolut konvergieren, wenn das Integral (17) endlich ist. Damit sind die Ausdrücke (14)/(15) sicher die Lösung der Laplace-transformierten Wellengleichung. Die Konvergenz von (17) ist aber auch die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Anfangsvektor  $\Psi(0)$ , der durch (6) gegeben wird, zum Definitionsgebiet des  $H$ -Operators gehöre. Wenn dies erfüllt ist, gibt es nach dem Satz (V) im Kap. I, § 1 eine und nur eine Lösung der Wellengleichung, die den Anfangswert  $\Psi(0)$  hat, deren Laplacetransformierte durch (14)/(15) gegeben wird, und die durch die Zurücktransformation ausgewertet werden kann. Infolge des Satzes VI) im Kap. I, § 2 dürfen wir auch andere Anfangszustände als (6) anwenden, sofern sie aus  $D(H_0)$  stammen. Damit wird der Hauptsatz (B) auf (A) zurückgeführt.

Die zurücktransformierten Wahrscheinlichkeitsamplituden bekommen die folgende Form

$$\left. \begin{aligned} \psi_0^s(1, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} e^{gt} \frac{1}{g+i\omega_1+\Gamma_{\omega_2}(g)} dg, & (18) \\ \psi_1^s(2, k, r, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} e^{gt} \frac{(-i) h_i^*(1/2, k, r)}{(g+i(\omega_2+\omega_k)) (g+i\omega_1+\Gamma_{\omega_2}(g))} dg. & (19) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Schrödinger-} \\ \text{Bild} \end{array}$$

Die zwei übrigen Wahrscheinlichkeitsamplituden des Schrödinger-Bildes verschwinden nach (11) und (12).

Durch die Anwendung der Beziehung (11) in Kap. I, § 2 erhalten wir im Dirac-Bild die entsprechenden Lösungen zu (18) und (19) in der Form

$$\left. \begin{aligned} \psi_0^D(1, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} e^{gt} \frac{1}{g+\Gamma_{-(\omega_1-\omega_2)}(g)} dg, & (20) \\ \psi_1^D(2, k, r, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} e^{gt} \frac{(-i) h_i^*(1/2, k, r)}{g (g+i(\omega_1-\omega_2-\omega_k)+\Gamma_{-\omega_k}(g))} dg. & (21) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Dirac-Bild} \end{array}$$

In den Lösungen (18)/(19) und (20)/(21) integrieren wir längs einer zur imaginären Achse parallelen Linie in der rechten Halbebene der komplexen  $g$ -Ebene. Die Nenner der Integranden können nicht verschwinden, da der Realteil der Funktion  $\Gamma_\omega(g)$  positiv für ein reelles  $\omega$  und ein positives  $\xi$  ist.

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass die obenstehende Forderung über die Konvergenz des Integrals (17) von demjenigen Wechselwirkungsoperator erfüllt ist, den man der üblichen nichtrelativistischen Darstellung der Quantentheorie entneh-

men kann. Die Anwendung eines relativistischen Wechselwirkungsoperators, der im Kap. III formuliert wird, zeigt, dass in dieser Beziehung die gleiche Forderung erfüllt wird. Damit können wir allgemein sagen, dass die formale Lösung mit Rücksicht auf die bekannte Formulierung der Quantentheorie die exakte Lösung ist.

### § 3 Die Anwendung einer nichtrelativistischen Wechselwirkung

Wenn wir auf Grund der formalen Lösung der Wellengleichung, (18)/(19) oder (20)/(21) im letzten Abschnitt, exakte Lösungen auswerten wollen, muss der Wechselwirkungsoperator in der Abhängigkeit von den Grundoperatoren bekannt sein. In diesem Abschnitt wird dafür ein nichtrelativistischer Operator gewählt.

Für die Potentiale des Strahlungsfeldes wird die Coulomb-Eichung verlangt, d. h.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \phi = 0. \quad (1)$$

Von dem Strahlungsfeld hat man hier das skalare Kernfeld,  $V$ , ausgeschlossen, weil dies zur Energiedarstellung des  $H_0$ -Operators beiträgt. Man setzt nun die folgende Funktion  $W$  als denjenigen Teil der Hamiltonfunktion an, der für die Wechselwirkung zwischen dem Strahlungsfeld und einem Fermion mit der Ladung  $e$  verantwortlich ist<sup>9)</sup>.

$$W = -\frac{e}{\mu} (\mathbf{p}, \mathbf{A}) + \frac{e^2}{2\mu} A^2. \quad (2)$$

Von dieser Funktion kann man sofort zu einem Operator,  $W_{Op}(x)$ , übergehen, der auf die Wellenfunktion des Elektrons in der  $\{x\}$ -Darstellung wirkt. Der kanonische Impuls  $\mathbf{p}$  wird durch

$$\left( -i \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad -i \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad -i \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

und das vektorielle Potential  $\mathbf{A}$  durch das folgende Integral ersetzt

$$\mathbf{A}_{Gr} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{r'} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \{ b^-(k', r') \mathbf{A}(k', r') + b^+(k', r') \mathbf{A}^*(k', r') \} d^3k'. \quad (3)$$

Hier ist die Bedeutung der  $\mathbf{A}$ 's wie folgt<sup>10)</sup>:

$$\mathbf{A}(k, r) = \mathbf{C}(r) e^{i(kx - \omega_k t)}. \quad (4)$$

Wegen der Coulomb-Eichung wird der Index der Polarisierung,  $r'$ , nur die Werte 1 und 2 annehmen. Der zweite Summand des Ausdrucks (2) ist quadratisch in der Kopplung. Er ist somit sehr unwesentlich verglichen mit dem ersten Summanden und wird deshalb weggelassen. Der Operator  $W_{Op}(x)$  soll auf Wellenfunktionen im Schrödinger-Bild wirken. Es wird angenommen, dass der Operator  $\mathbf{A}_{Gr}$ , wie er in der Darstellung (3) und (4) gegeben wird, im Dirac-Bild sei. Diesen Operator erhält man dann im Schrödinger-Bild, wenn  $t = 0$  gesetzt wird. Man führt die Bezeichnung

$$\mathbf{A}_{Gr}^s = \mathbf{A}_{Gr} (t = 0) \quad (5)$$

<sup>9)</sup> Für das Elektron ist also  $e$  negativ. Wir halten uns hier an die in der Literatur übliche Vorzeichenwahl.

<sup>10)</sup> Für die Erklärung der Vektoren  $\mathbf{C}(r)$  sei auf Q. W., S. 961 hingewiesen.

ein und bekommt infolgedessen den Operator  $W_{Op}(x)$  in der Form

$$W_{Op}(x) = i \frac{e}{\mu} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} A_{Gr i}^s . \quad (6)$$

Wegen der Coulomb-Eichung nach (1) ist es klar, dass die folgende Vertauschungsrelation gilt,

$$\sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} A_{Gr i}^s \right] = 0 . \quad (7)$$

Nun braucht man einen Wechselwirkungsoperator, der auf Zustandsvektoren in der Impulsdarstellung wirken kann. Dazu werden die abgeleiteten Spinorfunktionen  $\chi_v(m, x, t)$  benutzt, die als Lösungen der Dirac-Gleichung des Elektrons im Kernfeld hergeleitet wurden, und die Wahrscheinlichkeitsamplituden und Grundoperatoren in der  $\{x\}$ -Darstellung und in der  $\{n f\}$ -Darstellung verknüpfen. Man führt nun in Übereinstimmung mit (5) die Bezeichnung

$$\chi_v^s(m, x) = \chi_v(m, x, t = 0) \quad (8)$$

ein und erhält mit der selben Begründung wie oben die Grundoperatoren für das Schrödinger-Bild durch die Beziehungen

$$a_v(x) = \sum_m a^-(m) \chi_v^s(m, x) , \quad (9)$$

$$a_v^+(x) = \sum_m a^+(m) \chi_v^{s*}(m, x) . \quad (10)$$

Nach der Definition der abgeleiteten Spinorfunktion ist es klar, dass ihre Norm bei einer endlichen Anzahl diskreter Zustände, etwa  $n$ , auch endlich ist, d. h.

$$N \chi_v^s = \int \sum_{m,v} \chi_v^{s*}(m, x) \chi_v^s(m, x) d^3x = n . \quad (11)$$

Der Wechselwirkungsoperator  $H_{iGr}$  wird jetzt in der Form

$$H_{iGr} = \int \sum_v a_v^+(x) W_{Op}(x) a_v(x) d^3x \quad (12)$$

eingeführt, und kann somit wegen (9) und (10) als

$$H_{iGr} = \sum_{m' m v} \int \chi_v^{s*}(m', x) W_{Op}(x) \chi_v^s(m, x) d^3x a^+(m') a^-(m) \quad (13)$$

geschrieben werden. Nun wird der Ausdruck (6) für den Operator  $W_{Op}(x)$  in die Form (13) unter der Berücksichtigung von (7) eingeführt, und man bekommt den Wechselwirkungsoperator  $H_{iGr}$  in der folgenden endgültigen Form:

$$H_{iGr} = \int \sum_{m' m r} \frac{d^3k}{\sqrt{2} \omega_k} \{ f(m', m, k, r) a^+(m') b^-(k, r) a^-(m) \\ + f(m', m, -k, r) a^+(m') b^+(k, r) a^-(m) \} . \quad (14)$$

Die Funktion  $f(m', m, k, r)$  ist hier durch die Definition

$$f(m', m, k, r) = (2\pi)^{-3/2} \frac{ie}{\mu} \int \sum_{j\nu} C_j(r) e^{ikx} \chi_{\nu}^{s*}(m' x) \frac{\partial}{\partial x_j} \chi_{\nu}^s(m, x) d^3x \quad (15)$$

eingeführt worden. Wir wollen jetzt diese Funktion als die Kopplung der Wechselwirkung bezeichnen. Wenn sie nach (15) berechnet wird, bekommen wir infolge der Definition von  $\chi_{\nu}^s(m, x)$

$$f(m', m, k, r) = (2\pi)^{-3/2} \frac{-e}{\mu} \int \sum_{s,\varepsilon} (C(r), \mathbf{p}) u_{(m')}^*(\mathbf{p} + \mathbf{k}, s, \varepsilon) u_{(m)}(\mathbf{p}, s, \varepsilon) d^3p. \quad (16)$$

Der unter dem Integral (16) stehende Ausdruck sowie der für  $f(m', m, -k, r)$  entsprechende Ausdruck können auf die übliche Weise durch den Impulsverlauf dargestellt werden:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \nearrow k \\ \nearrow p \end{array} & \xrightarrow{p'} & \text{bzw.} \xrightarrow{p} \begin{array}{c} \nearrow k \\ \nearrow p' \end{array} \end{array} \quad (17)$$

Die Impulserhaltung, die in dem Integranden von (16) offensichtlich wird, bedeutet nicht, dass die Energie für die gesamte Zustandsänderung  $mk \rightarrow m'$  oder  $m \rightarrow m'k$  erhalten bleibt. Man sieht jedoch sofort aus der Bedeutung der Funktionen  $u_{(m)}(\mathbf{p}, s, \varepsilon)$ , dass ohne die Änderung des Elektronenzustandes kein Photon emittiert oder absorbiert werden kann, weil dann das Integral in (16) verschwindet, d. h.

$$\int \sum_m p_{x_i} u_{(m)}^*(\mathbf{p} \pm \mathbf{k}, s, \varepsilon) u_{(m)}(\mathbf{p}, s, \varepsilon) d^3p = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (18)$$

Die weitere Diskussion der Kopplung nach (16) lassen wir weg und stellen folgendes fest: Wie im letzten Abschnitt erklärt wurde, nehmen wir nur zwei mögliche Quantenzahlenpaare des Elektrons an, die wir mit der Zahl  $m$  unterscheiden ( $m = 1$  oder  $2$ ). Wenn die entsprechenden Energieniveaus so numeriert sind, dass  $\omega(m = 1) > \omega(m = 2)$  ist, geben die Auswahlregeln folgendes über die Kopplung bekannt:

$$\begin{aligned} f(m', m, k, r) &= 0 \quad \text{für} \quad m' \leq m, \\ f(m', m, -k, r) &= 0 \quad \text{für} \quad m' \geq m. \end{aligned} \quad (19)$$

Die Auswertung der Matricelemente  $h_i$  folgt aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} h_i(1/2, k, r) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} f(1, 2, k, r), \\ h_i(2, k, r/1) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} f(2, 1, -k, r). \end{aligned} \quad (20)$$

Wir wollen nun erfahren, ob die Bedingung für die Lösbarkeit unserer Aufgabe nach dem Hauptsatz (B) mit der Anwendung des vorliegenden Wechselwirkungsoperators erfüllt sei, d. h. ob das Integral

$$\int \sum_r |h_i(1/2, k, r)|^2 d^3k = \int \sum_r \frac{d^3k}{2\omega_k} |f(1, 2, k, r)|^2 \quad (21)$$

konvergiert. Wenn das der Fall ist, darf man mit Sicherheit behaupten, dass die Auswertung der Wahrscheinlichkeitsamplituden nach der formalen Lösung mit der Anwendung dieses Operators durchgeführt werden dürfe. Das Integral (21) können wir in der Form

$$\int \sum_r \frac{d^3 k}{\omega_k} \left| \int e^{i k x} \varphi(x) d^3 x \right|^2 \quad (22)$$

schreiben, wenn wir die Abkürzung

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \frac{i e}{\sqrt{2}\mu} \sum_{j,v} C_j(r) \chi_v^{s*}(1, x) \frac{\partial}{\partial x_j} \chi_v^s(2, x) \quad (23)$$

anwenden. Wegen der Beziehung (11) können wir annehmen, dass die Spinorfunktionen  $\chi_v^s(m, x)$  und ihre Ableitungen ausserhalb eines grossen Volumens klein sind und exponentiell gegen Null streben. Das Quadrat des absoluten Betrags der obenstehenden Funktion  $\varphi(x)$  über den ganzen Raum integriert ist daher endlich. Wir wollen dies Quadratintegral  $C$  nennen. Jetzt spalten wir das Integral (22) in ein Teilintegral über eine grosse Kugel,  $|k| \leq K$ , und ein Integral über das Äussere,  $|k| > K$ , auf. Für das erste Teilintegral bekommen wir die Abschätzung

$$\int \sum_r \frac{d^3 k}{\omega_k} \left| \int e^{i k x} \varphi(x) d^3 x \right|^2 \leq \int \sum_r \frac{d^3 k}{\omega_k} \int |\varphi(x)|^2 d^3 x = 2\pi K^2 C. \quad (24)$$

Das Integral ist somit für ein endliches  $K$  beschränkt. Für das Aussengebiet wenden wir die folgende Abschätzung an:

$$\int \sum_r \frac{d^3 k}{\omega_k} \left| \int e^{i k x} \varphi(x) d^3 x \right|^2 < \frac{1}{K} \int \sum_r d^3 k \left| \int e^{i k x} \varphi(x) d^3 x \right|^2. \quad (25)$$

Die inneren Integrale haben die Form

$$\hat{\varphi}(k) = \int e^{i k x} \varphi(x) d^3 x, \quad (26)$$

wobei  $\varphi(x)$ , wie oben gesagt, eine Funktion mit endlichem Quadratintegral ist. Das Quadratintegral der Fouriertransformierten  $\hat{\varphi}(k)$  ist also auch endlich. Deshalb ist

$$\frac{1}{K} \int \sum_r \left| \hat{\varphi}(k) \right|^2 d^3 k < \frac{8\pi^3 C}{K} < \varepsilon, \quad (27)$$

womit die Konvergenz des ganzen Integrals (22) gesichert ist.

Die endliche Norm (11) hat noch eine andere wichtige Konsequenz. Die Matrixelemente des Wechselwirkungsoperators,  $h_i$ , müssen bekanntlich selbstadjungiert sein. Man kann nun allgemein beweisen, dass die folgende Beziehung für die Kopplung gilt,

$$f(m', m, k, r) = f^*(m, m', -k, r), \quad (28)$$

woraus die Selbstadjungiertheit infolge (20) sofort geschlossen werden kann. Der Beweis erfolgt in bekannter Weise durch Integration, wobei zu berücksichtigen ist, dass die Spinorfunktionen im Unendlichen verschwinden.

## § 4 Die Auswertung der formalen Lösung

In der formalen Lösung der Wellengleichung spielt die Funktion  $\Gamma_\omega(g)$  eine wichtige Rolle. Das Verschwinden dieser Funktion führt zu einer stationären Lösung der Wellengleichung. Die Funktion bestimmt also den zeitlichen Verlauf des vorliegenden physikalischen Prozesses. Im Schrödinger-Bild müssen wir für den unteren Index der  $\Gamma$ -Funktion nur  $\omega = \omega_2$  berücksichtigen. Um die Formeln zu vereinfachen, führen wir die neue komplexe Variable

$$z = g + i \omega_2 \quad (1)$$

ein. Indem wir die Darstellung des Wechselwirkungsoperators vom letzten Abschnitt anwenden, schreiben wir die  $\Gamma$ -Funktion in der neuen Variablen wie folgt:

$$\Gamma_0(z) = \Gamma_{\omega_2}(g) = \int \sum_r \frac{d^3 k}{2 \omega_k} \frac{|f(1, 2, k, r)|^2}{z + i \omega_k}. \quad (2)$$

Die formale Lösung im Schrödinger-Bild ist dann

$$\psi_0^s(1, t) = \frac{e^{-i \omega_2 t}}{2 \pi i} \int_{\xi - i \infty}^{\xi + i \infty} e^{z t} \frac{1}{z + i (\omega_1 - \omega_2) + \Gamma_0(z)} dz, \quad (3)$$

$$\psi_1^s(2, k, r, t) = \frac{e^{-i \omega_2 t}}{2 \pi i} \int_{\xi - i \infty}^{\xi + i \infty} e^{z t} \frac{(-i) h_i^*(1/2, k, r)}{(z + i \omega_k) (z + i (\omega_1 - \omega_2) + \Gamma_0(z))} dz. \quad (4)$$

Nun zeigen wir, dass das Integral (2) für alle  $z$ , die nicht auf der negativen imaginären Achse liegen, konvergiert und eine analytische Funktion von  $z$  darstellt. Es sei  $z$  ein Punkt und  $A > 0$  der Abstand von  $z$  zur negativen imaginären Achse, wenn  $z$  in der unteren Halbebene liegt, sonst sei  $A$  der Abstand des Punktes vom Nullpunkt. Dann ist

$$\left| \frac{1}{z + i \omega_k} \right| \leq \frac{1}{A}, \quad (5)$$

also ist der absolute Betrag von (2) kleiner als das Integral

$$\frac{1}{A} \int \sum_r \frac{d^3 k}{2 \omega_k} |f(1, 2, k, r)|^2, \quad (6)$$

dessen Konvergenz im letzten Abschnitt schon bewiesen wurde. Das Integral (2) konvergiert gleichmäßig in jedem Gebiet  $A > \varepsilon$  und stellt somit eine analytische Funktion von  $z$  dar.

Nun betrachten wir das Verhalten der Funktion  $\Gamma_0(z)$ , wenn wir uns der negativen imaginären Achse nähern. Wir schreiben  $z = \xi + i \eta$ . Für  $\xi = 0$  divergiert das Integral (2), wenn  $\eta < 0$ . Wir können aber immer noch den Hauptwert des Integrals bilden. Wir erhalten nach kurzen Auswertungen, dass

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow +0 \\ \eta < 0}} \Gamma_0(\xi + i \eta) = - \left\{ \lim_{\substack{\xi \rightarrow -0 \\ \eta < 0}} \Gamma_0(\xi + i \eta) \right\}^* \quad (7)$$



ist, und dass der erste dieser Grenzwerte gleich der Summe

$$-i P \int \sum_r \frac{|h_i(1/2, k, r)|^2}{\eta + \omega_k} d^3k + \pi \int \sum_r |h_i(1/2, k, r)|^2 \omega_k^2 \Big|_{\omega_k = -\eta} d\Omega \quad (8)$$

ist. Mit dem ersten dieser Integrale wird folgendes gemeint:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ K \rightarrow \infty}} \left\{ \int_0^{-\eta - |\varepsilon|} d\omega_k \frac{\omega_k}{2(\eta + \omega_k)} \int \sum |f|^2 d\Omega + \int_{-\eta + |\varepsilon|}^K d\omega_k \dots \right\}. \quad (9)$$

Die Existenz des Hauptwertes (9) kann bewiesen werden, wenn wir die Abhängigkeit der Kopplung  $f(1, 2, k, r)$  von dem Faktor  $e^{ikx}$  berücksichtigen, wie im letzten Abschnitt, getan wurde.

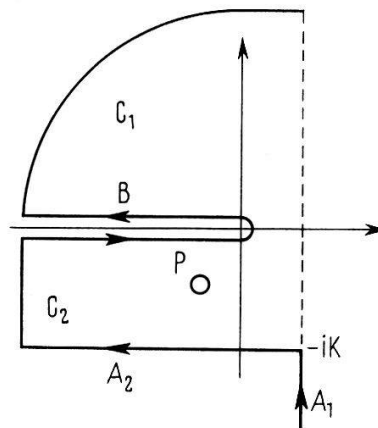
Die Funktion  $\Gamma_0(z)$  hat, wie wir jetzt gesehen haben, einen Schnitt auf der negativen imaginären Achse und einen Verzweigungspunkt im Nullpunkt. Der Sprung der Funktion in die positive Umlaufrichtung an dem Schnitt ist infolge (7) und (8)

$$S(\eta) = 2 \operatorname{Re} \lim_{\substack{\xi \rightarrow +0 \\ \eta < 0}} \Gamma_0(\xi + i\eta) = \pi \int \sum_r |f(1, 2, k, r)|^2 \omega_k \Big|_{\omega_k = -\eta} d\Omega. \quad (10)$$

Es gibt nun zwei Methoden zur Auswertung der Integrale (3) und (4):

1) Man lässt  $\xi \rightarrow 0$  gehen und erhält das Fourier-Integral von HEITLER und MA [11], das in der ersten Näherung die Formel von WIGNER und WEISSKOPF [9] ergibt.

2) Man setzt die  $\Gamma$ -Funktion, definiert durch die Formel (2), über die negative imaginäre Achse mit Hilfe der Sprungfunktion (10) in die linke Halbebene analytisch fort. Damit kann man den Schnitt vom Nullpunkt nach links auf der negativen reellen Achse ziehen. Nun verlegt man den Integrationsweg so weit wie möglich in die linke Halbebene. In ihrer Dissertation hat MARIANNE FRIEDRICH [16] gezeigt,



wie die  $\Gamma$ -Funktion durch die Addition einer Sprungfunktion, definiert für Frequenzen bis zu einer festen oberen Grenze, analytisch fortgesetzt werden kann. (In unserer Arbeit entspricht das für die Funktion  $S(\eta)$ , dass  $\omega_k = -\eta < K$  sein soll.) Sie hat dann nachgewiesen, dass die Lösung als die Summe von 3 Bestandteilen betrachtet werden kann:  $P$  = Residuum eines Poles,  $A_1, A_2$  = Integral über grosse Frequenzen,  $B$  = Integral um die negative reelle Achse (siehe Bild). Die Integrale über  $C_1$  und  $C_2$  geben im Unendlichen keinen Beitrag.

Wir wollen nun zuletzt in Anschluss an die Beziehung (8) das Residuum um den Pol,  $P$ , angeben. Wir führen zuerst die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\omega_0 = \omega_1 - \omega_2, \quad (11)$$

$$\frac{\gamma}{2} = \pi \int \sum_r |h_i(1/2, k, r)|^2 \omega_k^2 \Big|_{\omega_k = \omega_0} d\Omega, \quad (12)$$

$$\Delta\omega_0 = P \int \sum_r \frac{|h_i(1/2, k, r)|^2}{\omega_k - \omega_0} d^3k. \quad (13)$$

Dann stellen wir fest, dass  $\xi_0 = -\gamma/2$ , und  $\eta_0 = -(\omega_0 - \Delta\omega_0)$  die Koordinaten des gesuchten Poles sind. Wenn wir die Lösung der Integrale (3) und (4) in der ersten Näherung gleich dem Residuum um den Pol,  $P$ , setzen, erhalten wir die bekannten Ausdrücke von Wigner und Weisskopf:

$$\psi_0^s(1, t) = e^{-i(\omega_1 - \Delta\omega_0)t} e^{-(\gamma/2)t}, \quad (14)$$

$$\psi_1^s(2, k, r, t) = \frac{h_i^*(1/2, k, r)}{\omega_k - (\omega_0 - \Delta\omega_0) + i(\gamma/2)} \{e^{-i(\omega_2 + \omega_k)t} - e^{-i(\omega_1 - \Delta\omega_0)t} e^{-(\gamma/2)t}\}. \quad (15)$$

Für die Intensitätsverteilung der emittierten Strahlung bekommen wir die Formel (1) Seite 246 bis auf die Änderung, dass das Maximum der Intensität um  $\Delta\omega_0$  verschoben wird («line shift»).

### KAPITEL III

#### Der Übergang zu einer vollständigen relativistisch invarianten Theorie

##### § 1 Die Quantisierung und die Formulierung des Wechselwirkungsoperators

Wir betrachten wieder die Wechselwirkung zwischen Elektronen und dem elektromagnetischen Feld. Für die Potentiale des Strahlungsfeldes rechnen wir mit der halbdefiniten Metrik, die durch die Lorentz-Eichung

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0 \quad (1)$$

bestimmt wird<sup>11)</sup>. Das skalare Feld  $\phi$  enthält nicht das Kernfeld  $V$ , das ein Bestandteil der ungestörten Energie ist. Wir setzen die folgende Funktion,  $W(x)$ , als denjenigen Teil der Hamiltonfunktion an, der für die Wechselwirkung verantwortlich ist.

$$W(x) = e \{ \phi - (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A}) \}. \quad (2)$$

Die  $\alpha_i$ 's ( $i = 1, 2, 3$ ) sind numerisch gegebene vierreihige Matrices. Wenn wir mit der Darstellung der Dirac-Gleichung rechnen, wie sie im Kap. II, § 1, (2) aufgestellt wurde, ist für jedes  $i$

$$\alpha_i = \beta_1 \sigma_i. \quad (3)$$

Wir betrachten das skalare Potential mit der imaginären Einheit multipliziert als die vierte Komponente des Potentialvektors  $A_\nu$ ,

$$A_4 = i \phi. \quad (4)$$

<sup>11)</sup> Q. W., Seite 956–957.

Der Übergang zum Operator  $W_{Op}(x)$  geschieht indem man das Viererpotential quantisiert.

$$A_{Gr_\nu} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{r'} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \{b^-(k', r') A_\nu(k', r') + b^+(k', r') A_\nu^*(k', r')\} d^3k'. \quad (5)$$

Hier bedeutet  $A_\nu(k, r)$  auch einen Vierervektor für  $\nu = 1, \dots, 4$ :

$$A_\nu(k, r) = C_\nu(r) e^{i(kx - \omega_k t)}. \quad (6)$$

Wir schreiben dann den gewünschten Operator,  $W_{Op}(x)$ , in der Form

$$W_{Op}(x) = -e \left\{ i A_{Gr_4} + \sum_{i=1}^3 \alpha_i A_{Gr_i} \right\}. \quad (7)$$

Wir wollen jetzt zur zweiten Quantisierung übergehen, d. h. zur Quantisierung des Fermionfeldes. Durch die Anwendung dieses quantisierten Feldes und des Operators  $W_{Op}(x)$  bekommen wir dann den Wechselwirkungsoperator  $H_i$  durch die Grundoperatoren in der Impulsdarstellung ausgedrückt. Wie in der nichtrelativistischen Untersuchung machen wir hier die Annahme, dass der Operator  $W_{Op}(x)$  im Schrödinger-Bild für  $t = 0$  zu suchen sei. Wir führen somit die Bezeichnung

$$A_{Gr_\nu}^s = A_{Gr_\nu}(t = 0) \quad (8)$$

ein und wenden den Operator in der folgenden Form an:

$$W_{Op}(x) = -e \left\{ i A_{Gr_4}^s + \sum_{i=1}^3 \alpha_i A_{Gr_i}^s \right\}. \quad (9)$$

Wenn man mit der Funktion  $W(x)$  oder dem Operator  $W_{Op}(x)$  rechnet, muss natürlich beachtet werden, dass beides vierreihige Matrices sind. Man schreibt die Matrixelemente von  $W$  mit kleinen Buchstaben.

$$W(x) = \{w(x)_{\mu\nu}\}, \quad (10)$$

$$W_{Op}(x) = \{w_{Op}(x)_{\mu\nu}\}. \quad (11)$$

Den Operator (9) kann man noch einfacher schreiben, wenn ein Tensor dritter Stufe  $O_{\mu\nu\lambda}$  eingeführt wird.

$$\begin{aligned} O_{\mu\nu i} &= -(\alpha_{\mu\nu})_i \quad (i = 1, 2, 3), \\ O_{\mu\nu 4} &= -i \delta_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (12)$$

Dann kann man statt (9) folgendes schreiben:

$$w_{Op}(x)_{\mu\nu} = e \sum_{\lambda=1}^4 O_{\mu\nu\lambda} A_{Gr_\lambda}^s. \quad (13)$$

Wie in der nichtrelativistischen Formulierung machen wir jetzt Gebrauch von den abgeleiteten Spinorfunktionen  $\chi_\nu^s(m, x)$ , indem wir die Grundoperatoren in der  $\{x\}$ -

Darstellung,  $a_v(x)$  und  $a_v^+(x)$ , anwenden. Dann erhalten wir für den Wechselwirkungsoperator  $H_{iGr}$

$$\begin{aligned} H_{iGr} &= \int \sum_{\mu, \nu} a_{\mu}^+(x) w_{Op}(x)_{\mu \nu} a_{\nu}(x) d^3x \\ &= \int \sum_{\mu \nu m m'} \chi_{\mu}^{s*}(m', x) w_{Op}(x)_{\mu \nu} \chi_{\nu}^s(m, x) d^3x a^+(m') a^-(m). \end{aligned} \quad (14)$$

Diesen Ausdruck kann man auch folgendermassen schreiben

$$\begin{aligned} H_{iGr} &= \int \sum_{n n' r} \frac{d^3k}{\sqrt{2 \omega_k}} \\ &\times \{f(m', m, k, r) a^+(m') b^-(k, r) a^-(m) + f(m', m, -k, r) a^+(m') b^+(k, r) a^-(m)\}, \end{aligned} \quad (15)$$

wenn die Funktion  $f(n', n, k, r)$  wie folgt definiert wird:

$$f(m', m, k, r) = \frac{e}{(2 \pi)^{3/2}} \int \sum_{\lambda, \mu, \nu} C_{\lambda}(r) e^{i k x} \chi_{\mu}^{s*}(m', x) O_{\mu \nu \lambda} \chi_{\nu}^s(m, x) d^3x. \quad (16)$$

Man nimmt nun an, dass das Elektron nur zwei Energiewerte annehmen kann. Die Auswertung der Wahrscheinlichkeitsamplituden, die zum Thema der natürlichen Linienbreite gehören, wird dann nach der formalen Lösung durchgeführt, die im letzten Kapitel hergeleitet wurde. Ihre Auswertung ist nach Hauptsatz (B) erlaubt, wenn das Integral

$$\int \sum_r |h_i(1/2, k, r)|^2 d^3k \quad (17)$$

konvergiert. Die Elemente der Wechselwirkungsmatrix sind jetzt formell auf die gleiche Art von der Kopplung abhängig wie vorhin,

$$h_i(1/2, k, r) = \frac{1}{\sqrt{2 \omega_k}} f(1, 2, k, r), \quad h_i(2, k, r/1) = \frac{1}{\sqrt{2 \omega_k}} f(2, 1, -k, r) \quad (18)$$

und das Integral (17) wird wie folgt:

$$\frac{1}{(2 \pi)^3} e^2 \int \sum_r \frac{d^3k}{2 \omega_k} \left| \int \sum_{\lambda, \mu, \nu} C_{\lambda}(r) e^{i k x} \chi_{\mu}^{s*}(m', x) O_{\mu \nu \lambda} \chi_{\nu}^s(m, x) d^3x \right|^2. \quad (19)$$

Da die Spinorfunktionen  $\chi_{\nu}^s(m, x)$  endlich normiert sind, wird dies Integral sicher konvergieren, und zwar aus den gleichen Gründen, die schon im Kap. II, § 3, erklärt wurden. Die Form der Lösung ist genau die gleiche, die vorhin berechnet wurde. Für eine numerische Berechnung der Linienbreite oder der Linienverschiebung muss man aber die neue Form der Kopplung, (16), berücksichtigen.

## § 2 Vollständige Zustandsvektoren

Wenn die Anzahl Teilchen für die Vektoren des elektromagnetischen und des Elektron-Positron-Feldes nicht eingeschränkt wird, erhalten wir Zustandsvektoren des zusammengesetzten Feldes, dessen Funktionen die Form

$$\psi(n, f; (p, s, \epsilon)_{n_{ep}}, (k, r)_{n_r})$$

haben. Die Anzahl Elektron-Positronen schreiben wir  $n_{ep}$  und diejenige der Photonen  $n_\gamma$ . Der entsprechende Energieoperator wird auf der Grundlage des letzten Abschnittes formuliert. Wir können unsere Annahme über die zwei möglichen Zustände des gebundenen Elektrons behalten. Die Laplace-transformierte Wellengleichung hat dann zunächst zwei Typen von Gleichungen zur Folge, die bis auf ein Korrekturglied mit den Gleichungen (2) und (3) im Kap. II, § 2 identisch sind. Dann folgen aber unbeschränkt viele Gleichungen zur Bestimmung dieses Gliedes (Störungsrechnung). Wenn die Bedingung unseres Hauptsatzes (A) erfüllt ist, muss es eine mathematisch einwandfreie Auswertung nach diesem Schema geben.

### Anhang

E. HILLE und K. YOSIDA [8] haben die analytische Theorie von Halbgruppen beschränkter, linearer Operatoren über einen Banachschen Raum,  $B$ , untersucht. Für die allgemeinsten Operatoren dieser Art, die den Bedingungen

$$T(t+s) = T(t) T(s), \quad T(0) = I$$

genügen, haben sie die infinitesimale Erzeugende  $A$  des Operators  $T(s)$  durch die Beziehung

$$A x = \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} (T(s) - I) x; \quad x \in B$$

definiert. Sie beweisen, dass das Definitionsgebiet  $D(A)$  in einem lokal konvexen, linearen, topologischen Raum  $X$  dicht liegt. (\*) Die Laplacetransformation

$$C_n x = \int_0^\infty n e^{-ns} T(s) x ds; \quad x \in X, \quad n \text{ reell} > 0,$$

führt zur Gleichung

$$A C_n x = n (C_n - I) x; \quad x \in X, \quad (1)$$

aus welcher die Aussage

$$R(C_n) \subseteq D(A) \quad (2)$$

folgt, wenn  $R(C_n)$  den Raum aller Elemente  $C_n x$  darstellt. Die obenstehende Behauptung (\*) folgt aus (2) sowie aus der Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow 0} C_n x = x; \quad x \in X.$$

Nun wird bewiesen, dass der Operator  $nI - A$  für  $n > 0$  eine Inverse  $R(n; A) = (nI - A)^{-1}$  besitzt; diese hat die Form

$$R(n; A) x = n^{-1} C_n x \quad \text{für} \quad x \in X. \quad (3)$$

Den Operator  $D_t$  definiert man durch die Beziehung

$$D_t T(t) x = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} (T(t+h) - T(t)) x \quad \text{für} \quad x \in X,$$

wenn die linke Seite existiert. Es kann nun bewiesen werden, dass die Gleichung

$$D_t T(t) x = A T(t) x; \quad t \geq 0, \quad (4)$$

für  $x \in D(D_t T(t))$  und  $x \in D(A)$  gelten kann.

In den Aussagen (1), (2), (3), (4) und (\*) ist ein Teil der Sätze des ersten Kapitels enthalten. Auf der Grundlage der Theorie von Hille und Yosida können die restlichen Sätze des ersten Abschnittes hergeleitet werden.

### Literatur

- [1] B. L. VAN DER WAERDEN, *Zur Quantentheorie der Wellenfelder*, Helv. phys. Acta 36, 7 (1963).
- [2] V. FOCK, *Konfigurationsraum und zweite Quantelung*, Z. Phys. 75, 622 (1932).
- [3] K. FRIEDRICHS, *Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields*, Interscience, New York (1953).
- [4] L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris (1950).
- [5] J. VON NEUMANN, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton (1955).
- [6] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Operational Methods in Applied Mathematics*, Dover, New York (1963).
- [7] B. VAN DER POL and H. BREMMER, *Operational Calculus*, Cambridge (1959).
- [8] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Kap. IX, Springer, Berlin (1965).
- [9] V. WEISSKOPF und E. WIGNER, *Berechnung der natürlichen Linienbreite auf Grund der Diracschen Lichttheorie*, Z. Phys. 63 (1930); *Über die natürliche Linienbreite in der Strahlung des harmonischen Oszillators*, Z. Phys. 65 (1930).
- [10] W. HEITLER, *The Quantum Theory of Radiation*, Oxford (1954).
- [11] W. HEITLER and S. T. MA, *Quantum Theory of Radiation Damping for Discrete States*, Proc. R. Ir. Acad. 52, 109 (1949).
- [12] E. ARNOUS and W. HEITLER, *Theory of Line-breadth Phenomena*, Proc. R. Soc. London [A] 220, 290 (1953).
- [13] E. ARNOUS und S. ZIENAU, *Allgemeine Theorie der Dämpfungsphenomene für nicht-stationäre Prozesse*, Helv. phys. Acta 24, 279 (1951).
- [14] A. MESSIAH, *Quantum Mechanics*, Kap. XXI, § 13, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam (1962).
- [15] A. O. GUNNAR KÄLLÉN, *Quantenelektrodynamik*, Kap. V, § 28, *Handbuch der Physik*, Band 5, 1 (1958).
- [16] MARIANNE FRIEDRICH, *Mathematisches zur Theorie der Linienbreite*, Dissertation Universität Zürich (1965).