Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 40 (1967)
Heft: 1-2

Artikel: Analytische Lösung eines idealisierten Stripping- oder Beugungsproblems
Autor: Albeverio, Sergio
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-113761

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Analytische Lösung eines idealisierten Stripping- oder Beugungsproblems

von **Sergio Albeverio**

Seminar für theoretische Physik ETH, Zürich

(22. IX. 66)

Abstract: The explicit analytical solution of a model previously discussed by R. Jost is given. The model can be interpreted as describing an idealized quantum mechanical stripping process (in which two particles moving each in one dimension and forming together a bound state via a δ-function interaction are smashed against a wall which repels one of the particles perfectly) or the diffraction of a plane electromagnetic wave by a wedge of angle 45°, formed by a plane perfectly reflecting mirror and an infinitely thin dielectric plane sheet of infinite dielectric constant, the incident wave being a surface wave linear polarized with its electric vector parallel to the edge of the wedge. A construction of the solution is carried through using a theory of difference equations with periodic coefficients which has been given by R. Jost. The solution is first obtained in terms of abelian integrals and thetafunctions for a hyperelliptic surface of genus 3 and then reduced to an expression involving only elliptic quantities.

1. Einleitung. Beschreibung des Modells

Eine befriedigende allgemeine mathematische Theorie der Streuung von beliebig vielen Teilchen ist selbst im nichtrelativistischen Falle noch nicht vorhanden. Nur für Zweiteilchenprozesse, d.h. für die Potentialstreuung, kann man mit einigem Recht eine Ausnahme zu dieser negativen Feststellung machen (siehe z. B. [1][1])). Im Falle von Dreiteilchenprozessen sind vor kurzer Zeit einige wichtige Fragen geklärt worden, die Unitarität der S-Matrix wurde z. B. bewiesen [2]: aber z. B. zur analytischen Struktur derselben und zur Ableitung von Dispersionsrelationen liegen nur Ansätze vor. Neben der Untersuchung solcher allgemeiner Fragen im Falle von Mehrteilchenprozessen mit Kräften aus gewissen allgemeinen Klassen ist es auch von Interesse, spezielle Modelle (bestimmte Anzahl Teilchen mit speziellen Kräften) zu untersuchen, welche einerseits typische Schwierigkeiten der allgemeinen Probleme enthalten, anderseits exakt lösbar sind und deshalb eine nähere Einsicht in die Struktur derselben Probleme liefern können. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einem solchen Modell. Dieses gehört zu einer Klasse von Modellen, die ursprünglich von W. Heisenberg in Beziehung mit seinen Arbeiten über die Eigenschaften der S-Matrix [3, 4] vorgeschlagen wurden, als einfachste Mehrkörperprobleme (Dreikörperprobleme), bei denen die typischen Schwierigkeiten der breakup-Prozesse bereits auftreten. Wir wollen nun diese Klasse von Modellen beschreiben und die Untersuchungen erwähnen, die über solche Modelle oder Modifikationen hievon bereits angestellt worden sind.

---

[1]) Die Nummern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis S. 183.

Man betrachte zwei Teilchen der Masse m, welche sich in einer Dimension bewegen, mit dem Ursprung durch ein anziehendes (oder abstossendes) δ-Potential einzeln wechselwirken und ferner miteinander ebenfalls durch ein anziehendes (oder abstossendes) δ-Potential wechselwirken. Der Hamilton-Operator eines solchen Systems lautet:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) - A\,\delta(x_1) - B\,\delta(x_2) - C\,\delta(x_1 - x_2) \tag{1.1}$$

wobei x_1, x_2 die Koordinaten der Teilchen und A, B, C reelle Konstanten sind. Beim Studium der Bewegung eines solchen Systems hat man mit den üblichen Schwierigkeiten eines Dreikörperproblems zu tun (man kann nämlich z.B. die am Ursprung bindenden Kräfte als Wechselwirkungen der 2 Teilchen mit einem dritten, unendlich schweren, im Ursprung sitzenden Teilchen auffassen).

In der Allgemeinheit (1.1) ist das Problem bis jetzt ungelöst. K. WILDERMUTH (1949) [5] hat für den Spezialfall $A = 0$ die erste und die zweite Born'sche Näherung (bezüglich dem als Störung aufgefassten Term $C\delta(x_1 - x_2)$ in (1.1)) ausgerechnet: ein bei der Zeit $t = -\infty$ einfallendes gebundenes Teilchen kann entweder elastisch gestreut oder zertrümmert werden; das Verhalten der Amplituden in 2. Näherung als Funktion der Energie in der Nähe der break-up-Schwelle ist wesentlich durch die Näherung bedingt, so dass die in diesem Zusammenhang aufgestellten Vermutungen von WILDERMUTH über das Verhalten der exakten Streuamplitude zu widerlegen sind (H. M. NUSSENZVEIG [6]). DANOS (vgl. E. LIEB und H. KOPPE [7]) hat den Spezialfall $A = B = -\infty$, $C > 0$ von (1.1) d.h. das durch den Hamilton-Operator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right\} - C\,\delta(x_1 - x_2)\,, \quad C > 0$$

und die Randbedingung für die Wellenfunktion

$$\psi(x_1, x_2) = 0 \quad \text{für} \quad x_1 = x_2 = 0$$

definierte Problem betrachtet. Dieses Problem führt zu einem trivialen Ergebnis: ein einfallendes, gebundenes Teilchen wird nur elastisch gestreut, kann aber nie zertrümmert werden. (Eine weitere, ebenfalls zu einem trivialen Ergebnis führende Spezialisierung von (1.1) ist gegeben durch $A = B$ und $C = -\infty$: vgl. H. M. NUSSENZVEIG [6] und MORSE-FESHBACH [8, S. 1709ff.]).

Chronologisch anschliessend an die Untersuchungen von DANOS ist eine Arbeit von R. JOST [9] zu erwähnen, welche die Grundlage für unsere eigene Arbeit bildet. Wir wollen jetzt das durch JOST betrachtete Modell ausführlich beschreiben und dann zwei weitere Modelle erwähnen (LIEB-KOPPE [7] und H. M. NUSSENZVEIG [6]), die sich daran anschliessen: damit haben wir dann auch die kleine Geschichte der Modelle, die direkt im Zusammenhang mit dem Hamilton-Operator (1.1) stehen, ausgeschöpft[2]).

[2]) Wir wollen jedoch zwei Familien von Untersuchungen nicht unerwähnt lassen, die sich mit etwas ähnlichen Problemen beschäftigen: einerseits Untersuchungen über gewisse speziellen partielle Differentialgleichungen, die in anderen Gebieten der mathematischen Physik wie in der Hydrodynamik und in der elektromagnetischen und akustischen Beugungstheorie, auftreten (siehe z.B. [15]), anderseits eine Reihe von Arbeiten die eine exakte Lösung für Zwei- und Dreiteilchenstreuprozesse mit bestimmten speziellen Zweiteilchenwechselwirkungen verschwindender Reichweite erstreben (siehe [31] und die dort angegebene Literatur).

Das durch JOST betrachtete Modell kann mit Rücksicht auf (1.1) durch $A = -\infty$, $B = 0$, $C > 0$ charakterisiert werden. Es beschreibt also ein idealisiertes Deuteron, bestehend aus 2 Massenpunkten (1) («Proton») und (2) («Neutron»), welche sich in einer Dimension bewegen und sich durch ein δ-Potential

$$V(x_1, x_2) = -C\,\delta\,(x_1 - x_2)\,, \quad C > 0 \tag{1.2}$$

anziehen; das Proton wird ausserdem durch eine im Ursprung $x_1 = 0$ gelegte Wand vollständig reflektiert, was durch die Randbedingung

$$\psi(0, x_2) = 0 \tag{1.3}$$

ausgedrückt wird. Wir werden weiter unten andere mögliche Interpretationen des Modells angeben. Zunächst aber wollen wir die wesentlichen Züge des Modells weiter verfolgen. Nach dem Spiegelungsprinzip ersetzen wir die Randbedingung (1.3), indem wir das Potential (1.2) an der Geraden $x_1 = 0$ spiegeln und die Lösung der stationären Schrödingergleichung

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) - C\,[\theta\,(x_1 + x_2)\,\delta\,(x_1 - x_2) + \theta\,(-x_1 + x_2)\,\delta\,(x_1 + x_2)]\right\}\psi = \varepsilon\,\psi \tag{1.4}$$

der Symmetriebedingung

$$\psi(x_1, x_2) + \psi(-x_1, x_2) = 0 \tag{1.5}$$

unterwerfen. Dabei ist θ die Stufenfunktion:

$$\theta(\xi) = 1 \quad \text{falls} \quad \xi > 0 \quad \text{und} \quad \theta(\xi) = 0 \quad \text{für} \quad \xi < 0\,.$$

Mit den neuen Koordinaten ξ, η

$$x_1 = \frac{1}{2}(\xi - \eta)\,, \quad x_2 = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \tag{1.6}$$

und den Abkürzungen

$$\frac{m\,\varepsilon}{\hbar^2} = E\,, \quad \frac{m\,C}{\hbar^2} = \lambda \tag{1.7}$$

schreibt sich (1.4)

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \lambda\,[\theta(\xi)\,\delta(\eta) + \theta(\eta)\,\delta(\xi)] + E\right\}\psi = 0\,, \tag{1.8}$$

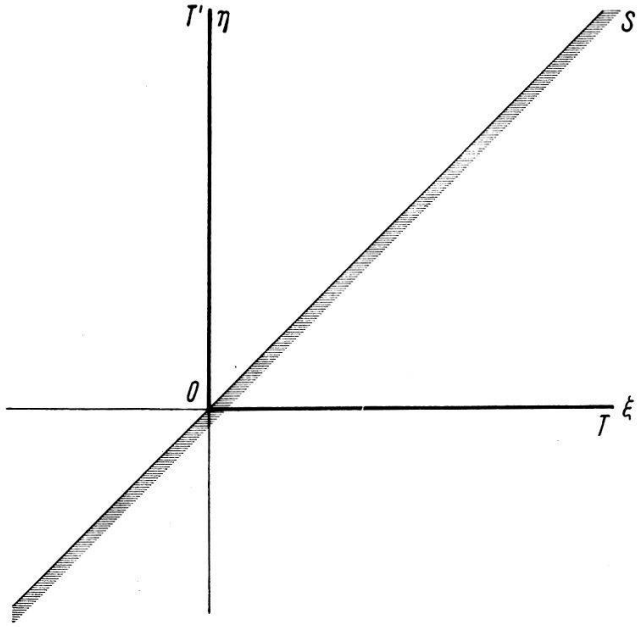
wobei (1.5) in

$$\psi(\xi, \eta) + \psi(\eta, \xi) = 0 \tag{1.9}$$

übergeht.

Durch (1.9) wird die Lösung von (1.8), die nur in $x_1 = \xi - \eta > 0$ «physikalisch» ist (wenn wir ein von $x_1 = +\infty$ einfallendes Deuteron oder Proton voraussetzen), in die ganze (ξ, η)-Ebene fortgesetzt.

Wir können (1.8) auch auffassen als Schrödingergleichung eines einzigen Teilchens, das sich in 2 Dimensionen bewegt. Die positiven ξ und η Achsen (T, T') erscheinen dann als schmale und tiefe Kanäle und die ganze Winkelhalbierende (S) als idealer Spiegel. Einer ein- oder auslaufenden Welle im Kanal T entspricht ein ein- oder aus-



Figur 1

laufendes «Deuteron», einer 2-dimensionalen auslaufenden Welle ein auslaufendes «Proton» und «Neutron», d.h. ein Prozess, in dem ein Deuteron am Ursprung zerschlagen wird. Aus der bekannten Bindungsenergie in einem δ-Potential ergibt sich, dass ein- und auslaufende «Deuteronen» nur vorkommen können, falls die Energie E der Ungleichung

$$E \geqslant -\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \tag{1.10}$$

genügt. Eine Dissoziation des «Deuterons» kann natürlich nur erfolgen, wenn $E \geq 0$ ist.

Nun wollen wir zu den weiteren Interpretationen des Modells übergehen. Zunächst bemerken wir, dass die Gleichungen des Modells auch in der Form

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + k^2\right) \mathcal{U} = 0 , \quad k^2 = E , \tag{1.11}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta}(\xi, \delta) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta}(\xi, -\delta)\right] = -\lambda\, \mathcal{U}(\xi, 0) , \tag{1.12}$$

$$\mathcal{U}(\xi, \xi) = 0 \tag{1.13}$$

geschrieben werden können (um den Zusammenhang mit den früheren Gleichungen zu finden, braucht man nur $\xi = x_1 + x_2$, $\eta = x_2 - x_1$ zu setzen).

Sei nun ζ die Richtung, die zusammen mit ξ, η ein orthogonales Koordinatensystem definiert: (1.11) kann unmittelbar als Gleichung für die Amplitude $\mathcal{U}$ einer in der ζ-Richtung linear polarisierten ebenen elektromagnetischen Welle aufgefasst werden, welche sich im Vakuum fortpflanzt:

$$\boldsymbol{E} = (0, 0, \mathcal{E}) , \quad \boldsymbol{B} = (B_\xi, B_\eta, 0) , \quad \mathcal{E}(\xi, \eta, \zeta; t) = \mathcal{U}(\xi, \eta)\, e^{-ikct} .$$

Um nun die Gleichung (1.12) zu deuten, stellen wir uns vor, zwischen den Ebenen $\eta = -\delta$, $\eta = +\delta$ sei eine dünne, homogene Platte der Dicke 2δ, der Dielektrizitätskon-

stante ε' und der Permeabilität μ angebracht; dann gilt innerhalb der Platte

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+k'^2\right\}\mathcal{U}=0$$

mit

$$k'=\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}}\,k\,.$$

Zwischen den 2 parallelen, die Platte begrenzenden Ebenen hat man dann den Sprung

$$\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\eta}(\xi,\delta)-\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\eta}(\xi,-\delta)=-k'^2\int_{-\delta}^{+\delta}\mathcal{U}(\xi,\eta)\,d\eta\,.$$

Lässt man nun $\delta\to 0$ und gleichzeitig $\varepsilon'\to\infty$ so dass $\varepsilon'\delta=\gamma$ konstant bleibt, dann strebt diese Gleichung gegen die Gleichung (1.12) mit $\lambda=k\gamma/\sqrt{\mu}$.

Um schliesslich auch (1.13) zu deuten, braucht man sich nur die Ebene, welche die Geraden ζ und $\xi=\eta$ enthält, durch einen unendlich dünnen perfekten Spiegel (Leiter mit unendlich hoher Leitfähigkeit) bedeckt vorzustellen: denn dann gilt $\boldsymbol{E}=0$ für $\eta=\xi$ also eben (1.13).

Wir fassen zusammen: man kann dem in Frage stehenden Modell auch die Interpretation geben einer linear polarisierten ebenen elektromagnetischen Welle, welche durch einen aus zwei unter 45° stehenden unendlich dünnen ebenen Platten bestehenden Keil gebeugt wird; dabei besitzt eine der Platten eine unendliche Dielektrizitätskonstante, die andere eine unendliche Leitfähigkeit und die gemeinsame Kante steht parallel zum elektrischen Vektor der einfallenden Oberflächenwelle. Da die Fälle, wo eine exakte Lösung eines Beugungsproblems mit Nichtmetallen bekannt ist, sehr spärlich sind, wäre es interessant zu untersuchen, ob durch ähnliche Methoden wie diejenigen, die zur Lösung des soeben beschriebenen Modells führen, auch kompliziertere Probleme der Beugung an Nichtmetallen behandelt werden können. Bevor wir zur Lösung des Modells übergehen, wollen wir noch zwei Arbeiten erwähnen, die sich an dasselbe Modell anschliessen.

R. Jost hatte in der erwähnten Arbeit [9] das Problem auf eine (nach einer eigenen, allgemeinen Theorie [10]) im Prinzip explizit lösbare Differenzengleichung reduziert: er ging aber nicht bis zur tatsächlichen expliziten Bestimmung der Lösung weiter. Angeregt durch die Arbeit von Jost, betrachteten Lieb und Koppe [7] ein vereinfachtes Modell, welches durch den Hamilton-Operator

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)-C\,\theta\,(x_1+x_2)\,\delta\,(x_1-x_2)$$

beschrieben wird (vergleiche mit (1.4)!): dieses Modell führt natürlich auf eine einfachere Differenzengleichung als diejenige von Jost und kann auch, jedenfalls was die «Streuwahrscheinlichkeiten» anbelangt, relativ einfach gelöst werden. Es ist allerdings zu bemerken, dass dieses Modell schlecht als Modell eines (idealisierten) «Stripping-Prozesses» gelten kann, wegen dem ausgesprochenen unphysikalischen Charakter der Wechselwirkung, welche vom Vorzeichen der Koordinaten der Teilchen abhängt; man kann aber für dieses Modell, analog wie früher für dasjenige von Jost, eine Interpretation im Sinne der Beugung elektromagnetischer Wellen geben: nämlich durch eine in der z-Richtung linear polarisierte elektromagnetische Welle, welche durch eine

ihrer Polarisationsrichtung parallel stehende unendlich dünne Platte mit unendlich grosser Dielektrizitätskonstante gebeugt wird; im Unterschied zu früher wird die Platte nicht durch zwei unendlich benachbarte zur z-Achse parallele Ebenen gebildet, sondern durch zwei solche *Halbebenen*, deren Spuren in der zur z-Achse senkrecht stehenden (x, y)-Ebene zwei (parallele, unendlich benachbarte) vom Ursprung ausgehende Halbgeraden sind. (Ferner fehlt, im Unterschied zu dem von R. JOST betrachteten Modell, der perfekte Spiegel).

Als weitere Modifikation des von JOST betrachteten Modells ist dasjenige von NUSSENZVEIG zu erwähnen. Dieses wird dadurch erhalten, indem man die δ-Wechselwirkung zwischen den Teilchen durch folgende Randbedingung ersetzt:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = C\,\psi \tag{1.14}$$

für $x_1 = x_2$ d.h. $\eta = 0$, wobei C eine Konstante ist und $\partial/\partial n$ die Ableitung in Richtung der Normalen zur Geraden $x_1 = x_2$ d.h. $\eta = 0$ bezeichnet; die Randbedingung (1.3) wird dagegen unverändert beibehalten.

Dieses Modell kann besser als dasjenige von LIEB und KOPPE als Modell einer idealisierten Stripping-Reaktion gelten (solange man die Randbedingung (1.14) als idealisierte Wechselwirkung zwischen den Teilchen akzeptieren kann [11]): es ist ferner völlig explizit lösbar. Man kann ihm ebenfalls eine Interpretation als Beugungssystem geben, und zwar ganz gleich wie im Modell von JOST, nur dass die beugende Platte unendlich grosser Dielektrizitätskonstante durch eine gleichgestaltete Platte mit grosser aber endlicher Leitfähigkeit zu ersetzen ist (so dass die Randbedingung (1.14) gilt [12, 13], statt (1.12)): die Lösungsmethode von NUSSENZVEIG ist der Methode von W. E. WILLIAMS nachgebildet, der das Problem der Beugung einer elektromagnetischen Welle an einem Keil, dessen Kante parallel zum elektrischen Feld steht und dessen Leitfähigkeit sehr gross aber endlich ist [14], gelöst hat.

In unserer Arbeit werden wir für das erwähnte, durch JOST behandelte Modell eine explizite analytische Lösung angeben: bei der Ableitung derselben, sowie bei der Angabe der physikalischen Grössen, werden wir uns stets auf die Interpretation des Modells als «Stripping-Modell» beziehen; es ist jeweils leicht, die entsprechenden Aussagen in die Sprache der weiteren möglichen Interpretationen umzuformulieren.

2. Vorbereitungen zur Konstruktion der Lösung des Strippingmodells

In diesem Abschnitt werden wir für uns wesentliche Teile der erwähnten Arbeit von JOST [9] wiederholen und einige Punkte ausführlicher gestalten.

2.1 *Das Modell und die erste Form der Differenzengleichung*

Wir haben bereits in **1.** das Modell beschrieben: um es zu lösen, müssen wir die Lösungen der Gleichung (1.8)

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \lambda\,[\theta(\xi)\,\delta(\eta) + \theta(\eta)\,\delta(\xi)] + E\right\}\psi = 0 \tag{2.1}$$

bestimmen, welche der Randbedingung (1.9)

$$\psi(\xi, \eta) + \psi(\eta, \xi) = 0 \tag{2.2}$$

genügen.

Im folgenden betrachten wir ausschliesslich den Fall, wo allein ein «Deuteron» einfällt. Wir transformieren zunächst (2.1), (2.2) in eine Integralgleichung. Die Greensche Funktion der Wellengleichung $(\Delta + E)\,\psi = 0$ in 2 Dimensionen, welche der Ausstrahlungsbedingung genügt, lautet bekanntlich

$$i\,\pi\,H_0^{(1)}\left(\sqrt{E}\,\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right). \tag{2.3}$$

Mit ihrer Hilfe formt sich die Schrödingergleichung (2.1) in die Integralgleichung

$$\psi(\xi,\eta) = \frac{i\,\lambda}{4}\left\{\int_0^\infty H_0^{(1)}\left(\sqrt{E}\,\sqrt{(\xi-\xi')^2+\eta^2}\right)\psi(\xi',0)\,d\xi' + \int_0^\infty H_0^{(1)}\left(\sqrt{E}\,\sqrt{\xi^2+(\eta-\eta')^2}\right)\psi(0,\eta')\,d\eta'\right\} \tag{2.4}$$

um. Nun verlangt aber (2.2)

$$\Phi(\xi) \equiv \psi(\xi,0) = -\psi(0,\xi) \tag{2.5}$$

so dass (2.4) in der Form

$$\psi(\xi,\eta) = \frac{i\,\lambda}{4}\int_0^\infty \left\{H_0^{(1)}\left(\sqrt{E}\,\sqrt{(\xi-\xi')^2+\eta^2}\right) - H_0^{(1)}\left(\sqrt{E}\,\sqrt{\xi^2+(\eta-\xi')^2}\right)\right\}\Phi(\xi')\,d\xi' \tag{2.6}$$

geschrieben werden kann.

Für Φ selbst erhält man die homogene Integralgleichung

$$\Phi(\xi) = \frac{i\,\lambda}{4}\int_0^\infty \left\{H_0^{(1)}\left(\sqrt{E}\,|\,\xi-\xi'\,|\right) - H_0^{(1)}\left(\sqrt{E}\,\sqrt{\xi^2+\xi'^2}\right)\right\}\Phi(\xi')\,d\xi'\,. \tag{2.7}$$

Falls $E < 0$ muss $\mathrm{Im}\,\sqrt{E} > 0$ gewählt werden, damit in (2.6) «gedämpfte zweidimensionale Wellen» auftreten; falls $E \geq 0$ muss (2.7) als Grenzfall komplexer E mit $\mathrm{Im}\,E > 0$ und $\mathrm{Im}\,\sqrt{E} > 0$ aufgefasst werden: wir setzen in diesem Fall

$$E = E_0 + i\,\alpha\,, \quad \alpha > 0\,. \tag{2.8}$$

Jost hat (2.7) unter Nachbildung der bekannten Methode von N. Wiener und E. Hopf (siehe z. B. [15]) in eine Funktionalgleichung für die Funktionen

$$\tilde{\varphi}(p) = \int_0^\infty e^{ip\xi}\,\Phi(\xi)\,d\xi \tag{2.9}$$

$$\tilde{\psi}(p) = -\int_{-\infty}^0 e^{ip\xi}\,\Phi(\xi)\,d\xi \tag{2.9'}$$

verwandelt[3]).

[3]) Bei dieser Verwandlung sind in der Arbeit von Jost [9] zwei Druckfehler unterlaufen: in der Formel (1.9) der erwähnten Arbeit ist E durch $\sqrt{E}$ zu ersetzen, so wie in (1.10) im Exponenten das $-$Zeichen durch ein $+$Zeichen ersetzt werden muss.

Sei

$$\omega(p) = (E - p^2)^{1/2}, \quad \operatorname{Im}\omega > 0 \tag{2.10}$$

dann gilt

$$\tilde{\varphi}(p) - \tilde{\psi}(p) = \frac{\lambda i\,[\tilde{\varphi}(p) - \tilde{\varphi}(\omega(p))]}{2\,\omega(p)}. \tag{2.11}$$

Dabei ist $\tilde{\varphi}$ in einer oberen Halbebene, die den Punkt $\sqrt{E}$ enthält, regulär analytisch und $\tilde{\psi}$ in einer unteren Halbebene $\operatorname{Im} p < \operatorname{Im}\sqrt{E}$, so dass (2.11) zunächst in einem Streifen gilt, aber natürlich analytisch fortgesetzt werden kann.

2.2 *Die funktionentheoretischen Eigenschaften der Lösungen von (2.11)*

Da $\tilde{\varphi}$ in einer oberen Halbebene regulär ist, die $\sqrt{E}$ enthält, ist

(1) $\tilde{\varphi}$ regulär in $p = \sqrt{E}$ und $p = \lambda i/2$ (beachte $E_0 > -(\lambda/2)^2$). Weiter ist $\tilde{\psi}$ in der Halbebene $\operatorname{Im} p < \operatorname{Im}\sqrt{E}$ regulär, also ist insbesondere (achte wieder $E_0 > -(\lambda/2)^2$)

(2) $\tilde{\psi}$ regulär in $p = -\sqrt{E}$, $p = \pm k = \pm\sqrt{E + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}$, $p = -\frac{i\lambda}{2}$.

Aus (1) und (2) und der Funktionalgleichung (2.11) folgt jetzt

(3) $\tilde{\varphi}$ hat Pole (höchstens) 1. Ordnung in den Stellen

$$p = \pm k, \quad p = -\frac{i\lambda}{2}.$$

In der Tat folgt aus (2.11)

$$\tilde{\varphi}(p)\left[1 - \frac{\lambda i}{2\,\omega(p)}\right] = \tilde{\psi}(p) - \frac{\lambda i}{2\,\omega(p)}\,\tilde{\varphi}(\omega). \tag{2.12}$$

Es ist $\omega(\pm k) = i\lambda/2$, also verschwindet die eckige Klammer links. Die Funktionen rechts sind aber regulär für $p = \pm k$ wie aus 1) und 2) leicht folgt. Also hat $\tilde{\varphi}$ in $p = \pm k$ einen Pol höchstens erster Ordnung. Weiter ist $\omega(-i\lambda/2) = k$ also hat, wieder aus (2.12), $\tilde{\varphi}$ höchstens einen Pol erster Ordnung bei $p = -i\lambda/2$. Als Laplacetransformierte fallen $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\psi}$ in ihren respektiven Konvergenzhalbebenen nach Null ab. Es gilt also

(4)
$$\tilde{\varphi}(p) \to 0 \quad \text{für} \quad p \to \infty \quad \text{in} \quad \operatorname{Im} p \geqslant \sqrt{E},$$
$$\tilde{\psi}(p) \to 0 \quad \text{für} \quad p \to \infty \quad \text{in} \quad \operatorname{Im} p < \sqrt{E}.$$

2.3 *Die Uniformisierung der Funktionalgleichung (2.11)*

Im Anschluss an Jost uniformisieren wir die Funktionalgleichung (2.11) durch die Substitution

$$p = \sqrt{E}\sin\frac{\pi}{2}Z, \quad \omega(p) = \sqrt{E}\cos\frac{\pi}{2}Z, \quad \operatorname{Im}\sqrt{E} > 0. \tag{2.13}$$

Dabei soll $Z = 1$ dem Punkt $p = \sqrt{E}$ und $Z = -1$ dem Punkt $p = -\sqrt{E}$ aus Abschnitt 2.2 entsprechen. Schreibt man $\varphi(Z) = \tilde{\varphi}(p)$ und $\psi(Z) = \tilde{\psi}(p)$ dann entsteht aus (2.11)

$$\varphi(Z) - \psi(Z) = [\varphi(Z) - \varphi(Z+1)]\,\frac{\cos\pi/2\,\zeta_0}{\cos\pi/2\,Z}, \tag{2.14}$$

wobei ζ_0 durch

$$\cos\frac{\pi}{2}\zeta_0 = \frac{\lambda i}{2\sqrt{E}}, \quad 0 \leqslant \operatorname{Re}\zeta_0 \leqslant 1 \tag{2.15}$$

definiert ist. (2.15) lässt sich auch schreiben

$$\psi(Z)\cos\frac{\pi}{2}Z = \varphi(Z)\left[\cos\frac{\pi}{2}Z - \cos\frac{\pi}{2}\zeta_0\right] + \varphi(Z+1)\cos\frac{\pi}{2}\zeta_0 . \tag{2.16}$$

Nun ist aber $\tilde{\psi}$ gemäss 2.2 (2) regulär in $p = -\sqrt{E}$, hat also dort insbesondere keinen Verzweigungspunkt. Im Hinblick auf (2.13) bedeutet dies, dass

$$\psi(-1+Z) = \psi(-1-Z) . \tag{2.17}$$

Mit (2.17) lässt sich ψ aus (2.16) eliminieren. Freilich treten dann in der entstehenden Funktionalgleichung auch $\varphi(-1-Z)$ und $\varphi(-Z)$ auf. Aber φ ist gemäss 2.2 (1) in $p = \sqrt{E}$ regulär, also gilt auch

$$\varphi(1+Z) = \varphi(1-Z) \tag{2.18}$$

und diese Gleichung kann benützt werden, um $\varphi(-1-Z)$ durch $\varphi(3+Z)$ und $\varphi(-Z)$ durch $\varphi(2+Z)$ zu ersetzen. Dadurch entsteht die Differenzengleichung

$$\cos\frac{\pi}{2}Z\,[\varphi(Z+4) - \varphi(Z)]$$
$$+ \cos\frac{\pi}{2}\zeta_0\,[\varphi(Z+4) - \varphi(Z+3) - \varphi(Z+1) + \varphi(Z)] = 0 . \tag{2.19}$$

Ausserdem ergibt 2.2 (1) zusammen mit (2.18)
(A.1) φ ist regulär in den Punkten $\pm\zeta_0 + 1$. Weiter folgt aus 2.2 (2) mit (2.18)
(A.2) φ hat Pole höchstens 1. Ordnung in den Punkten

$$\pm\zeta_0 - 1 , \quad \pm\zeta_0 , \quad \pm\zeta_0 + 2 , \quad \pm\zeta_0 + 3 .$$

Nennen wir «abgeschlossener Periodenstreifen» die Abschliessung eines, einen offenen einfach zusammenhängenden Kern besitzenden, Fundamentalbereichs der Translationsgruppe $tZ = Z + 1$, so sind die angegebenen Singularitäten von φ die einzigen in einem abgeschlossenen Periodenstreifen, der die Punkte $(\pm\zeta_0 - 1) + k$, $k = 0, 1, 2, 3$ enthält.

Schliesslich folgt aus 2.2 (2) und (2.17)
(B) ψ ist regulär in den Punkten $\pm\zeta_0$, $\pm\zeta_0 - 1$, $\pm\zeta_0 - 2$.
Ausserdem verlangen wir von den Lösungen φ und ψ

(C) $$\lim_{y\to\infty}\varphi(x + iy) = 0 , \quad \lim_{y\to\infty}\psi(x + iy) = 0 .$$

Es wird sich im nächsten Abschnitt herausstellen, dass die relevante physikalische Interpretation in der Funktion

$$\tilde{f}(p) = \tilde{\varphi}(p) - \tilde{\varphi}(\omega) \tag{2.20}$$

enthalten ist. Dieser Funktion entspricht nach der Transformation (2.13) die Funktion

$$f(Z) = \varphi(Z) - \varphi(Z+1) . \tag{2.21}$$

f hat die Symmetrie

$$f\left(\frac{1}{2}+Z\right)+f\left(\frac{1}{2}-Z\right)=0\,. \tag{2.22}$$

Für f ergibt sich aus (2.19) und den Eigenschaften A, B und C die «integrierte» Differenzengleichung

$$\cos\frac{\pi}{2}\zeta_0\,[f(Z)+f(Z+1)+f(Z+2)]-\cos\frac{\pi}{2}Z\,[f(Z)+f(Z+1)]$$
$$+\sin\frac{\pi}{2}Z\,[f(Z+1)+f(Z+2)]=0\,. \tag{2.23}$$

Diese Gleichung vereinfacht sich durch die Einführung der Funktion

$$h(Z)=\left(\cos\frac{\pi}{2}\zeta_0-\cos\frac{\pi}{2}Z\right)[f(Z)+f(Z+1)] \tag{2.24}$$

zu

$$h(Z+1)-\zeta(Z)\,h(Z)+h(Z+1)=0 \tag{2.25}$$

mit

$$\zeta(Z)=-\frac{\cos\pi/2\,\zeta_0-2\cos\pi/2\,Z}{\cos\pi/2\,\zeta_0-\cos\pi/2\,Z} \tag{2.26}$$

(2.24) liefert mit (2.23) die Gleichung

$$f(Z)=\frac{[h(Z-1)+h(Z)]}{\cos\pi/2\,\zeta_0}\,. \tag{2.27}$$

Die Lösung von (2.25) muss den folgenden Bedingungen genügen:

(B 1) $h(Z)+h(-Z)=0$
(B 2) h ist meromorph mit Polen an den Stellen $\pm\zeta_0+k$, k ganze Zahl
(B 3) h ist regulär in $\pm\zeta_0$
h hat Pole höchstens erster Ordnung in $\pm\zeta_0+k$, $\pm\zeta_0-k$, $k=1,2,3,4$
h hat Pole höchstens zweiter Ordnung in $\pm\zeta_0+k$, $\pm\zeta_0-k$, $k=5,6,7,8$.

Ausserdem verlangen wir, dass

(B 4) $$\lim_{y\to\infty}h(x+iy)=0$$

ist.

Jost hat gezeigt, dass unter diesen Bedingungen (B 1) bis (B 4) h bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist.

3. Das asymptotische Verhalten der Lösung $\psi(\xi,\eta)$

Unser Ausgangspunkt ist die Gleichung

$$\psi(\xi,\eta)=\frac{\lambda i}{4}\int_0^\infty d\xi'\left[H_0^{(1)}\left(\sqrt{E}\sqrt{(\xi-\xi')^2+\eta^2}\right)-H_0^{(1)}\left(\sqrt{E}\sqrt{\xi^2+(\eta-\xi')^2}\right)\right]\Phi(\xi')$$

wobei ψ uns nur im physikalischen Gebiet $\xi\geq\eta$ interessiert. Zur Diskussion des asymptotischen Verhaltens führen wir Polarkoordinaten ein

$$\xi=R\cos\vartheta\,,\quad \eta=R\sin\vartheta\,,\quad -\frac{3\pi}{4}\leqslant\vartheta<\frac{\pi}{4}. \tag{3.1}$$

Dabei ist die Richtung $\vartheta = 0$ singulär, denn diese entspricht dem einfallenden «Deuteron».
Die asymptotische Gleichung

$$H_0^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i\pi/4}\, e^{iz}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

führt nun leicht zum asymptotischen Verhalten von ψ

$$\psi(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{E}}}\,\frac{\lambda i}{4}\, e^{-i\pi/4}\,\frac{e^{i\sqrt{E}R}}{\sqrt{R}}\left[\tilde{\varphi}\left(\sqrt{E}\cos\vartheta\right) - \tilde{\varphi}\left(\sqrt{E}\sin\vartheta\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}\,|\sin\vartheta|}\right)\right]$$

wobei $\vartheta \neq 0$ vorausgesetzt ist. Ausgedrückt in $\tilde{f}$ (vermittels (2.20)) finden wir

$$\psi(\xi, \eta) = -\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{E}}}\,\frac{\lambda}{4}\, e^{i\pi/4}\,\frac{e^{i\sqrt{E}R}}{\sqrt{R}}\left[\tilde{f}\left(\sqrt{E}\sin\vartheta\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}\,|\sin\vartheta|}\right)\right]. \qquad (3.2)$$

ψ stellt also für $E \geqslant 0$ eine auslaufende Kreiswelle dar, währenddem es für $-\lambda^2/4 < E < 0$ exponentiell abnimmt. Dies ist in Übereinstimmung mit der Problemstellung aus **2.**

Zur Untersuchung des Verhaltens längs der ξ-Achse (Fall $\vartheta = 0$) verwenden wir die Formel:

$$\tilde{\varphi}(p_1, p_2) = \lambda\,\frac{1}{p_1^2 + p_2^2 - E}\,[\tilde{\varphi}(p_1) - \tilde{\varphi}(p_2)]$$

in welcher $\tilde{\varphi}(p_1, p_2)$ die Fouriertransformierte von $\psi(\xi, \eta)$ darstellt:

$$\tilde{\varphi}(p_1, p_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta\, e^{i(p_1\xi + p_2\eta)}\,\psi(\xi, \eta)\,.$$

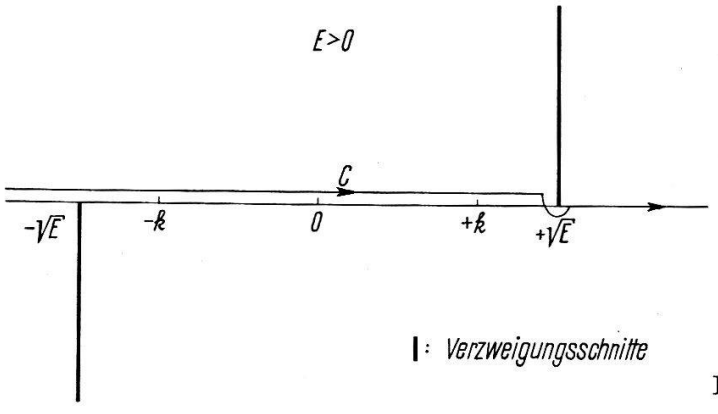
Es gilt also

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{\lambda}{(2\pi)^2}\int dp_1 \int dp_2\, e^{-i(p_1\xi + p_2\eta)}\,\frac{[\tilde{\varphi}(p_1) - \tilde{\varphi}(p_2)]}{p_1^2 + p_2^2 - E}\,.$$

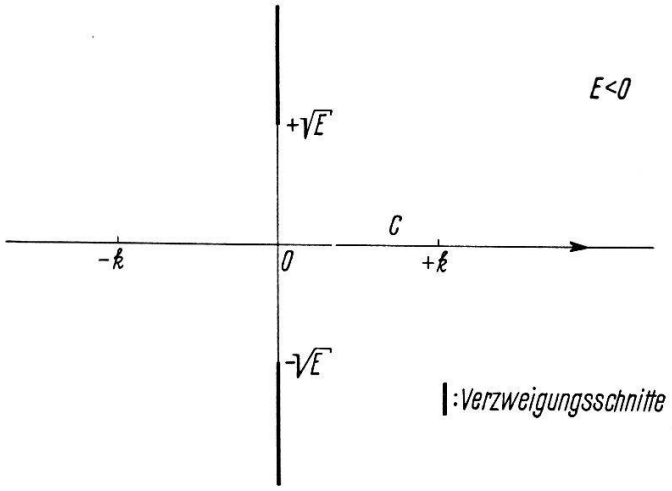
Durch Integration über eine der p-Variablen entsteht daraus

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{\lambda i}{2\pi}\int_C \frac{dp}{2\omega(p)}\,\tilde{\varphi}(p)\,[e^{-i(p\xi - |\eta|\,\omega(p))} - e^{i(p\eta - |\xi|\,\omega(p))}]$$

wobei der Integrationsweg C aus den Figuren 2, 3 ersichtlich ist.



Figur 2



Figur 3

Offenbar spielt für das asymptotische Verhalten bei $\xi \to +\infty$ nur der erste Summand der eckigen Klammer eine Rolle. Ausserdem kann der Integrationsweg C in der unteren Halbebene verschoben werden, wobei die Residuen von den Stellen $\pm k$ und, für $E > 0$, Schleifenintegrale um die Verzweigungsschnitte übrigbleiben. Diese Beiträge von den Verzweigungspunkten aber stellen nichts anderes dar, als die Fortsetzung der auslaufenden Kreiswelle auf die ξ-Achse. Als dominante Terme verbleiben die Residuen, welche den Beitrag

$$\psi(\xi, \eta) = e^{-(\lambda/2)|\eta|} \left(A\, e^{-ik\xi} + B\, e^{ik\xi}\right) \tag{3.3}$$

liefern, wobei

$$k = \sqrt{E + \frac{\lambda^2}{4}} \tag{3.4}$$

und

$$\begin{aligned} A &= -i\, (\mathrm{Res}\, \tilde{f})\, (k) \quad = -i\, (\mathrm{Res}\, f)\, (\zeta_0)\,, \\ B &= -i\, (\mathrm{Res}\, \tilde{f})\, (-k) = -i\, (\mathrm{Res}\, f)\, (-\zeta_0)\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Aus den vorstehenden Formeln ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für die Aufspaltung des «Deuterons», wobei das Proton einen Impuls p_1 mit dem Spielraum dp_1 besitzt, zu

$$W(p_1)\, dp_1 = \frac{1}{16\pi} \sqrt{E}\, \frac{\lambda}{k} \left| \tilde{f}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{2E - p_1^2} - p_1\right)\right] \right|^2 \frac{dp_1}{\sqrt{2E - p_1^2}}\,, \tag{3.6}$$

währenddem die totale «Stripping-Wahrscheinlichkeit»

$$2 \int_0^{\sqrt{2E}} W(p_1)\, dp_1 = 1 - \left| \frac{B}{A} \right|^2, \tag{3.7}$$

mit A, B aus (3.5), ist: $|\, B/A\, |^2$ ist die Wahrscheinlichkeit eines elastischen Prozesses.

4. Konstruktion der Lösung der Differenzengleichung (2.25) «in abstracto»

4.1 *Zurückführung der Differenzengleichung (2.25) auf eine Normalform*

Die Differenzengleichung (2.25) lautet

$$h\,(Z + 1) + h\,(Z - 1) = \zeta(Z)\, h(Z)\,. \tag{4.1}$$

Wir suchen von (4.1) meromorphe Lösungen, die an gewissen singulären Stellen Pole erster Ordnung haben. Weiter ist $\zeta(Z)$ meromorph und periodisch mit der Periode 4. Die Gleichung (4.1) fällt unter eine Klasse von Differenzengleichungen, die R. Jost mit Hilfsmitteln aus der algebraischen Geometrie diskutiert hat [10]. Wir folgen hier der Arbeit von Jost. Zunächst bemerken wir, dass jede Lösung von (4.1) auch Lösung der Gleichung

$$\tilde{h}\,(Z+4)+\tilde{h}\,(Z-4)=2\,\tilde{A}(Z)\,\tilde{h}(Z) \tag{4.2}$$

mit

$$\begin{aligned} 2\,\tilde{A}(Z) &= \frac{V^2-2\,\alpha\,V+1}{V^2-2\,\beta\,V+1} \quad \text{und} \quad V=e^{2\pi i Z}\,, \\ \alpha &= -4\cos^4\frac{\pi}{2}\,\zeta_0+8\cos^2\frac{\pi}{2}\,\zeta_0+1=-\frac{\lambda^4}{4\,E^2}-2\,\frac{\lambda^2}{E}+1\,, \\ \beta &= \cos 2\pi\,\zeta_0=8\cos^4\frac{\pi}{2}\,\zeta_0-8\cos^2\frac{\pi}{2}\,\zeta_0+1=\frac{\lambda^4}{2\,E^2}+2\,\frac{\lambda^2}{E}+1 \end{aligned} \tag{4.3}$$

ist. Um dies einzusehen, schreiben wir (4.1) als System 1. Ordnung, indem wir den Vektor $\boldsymbol{h}(Z)$ mit den Komponenten

$$h_1(Z)=h\,(Z-1)\,, \quad h_2(Z)=h(Z) \tag{4.4}$$

einführen. (4.1) erscheint dann in der Gestalt

$$\boldsymbol{h}\,(Z+1)=\boldsymbol{M}(Z)\,\boldsymbol{h}(Z) \tag{4.5}$$

wobei

$$\boldsymbol{M}(Z)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \zeta(Z) \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Aus (4.5) aber folgt

$$\boldsymbol{h}\,(Z+4)=\mathfrak{M}(Z)\,\boldsymbol{h}(Z) \tag{4.7}$$

mit

$$\mathfrak{M}(Z)=\boldsymbol{M}\,(Z+3)\,\boldsymbol{M}\,(Z+2)\,\boldsymbol{M}\,(Z+1)\,\boldsymbol{M}(Z)\,. \tag{4.8}$$

Nun ist $Det\,\boldsymbol{M}(Z)=1$ also auch $Det\,\mathfrak{M}(Z)=1$. Weiter ist $\mathfrak{M}$ eine Wurzel des Sekulärpolynoms. Nun ist $2\,\tilde{A}=Sp\,\mathfrak{M}$ daher gilt

$$\mathfrak{M}(Z)-2\,\tilde{A}+\mathfrak{M}^{-1}(Z)=0 \tag{4.9}$$

und nach Rechtsmultiplikation mit $\boldsymbol{h}$

$$\boldsymbol{h}\,(Z+4)-2\,\tilde{A}\,\boldsymbol{h}(Z)+\boldsymbol{h}\,(Z-4)=0 \tag{4.10}$$

also gilt insbesondere auch (4.2).

Umgekehrt kann man aus einer meromorphen Lösung von (4.2) immer eine Basis von Lösungen zu (4.1) gewinnen. Sei $\tilde{h}$ eine Lösung von (4.2) und

$$\tilde{\boldsymbol{h}}(Z)=\begin{pmatrix} \tilde{h}\,(Z-4) \\ \tilde{h}(Z) \end{pmatrix},$$

dann erfüllt $\tilde{\boldsymbol{h}}$ die Gleichung

$$\tilde{\boldsymbol{h}}\,(Z+4)=\mathfrak{M}(Z)\,\tilde{\boldsymbol{h}}(Z) \tag{4.11}$$

wobei

$$\mathfrak{N}(Z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\tilde{A}(Z) \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Aber $\mathfrak{M}$ lässt sich rational auf $\mathfrak{N}$ transformieren: denn $\mathfrak{N}$ ist nichts anderes als die Kowalewskische Normalform von $\mathfrak{M}$.

Sei etwa

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad 2\tilde{A} = a + d$$

und setzt man

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & -c \end{pmatrix},$$

dann findet man

$$\mathfrak{C}^{-1}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\tilde{A} \end{pmatrix}.$$

Es ist also

$$\mathfrak{C}(Z)\,\tilde{\boldsymbol{h}}(Z) = \boldsymbol{l}(Z)$$

eine Lösung von (4.7), d.h. $\boldsymbol{l}$ erfüllt die Gleichung

$$\boldsymbol{l}\,(Z+4) = \mathfrak{M}(Z)\,\boldsymbol{l}(Z)\,. \tag{4.7$'$}$$

Wenn wir nun bilden

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}(Z) = \boldsymbol{l}(Z) &+ \boldsymbol{M}^{-1}(Z)\,\boldsymbol{l}\,(Z+1) + \boldsymbol{M}^{-1}(Z)\,\boldsymbol{M}^{-1}\,(Z+1)\,\boldsymbol{l}\,(Z+2) \\ &+ \boldsymbol{M}^{-1}(Z)\,\boldsymbol{M}^{-1}\,(Z+1)\,\boldsymbol{M}^{-1}\,(Z+2)\,\boldsymbol{l}\,(Z+3)\,,\end{aligned} \tag{4.13}$$

so erfüllt $\boldsymbol{h}$ offensichtlich wegen (4.8) die Gleichung (4.5). Die zweite Komponente von (4.13) ausgeschrieben lautet

$$\begin{aligned}h(Z) = \tilde{h}\,(Z+3) &+ \zeta\,(Z+3)\,\tilde{h}\,(Z+2) + [\zeta\,(Z+3)\,\zeta\,(Z+2) - 1]\,\tilde{h}\,(Z+1) \\ &+ [\zeta\,(Z+3)\,\zeta\,(Z+2)\,\zeta\,(Z+1) - \zeta\,(Z+3) - \zeta\,(Z+1)]\,\tilde{h}(Z) \\ &+ [\zeta\,(Z+2)\,\zeta\,(Z+1) - 1]\,\tilde{h}\,(Z-1) + \zeta\,(Z+1)\,\tilde{h}\,(Z-2) + \tilde{h}\,(Z-3)\,.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Das Fundamentalsystem besteht aus $h(Z)$ und $h(Z+4)$, sofern $A^2 - 1 \neq 0$ ist; denn wäre

$$h\,(Z+4) = \pi(Z)\,h(Z) \tag{4.15}$$

mit $\pi(Z+1) = \pi(Z)$, dann wäre π meromorph. Aber h erfüllt, wie wir gesehen haben, (4.2), daher gälte

$$\pi^2 - 2\tilde{A}\,\pi + 1 = 0\,. \tag{4.16}$$

Aber (4.16) hat nur für $\tilde{A}^2 = 1$ eine meromorphe Lösung: denn nur dann kann

$$(A^2 - 1)^{1/2} = 2\sqrt{\beta - \alpha}\,v^2\,[v^8 - (\alpha + \beta)\,v^4 + 1]^{1/2}$$

rational sein, wegen $\alpha + \beta = 2 + \lambda^4/4E^2 \neq \pm 2$ (für alle endlichen, reellen Energien).

Aus dem Ausdruck für $\tilde{A}$ (4.3) ergibt sich jedoch, dass $\tilde{A} = -1$ unmöglich ist. Der Fall $\tilde{A} = 1$ (d. h. $\alpha = \beta$ d. h. $E = -3/16\,\lambda^2$) wurde schon von JOST behandelt. In diesem Abschnitt haben wir unser Problem also reduziert auf die Lösung der Differenzengleichung (4.2). Schreiben wir noch

$$H(z) = \tilde{h}(Z)\,, \quad A(z) = \tilde{A}(Z) \tag{4.17}$$

mit

$$z = \frac{Z}{4}$$

dann lautet (4.2)

$$H\,(z+1) - 2\,A(z)\,H(z) + H\,(z-1) = 0\,, \tag{4.18}$$

wobei A die primitive Periode 1/4 hat, also die Spanne ein Multiplum der primitiven Periode von A ist: das ist aber die von uns gesuchte Normalform. Im folgenden nehmen wir stets $A \neq 1$ an, da der Fall $A = 1$ bereits von JOST erledigt wurde.

4.2 *Allgemeines über die Lösung der Differenzengleichung (4.18)*

Zur weiteren Diskussion von (4.18) führen wir den Translationsoperator t ein. t ist definiert durch

$$(t\,F)\,(z) = F\,(z+1)\,. \tag{4.19}$$

Speziell ist $t\,z = z + 1$. t erzeugt eine abelsche Gruppe von Translationen der z-Ebene in sich. Unter einem Periodenstreifen verstehen wir einen Fundamentalbereich dieser Gruppe, dessen offener Kern ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, etwa die Menge $\gamma \leq Re\,z < 1 + \gamma$. Der folgenden Diskussion legen wir einen bestimmten Periodenstreifen zugrunde, der die Punkte $1/4\,(\zeta_0 + k)$ und $1/4\,(-\zeta_0 + k)$, $k = 0,1,2,3$ enthält, aber sonst beliebig ist.

Die Differenzengleichung (4.18) lautet jetzt

$$(p_0\,t^2 - 2\,p_1\,t + p_0)\,H = 0 \tag{4.20}$$

wobei

$$p_0(v) = v^8 - 2\,\beta\,v^4 + 1\,, \quad p_1(v) = v^8 - 2\,\alpha\,v^4 + 1 \tag{4.21}$$

und $v = exp\,(2\,\pi\,i\,z)$ bedeuten. Zu beachten ist, dass die Koeffizienten p_α unter t invariant sind, dass also gilt

$$t\,p_\alpha = p_\alpha\,t\,, \quad \alpha = 1, 2\,. \tag{4.22}$$

Nun liegt es nahe, das hyperelliptische Gebilde

$$\mathfrak{F}(v, w)\colon\ p_0(v)\,w^2 - 2\,p_1(v)\,w + p_0(v) = 0 \tag{4.23}$$

und das Überlagerungsgebilde

$$\mathfrak{F}_0(z, w)\colon\ p_0(z)\,w^2 - 2\,p_1(z)\,w + p_0(z) = 0 \tag{4.24}$$

von $\mathfrak{F}(v, w)$ zu betrachten. $\mathfrak{F}(z, w)$ ist über den 4 Stellen $(v = 0, w)$ und $(v = \infty, w)$ von $\mathfrak{F}(v, w)$ logarithmisch verzweigt. Falls wir das an diesen Stellen punktierte Gebilde mit $\mathfrak{F}_0(v, w)$ bezeichnen, ist $\mathfrak{F}_0(z, w)$ eine perfekte periodische Überlagerung von $\mathfrak{F}_0(v, w)$. Die Decktransformationen von $\mathfrak{F}_0(z, w)$ werden durch einen Operator erzeugt,

den wir wieder mit t bezeichnen und der durch

$$(tf)\,(z, w) = f\,(z + 1, w) \tag{4.25}$$

definiert ist. Nun verstehen wir unter dem Periodenstreifen dieser Erweiterung der Definition von t die Gesamtheit der Punkte von $\mathfrak{F}_0(z, w)$, die über dem festgelegten Periodenstreifen der z-Ebene liegen.

Jetzt können wir eine Lösung von (4.20) wie folgt aus einer meromorphen Lösung der Differenzengleichung

$$t\,\mathfrak{H} = w\,\mathfrak{H} \tag{4.26}$$

gewinnen: wir setzen ausserhalb der Verzweigungspunkte von $\mathfrak{F}_0(z, w)$ über der z-Ebene

$$H(z) = \mathfrak{H}(z, w_1) + \mathfrak{H}(z, w_2)\,. \tag{4.27}$$

H hat dann eine wohlbestimmte meromorphe Fortsetzung in der ganzen z-Ebene und es wird

$$H\,(z + 1) + H\,(z - 1) = (w_1 + w_1^{-1})\,\mathfrak{H}(z, w_1) + (w_2 + w_2^{-1})\,\mathfrak{H}(z, w_2)\,. \tag{4.28}$$

Aber nach VIETA gilt $w_1^{-1} = w_2$ und $w_1 + w_2 = 2\,A$, so dass (4.28) sich auf (4.18) reduziert. *Bei dieser Konstruktion heben sich Pole erster Ordnung von $\mathfrak{H}$ in den Verzweigungspunkten weg.*

Wir wollen, um das richtige Verhalten der Lösung h von (2.31) für $|\,Im\,z\,| \to \infty$ schliesslich garantieren zu können, das Verhalten der Lösung von (4.26) «im Unendlichen» noch weiterhin einschränken. Sei τ eine lokale Uniformisierende zu einer Umgebung eines der 4 Punkte $v = 0$, $v = \infty$ von $\mathfrak{F}(v, w)$. Wir verlangen, dass in einer passenden Umgebung $\mathfrak{H}$ von der Gestalt ist ($\log w(\tau)$ ist so gewählt, dass $\log w(0) = 0$ bzw. $\log w(\infty) = 0$ ist):

$$\mathfrak{H} = F(\tau)\,e^{z \log w}\,, \tag{4.29}$$

wobei F in dieser Umgebung meromorph ist. Wir sagen dann, der betreffende Punkt $(v = 0, w)$ bzw. $(v = \infty, w)$ sei eine «Stelle m-ter Ordnung von $\mathfrak{H}$», wenn F bei $\tau = 0$ eine Nullstelle m-ter Ordnung oder einen Pol $(-m)$-ter Ordnung hat, je nachdem, ob m oder $-m$ nicht negativ ist. Wir subsummieren durch diesen Missbrauch der Worte also die Punkte über $v = 0$, ∞ unter die möglichen Nullstellen und Pole von $\mathfrak{H}$. Anders ausgedrückt: wir ergänzen $\mathfrak{F}_0(z, w)$ durch genau 4 Punkte zu einem «Pseudogebilde» $\mathfrak{F}(z, w)$.

Nun gilt offenbar das

Lemma: Sind $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ zwei meromorphe Lösungen von (4.26), dann ist $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_2$ eine algebraische Funktion auf $\mathfrak{F}(v, w)$.

Beweis: Setzt man $f = \mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_2$, dann ist f periodisch, denn

$$tf = f\,, \tag{4.30}$$

also ist f eine meromorphe Funktion auf $\mathfrak{F}_0(v, w)$. Wegen des Verhaltens (4.29) ist aber f auf ganz $\mathfrak{F}(v, w)$ meromorph.

Folgerung: Durch die Angabe der Nullstellen und Pole im Periodenstreifen ist $\mathfrak{H}$ bis auf einen konstanten Faktor genau bestimmt.

Es ist nun angezeigt, die bekannte Divisorsymbolik der algebraischen Geometrie zu verwenden. Ein Divisor[4]) $\mathfrak{a}$ ist ein formales Produkt $\mathfrak{a} = \prod_\nu \mathfrak{p}_\nu^{m_\nu}$, $\mathfrak{p}_\nu \in \mathfrak{F}(z, w)$, $m_\nu \in \boldsymbol{Z}$ (Ring der ganzen Zahlen), $\{\nu\}$ maximal abzählbar: $d(\mathfrak{a}) = \sum_\nu m_\nu$ heisst der Grad des Divisors. Wir sagen, dass $\mathfrak{a}$ ein Teiler einer Funktion $\mathfrak{H}$ sei, falls, für alle ν, $\mathfrak{H}$ an der Stelle $\mathfrak{p}_\nu$ mindestens von der Ordnung m_ν ist. Die Multiplikation und Division von Divisoren ist wie üblich erklärt, wobei $\mathfrak{p}^0$ weggelassen (oder durch 1 ersetzt) werden kann. Der Einsdivisor kann also beliebig als $\prod_\nu \mathfrak{p}_\nu^0$ geschrieben werden. Wir schreiben ferner $\mathfrak{a} > 1$ und nennen $\mathfrak{a}$ einen «ganzen Divisor» falls alle $m_\nu \geq 0$ sind; weiter schreiben wir $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$ falls $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} > 1$ ist. Der grösste Divisor $\mathfrak{c}$ der $\mathfrak{H}$ teilt heisst der exakte Divisor von $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{a}$ teilt $\mathfrak{H}$ genau dann, wenn $\mathfrak{c} > \mathfrak{a}$ ist. Für die letzte Aussage schreiben wir auch $\mathfrak{H} > \mathfrak{a}$ oder, wenn $\mathfrak{a}$ der exakte Divisor einer Funktion $\mathfrak{H}_1$ ist, sogar $\mathfrak{H} > \mathfrak{H}_1$.

Sei $\mathfrak{w}$ der exakte Divisor von w und $\mathfrak{h}_0$ der auf den Periodenstreifen bezogene exakte Divisor von $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{h}_{-1}$ der exakte Divisor von $\mathfrak{H}$ im durch t^{-1} translatierten Periodenstreifen. Aus (4.26) folgt

$$\mathfrak{h}_{-1} = \mathfrak{w}^{-1}\,\mathfrak{h}_0\,. \tag{4.31}$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir schliesslich an die Lösung von (4.26).

Sei

$$\sigma = d \log \mathfrak{H} \tag{4.32}$$

dann ergibt (4.26)

$$t\,\sigma = d \log w + \sigma\,. \tag{4.33}$$

Für σ machen wir den Ansatz

$$\sigma = z\,d \log w + \varrho \tag{4.34}$$

und finden

$$t\,\varrho = \varrho\,. \tag{4.35}$$

ϱ ist also ein Differential auf $\mathfrak{F}_0(v, w)$. Aus der Meromorphie von $\mathfrak{H}$ und der Bedingung (4.29) aber folgt, dass ϱ ein Abelsches Differential 3. Gattung mit lauter einfachen Polen auf $\mathfrak{F}(v, w)$ ist. σ selbst soll ein Differential mit lauter einfachen Polen und *ganzzahligen Residuen* sein. Es sind also die Residuen von ϱ modulo 1 festgelegt und ϱ erfüllt seine Aufgabe hinsichtlich der Korrektur der Residuen von $z\,d \log w$, wenn ϱ die Residuen von σ im Periodenstreifen ganzzahlig macht. ϱ hat aber noch eine globale Aufgabe, nämlich σ zum logarithmischen Differential einer Funktion auf $\mathfrak{F}(z, w)$ zu machen. Dazu ist notwendig, dass für jeden geschlossenen Weg γ auf $\mathfrak{F}_0(z, w)$ die Periode

$$\int_\gamma \sigma \equiv 0 \quad \text{modulo} \quad 2\pi i \tag{4.36}$$

erfüllt. Wieder ist es hinreichend, (4.36) nur für geschlossene Wege γ im Periodenstreifen zu erfüllen.

Diesen 2 Aufgaben entsprechend spalten wir ϱ auf

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2\,, \tag{4.37}$$

[4]) Für diesen und andere im folgenden benützten Begriffe aus der algebraischen Geometrie und Funktionentheorie verweisen wir auf [21] und [18].

wobei ϱ_1 so bestimmt ist, dass

$$\sigma_1 = z\, d \log w + \varrho_1 \tag{4.38}$$

im Periodenstreifen *verschwindende Residuen* hat.

Das ist möglich, denn die Residuensumme von $z\, d \log w$ im Periodenstreifen verschwindet, da über jeder Nullstelle von $p_0(z)$ ((4.21)) genau eine einfache Nullstelle und ein einfacher Pol von w liegen.

Jetzt liefert σ_1 noch die falschen Perioden für geschlossene Wege im Periodenstreifen. Mit $\mu(\gamma)$ bezeichnen wir die Multiplikatoren von σ am Wege γ:

$$\mu(\gamma) = \exp\big(\pi(\gamma)\big) \tag{4.39}$$

mit

$$\pi(\gamma) = \int_\gamma \sigma_1 \,. \tag{4.40}$$

Natürlich ist $\mu(\gamma) \neq 0$ und bildet $\mu(\gamma)$ eine Darstellung der Homologiegruppe von $\mathfrak{F}(v, w)$. Zu jeder solchen Darstellung gibt es aber eine Funktion g auf der Klassenfläche [18f] $\hat{\mathfrak{F}}$ von $\mathfrak{F}(v, w)$, die genau die reziproken Multiplikatoren $\mu^{-1}(\gamma)$ besitzt. Man kann dabei eine Anzahl s von Punkten von $\mathfrak{F}(v, w)$, die grösser oder gleich dem Geschlecht p von $\mathfrak{F}(v, w)$ also ≥ 3 ist, beliebig vorgeben, in welchen g Pole erster Ordnung haben soll [18f].

Da g über $\mathfrak{F}(v, w)$ gleich viele Pole wie Nullstellen hat, treten dann auch s Punkte von $\mathfrak{F}(v, w)$ auf, in denen g Nullstellen hat. Nach der Theorie des Jacobischen Umkehrproblems können $s - p$, also bei uns $s - 3$ dieser Nullstellen vorgegeben werden: die übrigen p, also 3, Nullstellen sind dann – i.A. eindeutig – bestimmt.

Unter den möglichen Wahlen der s-Pole und $s - 3$ freien Nullstellen werden wir nun eine für unsere Zwecke besonders geeignete treffen. Zunächst führen wir folgende Bezeichnungen für spezielle Punkte auf $\mathfrak{F}(z, w)$ und $\mathfrak{F}(v, w)$ ein:
Pole von w über den Punkten

$$\tfrac{1}{4}(\zeta_0 + k) \colon \mathfrak{q}_k^+ \,, \quad \tfrac{1}{4}(-\zeta_0 + k) \colon \mathfrak{q}_k^- \,,$$

Nullstellen von w über den Punkten

$$\tfrac{1}{4}(\zeta_0 + k) \colon \mathfrak{r}_k^+ \,, \quad \tfrac{1}{4}(-\zeta_0 + k) \colon \mathfrak{w}_k^- \,, \quad k \in \boldsymbol{Z};$$

Verzweigungspunkte von w auf $\mathfrak{F}(v, w)$: $\mathfrak{v}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, 8$.

Weiter identifizieren wir die Punkte $\mathfrak{q}_k^\pm$, $\mathfrak{r}_k^\pm$ für $k = 0, 1, 2, 3$ mit den entsprechenden Punkten von $\mathfrak{F}(v, w)$ und verstehen unter $\mathfrak{v}_\nu$ und allgemein $\mathfrak{p}$ auch Punkte von $\mathfrak{F}(z, w)$ die über den Verzweigungspunkten bzw. dem allgemeinen Punkt $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{F}(v, w)$ liegen.

Übertragen wir nun den Begriff des exakten Divisors auf multiplikative Funktionen, so können wir die Forderungen über g folgendermassen formulieren: g soll den exakten Divisor

$$\mathfrak{g} = \prod_{\nu=1}^{8} \mathfrak{v}_\nu^{-1} \prod_{k=1}^{3} \mathfrak{r}_k^+ \prod_{j=2}^{3} \mathfrak{r}_j^- \prod_{k=1}^{3} \mathfrak{z}_k \tag{4.41}$$

besitzen, wobei $\mathfrak{z}_k$, $k = 1, 2, 3$ drei durch das Jacobische Umkehrproblem bestimmte Punkte sind.

Die Angabe des exakten Divisors bestimmt aber g bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig: denn sind g_1, g_2 zwei multiplikative Funktionen mit denselben Multiplikatoren und exakten Divisoren, so ist das Verhältnis g_1/g_2 eine meromorphe Funktion ohne Pole und Nullstellen, also eine Konstante.

Setzen wir nun

$$\varrho_2 = d \log g \tag{4.42}$$

dann haben wir in σ, über (4.34), (4.37), ein Differential, das allen Bedingungen genügt. Aus (4.32) bekommen wir dann eine Lösung von (4.26), die wir mit $\mathfrak{H}'$ bezeichnen wollen; bezeichnet $\mathfrak{h}_0'$ ihren exakten Divisor im Periodenstreifen, so gilt $\mathfrak{h}_0' = \mathfrak{g}$, wobei $\mathfrak{g}$ durch (4.41) gegeben ist; ferner

$$\mathfrak{h}_{-1}' > \left(\prod_{\nu=1}^{8} \mathfrak{v}_\nu^{-1}\right) (\mathfrak{r}_{-4}^{+})^{-1} (\mathfrak{r}_{-3}^{-})^{-1} (\mathfrak{r}_{-4}^{-})^{-1}\,, \tag{4.43}$$

d.h. $\mathfrak{H}'$ hat maximal einen Pol erster Ordnung in je einem der Punkte über

$$\frac{1}{4}\zeta_0 - 1\,, \quad -\frac{1}{4}\zeta_0 - \frac{3}{4}, \quad -\frac{1}{4}\zeta_0 - 1$$

und über sämtlichen Verzweigungspunkten.

Über den Punkten

$$\pm\frac{\zeta_0}{4}, \quad \frac{1}{4}(\pm\zeta_0 + 1)\,, \quad \frac{1}{4}(\pm\zeta_0 + 2)\,, \quad \frac{1}{4}(\pm\zeta_0 + 3)\,,$$
$$\frac{1}{4}(\pm\zeta_0 - 1)\,, \quad \frac{1}{4}(\pm\zeta_0 - 2)\,, \quad \frac{1}{4}(\pm\zeta_0 - 3)$$

aber ist $\mathfrak{H}'$ regulär.

Weiter gilt

$$d\,(\log t\,\mathfrak{H}' - \log \mathfrak{H}') = d \log w\,, \tag{4.44}$$

also

$$t\,\mathfrak{H}' = K\,w\,\mathfrak{H}' \tag{4.45}$$

wobei $K \neq 0$ eine Konstante ist. Wir behaupten, dass $K = 1$ sein muss. Dazu betrachten wir einen der 2 Punkte über $v = 0$ und verwenden v als lokale uniformisierende Variable. Es ist

$$\sigma = d\,(z \log w) - \log w\,dz + f(v)\,dv\,, \tag{4.46}$$

wobei f möglicherweise bei $v = 0$ (nämlich, wenn eine oder mehrere der Punkte $\mathfrak{z}_\nu$ aus $\mathfrak{h}_0$ gerade mit dem betrachteten Punkt übereinstimmen) einen Pol mit positivem ganzzahligem Residuum hat.

Nun ist

$$\log w = \pm 2\sqrt{\beta - \alpha}\,v^2 + O(v^4) \tag{4.47}$$

und $d\,z = (2\pi i)^{-1}\,d\,v/v$ also, durch Integration

$$\mathfrak{H}' = F(v)\,e^{z \log w}\,, \tag{4.48}$$

wobei F in einer Umgebung von $v = 0$ meromorph ist. $\mathfrak{H}'$ aus (4.48) erfüllt (4.45) mit $K = 1$. Ausserdem haben wir nun auch die Bedingung (4.29) verifiziert.

Zusammenfassung: Es wurde eine meromorphe Lösung von (4.26) «in abstracto» konstruiert, die (4.29) erfüllt und im Periodenstreifen zum exakten Divisor

$$\mathfrak{h}_0' = \prod_{\nu=1}^{8} \mathfrak{v}_\nu^{-1} \prod_{k=1}^{3} \mathfrak{r}_k^+ \prod_{j=2}^{3} \mathfrak{r}_j^- \prod_{k=1}^{3} \mathfrak{d}_k \tag{4.49}$$

gehört.

Sie ist gegeben durch:

$$\mathfrak{H}'(\mathfrak{p}) = g(\mathfrak{p}) \exp\left(\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} z \, d \log w + \varrho_1 \right), \tag{4.49'}$$

wobei $\mathfrak{p} = (z, w)$ der laufende Punkt auf $\mathfrak{F}(z, w)$, $\mathfrak{p}_0$ ein beliebiger, fester Punkt aus $\mathfrak{F}(z, w)$, g eine bestimmte multiplikative Funktion und ϱ_1 ein bestimmtes Abelsches Differential 3. Gattung sind.

4.3 *Konstruktion «in abstracto» einer Lösung H der Differenzengleichung* (4.18). *Eindeutigkeitssätze*

Gemäss (4.27) bilden wir die meromorphe Funktion

$$H'(z) = \mathfrak{H}'(z, w_1) + \mathfrak{H}'(z, w_2) , \tag{4.50}$$

wobei $\mathfrak{H}'$ die im vorigen Unterabschnitt 4.2 konstruierte spezielle Lösung von (4.26) ist.

Wir behaupten folgendes

Lemma: $$H' \not\equiv 0 . \tag{4.51}$$

Beweis: Wäre $H' = 0$ dann gälte

$$\mathfrak{H}'(z, w_1) = -\mathfrak{H}'(z, w_2) \tag{4.52}$$

also wäre für den exakten Divisor von $\mathfrak{H}'$ im Periodenstreifen

$$\mathfrak{h}_0' > \left(\prod_{\nu=1}^{8} \mathfrak{v}_\nu^{-1} \right) \left(\prod_{k=1}^{3} \mathfrak{r}_k^+ \, \mathfrak{q}_k^+ \right) \left(\prod_{j=2}^{3} \mathfrak{r}_j^- \, \mathfrak{q}_j^- \right) \tag{4.53}$$

oder

$$d(\mathfrak{h}_0') \geqslant 2$$

im Widerspruch mit der Gleichung (4.49), welche

$$d(\mathfrak{h}_0') = 0 \tag{4.54}$$

impliziert.

H' hat keine Singularitäten in den Verzweigungspunkten und in den Punkten $(\pm \zeta_0 + j)/4$, $(\pm \zeta_0 - j)/4$ $(j = 1, 2)$, $(\pm \zeta_0 + 3)/4$, $(+ \zeta_0 - 3)/4$ und einen Pol maximal erster Ordnung in $\pm \zeta_0/4 - 1$, $-(\zeta_0 + 3)/4$.

Nun haben wir 2 Fälle zu unterscheiden. Entweder ist H' symmetrisch, erfüllt also

$$H'(z) = H'(-z) \tag{4.55}$$

oder H' ist nicht symmetrisch

$$H''(z) = H'(z) - H'(-z) \not\equiv 0 . \tag{4.56}$$

Fall (4.55)*:* $H'(z)$ ist regulär in den Punkten

$$(\pm \zeta_0 + k)/4\,, \quad (\pm \zeta_0 - k)/4\,, \quad k = 0, 1, 2, 3\,.$$

Wir setzen

$$H(z) = (v - v^{-1})\, H'(z)\,. \tag{4.57}$$

$H(z)$ erfüllt dann

(a) $H(-z) = -H(z)$

(b) $H(z)$ ist regulär in $(\pm \zeta_0 + k)/4$, $(\pm \zeta_0 - k)/4$, $k = 0, 1, 2, 3$

(c) $H(z)$ hat für $Im\, z \to \pm \infty$ Entwicklungen

$$H(z) = v^{-1}\,[A^{\pm}(v)\, e^{z \log w} + B^{\pm}(v)\, e^{-z \log w}]\,,$$

wobei A^+, B^+ in $v = 0$, A^-, B^- in $v = \infty$ regulär sind und von nun an unter w diejenige Wurzel von (4.23) verstanden wird, deren Entwicklung in der Nähe von $v = 0$ bzw. $v = \infty$ lautet

$$w = 1 + 2\sqrt{\beta - \alpha}\, v^{\pm 2} + O(v^{\pm 4}) \quad (\sqrt{}\text{ bestimmt})$$

und $\log w$ durch

$$\log w = 2\sqrt{\beta - \alpha}\, v^{\pm 2} + O(v^{\pm 4})$$

festgelegt ist.

(c) folgt unmittelbar aus (4.47), (4.48) (und den ganz analogen Formeln, die in der Nähe von $v = \infty$ gelten).

Fall (4.56)*:* Hier ist $H'' \not\equiv 0$. H'' hat Pole höchstens erster Ordnung in den Punkten $\pm (\zeta_0 + 3)/4$. Nun bilden wir

$$H(z) = [v - e^{\pi i/2\,(\zeta_0 + 3)}]\,[v^{-1} - e^{\pi i/2\,(\zeta_0 + 3)}]\, H''(z)\,. \tag{4.58}$$

Das so gebildete H hat wieder die Eigenschaften (a), (b), (c). Somit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 1: Die Differenzengleichung (4.18) hat eine (nicht triviale) meromorphe Lösung mit den Eigenschaften (a), (b), (c). Die einzigen möglichen Singularitäten von H liegen in den Punkten $\pm (\zeta_0 + l)$, $l \in \boldsymbol{Z}$, $|\, l\,| \geq 4$.

Wir wollen nun zeigen, dass die von uns konstruierte Lösung von (4.18) die [illegible] ist, welche gewisse Eigenschaften besitzt: dies wird uns später nützlich sein. Dazu beweisen wir 2 Sätze.

Wir bezeichnen im Folgenden mit $\mathfrak{P}$ einen festen Periodenstreifen der z-Ebene, der die Punkte

$$z_k^+ = (\zeta_0 + k)/4$$

und

$$z_k^- = (-\zeta_0 + k)/4\,, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

enthält.

Es gilt nun der

Satz 2: Es gibt (bis auf eine multiplikative Konstante) höchstens eine einzige nicht triviale Lösung H von (4.18), welche folgende Eigenschaften besitzt:

(a) $H(-z) = -H(z)$;

(b) $H = 0$ in den Punkten $z = \pm z_1^-$;

(c) H ist in ganz $\mathfrak{P}$ regulär (ausgenommen im Unendlichen) und hat in den Punkten $\pm \zeta_0/4 + 1$ höchstens Pole 1. Ordnung;

(d) für $Im\, z \to +\infty$ gilt

$$H(z) = \left[\frac{a_{-1}^{+}}{v} + a_0^{+} + a_1^{+}\, v + O(v^2)\right] + [b_1^{+}\, z\, v + O(z\, v^2)]$$

und für $Im\, z \to -\infty$ gilt

$$H(z) = [a_{-1}^{-}\, v + a_0^{-} + a_1^{-}\, v^{-1} + O(v^{-2})] + [b_1^{-}\, z\, v + O(z/v^2)]\,,$$

wobei $a_{-1}^{\pm}$, $a_0^{\pm}$, $a_1^{\pm}$, ..., $b_1^{\pm}$, ... komplexe Zahlen sind.

Existiert tatsächlich eine nicht triviale Lösung H mit den Eigenschaften a), b), c), d), so ist ihre Konstruktion durch die Formeln (4.49'), (4.50), (4.56), (4.58) gegeben.

Beweis: Sind H_1, H_2 Lösungen von (4.18) mit den Eigenschaften (a), (b), (c), (d), dann zeigen wir zunächst

$$H_2 = \Pi\, H_1\,,$$

wobei Π eine meromorphe Funktion von z der Periode 1 ist.

Um dies zu beweisen, betrachten wir die Wronskische Determinante der zwei Lösungen

$$W(z) = \begin{vmatrix} H_1(z) & H_1(z+1) \\ H_2(z) & H_2(z+1) \end{vmatrix}.$$

Als Folge der Voraussetzungen über H_1, H_2, gilt:

$$W(-z) = -W(+z)\,, \quad W(z+1) = W(z)$$

und folglich $W(z) = F(v)$, wobei F meromorph ist. Für $v = 0$, $v = \infty$ ist F regulär, wegen d).

Da F die Gleichung $F(v^{-1}) = -F(v)$ erfüllt, hat es die zwei Nullstellen $v = \pm 1$. F besitzt aber noch die zwei weiteren Nullstellen $v = \exp(\pm 2\pi i\, z_1^{-})$; da F höchstens nur zwei einfache Pole besitzt, nämlich in $v = \exp(\pm 2\pi i\, \zeta_0/4)$, und sonst regulär ist, muss es identisch verschwinden, was $H_2 = \Pi\, H_1$ impliziert.

Wir zeigen nun, dass Π eine Konstante sein muss.

Zunächst bemerken wir, dass Π gerade sein muss, da H_1, H_2 beide ungerade sind. Wir bilden nun:

$$H_3(z) = \Pi_1(z)\, H_1(z) \quad \text{mit} \quad \Pi_1(z) = \alpha + \beta\, \Pi(z)$$

und wählen die Konstanten α, β so dass:

$$\Pi_1(z) = \alpha + \beta\, \Pi(z) = 0 \quad \text{für} \quad z = \pm \frac{\zeta_0}{4}.$$

Das ist stets möglich: denn entweder ist $\Pi(\zeta_0/4) = 0$ und dann wählt man $\alpha = 0$, $\beta = 1$, oder es gilt $\Pi(\zeta_0/4) \neq 0$ und dann wählt man $\alpha = -\Pi(\zeta_0/4)$, $\beta = 1$.

Mit dieser Wahl gilt

$$H_3\left[\left(\pm \frac{\zeta_0}{4} + k\right)\right] = 0\,, \quad k \in \boldsymbol{Z}\,.$$

Betrachtet man nun

$$H_4(z) = H_3(z) + H_3\left(z + \frac{1}{4}\right) \tag{4.59}$$

und bildet man

$$W'(z) = \begin{vmatrix} H_3(z) & H_3(z+1) \\ H_4(z) & H_4(z+1) \end{vmatrix},$$

so gilt $W'(z) = F'(v)$, wobei F' sicher Nullstellen in $v = \exp(-2\pi i \zeta_0/4)$ und $v = \exp(2\pi i(\zeta_0/4 + 3/4))$ hat:
da aber F' keine Pole besitzt, muss $F' = 0$ sein.

Also:

$$H_4(z) = R(v)\, H_3(z) \tag{4.60}$$

wobei R meromorph in v ist.

Aus (4.59) und (4.60) folgt:

$$H_3\left(z + \frac{1}{4}\right) = (R(v) - 1)\, H_3(z)\,.$$

Daher:

$$H_3(z+1) = [S(v)]^4\, H_3(z) \quad \text{mit} \quad S(v) = R(v) - 1\,,$$

und folglich, wenn $S \neq 0$:

$$H_3(z+1) + H_3(z-1) = [S(v)^4 + S(v)^{-4}]\, H_3(z)\,. \tag{4.61}$$

Anderseits ist H_3 eine Lösung von (4.18), also

$$H_3(z+1) + H_3(z-1) = 2A(v)\, H_3(z)\,. \tag{4.62}$$

(4.61) und (4.62) sind nur dann kompatibel, wenn $A = \pm 1$: $A = -1$ ist aber unmöglich und $A = 1$ widerspricht der Annahme am Schluss von 4.1. Daher muss $S = 0$ sein, also $R = 1$, folglich $H_3 = 0$, also $\Pi(z) = \Pi(\zeta_0/4) =$ Konstante.

Somit ist aber auch Satz 1 gezeigt.

Die von uns «in abstracto» konstruierte Lösung H von (4.18) besitzt im Falle (4.56) die Eigenschaften (a), (b), (c), (d) vom Lemma. Daher, im Falle (4.56), gibt unsere Konstruktion die (bis auf multiplikative Konstante) einzige nicht triviale Lösung von (4.18) mit den Eigenschaften (a), (b), (c), (d).

Satz 3: Es gibt (bis auf eine multiplikative Konstante) höchstens eine einzige nicht triviale Lösung H' von (4.18) mit den Eigenschaften:

(a)′ $H'(z) = H'(-z)$

(b)′ H' ist regulär in $\mathfrak{P}$ und hat in den Punkten $\pm\zeta_0/4 + 1$ höchstens Pole 1. Ordnung;

(c)′ $H'(z) \to 0$ für $Im\, z \to \pm\infty$.

Existiert tatsächlich eine solche Lösung, dann ist ihre Konstruktion durch (4.49′), (4.50) gegeben.

Beweis: Seien H_1', H_2' zwei Lösungen mit den Eigenschaften (a)′, (b)′, (c)′.

Wir betrachten:

$$W(z) = \begin{vmatrix} H_1'(z) & H_1'(z+1) \\ H_2'(z) & H_2'(z+1) \end{vmatrix}.$$

Es gilt, wegen der Differenzengleichung und der Symmetrie (a)':

$$W(z+1) = W(z)\,, \qquad W(-z) = -W(z)\,.$$

Ferner $W(z) \to 0$ für $Im\, z \to \pm\infty$.

Daher: $W(z) = F(v)$ und $F(0) = F(\infty) = 0$. Da W ungerade ist, gilt auch $F(1) = 0$. F hat aber höchstens einfache Pole in $v = \exp(\pm 2\pi i \zeta_0/4)$ und ist sonst regulär. Da F meromorph ist, muss $F = 0$, also

$$H_2' = \Pi H_1'\,,$$

wobei Π eine meromorphe Funktion von z der Periode 1 ist.

Wir behaupten nun, dass Π eine Konstante ist. Bilden wir nämlich analog wie früher die Grössen

$$H_3'(z) = \Pi_1(z)\, H_1'(z) \quad \text{mit} \quad \Pi_1\left(\frac{\zeta_0}{4}\right) = 0\,,$$

ferner

$$H_4'(z) = H_3'(z) - H_3'\left(z + \frac{1}{4}\right)$$

und endlich

$$F'(v) = \begin{vmatrix} H_3'(z) & H_3'(z+1) \\ H_4'(z) & H_4'(z+1) \end{vmatrix}.$$

F' hat Nullstellen bei $v = 0$, $v = \infty$ und keine Pole: daher muss $F' = 0$; mit denselben Argumenten wie am Schluss des Beweises von Satz 2 kann man daraus die Konstanz von Π herleiten. Die «in abstracto» konstruierte Lösung H' ((4.50)) besitzt, im Falle (4.55), die Eigenschaften (a)', (b)', (c)' von Satz 3: sie also die einzige Lösung mit diesen Eigenschaften.

4.4. *Die der in* 4.3 *konstruierten Funktion H entsprechende Lösung h der Differenzengleichung* (2.25 = 4.1) *und ihre Eigenschaften*

Gemäss (4.14), (4.17) entspricht der im letzten Unterabschnitt 4.3 konstruierten Funktion H folgende Lösung von (2.25 = 4.1):

$$\begin{aligned} h(Z) &= H\left(z + \tfrac{3}{4}\right) + \zeta(Z+3)\, H\left(z + \tfrac{1}{2}\right) + [\zeta(Z+3)\,\zeta(Z+2) - 1]\, H\left(z + \tfrac{1}{4}\right) \\ &+ [\zeta(Z+3)\,\zeta(Z+2)\,\zeta(Z+1) - \zeta(Z+3) - \zeta(Z+1)]\, H(z) \\ &+ [\zeta(Z+2)\,\zeta(Z+1) - 1]\, H\left(z - \tfrac{1}{4}\right) + \zeta(Z+1)\, H\left(z - \tfrac{1}{2}\right) + H\left(z - \tfrac{3}{4}\right). \end{aligned} \tag{4.63}$$

Eine leichte Verifikation zeigt, dass $h(Z)$ alle Bedingungen von 2.3 erfüllt. Für das asymptotische Verhalten bei $Im\, Z \to \infty$ ergibt sich dabei

$$h(Z) = v^2 (c_1 + c_2 Z) + O(v^3) \tag{4.64}$$

eine Abschätzung, die durch Jost [9, (2.26)] verwendet wurde.

Wir werden jetzt zeigen, dass die konstruierte Lösung h nicht identisch verschwindet.

Satz 1: Die durch (4.59) gegebene Lösung h der Differenzengleichung (4.1)

$$h(Z+1) + h(Z-1) = \zeta(Z)\, h(Z)$$

besitzt in mindestens einem der Punkte

$$Z = \zeta_0 + k$$

und in mindestens einem der Punkte

$$Z = -\zeta_0 + k\,, \quad k = 1, 2, 3$$

je einen Pol 1. Ordnung.

Korollar: h besitzt sicher in $Z = \pm\,\zeta_0 + 1, Z = \pm\,\zeta_0 - 1$ Pole 1. Ordnung.

Beweis des Satzes: Wir nehmen ad absurdum an, dass die Ordnung von h in $\zeta_0 + k$ grösser als -1 sei für $k = 1, 2, 3$ und zeigen, dass dies zu einem Widerspruch führt: der andere Fall $-\zeta_0 + k$ kann ganz analog behandelt werden.

Wegen (4.59) und wegen der Regularität von h in ζ_0, $\zeta_0 + k$ $(k = 1, 2, 3)$ und dem Umstand, dass $\zeta(Z)$ nur in $Z = \pm\,\zeta_0 + 4n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ singulär ist, kann man aus (4.1) folgende Gleichungen herleiten:

$$\begin{pmatrix} 1 & \zeta_3 & \zeta_3\zeta_2 - 1 \\ \zeta_1 & \zeta_3\zeta_1 & \zeta_3 \\ \zeta_2\zeta_1 - 1 & \zeta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = 0\,,$$

wobei

$$\zeta_k = \zeta\,(\zeta_0 + k)\,, \quad H_k = H\,\big((\zeta_0 + k)/4\big)\,, \quad k = 1, 2, 3\,.$$

Das System dieser 3 Gleichungen für H_1, H_2, H_3 besitzt aber nur die triviale Lösung $H_1 = H_2 = H_3 = 0$ d.h.

$$H\,\big(\pm\,(\zeta_0 + k)/4\big) = 0\,, \quad k = 1, 2, 3\,. \tag{4.65}$$

Aus (4.65) folgt aber ein Widerspruch gegen die Sätze 2, 3 vom letzten Unterabschnitt 4.3: denn im Falle (4.56) besitzt H die Eigenschaften (a), (b), (c), (d) von Satz 2 (Unterabschnitt 4.3) und, wegen (4.65), würde aber dann auch die weitere Lösung von (4.18)

$$H^0(z) = H(z)\,[v - e^{2\pi i[(\zeta_0+2)/4]}]^{-1}\,[v^{-1} - e^{2\pi i[(\zeta_0+2)/4]}]^{-1}$$

dieselben Eigenschaften (a), (b), (c), (d) besitzen, was, nach dem Eindeutigkeitssatz 2, unmöglich ist. Im Falle (4.55) hat $H' = H/(v - v^{-1})$ die Eigenschaften (a)', (b)', (c)' von Satz 3 (Unterabschnitt 4.3) und wieder auf Grund von (4.65) würde auch

$$H^{0\prime}(z) = H'(z)\,[v - e^{2\pi i[(\zeta_0+2)/4]}]^{-1}\,[v^{-1} - e^{2\pi i[(\zeta_0+2)/4]}]^{-1}$$

dieselben Eigenschaften besitzen, gegen den Eindeutigkeitssatz 3. Somit ist die absurdum Annahme widerlegt und der Satz gezeigt.

Beweis des Korollars: Der Satz besagt, dass h an mindestens einer der Stellen $Z = \zeta_0 + k$ und an mindestens einer der Stellen $Z = -\zeta_0 + k$ $(k = 1, 2, 3)$ Pole 1. Ordnung besitzt. Hat nun h einen Pol in $\zeta_0 + 3$ bzw. $-\zeta_0 + 3$, so besitzt h wegen der Differenzengleichung (4.1) auch in $\zeta_0 + 2$ oder in $\zeta_0 + 1$ bzw. in $-\zeta_0 + 2$ oder $-\zeta_0 + 1$ einen Pol 1. Ordnung. Aber aus einem Pol in $\zeta_0 + 2$ bzw. $-\zeta_0 + 2$ folgt durch die Differenzengleichung und die Regularität von h in ζ_0 die Existenz von Polen in $\zeta_0 + 1$ bzw. $-\zeta_0 + 1$. Schliesslich durch die Schiefsymmetrie $h(Z) = -h\,(-Z)$ folgt, dass h ebenfalls in $-\zeta_0 \pm 1$ Pole 1. Ordnung besitzt.

Wir fassen nun die Ergebnisse über h im folgenden Satz zusammen:

Satz 2: Die Differenzengleichung (4.1)

$$h(Z+1)+h(Z-1)=\zeta(Z)\,h(Z), \quad \zeta(Z)=-\frac{\cos\pi/2\,\zeta_0-2\cos\pi/2\,Z}{\cos\pi/2\,\zeta_0-\cos\pi/2\,Z}$$

hat eine ungerade, nicht triviale meromorphe Lösung, die ausserhalb der Punkte

$$Z=\pm\zeta_0+l\,, \quad l\in \boldsymbol{Z}\,, \quad |l|>0$$

regulär ist und in $\pm\zeta_0+1$, $\pm\zeta_0-1$ sicher Pole erster Ordnung besitzt.

Für $Im\,Z\to\pm\infty$ gilt

$$h(Z)=e^{\pm\pi i Z}\,(C_1\pm C_2\,Z)+O\,(e^{\pm(3\pi i/2)Z})$$

mit Konstanten C_1, C_2.

Diese Lösung ist bis auf einen konstanten Faktor eindeutig[5]).

Wir haben aber in diesem Abschnitt **4** die Lösung «in abstracto» bereits konstruiert durch ein Verfahren, das wir kurz zusammenfassen wollen, in folgendem

Satz 3: Die Lösung h der Differenzengleichung (4.1), welche die Eigenschaften von Satz 2 besitzt, ist gegeben durch (4.63), wobei $H(z)$ seinerseits entweder durch

$$H(z)=(v-v^{-1})\,(\mathfrak{H}'(z,w_1)\pm\mathfrak{H}'(z,w_2))$$

oder durch

$$H(z)=(v-e^{\pi i/2\,(\zeta_0+1)})\,(v^{-1}-e^{\pi i/2\,(\zeta_0+1)})\times(\mathfrak{H}'(z,w_1)+\mathfrak{H}'(z,w_2)-\mathfrak{H}'(-z,w_1)-\mathfrak{H}'(-z,w_2))$$

gegeben ist, je nachdem, ob $\mathfrak{H}'(z,w_1)+\mathfrak{H}'(z,w_2)=\mathfrak{H}'(-z,w_1)+\mathfrak{H}'(-z,w_2)$ oder nicht. Die Funktion $\mathfrak{H}'$, welche h bestimmt, ist gegeben durch:

$$\mathfrak{H}'(z,w)=g(z,w)\exp\left(\int_{(z_0,w_0)}^{(z,w)} z'\,d\log w'+\varrho_1\right), \qquad ((4.49'))$$

dabei ist ϱ_1 ein Abelsches Differential 1. Gattung auf der Fläche $\mathfrak{F}(v,w)$, welches durch die Residuen von $\int z\,d\log w$ bestimmt ist, g eine multiplikative Funktion, die zum exakten Divisor (4.41) gehört und die reziproken Multiplikatoren von $\int(z\,d\log w+\varrho_1)$ besitzt.

In den nächsten Abschnitten werden wir uns mit der effektiven Konstruktion von g und ϱ_1 beschäftigen. Zunächst aber noch eine Bemerkung über die Lösung des physikalischen Problems.

Bemerkung: Wegen dem Zusammenhang (2.27) folgt aus Satz 2 (oder aus dem Korollar von Satz 1), dass die Residuen der Funktion f an den Stellen $Z=\pm\zeta_0$ nicht verschwinden. Diese Residuen sind aber direkt verbunden mit der Wahrscheinlichkeit eines elastischen Prozesses ((3.5), (3.7)): ihr Nichtverschwinden drückt den Umstand aus, dass bei sämtlichen Energien elastische Prozesse möglich sind.

---

[5]) Die Eindeutigkeit wurde bereits von R. Jost [9] bewiesen.

5. «Abstrakter» Ausdruck der Lösung durch abelsche Integrale und Thetafunktionen vom Geschlecht 3

5.1 *Bestimmung der multiplikativen Funktion g von* (4.42)

In 4.2 haben wir die multiplikative Funktion g eingeführt: sie soll I) die reziproken Multiplikatoren von $\sigma_1 = z\, d\log w + \varrho_1$ besitzen und ferner II) Pole in den Verzweigungspunkten $\mathfrak{v}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, 8)$ und Nullstellen in den Punkten $\mathfrak{r}_k^+$ $(k = 1, 2, 3)$, $\mathfrak{r}_j^-$ $(j = 2, 3)$ der hyperelliptischen Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}(v, w)$ haben. Wir wollen hier eine Konstruktion von g geben. Zunächst aber einige Bezeichnungen und Begriffe, die wir im folgenden stets benützen werden [18]. Sei $\mathfrak{R}$ eine beliebige algebraische, d.h. kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht p und seien $\Sigma_\mu = \alpha_\mu$, $\Sigma_{p+\mu} = \beta_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ die $2p$ Zyklen einer kanonischen Zerschneidung Σ von $\mathfrak{R}$, so dass die Matrix der Schnittzahlen die Gestalt $\begin{pmatrix} 0 & -E \\ +E & 0 \end{pmatrix}$ besitzt, wobei 0 bzw. E die $p \times p$ Null- bzw. Einheitsmatrix bezeichnen [18g]. Sei $H_1(\mathfrak{R}, \boldsymbol{Z})$ die erste Homologiegruppe von $\mathfrak{R}$: sie hat die Homologieklassen der Zyklen Σ_μ als Basis. Bekanntlich existiert eine Dualität zwischen H_1 und der additiven Gruppe $H^1(\mathfrak{R})$ der regulären harmonischen Differentiale, die durch die Paarung $(H_1, H^1) \to \boldsymbol{C}: \int\limits_\gamma \zeta,\ \zeta \in H^1,\ \gamma \in H_1$ definiert wird (mit $\boldsymbol{C}$ bezeichnen wir den 1-dimensionalen komplexen Vektorraum). Auf diese Weise gehört zu Σ insbesondere eine Basis im komplexen Vektorraum H_0 der abelschen Differentiale 1. Gattung, die durch die Normierung[6]) $\int\limits_{\beta_\mu} \varphi^\nu = \pi i \delta_\mu^\nu$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ eindeutig bestimmt ist: $\{\varphi^\nu\}$ ist das System der (bezüglich Σ) «normalen Abelschen Differentiale 1. Gattung». $\boldsymbol{\Omega} = (\pi i \boldsymbol{E}, \boldsymbol{\tau})$ mit $\tau_\mu^\nu = \int\limits_{\alpha_\mu} \varphi^\nu$ ist die Periodenmatrix der φ^ν: man zeigt, dass $\boldsymbol{\Omega}$ eine (reduzierte) Riemannsche Matrix ist[7]). Im folgenden werden wir oft eine Kongruenzrelation gebrauchen: sind $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2 \in \boldsymbol{C}^p$ (wobei $\boldsymbol{C}^p$ der p-dimensionale komplexe Vektorraum ist), so schreiben wir $\boldsymbol{c}_1 \equiv \boldsymbol{c}_2$ genau dann, wenn $c_1^\mu = c_2^\mu + \pi i h^\mu + \sum\limits_{\lambda=1}^{p} g^\lambda \tau_\lambda^\mu$ für gewisse ganze Zahlen h^μ, g^λ ($\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$ sind genau dann einander kongruent, wenn sie dasselbe Element der Jacobischen Mannigfaltigkeit

$$J(\mathfrak{R}) = \boldsymbol{C}^p \Big/ \left\{\pi i h^\mu + \sum_{\lambda=1}^{p} g^\lambda \tau_\lambda^\mu\right\}$$

darstellen) [20a].

Sei nun $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{m_1} \ldots \mathfrak{p}_n^{m_n}$ ein Divisor von $\mathfrak{R}$. Wir betrachten die Abbildung $\boldsymbol{u}$, welche durch

$$\boldsymbol{u}(\mathfrak{a}) = \sum_{j=1}^{n} m_j \int_{\mathfrak{v}_0}^{\mathfrak{v}_j} \boldsymbol{\varphi} \tag{5.1}$$

---

[6]) Das ist die klassische Normierung: z.B. RIEMANN [17, S.129] und KRAZER [19c, S.413].

[7]) Eine $p \times 2p$-Matrix der Gestalt $(\pi i \boldsymbol{E}, \boldsymbol{\tau})$ wobei τ eine beliebige nicht singuläre symmetrische $p \times p$-Matrix ist, welche einen negativ definiten Realteil besitzt, (so dass $i\,\boldsymbol{\tau}$ ein Element der $p\,(p+1)/2$-dimensionalen Siegelschen oberen Halbebene ist), heisst allgemein eine «(reduzierte) Riemannsche Matrix» [19a]: dabei braucht $\boldsymbol{\tau}$ keine zweite Periodenmatrix eines Systems von normalen Differentialen 1. Gattung auf einer Riemannschen Fläche zu sein.

definiert ist: dabei ist $\mathfrak{b}_0$ ein beliebiger fester «Basispunkt» für die Integrale auf $\mathfrak{R}$. $\boldsymbol{u}$ gibt eine Abbildung der Divisoren von $\mathfrak{R}$ in $J(\mathfrak{R})$. Wir können nun zu der Konstruktion von g übergehen. Diese beruht einmal auf folgendem Satz, der eine Verallgemeinerung des Abelschen Theorems ist [16]:

Satz 1: Seien $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \in \boldsymbol{C}^p$, ferner $\mathfrak{g}$ ein Divisor von $\mathfrak{R}$. Damit $\mathfrak{g}$ exakter Divisor einer multiplikativen Funktion mit den Multiplikatoren $m^\lambda = \exp(\mu_\lambda)$, $n^\lambda = \exp(\nu_\lambda)$, $\lambda = 1, \ldots, p$ auf der Klassenfläche $\hat{\mathfrak{R}}$ ist, ist notwendig und hinreichend, dass

$$\boldsymbol{u}(\mathfrak{g}) \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{\pi i}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\mu}\,. \tag{5.2}$$

Dieser Satz gibt einen Zusammenhang zwischen Polen, Nullstellen und Multiplikatoren einer multiplikativen Funktion.

In unserem Falle ist

$$\mathfrak{g} = \prod_{\nu=1}^{8} \mathfrak{v}_\nu^{-1} \prod_{k=1}^{3} \mathfrak{r}_k^{+} \prod_{j=2}^{3} \mathfrak{r}_j^{-} \prod_{k=1}^{3} \mathfrak{z}_k\,, \tag{5.3}$$

wobei $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ unbekannt sind: ferner sind die Multiplikatoren $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ also die Grössen $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}$ vorgegeben. Die Gleichung (5.2) kann dann in der Form

$$\boldsymbol{u}(\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{z}_3) \equiv \boldsymbol{c} \tag{5.4}$$

mit

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{u}\left(\prod_{\nu=1}^{8} \mathfrak{v}_\nu \prod_{k=1}^{3} (\mathfrak{r}_k^{+})^{-1} \prod_{j=2}^{3} (\mathfrak{r}_j^{-})^{-1}\right) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{\pi i}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\mu}$$

geschrieben werden. Können wir die unbekannten Stellen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ aus (5.4) bestimmen, so ist auch die gesuchte multiplikative Funktion g gefunden, wie wir in 4.2 bereits bemerkt hatten. Die Bestimmung von $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ aus (5.4) ist aber nichts anderes als die Lösung eines Jacobischen Umkehrproblems, da die rechte Seite von (5.4) völlig bekannt ist. Nach RIEMANN [17, S. 188, siehe auch SPRINGER [18e]] hat aber ein Umkehrproblem unserer Form

$$\boldsymbol{u}(\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{z}_3) \equiv \boldsymbol{c}\,,$$

wobei $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{C}^p$ bekannt ist, stets eine Lösung und i.A. auch nur eine. Wir wollen nun zeigen, dass wir tatsächlich im allgemeinen Fall sind, d.h. dass (5.4) eine einzige Lösung $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ besitzt.

Satz 2: Das Jacobische Umkehrproblem (5.4) besitzt eine einzige Lösung $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$.

Beweis: Wir nehmen ad absurdum an, es gäbe mehrere Lösungen. Dafür ist notwendig und hinreichend [18d], dass

$$i(\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{z}_3) > 0 \tag{5.5}$$

wobei allgemein $i(\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{z}_3)$ die Dimension des Raumes der Abelschen Differentiale bezeichnet, deren Divisor ein Vielfaches vom Divisor $\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{z}_3$ ist. Da wir uns aber auf einer hyperelliptischen Fläche $\mathfrak{F}(v, w)$ befinden, ist (5.5) nur dann erfüllt, wenn zwei der Punkte $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ übereinander liegen, d.h. wenn sie konjugiert sind bezüglich der charakteristischen Involution I_2 der Fläche, welche v in v und w in w^{-1} transformiert [21].

Man kann also nach der Ad-absurdum-Annahme (5.5) einen der Punkte $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$, z.B. $\mathfrak{z}_1$, beliebig wählen: die anderen sind dann bestimmt und einer davon, z.B. $\mathfrak{z}_2$, stimmt mit dem zu $\mathfrak{z}_1$ im obigen Sinne konjugierten Punkt $\bar{\mathfrak{z}}_1$ überein. Zu jeder Wahl von $\mathfrak{z}_1$ gehört gemäss **4.** eindeutig (bis auf multiplikative Konstante) eine multiplikative Funktion $g_{\mathfrak{z}_1}$ und darüber hinaus eine Lösung $H'_{\mathfrak{z}_1}$ (4.50) der Gleichung (4.18).

Wir behaupten nun, dass zu zwei verschiedenen Wahlen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ von $\mathfrak{z}_1$ auch zwei wesentlich verschiedene Funktionen $H'_{\mathfrak{p}_1}$, $H'_{\mathfrak{p}_2}$ gehören. Wäre nämlich $H'_{\mathfrak{p}_1} = C\, H'_{\mathfrak{p}_2}$ (C konstant), so hätte man

$$\mathfrak{H}'_{\mathfrak{p}_1}(z, w_1) + \mathfrak{H}'_{\mathfrak{p}_1}(z, w_2) = C\left(\mathfrak{H}'_{\mathfrak{p}_2}(z, w_1) + \mathfrak{H}'_{\mathfrak{p}_2}(z, w_2)\right)$$

und folglich

$$(\mathfrak{H}'_{\mathfrak{p}_1} - \mathfrak{H}'_{\mathfrak{p}_2})\,(z, w_1) = -\,C\,(\mathfrak{H}'_{\mathfrak{p}_1} - \mathfrak{H}'_{\mathfrak{p}_2})\,(z, w_2)\,.$$

Dann hätte aber die Lösung $\mathfrak{H}'_{\mathfrak{p}_1} - \mathfrak{H}'_{\mathfrak{p}_2}$ von (4.26) die 10 Nullstellen

$$\mathfrak{r}_1^+, \mathfrak{r}_2^\pm, \mathfrak{r}_3^\pm, \mathfrak{q}_1^+, \mathfrak{q}_2^\pm\ \mathfrak{q}_3^\pm$$

im Periodenstreifen und nur 8 Pole: ihr würde aber eine multiplikative Funktion g entsprechen, welche 10 Nullstellen und 8 Pole besitzen würde. Eine solche existiert aber nicht. Also muss $H'_{\mathfrak{p}_1} \neq C\, H'_{\mathfrak{p}_2}$ für $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$ für alle Konstanten C. Nun sind zwei Fälle möglich:

A) Für alle Wahlen von $\mathfrak{z}_1$ gilt $H'_{\mathfrak{z}_1}(-z) = H'_{\mathfrak{z}_1}(z)$. Sind $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ zwei verschiedene Wahlen von $\mathfrak{z}_1$, dann gilt nach obigem $H'_{\mathfrak{p}_1} \neq C\, H'_{\mathfrak{p}_2}$ für alle Konstanten C, was in diesem Falle gegen Satz 3 von 4.3 verstösst: somit ist ein Widerspruch gegen die Ad-absurdum-Annahme hergeleitet;

B) es gibt mindestens eine Wahl $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{z}_1$ für die $H'_{\mathfrak{p}}(-z) \neq H'_{\mathfrak{p}}(z)$. Dann gibt es aber eine ganze Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{p})$ in welcher diese Gleichung gilt: sind nun $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{p})$, so nach obiger allgemeiner Feststellung $H'_{\mathfrak{p}_1} \neq C\, H'_{\mathfrak{p}_2}$ für alle Konstanten C und folglich auch, gemäss (4.58), (4.56), $H_{\mathfrak{p}_1} \neq C\, H_{\mathfrak{p}_2}$, was in diesem Falle gegen Satz 2 von 4.3 verstösst: wieder ist ein Widerspruch gegen die Ad-absurdum-Annahme erreicht und somit der Satz bewiesen.

Folgerung aus Satz 2: Die multiplikative Funktion g von (4.42) und somit die Lösung $\mathfrak{H}'$ der Gleichung (4.26), welche in die Konstruktion ((4.50) und ff.) der Lösung H von (4.18) eingeht, ist eindeutig bestimmt (bis auf eine multiplikative Konstante). Denn wir haben bereits in 4.3 bemerkt, dass der exakte Divisor $\mathfrak{g}$ und die Multiplikatoren g eindeutig bestimmen.

Wir gehen nun über zur Bestimmung von g: dazu brauchen wir den Begriff der Thetareihe, den wir, im Hinblick auf das folgende, etwas allgemeiner formulieren wollen[8]). Unter der allgemeinen Thetareihe (1. Ordnung) mit p Argumenten $\boldsymbol{v}$ und den Charakteristiken $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{C}^p$ versteht man [19a] die Reihe

$$\theta\begin{bmatrix}\boldsymbol{g}\\ \boldsymbol{h}\end{bmatrix}(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\tau}) = \exp({}^t\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{\tau}\,\boldsymbol{g} + 2\,{}^t\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{v} + 2\pi i\,{}^t\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{h})\,\theta\,(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\tau}\,\boldsymbol{g} + \pi i\,\boldsymbol{h}; \boldsymbol{\tau}) \qquad (5.6)$$

mit

$$\theta(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\tau}) = \theta\begin{bmatrix}\boldsymbol{o}\\ \boldsymbol{o}\end{bmatrix}(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\tau}) = \sum_{\boldsymbol{m}} \exp\,({}^t\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{\tau}\,\boldsymbol{m} + 2\,{}^t\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{v})\,, \qquad (5.7)$$

---

[8]) Für die Eigenschaften der Thetareihen und Funktionen siehe allgemein [19].

wobei die Summe über $\boldsymbol{Z}^p$, also über alle räumliche Gitterpunkte mit ganzzahligen Komponenten, zu erstrecken ist: $\boldsymbol{\tau}$ ist eine symmetrische, nicht singuläre Matrix mit negativ definitivem Realteil, dessen Elemente «Module» der Thetareihe heissen; $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C}^p$ ist das «Argument» der Thetareihe. Diese Thetareihe stellt eine ganze Funktion in den Argumenten $\boldsymbol{v}$ und Modulen $\boldsymbol{\tau}$ dar [19]. Als Matrix $\boldsymbol{\tau}$ kann insbesondere eine zweite Periodenmatrix auf einer algebraischen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ vom Geschlecht p eingesetzt werden. Die Thetareihe stellt dann eine «multiplikative Funktion» auf $J(\mathfrak{R})$ dar und ihre Multiplikatoren sind gegeben durch:

$$\theta \begin{bmatrix} \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{h} \end{bmatrix} (\boldsymbol{v} + \pi i\, \boldsymbol{g}' + \boldsymbol{\tau}\, \boldsymbol{h}'; \boldsymbol{\tau}) = \exp[- {}^t\boldsymbol{h}' (2\, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\tau}\, \boldsymbol{h}') + 2\pi i\, ({}^t\boldsymbol{g}'\, \boldsymbol{g} - {}^t\boldsymbol{h}'\, \boldsymbol{h})]\, \theta \begin{bmatrix} \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{h} \end{bmatrix} (\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\tau}) . \tag{5.8}$$

Mittels der Abbildung $\boldsymbol{u}$: $\mathfrak{R} \to J(\mathfrak{R})$ ist $\theta \begin{bmatrix} \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{h} \end{bmatrix} (\boldsymbol{u}(\mathfrak{p}); \boldsymbol{\tau})$, $\mathfrak{p} \in \mathfrak{R}$ eine multiplikative Funktion auf $\mathfrak{R}$. Sei $\boldsymbol{e}$ ein beliebiges Element aus $\boldsymbol{C}^p$: man nennt

$$\theta \begin{bmatrix} \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{h} \end{bmatrix} (\boldsymbol{u}(\mathfrak{p}) - \boldsymbol{e}; \boldsymbol{\tau}) \tag{5.9}$$

die Riemannsche Thetafunktion zur Fläche $\mathfrak{R}$ mit den Charakteristiken $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ und den Parametern $\boldsymbol{e}$. Ihre Multiplikatoren sind bestimmt durch diejenigen der $\theta \begin{bmatrix} \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} \end{bmatrix}$:

am Querschnitt α_λ: $\quad \theta^+ (\boldsymbol{u}(\mathfrak{p}) - \boldsymbol{e}; \boldsymbol{\tau}) = \theta^- (\boldsymbol{u}(\mathfrak{p}) - \boldsymbol{e}; \boldsymbol{\tau})$

am Querschnitt β_λ:

$$\theta^+ (\boldsymbol{u}(\mathfrak{p}) - \boldsymbol{e}; \boldsymbol{\tau}) = \exp(- \tau_\lambda^\lambda - 2\, u_\lambda(\mathfrak{p}) + 2\, e_\lambda)\, \theta^- (\boldsymbol{u}(\mathfrak{p}) - \boldsymbol{e}; \boldsymbol{\tau}) , \tag{5.10}$$

wobei θ^+ den Wert von θ auf β_λ, θ^- den Wert auf β_λ^{-1} bezeichnen.

Im folgenden brauchen wir einige spezielle Aussagen über die Nullstellen der Thetafunktion, die wir in folgendem Satz zusammenfassen:

Satz 3: Sei $\mathfrak{R}$ eine algebraische Riemannsche Fläche vom Geschlecht p und D^p die Menge der ganzen Divisoren vom Grade p; seien ferner $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{b} \in D^p$ und $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{C}^p$. Dann gilt für die Riemannsche Thetafunktion zu $\mathfrak{R}$:

a) $\theta (\boldsymbol{u}(\mathfrak{p}) - \boldsymbol{e}; \boldsymbol{\tau})$ ist nicht identisch 0 auf $\mathfrak{R}$ dann und nur dann wenn θ einen Nullstellendivisor $\mathfrak{t}$ mit $i(\mathfrak{t}) = 0$ besitzt: es gilt dann $\boldsymbol{e} \equiv \boldsymbol{u}(\mathfrak{t}) + \boldsymbol{K}$, wobei $\boldsymbol{K}$ der Vektor der Riemannschen Konstanten ist (bezüglich gewählter kanonischer Zerschneidung $\boldsymbol{\Sigma}$ und Basispunkt $\mathfrak{b}_0$).

b) $\theta (\boldsymbol{u}(\mathfrak{p}) - \boldsymbol{e}; \boldsymbol{\tau})$ verschwindet identisch auf $\mathfrak{R}$ dann und nur dann, wenn $\boldsymbol{e} \equiv \boldsymbol{u}(\mathfrak{b}) + \boldsymbol{K}$ mit $i(\mathfrak{b}) \geq 1$.

Für den Beweis dieser Aussagen verweisen wir auf J. LEWITTES [20] und auf die Originalarbeit von B. RIEMANN [17], S. 212.

Auf Grund von Satz 3 können wir folgenden Satz aussprechen, welcher den Zusammenhang des Jacobischen Umkehrproblems mit den Thetafunktionen ausdrückt:

Satz 4: Das durch die Kongruenzen

$$\boldsymbol{u} (\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_p) \equiv \boldsymbol{c}$$

definierte Jacobische Umkehrproblem hat für gegebene, allgemeine $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{C}^p$ eine einzige Lösung $\mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_p$: das ist der Nullstellendivisor der θ-Funktion

$$\theta\left(\boldsymbol{u}(\mathfrak{p}) - \boldsymbol{e}; \tau\right)$$

mit $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{K}$ (dieser Nullstellendivisor ist unabhängig von der Wahl des Basispunktes für $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{K}$!)

Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf A. KRAZER [19c] und E. B. CHRISTOFFEL [28]. Wegen Satz 2 können wir Satz 4 auf unseren Fall anwenden: die θ-Funktion

$$\theta\left(\boldsymbol{u}(\mathfrak{p}) - \boldsymbol{c} - \boldsymbol{K}; \boldsymbol{\tau}\right) \tag{5.11}$$

wobei $\boldsymbol{c}$ durch (5.7) gegeben ist, verschwindet nicht identisch, sondern genau in den 3 Nullstellen $\mathfrak{z}_k$ von g (5.3).

Neben (5.14) betrachten wir nun folgende Thetafunktionen:

$$\begin{aligned}
&\theta\left(\boldsymbol{u}(\mathfrak{p}) - \boldsymbol{u}(\mathfrak{r}_1^+\, \mathfrak{r}_2^+\, \mathfrak{r}_3^+) - \boldsymbol{K}; \boldsymbol{\tau}\right); \theta\left(\boldsymbol{u}(\mathfrak{p}) - \boldsymbol{u}(\mathfrak{r}_1^-\, \mathfrak{r}_2^-) - \boldsymbol{K}: \boldsymbol{\tau}\right), \\
&\theta\left(\boldsymbol{u}(\mathfrak{p}) - \boldsymbol{u}(\mathfrak{v}_1\, \mathfrak{v}_2\, \mathfrak{v}_3) - \boldsymbol{K}; \boldsymbol{\tau}\right); \theta\left(\boldsymbol{u}(\mathfrak{p}) - \boldsymbol{u}(\mathfrak{v}_4\, \mathfrak{v}_5\, \mathfrak{v}_6) - \boldsymbol{K}; \boldsymbol{\tau}\right) \\
&\theta\left(\boldsymbol{u}(\mathfrak{p}) - \boldsymbol{u}(\mathfrak{v}_7\, \mathfrak{v}_8) - \boldsymbol{K}; \boldsymbol{\tau}\right).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Dabei wählen wir stets $\mathfrak{v}_1$ als Basispunkt. Alle diese Thetafunktionen verschwinden nicht identisch sondern, nach Satz 4, in je 3 Punkten, nämlich in der Reihe

$$\{\mathfrak{r}_1^+\, \mathfrak{r}_2^+\, \mathfrak{r}_3^+\}, \quad \{\mathfrak{r}_1^-\, \mathfrak{r}_2^-\, \mathfrak{v}_1\}, \quad \{\mathfrak{v}_1\, \mathfrak{v}_2\, \mathfrak{v}_3\}, \quad \{\mathfrak{v}_4, \mathfrak{v}_5, \mathfrak{v}_6\}, \quad \{\mathfrak{v}_7, \mathfrak{v}_8, \mathfrak{v}_1\}.$$

Berücksichtigen wir nun diese Eigenschaften und die Multiplikatoren (5.10), so können wir leicht die Richtigkeit folgenden Satzes einsehen:

Satz 5: Die (bis auf multiplikative Konstante) einzige multiplikative Funktion g (4.42), welche die am Anfang dieses Unterabschnittes wiederholten Eigenschaften I und II besitzt, ist gegeben durch

$$g(\mathfrak{p}) = \exp\left(\frac{1}{\pi i}\, {}^t\boldsymbol{u}(\mathfrak{p})\, \boldsymbol{\mu}\right) \prod_{j=1}^{3} \frac{\theta\left(\boldsymbol{u}(\mathfrak{p}) - \boldsymbol{e}(j); \boldsymbol{\tau}\right)}{\theta\left(\boldsymbol{u}(\mathfrak{p}) - \boldsymbol{f}(j); \boldsymbol{\tau}\right)}, \tag{5.13}$$

wobei $\mathfrak{p} \in \mathfrak{F}(v, w)$ und

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}(1) = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{K} = \boldsymbol{u}\left(\prod_{\nu=1}^{8} \mathfrak{v}_\nu \prod_{k=1}^{3} (\mathfrak{r}_k^+)^{-1} \prod_{j=2}^{3} (\mathfrak{r}_j^-)^{-1}\right) + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2\pi i}\,\boldsymbol{\tau}\,\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{K}; \\
&\boldsymbol{e}(2) = \boldsymbol{u}\,(\mathfrak{r}_1^+\, \mathfrak{r}_2^+\, \mathfrak{r}_3^+) + \boldsymbol{K}; \quad \boldsymbol{e}(3) = \boldsymbol{u}(\mathfrak{r}_2^-\, \mathfrak{r}_3^-) + \boldsymbol{K}; \\
&\boldsymbol{f}(1) = \boldsymbol{u}(\mathfrak{v}_2\, \mathfrak{v}_3) + \boldsymbol{K}; \quad \boldsymbol{f}(2) = \boldsymbol{u}(\mathfrak{v}_4\, \mathfrak{v}_5\, \mathfrak{v}_6) + \boldsymbol{K}; \quad \boldsymbol{f}(3) = \boldsymbol{u}(\mathfrak{v}_7\, \mathfrak{v}_8) + \boldsymbol{K}.
\end{aligned}$$

Dabei sind $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}$ entgegengesetzt gleich den Perioden von $\sigma_1 = z\, d \log w + \varrho_1$ an den Rückkehrschnitten $\{\alpha_\lambda\}, \{\beta_\lambda\}$ und als Basispunkt ist stets $\mathfrak{v}_1$ gewählt.

5.2 «*Abstrakte*» *Bestimmung des Differentials* ϱ_1

Wir erinnern an die Bedeutung vom Differential 3. Gattung ϱ_1: bei der Konstruktion (**4.**) der Lösung vom Modell hatte ϱ_1 die Aufgabe, die Residuen von $\sigma_1 = z\, d \log w + \varrho_1$ (4.38) im Periodenstreifen (4.2) auf der Fläche $\mathfrak{F}_0(z, w)$ (4.24) zu 0 zu machen.

Die Pole von $z \log w$ auf $\mathfrak{F}_0(z, w)$ sind die Nullstellen und Pole von w, also mit den Bezeichnungen von 4.2 und im in 4.2 zugrundegelegten Periodenstreifen, welcher die Punkte über $z = 1/4\ (\pm \zeta_0 + k)$, $k = 0, 1, 2, 3$ enthält:

$$\mathfrak{r}_k^+, \mathfrak{r}_k^- \text{ (Nullstellen)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}_k^+, \mathfrak{q}_k^- \text{ (Pole)} \quad (k = 0, 1, 2, 3)\ . \tag{5.14}$$

Verlangen wir nun, dass

$$\operatorname{Res}\varrho_1 = -z_k^{\pm} \text{ an } \mathfrak{r}_k^{\pm}\ , \quad \operatorname{Res}\varrho_1 = +z_k^{\pm} \text{ an } \mathfrak{q}_k^{\pm} \quad (k = 0, 1, 2, 3) \tag{5.15}$$

mit

$$z_k^{\pm} = \frac{1}{4}\ (\pm \zeta_0 + k) \quad (k = 0, 1, 2, 3) \tag{5.16}$$

ferner, dass ϱ_1 sonst regulär auf $\mathfrak{F}(v, w)$ ist, so hat σ_1 lauter verschwindende Residuen im Periodenstreifen, wie man leicht verifiziert, auf Grund von (4.23).

Durch unsere Forderungen ist aber ϱ_1 bis auf ein additives Differential 1. Gattung eindeutig bestimmt. Da zu jedem ϱ_1 gemäss dem letzten Unterabschnitt eine (einzige) multiplikative Funktion g existiert, welche die erwünschten Eigenschaften besitzt, können wir ϱ_1 so normieren, dass seine sämtlichen Perioden an den zweiten Rückkehrschnitten $\beta_1 \dots \beta_p$ verschwinden ($A_\mu(\varrho_1) = \int\limits_{\beta_\mu} \varrho_1; \mu = 1 \dots p$); dann können wir schreiben:

$$\varrho_1 = \sum_{k=0}^{3} \left(z_k^+ \Pi_{\mathfrak{r}_k^+}^{\mathfrak{q}_k^+} + z_k^- \Pi_{\mathfrak{r}_k^-}^{\mathfrak{q}_k^-} \right) = \frac{1}{4}\, \zeta_0 \sum_{k=0}^{3} \left(\Pi_{\mathfrak{r}_k^+}^{\mathfrak{q}_k^+} - \Pi_{\mathfrak{r}_k^-}^{\mathfrak{q}_k^-} \right) + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{3} k \left(\Pi_{\mathfrak{r}_k^+}^{\mathfrak{q}_k^+} + \Pi_{\mathfrak{r}_k^-}^{\mathfrak{q}_k^-} \right), \tag{5.17}$$

wobei allgemein $\Pi_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}$ das (bezüglich dem gewählten kanonischen System von Rückkehrschnitten) normale Abelsche Differential 3. Gattung bezeichnet, welches einen Pol in $\mathfrak{q}$ mit residuum $+1$, einem Pol in $\mathfrak{p}$ mit Residuum -1 besitzt, sonst regulär ist und verschwindende Perioden an den zweiten kanonischen Zyklen $\beta_1 \dots \beta_p$ hat (daraus folgt, dass die Perioden von $\Pi_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}$ an α_λ durch $2 \int\limits_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}} \varphi^\mu$ gegeben sind). $\Pi_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}$ kann auf einer beliebigen hyperelliptischen Fläche in einfacher Weise explizit angegeben werden: ist

$$u^2 = \prod_{j=1}^{2p+2} (v - v_j)$$

die Normalform der hyperelliptischen Fläche $\mathfrak{R}$, so haben wir

$$\Pi_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}} = \varepsilon(\mathfrak{q}) - \varepsilon(\mathfrak{p}) - \frac{1}{\pi i} \sum_{\mu=1}^{p} A_\mu\, [\varepsilon(\mathfrak{q}) - \varepsilon(\mathfrak{p})]\, \varphi^\mu\ , \tag{5.18}$$

wobei φ^μ die normalen Abelschen Differentiale 1. Gattung auf $\mathfrak{R}$ sind, bezüglich einer kanonischen Basis $\Sigma = \{ \alpha_1 \dots \alpha_p; \beta_1 \dots \beta_p \}$ und

$$\varepsilon(\mathfrak{z})\ (v, u) = \frac{1}{2} \left(\frac{u(v) + u(\mathfrak{z})}{v - v(\mathfrak{z})} \right) \frac{dv}{u(v)}\ , \quad \mathfrak{z} \in \mathfrak{R}$$

$$A_\mu(\varepsilon(\mathfrak{z})) = \int\limits_{\beta_\mu} \varepsilon(\mathfrak{z})\ .$$

In unserem Falle ist $p = 3$ und es gilt, wie man aus (4.23) leicht sieht,

$$u^2 = v^8 - (\alpha + \beta)\, v^4 + 1\ . \tag{5.19}$$

Daher hat man aus (5.17), (5.18), (5.19) folgenden Ausdruck für ϱ_1:

$$\varrho_1 = \frac{1}{4}\zeta_0 \sum_{k=0}^{3}\left[\chi(\mathfrak{q}_k^+) - \chi(\mathfrak{q}_k^-) - \frac{1}{\pi i}\,{}^t\boldsymbol{\varphi}\, \boldsymbol{C}_k^-\right]$$

$$+ \frac{1}{4}\zeta_0 \sum_{k=1}^{3} k\left[\chi(\mathfrak{q}_k^+) + \chi(\mathfrak{q}_k^-) - \frac{1}{\pi i}\,{}^t\boldsymbol{\varphi}\, \boldsymbol{C}_k^+\right] \tag{5.20}$$

mit

$$\chi(\mathfrak{a}) = \frac{u(\mathfrak{a})}{v - v(\mathfrak{a})}\,\frac{dv}{u(v)}, \quad (c_k^{\pm})_\mu = \int_{\beta_\mu} [\chi(\mathfrak{q}_k^+) \pm \chi(\mathfrak{q}_k^-)]\,.$$

Dabei wurde verwendet, dass $v(\mathfrak{q}_k^{\pm}) = v(\mathfrak{r}_k^{\pm})$ und $u(\mathfrak{q}_k^{\pm}) = -u(\mathfrak{r}_k^{\pm})$ wegen

$$w = \left[p_1(v) + 2\sqrt{\beta - \alpha}\, v^2\, u(v)\right]/p_0(v) \tag{5.21}$$

was aus (4.23), (5.19) folgt.

Neben (5.18) kann man auch einen Ausdruck für $\Pi_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}$ durch Thetafunktionen angeben:

$$\Pi_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}} = \frac{d}{dv}\left(\log\frac{\theta\,(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}(\mathfrak{q});\,\boldsymbol{\tau})}{\theta\,(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}(\mathfrak{p});\,\boldsymbol{\tau})}\right) dv\,, \tag{5.22}$$

wobei

$$\boldsymbol{e}(\mathfrak{z}) = \boldsymbol{u}(\mathfrak{z}) + \boldsymbol{u}(\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2) + \boldsymbol{K}\,, \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{q}, \mathfrak{p}$$

und $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \mathfrak{R}$ nur den Bedingungen $i(\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2) = i(\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2) = 0$ unterliegen, sonst beliebig sind: mit anderen Worten, keine zwei der Punkte $\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ liegen übereinander (über der v-Ebene) sowie auch keine der Punkte $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$.

Wenden wir (5.22) auf unseren Fall an, so bekommen wir:

$$\varrho_1 = \frac{\zeta_0}{4}\sum_{k=0}^{3}\frac{d}{dv}\log\left[\frac{\theta\,(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}(\mathfrak{q}_k^+);\,\boldsymbol{\tau})}{\theta\,(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}(\mathfrak{r}_k^+);\,\boldsymbol{\tau})}\,\frac{\theta\,(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}(\mathfrak{r}_k^-);\,\boldsymbol{\tau})}{\theta\,(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}(\mathfrak{q}_k^-);\,\boldsymbol{\tau})}\right]$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{3} k\,\frac{d}{dv}\log\left[\frac{\theta\,(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}(\mathfrak{q}_k^+);\,\boldsymbol{\tau})}{\theta\,(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}(\mathfrak{r}_k^+);\,\boldsymbol{\tau})}\,\frac{\theta\,(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}(\mathfrak{q}_k^-);\,\boldsymbol{\tau})}{\theta\,(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}(\mathfrak{r}_k^-);\,\boldsymbol{\tau})}\right] \tag{5.23}$$

mit

$$\boldsymbol{e}(\mathfrak{z}) = \boldsymbol{u}(\mathfrak{z}) + \boldsymbol{u}(\mathfrak{v}_2) + \boldsymbol{K}\,, \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{q}_k^{\pm}, \mathfrak{r}_k^{\pm}\,.$$

Dabei haben wir als Basispunkt wie früher den Verzweigungspunkt $\mathfrak{v}_1$ genommen und für die freien Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ (vgl. (5.22)) $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ eingesetzt.

Wir fassen nun die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammen: es wurden ein Ausdruck (5.13) für die multiplikative Funktion g und zwei Ausdrücke (5.20) und (5.23) für das Differential ϱ_1 gegeben, welche gemäss 4.4, Satz 3, die Lösung h der Differenzengleichung (4.1) des Modells bestimmen. In den nächsten Abschnitten wird unsere Aufgabe darin bestehen, die hier angegebenen Ausdrücke für die Lösung einerseits wirklich explizit zu machen und anderseits sie zu vereinfachen (Reduktion auf elliptische Grössen).

6. Die Module von $\mathfrak{F}(v, w)$ und die Reduktion der Thetafunktion auf elliptische Thetafunktionen

6.1 *Struktur der Riemannschen Fläche* $\mathfrak{F}(v, w)$

Die in den Formeln für g (5.13) und ϱ_1 (5.23) auftretenden Thetafunktionen gehören zur Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}(v, w)$ (4.23). Diese hat, wie bereits bemerkt, Geschlecht 3 und ist hyperelliptisch. Die zugehörige Thetafunktion kann, wie wir in diesem Abschnitt zeigen werden, auf elliptische Thetafunktionen reduziert werden, auf Grund einer speziellen Symmetrieeigenschaft der Fläche $\mathfrak{F}(v, w)$, die wir jetzt beschreiben wollen.

Zunächst bemerken wir, dass man stets statt $\mathfrak{F}(v, w)$ die über (5.19), (5.21) birational äquivalente Fläche $\mathfrak{F}(v, u)$ betrachten kann, welche durch (5.19) definiert ist (die meromorphen Funktionenkörper der beiden Flächen sind einander isomorph).

Die charakteristische Involution I_2 der hyperelliptischen Flächen wird auf $\mathfrak{F}(v, u)$ durch die konforme Abbildung ausgedrückt, welche den Punkt (v, u) in $(v, -u)$ transformiert. Neben diesem für den hyperelliptischen Fall charakteristischen Antomorphismus I_2 besitzt $\mathfrak{F}(v, u)$ noch weitere konforme Abbildungen in sich, d.h. konforme Automorphismen, ist also eine im Sinne von F. KLEIN «reguläre Riemannsche Fläche» (Riemannsche Fläche mit «singulären Modulen» in der Terminologie von A. HURWITZ und F. SEVERI [26], [24], [18h]). Die Automorphismen von $\mathfrak{F}(v, u)$, die verschieden von I_2 sind, bilden eine «Diedergruppe» $\mathfrak{D}_4 = \{\mathfrak{Z}_4, j\}$, welche aus der zyklischen Untergruppe der Ordnung 4, $\mathfrak{Z}_4 = \{e, d, d^2, d^3\}$ besteht, welche durch das Element

$$d\colon (v, u) \to (i\,v, \pm u) \quad (i = \sqrt{-1}) \tag{6.1}$$

erzeugt wird, und aus der Involutionsgruppe $\mathfrak{Z}_2 = \{e, j\}$, welche durch

$$j\colon (v, u) \to \left(\frac{1}{v}, \pm u\, v^4\right) \tag{6.2}$$

erzeugt wird: man sieht nämlich leicht, dass alle Elemente von $\mathfrak{D}_4$ die Gleichung (5.19) invariant lassen. Infolgedessen werden die Verzweigungspunkte $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_8$ von $\mathfrak{F}(v, u)$ (und $\mathfrak{F}(v, w)$) durch die Elemente von $\mathfrak{D}_4$ untereinander vertauscht: wir wählen folgende Numerierung der Verzweigungspunkte:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_k &= (v_k, 0) \quad \text{mit} \quad v_k = v_0 \exp\left[\frac{i\pi}{4}(k-1)\right] \quad k = 1, 3, 5, 7\,, \\ \mathfrak{v}_k &= (v_k, 0) \quad \text{mit} \quad v_k = \frac{1}{v_0} \exp\left[\frac{i\pi}{4}(k-2)\right] \quad k = 2, 4, 6, 8\,, \end{aligned} \tag{6.3}$$

wobei v_0 die Wurzel von $v^8 - (\alpha + \beta)\, v_4 + 1$ ist, welche für reelle Energien, d.h. reelle α, β, reell ist und zwischen 0 und 1 liegt.

Wir bemerken, dass $\mathfrak{F}(v, u)$ das im birationalen Sinne allgemeinste hyperelliptische Gebilde vom Geschlecht 3 ist, welches die zyklische Gruppe $\mathfrak{Z}_4$ als Automorphismengruppe besitzt: denn das allgemeinste «$\mathfrak{Z}_4$-symmetrische» Gebilde hat die Form

$$u^2 = \gamma_0\, v^8 + \gamma_1\, v^4 + \gamma_2$$

mit komplexen Koeffizienten γ_i; durch die Cremona Transformation

$$(v, u) \to (v' = \gamma_0^{1/8}\, v,\ u' = u)$$

geht diese Gleichung in $u'^2 = v'^8 + \gamma_1' v'^4 + \gamma_2$ mit $\gamma_1' = \gamma_1/\gamma_0^{1/2}$ über, welche immer noch nur $\mathfrak{Z}_4$-symmetrisch ist; diese geht ihrerseits durch die weitere Cremona-Transformation

$$(v, u) \to (v'' = v'/\gamma_2'^{1/8},\ u'' = u'/\gamma_2'^{1/2})$$

in die Gleichung $u''^2 = v''^8 + \gamma_1'' v^4 + 1$ über, mit $\gamma_1'' = \gamma_1'/\gamma_2'^{1/2}$: diese ist aber $\mathfrak{D}_4$-symmetrisch und hat dieselbe Form wie die Gleichung (5.19) von $\mathfrak{F}(v, u)$. Es ist diese spezielle $\mathfrak{Z}_4$-Symmetrie unserer Fläche $\mathfrak{F}(v, u)$, welche uns ermöglicht, die Lösung des Stripping-Modells durch elliptische Grössen anzugeben, wie wir im folgenden sehen werden.

6.2 *Die Module der Fläche* $\mathfrak{F}(v, u)$

Zunächst werden wir einiges allgemeines über die Module von $\mathfrak{F}(v, u)$ sagen und dann zur direkten Bestimmung derselben übergehen: für die Begründung unserer allgemeinen Aussagen verweisen wir auf die Literatur [17], [18], [22]. Die Konform-Äquivalenzklasse einer allgemeinen hyperelliptischen Riemannschen Fläche vom Geschlecht p hängt von $2p$-1 komplexen Parametern ab (im Gegensatz zum allgemeinen Fall einer beliebigen algebraischen Fläche vom Geschlecht p, wo die Anzahl der Parameter $3p$-3 beträgt). Eine algebraische explizite Angabe dieser Parameter erfolgt auf der in der Normalform angegebenen hyperelliptischen Fläche

$$u^2 = \prod_{j=1}^{2p+2} (v - v_j)$$

z.B. durch die Doppelverhältnisse der Form (v_1, v_2, v_3, v_j) $(j = 4, 5, \ldots, 2p + 2)$.

Es ist anderseits wohl bekannt, dass allgemein neben algebraischen «Modulen» (Invarianten, die algebraisch aus den Koeffizienten der Gleichung der Fläche gebildet werden) auch «transzendente» Module vorhanden sind. Auf Grund des Satzes von TORELLI [23] können als solche die Elemente der zweiten Periodenmatrix $\boldsymbol{\tau}$ eines Systems von normalen Abelschen Differentialen 1. Gattung genommen werden: allerdings sind solche Elemente nicht alle unabhängig, denn wegen der Symmetrie von $\boldsymbol{\tau}$ sind höchstens $p\,(p + 1)/2$ von ihnen verschieden und ferner aus dem obigen zwischen diesen noch mindestens $1/2p\,(p + 1) - (3p - 3)$ Beziehungen vorhanden. Im Falle $p = 3$ hat man also i.A. keine Beziehungen, d.h. die 6 Elemente τ_ν^μ $(\mu \leq \nu)$ sind i.A. unabhängig. Im hyperelliptischen Fall allerdings ist die Anzahl der Module höchstens $2p - 1$, also 5 für $p = 3$. Zwischen den obigen 6 Elementen τ_ν^μ $(\mu \leq \nu)$ besteht also eine Beziehung, die bereits durch RIEMANN mit Hilfe seiner Theorie der Thetafunktionen angegeben wurde, und die mit unseren Bezeichnungen von 5.1 lautet:

$$\theta \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (\boldsymbol{v} = 0; \boldsymbol{\tau}) = 0 \tag{6.4}$$

oder äquivalent

$$\theta\,(\boldsymbol{v} = \boldsymbol{K}; \boldsymbol{\tau}) = 0\,,$$

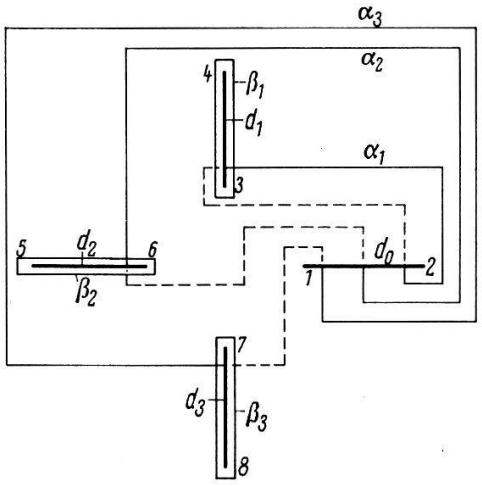
wobei $\boldsymbol{K}$ der Vektor der Riemannschen Konstanten bezüglich einem Verzweigungspunkt bedeutet. Die Reduktion der Anzahl Module im hyperelliptischen Fall beruht auf der Existenz des charakteristischen Automorphismus I_2. Lässt allgemein eine

Fläche eine nicht triviale Automorphismengruppe zu, dann wird die Anzahl Module i. A. kleiner als $3p - 3$ [24]. Dies beruht auf dem Zustandekommen von nicht trivialen Hurwitz-Relationen zwischen den Modulen [21a, c], [24]. Man kann nämlich leicht zeigen, dass, wenn $\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ eine Periodenmatrix einer Basis von $H_0(\mathfrak{R})$ bezüglich einer kanonischen Basis $\boldsymbol{\Sigma}$ von $H_1(\mathfrak{R}, \boldsymbol{Z})$ ist, die Periodenmatrix $\boldsymbol{\Omega}' = (\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}')$ derselben Differentiale bezüglich dem Bild $\boldsymbol{C}(a)\,\boldsymbol{\Sigma}$ von $\boldsymbol{\Sigma}$ unter dem Automorphismus a von $\mathfrak{R}$ durch $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{C}(a)\,\boldsymbol{\Omega}$ gegeben ist und folglich $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}'$, wenn $\boldsymbol{\tau} = \pi i \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{\tau}' = \pi i \boldsymbol{A}'^{-1}\boldsymbol{B}$. Nun aber wird a durch eine unimodulare, ganzzahlige Matrix $\boldsymbol{M}(a)$ in H_0 dargestellt und es gilt [21a], [24c]:

$$\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{C}(a)\,\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}\,{}^t\boldsymbol{M}(a)\,. \tag{6.5}$$

Daher gibt $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}'$ Beziehungen (Hurwitz-Relationen) zwischen den Grössen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, also zwischen den Elementen von $\boldsymbol{\tau}$ selbst. In unserem Falle hat $\mathfrak{F}$ neben I_2 noch die Automorphismengruppe $\mathfrak{D}_4$ von der aber sicher nur die Untergruppe $\mathfrak{Z}_4$ nicht triviale Beziehungen liefern kann, da sie allein birationalen Charakter hat (6.1). Aus allgemeinen Sätzen [24c] folgt, dass 1 die Anzahl der unabhängigen τ_ν^μ ist: dies kann man schnell auch dadurch einsehen, dass für $\mathfrak{F}$ die algebraischen Module (v_1, v_2, v_3, v_j) alle nur vom Koeffizienten $(\alpha + \beta)$ abhängig sind.

Wir gehen nun über zur direkten Bestimmung der Hurwitz-Relationen für die Fläche $\mathfrak{F}(v, u)$. Dazu wählen wir auf $\mathfrak{F}(v, u)$ ein bestimmtes kanonisches System $\boldsymbol{\Sigma} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ von Rückkehrschnitten.



Figur 4

Wir führen (vgl. Fig. 4) Verzweigungsschnitte d_0, d_μ zwischen den Verzweigungspunkten $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ und $\mathfrak{v}_{2\mu+1}, \mathfrak{v}_{2\mu}$ $(\mu = 1, 2, 3)$; die Rückkehrschnitte verlaufen in der üblichen Weise [19c], die β_μ um d_μ und die α_μ um $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_{2\mu+1}$, so dass man bei der Berechnung von Perioden die β_μ auf die d_μ zusammenschrumpfen lässt; analog lässt man die α_μ auf die entsprechenden Strecken fallen [19c].

Wir betrachten folgende Basis von $H_0(\mathfrak{F})$:

$$\omega^\mu = v^{\mu-1}\,dv/u\,, \quad \mu = 1, 2, 3$$

und setzen[9])

$$A_\nu^\mu = \int_{\beta_\nu} \omega^\mu , \quad B_\nu^\mu = \int_{\alpha_\nu} \omega^\mu .$$

Es gilt:

$$A_\nu^\mu = 2 \int_{2\nu+2}^{2\nu+1} \omega^\mu , \quad B_1^\mu = 2 \int_2^3 \omega^\mu , \quad B_2^\mu = B_1^\mu + 2 \int_4^5 \omega^\mu , \quad B_3^\mu = 2 \int_1^8 \omega^\mu , \tag{6.6}$$

wobei wir zur Abkürzung für die unteren und oberen Integralgrenzen (μ) statt $\mathfrak{v}_\mu$ schreiben. Die Integrale sind, wie auch stets im folgenden, auf dem oberen Blatt ($u = +1$ für $v = 0$) zu nehmen, längs Wegen, die keine Verzweigungsschnitte und Rückkehrschnitte kreuzen (wir sagen kurz: auf der einfach zusammenhängenden Fläche $\mathfrak{F}'$, die man aus $\mathfrak{F}$ nach kanonischer Zerschneidung bekommt).

Wir berechnen nun die Perioden der gleichen Differentiale in einer anderen kanonischen Basis Σ' von $H_1(\mathfrak{F}, \boldsymbol{Z})$, nämlich diejenige, die durch die Wirkung der «Drehung» d aus der Symmetriegruppe $\mathfrak{D}_4$ der Fläche aus Σ entsteht. Seien α'_μ, β'_μ, A'^μ_ν, B'^μ_ν die neuen Rückkehrschnitte bzw. Perioden. Die neuen Perioden, ausgedrückt durch die alten, lauten (kanonische Substitution):

$$A'^\mu_\nu = A^\mu_{\nu+1} , \quad \nu = 1, 2 ; \quad A'^\mu_3 = -A^\mu_1 - A^\mu_2 - A^\mu_3 ;$$

$$B'^\mu_\nu = B^\mu_{\nu+1} - B^\mu_1 , \quad \nu = 1, 2, 3 ; \quad B'^\mu_4 = 0 .$$

Für die θ-Module zu $\mathfrak{F}$ erhält man dann, wegen $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}'$, folgendes Schema:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} a & b & a-b \\ b & 2b & b \\ a-b & b & a \end{pmatrix}, \tag{6.7}$$

wobei a und b gewisse Ausdrücke in den Perioden sind, die wir vorläufig nicht brauchen.

Die so abgeleiteten Beziehungen zwischen den Elementen von $\boldsymbol{\tau}$ sind auch alle singulären Hurwitz-Beziehungen, die auf der $\mathfrak{D}_4$-Invarianz von $\mathfrak{F}$ beruhen: denn d erzeugt die zyklische Untergruppe $\mathfrak{Z}_4$ von $\mathfrak{D}_4$ und die Involution j von $\mathfrak{D}_4$ kann durch eine birationale Transformation eliminiert werden. Freilich ist zwischen den Grössen a und b die durch (6.4) ausgedrückte Beziehung vorhanden, welche den hyperelliptischen Charakter von $\boldsymbol{\tau}$ sichert.

6.3 *Die Reduktion der Thetafunktion auf elliptische Thetafunktionen*

Betrachtet man das Schema (6.7) von $\boldsymbol{\tau}$, so kann man sich fragen, ob es möglich wäre, durch eine geeignete Transformation von Σ, $\boldsymbol{\tau}$ diagonal zu machen: in diesem Falle würde nämlich die Thetafunktion, die in (5.13) eingeht, in das einfache Produkt von 3 elliptischen Thetafunktionen aufgespalten. Eine solche Transformation von $\boldsymbol{\tau}$

[9]) Das ist die übliche Schreibweise in der klassischen Theorie der Abelschen Differentiale: z. B. ist A^μ_ν die Differenz der Werte von ω^μ an den beiden Ufern vom Querschnitt α_ν, wenn man über β_ν von einem zum anderen Ufer läuft. Wir nennen A^μ_ν gemäss [18b] «die Periode von ω^μ am Querschnitt β_ν» (und das ist der «Periodizitätsmodul» von ω^μ am Querschnitt α_ν in der älteren Terminologie [17], [19c]).

existiert aber nicht, laut einem allgemeinen Satz von H. H. MARTENS [23c] (Verallgemeinerung eines Satzes von HAUPT-WIRTINGER [25]). Es ist hingegen möglich, $\boldsymbol{\tau}$ durch eine sogenannte «Transformation 2. Ordnung» (im Sinne von KRAZER [19c]) auf eine direkte Summe überzuführen. Dies beruht auf der $\mathfrak{D}_4$-Symmetrie von $\mathfrak{F}$: $\mathfrak{F}$ ist ein «Symmetral» im Sinne von SCHOTTKY [26c, 19d] und kann als zweiblättrige Überlagerungsfläche einer elliptischen Fläche aufgefasst werden. Im folgenden werden wir $\mathfrak{F}$ als zweiblättrige Überlagerungsfläche der elliptischen Fläche $\mathfrak{E}_0$ auffassen, welche als Bild von $\mathfrak{F}$ unter der Involution mit Doppelpunkten ± 1 auftritt, d.h. welche v und $1/v$ als homologe Punkte besitzt: diese Involution ist gegeben durch

$$V = \left(\frac{v+1}{v-1}\right)^2, \quad U = u$$

und die Gleichung von $\mathfrak{E}_0$ lautet:

$$U = \left[(V-e)\left(V-\frac{1}{e}\right)(V-f)\left(V-\frac{1}{f}\right)\right]^{1/2}$$

mit

$$e = \left(\frac{v_0+1}{v_0-1}\right)^2, \quad f = \left(\frac{i\,v_0+1}{i\,v_0-1}\right)^2. \tag{6.8}$$

Die Transformation (6.8) reduziert das Integral $\int (\omega^1 - \omega^3)$ und $\mathfrak{F}$ ist ein Symmetral mit Grundfläche $\mathfrak{E}_0$: nach der Theorie von SCHOTTKY [26c] zerfällt die Thetafunktion zu $\mathfrak{F}$ in die Summe von $2^1 = 2$ Produkten von je einer Thetafunktion zu $\mathfrak{E}_0$ und einer Symmetralfunktion mit 2 Argumenten: in den Produkten treten die Thetafunktionen zu $\mathfrak{E}_0$ mit Moduln auf, welche doppelt so gross wie diejenigen von $\mathfrak{E}_0$ sind (in entsprechenden kanonischen Homologiebasen). Die Symmetralfunktion ist wieder speziell auf Grund der vorhandenen zusätzlichen Symmetrien und zerfällt dementsprechend in elliptische Thetafunktionen.

Wir gehen nun über zur konkreten Ausführung der Aufspaltung der Thetafunktion zu $\mathfrak{F}$

$$\theta\begin{bmatrix}\boldsymbol{g}\\ \boldsymbol{h}\end{bmatrix}(\boldsymbol{v};\boldsymbol{\tau}) = \sum_{\boldsymbol{m}} \exp\{\boldsymbol{\tau}[\boldsymbol{m}+\boldsymbol{g}] + {}^t(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{g})(2\,\boldsymbol{v} + 2\pi i\,\boldsymbol{h})\}, \tag{6.9}$$

wobei $\boldsymbol{\tau}$ durch (6.7) gegeben ist und die Schreibweise $\boldsymbol{\tau}[\boldsymbol{n}] = {}^t\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{\tau}\,\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{C}^p$ eingeführt wird.

Setzen wir $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\varphi}$, wobei φ^μ die normalen Differentiale von $H_0(\mathfrak{F})$ bezüglich $\boldsymbol{\Sigma}$ sind, so sehen wir aus den obigen Überlegungen, dass folgende Substitution angebracht ist:

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{h}' = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

Ferner führen wir die Vektoren $\boldsymbol{M} = 1/2\,\boldsymbol{e} + \boldsymbol{m}' = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{g}' = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{g}$ ein, wobei wir verlangen, dass $\boldsymbol{m}'$ ein Vektor mit ganzzahligen Komponenten sein soll: man sieht, dass zu einem Trippel von ganzen Zahlen $\boldsymbol{m}$ eindeutig ein System $(\boldsymbol{m}', \boldsymbol{e})$ gehört mit $\boldsymbol{m}'$ ganzzahlig und ${}^t\boldsymbol{e} = (e, 0, e)$

$$e^\mu = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad m_1 \equiv m_3 \pmod 2, \\ 1 & \text{wenn} \quad m_1 \not\equiv m_3 \pmod 2 \text{ für } \mu = 1,3. \end{cases}$$

Umgekehrt gehört zu einem System $(\boldsymbol{m}', e, 0, e)$ mit ganzzahligem $\boldsymbol{m}'$ und $e = 0$ oder 1 eindeutig ein ganzzahliges Trippel $\boldsymbol{m}$.

Daher geht die Summe über $\boldsymbol{m}$ in (6.9) in eine solche über $\boldsymbol{M}$ über, d.h. eine Summe der Form

$$\sum_{e=0}^{1} \sum_{\boldsymbol{m}'} .$$

Es gilt nun:

$$\boldsymbol{\tau}\,[\boldsymbol{m} + \boldsymbol{g}] = \boldsymbol{\tau}^{(2)} \left[m_1' + \frac{1}{2} e + g_1', m_2' + g_2'\right] + \tau^{(1)} \left[m_3' + \frac{1}{2} e + g_3'\right] \tag{6.11}$$

mit

$$\boldsymbol{\tau}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2\,(2\,a - b & 2\,b \\ 2\,b & 2\,b \end{pmatrix}, \quad \tau^{(1)} = 2\,b\,.$$

Ferner

$$\begin{aligned} {}^t(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{g})\,(2\,\boldsymbol{v} + 2\,\pi\,i\,\boldsymbol{h}) &= {}^t(\boldsymbol{m}' + \boldsymbol{g}')\,{}^t\boldsymbol{S}\,(2\,\boldsymbol{S}^{-1}\,\boldsymbol{v}' + 2\,\pi\,i\,\boldsymbol{S}^{-1}\,\boldsymbol{h}') \\ &= {}^t\left(\boldsymbol{m}' + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{e} + \boldsymbol{g}'\right)(2\,\boldsymbol{v}' + 2\,\pi\,i\,\boldsymbol{h}')\,. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Aus (6.11) und (6.12) folgt die Aufspaltung des Exponenten des allgemeinen Gliedes der Thetareihe in zwei Summanden, welche quadratische Formen in $(m_1' + 1/2\,e + g_1')$, $(m_2' + g_2')$ bzw. $(m_3' + 1/2\,e + g_3')$ sind, und dementsprechend folgende Aufspaltung der Thetareihe:

$$\theta \begin{bmatrix} \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{h} \end{bmatrix} (\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\tau}) = \sum_{e=0}^{1} \theta \begin{bmatrix} g_1' + \frac{1}{2} e, & g_2' \\ h_1' & , \; h_2' \end{bmatrix} (v_1', v_2'; \boldsymbol{\tau}^{(2)})\; \theta \begin{bmatrix} g_3' + \frac{1}{2} e \\ h_3' \end{bmatrix} (v_3'; \tau^{(1)})\,. \tag{6.13}$$

Wir betrachten nun die «Symmetralfunktion» mit Modul $\boldsymbol{\tau}^{(2)}$:

$$\theta \begin{bmatrix} g_1' + \frac{1}{2} e, & g_2' \\ h_1' & , \; h_2' \end{bmatrix} (v_1', v_2'; \boldsymbol{\tau}^{(2)}) = \sum_{\boldsymbol{m}} \exp\{\boldsymbol{\tau}^{(2)}\,[\boldsymbol{m} + \tilde{\boldsymbol{g}}] + {}^t(\boldsymbol{m} + \tilde{\boldsymbol{g}})\,(2\,\boldsymbol{v}' + 2\,\pi\,i\,\boldsymbol{h}')\}$$

mit

$${}^t\tilde{\boldsymbol{g}} = \left(g_1' + \frac{1}{2} e,\; g_2'\right). \tag{6.14}$$

Durch die Transformation

$$\boldsymbol{v}'' = \boldsymbol{S}'\,\boldsymbol{v}', \quad \boldsymbol{h}'' = \boldsymbol{S}'\,\boldsymbol{h}'$$

mit

$$\boldsymbol{S}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{m} = \boldsymbol{S}'\,\boldsymbol{m}', \quad \tilde{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{S}'\,\boldsymbol{g}''$$

folgt:

$$\boldsymbol{\tau}^{(2)}\,[\boldsymbol{m} + \tilde{\boldsymbol{g}}] = {}^t(\boldsymbol{m} + \tilde{\boldsymbol{g}})\,\boldsymbol{\tau}^{(2)}\,(\boldsymbol{m} + \tilde{\boldsymbol{g}}) = {}^t(\boldsymbol{m}' + \boldsymbol{g}'')\,{}^t\boldsymbol{S}'\,\boldsymbol{\tau}^{(2)}\,\boldsymbol{S}'\,(\boldsymbol{m}' + \boldsymbol{g}'') \quad (\boldsymbol{e} = (e, 0))\,.$$

Ferner:

$${}^t(\boldsymbol{m} + \tilde{\boldsymbol{g}})\,(2\,\boldsymbol{v}'' + 2\,\pi\,i\,\boldsymbol{h}') = {}^t(\boldsymbol{m}' + \boldsymbol{g}'')\,(2\,\boldsymbol{v}'' + 2\,\pi\,i\,\boldsymbol{h}'')\,.$$

Nun geht die Summe über $\boldsymbol{m}$ in eine solche über $\boldsymbol{m}'$ über und die Thetareihe (6.14) spaltet sich folglich gemäss

$$\theta\begin{bmatrix} g_1' + \frac{1}{2}e, & g_2' \\ h_1' & , \; h_2' \end{bmatrix}(v_1', v_2'; \boldsymbol{\tau}^{(2)}) = \theta\begin{bmatrix} g_1'' \\ h_1'' \end{bmatrix}(v_1''; 2b)\,\theta\begin{bmatrix} g_2'' \\ h_2'' \end{bmatrix}(v_2''; 4(a-b)) \tag{6.15}$$

auf. Aus (6.13), (6.15) folgt:

$$\theta\begin{bmatrix} \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{h} \end{bmatrix}(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\tau}) = \sum_{e=0}^{1} \theta\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(g_1 + g_3 + e) + g_2 \\ h_2 \end{bmatrix}(v_2; 2b)\,\theta\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(g_1 + g_3 + e) \\ h_1 - h_2 + h_3 \end{bmatrix}$$

$$\times (v_1 - v_2 + v_3; 4(a-b))\,\theta\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(g_1 - g_3 + e) \\ h_1 - h_3 \end{bmatrix}(v_1 - v_3; 2b)\,. \tag{6.16}$$

Insbesondere, wenn wir entsprechend JACOBI $\theta_3(v;\tau)$ bzw. $\theta_2(v;\tau)$ statt

$$\theta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(v;\tau) \quad \text{bzw.} \quad \theta\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}(v;\tau)$$

schreiben:

$$\theta(\boldsymbol{v};\boldsymbol{\tau}) = \sum_{j=2}^{3} \theta_j(v_2; 2b)\,\theta_j(v_1 - v_3; 2b)\,\theta_j(v_1 - v_2 + v_3; 4(a-b))\,. \tag{6.17}$$[10]

6.4 *Explizite Angabe der Thetamodule und der Normalintegrale durch elliptische Integrale 1. Gattung*

Wir wollen die Thetamodule a, b von $\boldsymbol{\tau}$ (6.7) durch elliptische Integrale ausdrücken. Dies ist auf verschiedene Weisen möglich und wir werden im folgenden nur eine dieser Möglichkeiten angeben.

Betrachten wir das Integral $\int \tilde{J}$ mit $\tilde{J} = \omega^3 + i\,\omega^1$: dieses ist reduzibel, wie man aus seinen Perioden sieht, und wird durch die Transformation

$$V = \left(\frac{v+\varepsilon}{v-\varepsilon}\right)^2, \quad U = u\,, \quad \varepsilon = e^{\pi i (3/4)}$$

gemäss

$$\int \tilde{J} = -\frac{2\sqrt{2}\,e^{\pi i/4}}{\sqrt{1+(\alpha+\beta)/2}} \int \frac{dV}{U} \tag{6.18}$$

---

[10]) Wir wollen nebenbei erwähnen, dass die hier ausgeführte Aufspaltung der Thetafunktion zur Fläche $\mathfrak{F}$ in elliptischen Thetafunktionen als Spezialfall (und nach einigen leichten Transformationen) das Ergebnis von HETTNER [30c] über eine von WEIERSTRASS [30b] eingeführte Thetafunktion wiedergibt: diese Thetafunktion θ_w bestimmt die Gleichung $\theta_w(\boldsymbol{v}(x, y, z)) = 0$ der durch SCHWARZ [30a] behandelten einfach zusammenhängenden Minimalfläche, welche als Begrenzung die vier von einem gemeinsamen Eckpunkt auslaufenden Kanten eines regulären Tetraeders besitzt; θ_w gehört zu einer Fläche $\mathfrak{F}_w$ welche mit $\mathfrak{F}$ genau dann zusammenfällt, wenn $\alpha+\beta=14$ (also in einem unphysikalischen Falle, dem die rein imaginäre Energie $\pm\, i\,\lambda^2/8$ entspricht): das ist der einzige Fall in welchem die Automorphismengruppe von $\mathfrak{F}$ grösser als $\mathfrak{D}_4$, nämlich die Oktaedergruppe ist (in diesem Falle gilt übrigens $\tau = \tau_0$, wobei τ und τ_0 Module sind, die zu den Flächen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_0$ gehören: siehe unten).

auf das elliptische Integral 1. Gattung $\int J' = \int d\,V \,/\, U$ zur elliptischen Fläche

$$\mathfrak{E}_1\colon\ U = [(V-\gamma)\,(V-1/\gamma)\,(V-\delta)\,(V-1/\delta)]^{1/2}$$

mit

$$\gamma = \left(\frac{v_0+\varepsilon}{v_0-\varepsilon}\right)^2, \quad \delta = \left(\frac{i\,v_0+\varepsilon}{i\,v_0-\varepsilon}\right)^2$$

reduziert.

J' wird seinerseits durch die Transformation $\xi = (\lambda\,V+\mu)\,/\,(\nu\,V+\varrho)$,

$$\eta^2 = U^2\,(-\nu\,\xi+\lambda)^4 = (1-\xi^2)\,(1-k_1^2\,\xi^2)$$

mit $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ bestimmte Konstanten und

$$k_1 = -\left(1+v_0^2-\sqrt{2}\sqrt{1+v_0^4}\right)\Big/\left(1+v_0^2+\sqrt{2}\sqrt{1+v_0^4}\right)$$

auf die Legendresche Normalform reduziert:

$$\int J'' = \int \frac{d\xi}{\eta} = \int \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)\,(1-k_1^2\,\xi^2)}}. \tag{6.18}'$$

Es gilt nun gemäss (6.6), (6.7):

$$b = \frac{\pi\,i}{2}\,(1-i)\,\frac{B_1^1}{A_1^1} = \frac{\pi\,i}{2}\left(1+\frac{\int_5^7 \tilde{J}}{\int_6^5 \tilde{J}}\right) = \frac{\pi\,i}{2}\left(1+\frac{\int_{1/\gamma}^{1/\delta} J'}{\int_{\delta}^{1/\gamma} J'}\right) = \frac{\pi\,i}{2}\left(1+\frac{\int_{+1}^{1/k_1} J''}{\int_{-1}^{+1} J''}\right) \tag{6.19}$$

also

$$b = \frac{\pi\,i}{2}\left(1+\frac{1}{2}\,\tau\right)$$

mit

$$\tau = i\,\frac{\boldsymbol{K}'(k_1)}{\boldsymbol{K}(k_1)},$$

wenn wir die Jacobischen Bezeichnungen

$$\boldsymbol{K}(k) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)\,(1-k^2\,\xi^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$\boldsymbol{K}'(k) = \boldsymbol{K}\left(\sqrt{1-k^2}\right) = \int_{\pi/2}^{\arcsin 1/k} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

verwenden. τ ist in der Normierung der Theorie der elliptischen Funktionen der Modul von $\mathfrak{E}_1$: in unserer Normierung der Abelschen Differentiale ist aber $\pi\,i/2\tau$ der Modul der zu $\mathfrak{E}_1$ gehörigen Thetafunktion.

Man kann leicht verifizieren, dass $2\,b = 2\,\pi\,i/2\tau_0$ wobei $\pi\,i/2\tau_0$ der Modul von $\mathfrak{E}_0$ ist, was den in 6.3 erwähnten Satz von SCHOTTKY bestätigt.

Die im Ausdruck (6.16), (6.17) auftretenden Thetafunktionen mit Thetamodul $2b$ können leicht direkt durch solche mit dem «natürlichen» Modul τ ausgedrückt werden.

Es gilt nämlich [27]:

$$\theta_3(v;\,2\,b) = \theta_3(v;\,\pi\,i + \pi\,i\,\tau/2) = \theta_4(v;\,\pi\,i\,\tau/2)$$
$$= [\theta_3(2\,v;\,\pi\,i\,\tau)\;\theta_3(0;\,\pi\,i\,\tau) - \theta_2(2\,v;\,\pi\,i\,\tau)\;\theta_2(0;\,\pi\,i\,\tau)]^{1/2} \qquad (6.20)$$

mit der Bezeichnung

$$\theta_4(v;\,\tau) = \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (v;\,\tau)$$

und

$$\theta_2(v;\,2\,b) = \theta_2(v;\,\pi\,i + \pi\,i\,\tau/2) = e^{i\pi/4}\;\theta_2(v;\,\pi\,i\,\tau/2)$$
$$= e^{i\pi/4}\;[\theta_3(2\,v;\,\pi\,i\,\tau)\;\theta_2(0;\,\pi\,i\,\tau) + \theta_2(2\,v;\,\pi\,i\,\tau)\;\theta_3(0;\,\pi\,i\,\tau)]^{1/2}\,. \qquad (6.21)$$

Wir wollen nun den weiteren, in der Darstellung (6.16) auftretenden Modul 4 $(a-b)$ durch elliptische Integrale angeben. 2 $(a-b)$ ist der Modul des Integrals $\int J$, $J = \omega^2$ zur elliptischen Fläche

$$\mathfrak{E}\colon\; U = [V^4 - (\alpha+\beta)\,V^2 + 1]^{1/2}$$

mit

$$V = v^2\,, \quad U = u\colon$$

$$\int J = v_0^2 \int \frac{d\xi}{\eta} \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{V}{v_0^2}\,, \quad \eta = [(1-\xi^2)\,(1-k^2\,\xi^2)]^{1/2}$$
$$k = v_0^4\,. \qquad (6.22)$$

Daher:

$$2\,(a-b) = -\pi\,i - \pi\,i\,\frac{\int_3^1 \omega^2}{\int_1^2 \omega^2} = -\pi\,i - \pi\,i\,\frac{2\int_0^{v_0^2} \frac{dV}{U}}{\int_{v_0^2}^{1/v_0^2} \frac{dV}{U}} = -\pi\,i - 2\,\pi\,i\,1/\tau_0 \qquad (6.23)$$

mit

$$\tau_0 = i\,\frac{\boldsymbol{K}'(k)}{\boldsymbol{K}(k)}\,.$$

Wir können also in (6.16), (6.17) den Thetamodul 4 $(a-b)$ durch $-2\,\pi\,i - 4\,\pi\,i\,/\,\tau_0$ ersetzen, gemäss

$$\theta_3(v;\,4\,(a-b)) = \theta_3(v;\,-4\,\pi\,i/\tau_0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}\,\frac{\tau_0}{2}}$$
$$\times\, e^{v^2/\tau_0}\,[\theta_3(-\pi\,i\,\tau_0\,v/2;\,\pi\,i\,\tau_0) + \theta_2(-\pi\,i\,\tau_0\,v/2;\,\pi\,i\,\tau_0)]\,,$$

$$\theta_2(v;\,4\,(a-b)) = i\,\theta_2(v;\,-4\,\pi\,i/\tau_0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}\,\frac{\tau_0}{2}}$$
$$\times\, e^{v^2/\tau_0}\,[\theta_3(-\pi\,i\,\tau_0\,v/2;\,\pi\,i\,\tau_0) - \theta_2(-\pi\,i\,\tau_0\,v/2;\,\pi\,i\,\tau_0)]\,. \qquad (6.24)$$

Man kann leicht verifizieren, dass die Beziehung (6.4) zwischen a und b tatsächlich erfüllt ist: dazu hat man die Aufspaltung (6.17), die Formeln (6.20), (6.21), (6.24) und die allgemeine Beziehung $\sqrt{k} = \theta_2(0;\,\pi\,i\,\tau)/\theta_3(0;\,\pi\,i\,\tau)$ zu benützen, wobei k und τ der Legendresche bzw. elliptische Modul einer Fläche sind.

Nun gehen wir über zur Angabe der in den Thetafunktionen (6.16) (6.17) auftretenden Normalintegrale durch elliptische Integrale.

Es gilt:

$$\varphi^2 = \frac{\pi}{2A^1}(\omega^1 + \omega^3)\,, \quad \varphi^1 - \varphi^3 = \frac{\pi i}{2A^1}(\omega^1 - \omega^3)\,, \quad \varphi^1 - \varphi^2 + \varphi^3 = \frac{\pi i}{A^2}\omega^2 \tag{6.25}$$

mit

$$A^\mu = 2\int_4^3 \omega^\mu = A_1^\mu\,. \tag{6.26}$$

Nun ist $\int \omega^2 = \int J$ durch (6.22) gegeben; ferner gilt, mit $J^\pm = \omega^1 \pm \omega^3$:

$$\int J^\pm = \int (\omega^1 \pm \omega^3) = \delta_\pm\, 2\sqrt{2}\,[1 - (\alpha+\beta)/2]^{-1/2} \int \frac{dV^\pm}{U^\pm}\,, \quad \delta_+ = i,\ \delta_- = 1\,,$$

$$V^+ = \left(\frac{v+i}{v-i}\right)^2, \quad V^- = \left(\frac{v+1}{v-1}\right)^2, \quad U^+ = U^- = u \tag{6.27}$$

d.h. $\int (\omega^1 \pm \omega^3)$ sind reduzibel[11]) auf Integrale 1. Gattung auf der elliptischen Fläche

$$\mathfrak{E}'(V', U')\colon\ U' = [(V' - e')\,(V' - 1/e')\,(V' - f')\,(V' - 1/f')]^{1/2}$$

mit

$$e' = \left(\frac{v_0+1}{v_0-1}\right)^2, \quad f' = \left(\frac{i\,v_0+1}{i\,v_0-1}\right)^2.$$

Die Legendreschen Normalformen der selben Integrale sind durch (6.22) bzw. durch folgende Formeln gegeben:

$$\int J^\pm = \int (\omega^1 \pm \omega^3) = \delta_\pm\, 4\sqrt{2}\,[1 - (\alpha+\beta)/2]^{-1/2}$$
$$\times\,[(e^\pm - 1/f^\pm)\,(f^\pm - 1/f^\pm)]^{-1/2} \int \frac{d\xi^\pm}{\eta^\pm} \tag{6.28}$$

mit

$$\delta_+ = i\,, \quad \delta_- = 1\,, \quad \eta^\pm = \left[\left(1 - (\xi^\pm)^2\right)\left(1 - k^{\pm\,2}(\xi^\pm)^2\right)\right]^{1/2},$$
$$V^\pm = \left(\lambda^\pm(\xi^\pm)^2 + \mu^\pm\right)/\left(\varrho^\pm(\xi^\pm)^2 + \gamma^\pm\right), \quad \lambda^\pm = (f^\pm - e^\pm)/f^\pm\,,$$
$$\mu^\pm = f^\pm\,(e^\pm - 1/f^\pm) \quad \varrho^\pm = (f^\pm - e^\pm)\,, \quad \nu^\pm = (e^\pm - 1/f^\pm)\,,$$
$$e^+ = 1/e'\,, \quad e^- = e'\,, \quad f^+ = 1/f'\,, \quad f^- = f'\,, \quad (k^\pm)^2 = 2\,(v_0^4 - 1)/(v_0^2 \pm i)^2\,.$$

Die Differentiale $\boldsymbol{\varphi}$ selber können aus den angegebenen reduziblen Differentialen $J = \omega^2$, $J^\pm = \omega^1 \pm \omega^3$, die eine Basis von $H_0(\mathfrak{F})$ bilden, gemäss

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{\pi}{4}\begin{pmatrix} 1/A^1 & 2\,i/A^2 & i/A^1 \\ 2/A^1 & 0 & 0 \\ 1/A^1 & 2\,i/A^2 & -i/A^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J^+ \\ J \\ J^- \end{pmatrix} \tag{6.29}$$

berechnet werden, wobei nach (6.26):

$$A^1 = \int_4^3 (J^- + J^+)\,, \quad A^2 = 2\int_4^3 J\,. \tag{6.30}$$

---

[11]) Die Reduzibilität von diesen Integralen, so wie auch diejenige sämtlicher in diesem Unterabschnitt erwähnten Integralen, beruht auf der $\mathfrak{D}_4$-Symmetrie und allgemeinen Sätzen [29].

Im folgenden werden wir auch die bemerkenswerten Linearkombinationen $J_i^{\pm} = J^+ \pm i\, J^- = (1 \mp i)\,(\omega^3 \pm i\,\omega^1)$ von J^+, J^- gebrauchen. Diese sind selbst direkt reduzierbar auf je ein elliptisches Differential: denn die Transformation $V' = v^2$, $U' = u$ bildet $\mathfrak{F}(v, u)$ in ein hyperelliptisches Gebilde $\mathfrak{F}_2$ vom Geschlecht 2 und mit Diedersymmetrie $\mathfrak{D}_2$, so dass $\int J_i^{\pm}$ auf (bereits durch JACOBI und LEGENDRE [19c] betrachtete) Integrale auf $\mathfrak{F}_2$ reduziert werden:

$$\int J_i^{\pm} = \frac{1}{2}\,(1 \mp i) \int (V' \pm i)\, dV'/U'$$

mit

$$U'^2 = V' \left(V'^4 - (\alpha + \beta)\, V'^2 + 1\right).$$

Diese hyperelliptische Integrale zerfallen ferner (infolge der $\mathfrak{D}_2$-Symmetrie: siehe [29b]) nach der Transformation

$$\xi''^2 = \frac{2\,(v_0^4 - 1)}{v_0^2}\,\frac{V'}{(v_0^2\, V' - 1)\,(V' + v_0^2)}$$

in elliptische Integrale, so dass

$$\int J_i^{\pm} = -\frac{1 \mp i}{\sqrt{2}}\,\frac{v_0}{\sqrt{v_0^4 - 1}} \int \frac{d\xi''}{\sqrt{(1 - \xi''^2)\,(1 - (k_i^{\pm})^2\,\xi''^2)}}$$

mit

$$(k_i^{\pm})^2 = (\pm\, v_0^4 - i)^2/2\,(v_0^4 - 1)\,.$$

7. Explizite Bestimmung der Lösung des Modells

7.1 *Bestimmung der Riemannschen Konstanten und der Parameter* $e(2), e(3), f(1), f(2), f(3)$ *der Thetafunkitonen* (5.13)

Die Riemannschen Konstanten sind allgemein gegeben durch [19c]

$$K^{\mu} = \frac{1}{2}\,(\tau_{\mu}^{\mu} - \pi\, i) - \frac{1}{\pi\, i} \sum_{\substack{\nu \neq \mu \\ \nu = 1}}^{p} \overset{+}{\int_{\beta_\nu}} (\varphi^{\mu})^-\, d\varphi^{\nu}\,, \tag{7.1}$$

wobei $\overset{+}{\int_{\beta_\nu}}$ eine Integration in positiver Richtung längs dem β_ν-Querschnitt (also vom negativen Ufer von α_ν zum positiven), $(\varphi^{\mu})^-$ der Wert von φ^{μ} am negativen Ufer von β_ν bedeuten. Im hyperelliptischen Fall gilt nach C. NEUMANN und E. B. CHRISTOFFEL [19c]:

$$K^{\mu} = -\frac{1}{2}\,\pi\, i\,\mu + \frac{1}{2} \sum_{\lambda = 1}^{p} \tau_{\lambda}^{\mu}\,. \tag{7.1}'$$

In unserem Falle also

$$K^1 = -\frac{1}{2}\,\pi\, i + a\,, \quad K^2 = -\pi\, i + 2\,b\,, \quad K^3 = -\frac{3}{2}\,\pi\, i + a\,. \tag{7.2}$$

Ausgehend von (5.13) haben wir nach einigen Rechnungen, unter Berücksichtigung von (7.2)

$$
\begin{aligned}
{}^{t}\boldsymbol{f}(1) &= \Big(\frac{1}{2}\pi i + \frac{3}{2}a\,,\ \frac{5}{2}b\,,\ -\frac{1}{2}\pi i + \frac{1}{2}(3a-b)\Big)\,,\\
{}^{t}\boldsymbol{f}(2) &= \Big(-\frac{1}{2}\pi i + \frac{3}{2}a + b\,,\ \frac{9}{2}b\,,\ \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b\Big)\\
{}^{t}\boldsymbol{f}(3) &= \Big(-\frac{1}{2}\pi i + 2a - b\,,\ -\pi i + 3b\,,\ -\pi i + 2a\Big)\,. \qquad (7.3)
\end{aligned}
$$

Ferner, gemäss (5.13) und (6.29):

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}(2) &= \boldsymbol{K} + \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{3}\int_{\mathfrak{v}_1}^{\mathfrak{r}_k^+}\tilde{\boldsymbol{J}}\,,\quad \boldsymbol{e}(3) = \boldsymbol{K} + \frac{\pi}{4}\sum_{j=2}^{3}\int_{\mathfrak{v}_1}^{\mathfrak{r}_j^-}\tilde{\boldsymbol{J}}\,,\\
\boldsymbol{e}(1) &= \boldsymbol{f}(1) + \boldsymbol{f}(2) + \boldsymbol{f}(3) - \boldsymbol{e}(2) - \boldsymbol{e}(3) + \Big(\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{4\pi i}\boldsymbol{\tau}\,\boldsymbol{\mu}\Big) \qquad (7.4)
\end{aligned}
$$

mit $\boldsymbol{K}$ aus (7.2) und

$${}^{t}\tilde{\boldsymbol{J}} = (J_i^+/A^1 + 2\,i\,J/A^2\,,\ 2\,J^+/A^1\,,\ J_i^-/A^1 + 2\,i\,J/A^2)\,.$$

Unter Berücksichtigung der $\mathfrak{Z}_4$-Symmetrie von $\mathfrak{F}(v,u)$ bekommt man, nach einigen Rechnungen:

$$
\begin{aligned}
{}^{t}\boldsymbol{e}(2) &= \Big(-\frac{1}{2}\pi i + a - 2F_i^+ - 8\,i\,F + D_i^+ - 2\,i\,D\,,\\
&\quad -\pi i + 2b - 4F^+ + 2D^+\,,\ -\frac{3}{2}\pi i + a - 8\,i\,F - 2F_i^- - 2\,i\,D + D_i^-\Big)\\
{}^{t}\boldsymbol{e}(3) &= \Big(-\frac{1}{2}\pi i + a - 2F_i^+ - 4\,i\,F + 2\,i\,F^- - 2\,i\,E^-\,,\\
&\qquad -\pi i + 2b - 2F^+ + 2F_i^+ - 2E_i^+\,,\\
&\qquad -\frac{3}{2}\pi i + a + 2F^+ - 4\,i\,F - 2F_i^- - 2E^+\Big) \qquad (7.4')
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
D &= -\frac{\pi}{4}\int_{\mathfrak{v}_1}^{\mathfrak{q}_0^+}\frac{J}{A^2}\,,\quad D^{\pm} = -\frac{\pi}{4}\int_{\mathfrak{v}_1}^{\mathfrak{q}_0^+}\frac{J^{\pm}}{A^1}\,,\quad D_i^{\pm} = -\frac{\pi}{4}\int_{\mathfrak{v}_1}^{\mathfrak{q}_0^+}\frac{J_i^{\pm}}{A^1}\,,\\
E^{\pm} &= -\frac{\pi}{4}\int_{\mathfrak{v}_1}^{\mathfrak{q}_0^-}\frac{J^{\pm}}{A^1}\,,\quad E_i^{+} = -\frac{\pi}{4}\int_{\mathfrak{v}_1}^{\mathfrak{q}_0^-}\frac{J_i^{+}}{A_1}\,,\\
F &= \frac{\pi}{4}\int_{\mathfrak{o}}^{\mathfrak{v}_1}\frac{J}{A^2}\,,\quad F^{\pm} = \frac{\pi}{4}\int_{\mathfrak{o}}^{\mathfrak{v}_1}\frac{J^{+}}{A^1}\,,\quad F_i^{\pm} = \frac{\pi}{4}\int_{\mathfrak{o}}^{\mathfrak{v}_1}\frac{J_i^{\pm}}{A^1}\,;\quad \mathfrak{o} = (v=0,\,u=1)\,.
\end{aligned}
$$

Auf Grund der j-Symmetrie von $\mathfrak{F}(v,u)$ gelten noch folgende Beziehungen:

$$E^+ = \frac{\pi}{4}i + D^+\,,\quad E^- = -D^-\,,\quad E_i^+ = \frac{\pi}{4}i + D_i^-\,. \qquad (7.4'')$$

Somit haben wir alle erwünschten Grössen durch bestimmte elliptische Integrale ausgedrückt.

7.2 *Reduktion des abelschen Differentials ϱ_1 auf elliptische Differentiale und Berechnung seiner Perioden*

Für ϱ_1 haben wir in **5.** die Ausdrücke (5.20) und (5.23) hergeleitet. Es ist möglich, (5.20) durch elliptische Integrale auszudrücken; wir ziehen aber vor, aus (5.23) eine bequeme Darstellung von ϱ_1 durch elliptische Thetafunktionen herzuleiten. Dank der Aufspaltung (6.17) erhält man

$$\varrho_1 = \frac{\zeta_0}{4} \sum_{k=0}^{3} \frac{d}{dv} \log \frac{\mathfrak{T}(\mathfrak{q}_k^+)\, \mathfrak{T}(\mathfrak{r}_k^-)}{\mathfrak{T}(\mathfrak{r}_k^+)\, \mathfrak{T}(\mathfrak{q}_k^-)} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} k \frac{d}{dv} \log \frac{\mathfrak{T}(\mathfrak{q}_k^+)\, \mathfrak{T}(\mathfrak{q}_k^-)}{\mathfrak{T}(\mathfrak{r}_k^+)\, \mathfrak{T}(\mathfrak{r}_k^-)} \tag{7.5}$$

mit der Abkürzung

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{a}) = \sum_{j=2}^{3} \theta_j \left(t_1(\mathfrak{a}); 2\, b\right) \theta_j \left(t_2(\mathfrak{a}); 2\, b\right) \theta_j \left(t_3(\mathfrak{a}); 4\, (a - b)\right),$$

wobei

$$t_1(\mathfrak{a}) = u^2 - e^2(\mathfrak{a}); \; t_2(\mathfrak{a}) = u^1 - u^3 - (e^1 - e^3)\, (\mathfrak{a}) \; ;$$
$$t_3(\mathfrak{a}) = u^1 - u^2 + u^3 - (e^1 - e^2 + e^3)\, (\mathfrak{a}) \; . \tag{7.6}$$

Um die Perioden $A_\mu(\varrho_1)$, $B_\mu(\varrho_1)$ von ϱ_1 zu berechnen, benützen wir die Darstellung (5.17). Wegen der Eigenschaften der Perioden der normalen abelschen Differentiale 3. Gattung folgt:

$$A_\mu(\varrho_1) = 0 \tag{7.7}$$

(dies ist eine Folge unserer speziellen Wahl von ϱ_1!)
Ferner

$$B_\mu(\varrho_1) = \frac{\zeta_0}{2} \sum_{k=0}^{3} \left(\int_{\mathfrak{r}_k^+}^{\mathfrak{q}_k^+} - \int_{\mathfrak{r}_k^-}^{\mathfrak{q}_k^-} \right) \varphi^\mu + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} k \left(\int_{\mathfrak{r}_k^+}^{\mathfrak{q}_k^+} + \int_{\mathfrak{r}_k^-}^{\mathfrak{q}_k^-} \right) \varphi^\mu \; .$$

φ^μ kann durch die ω^μ, z.B. gemäss (6.29), ausgedrückt werden; nun gilt:

$$\int_{\mathfrak{r}_k^\pm}^{\mathfrak{q}_k^\pm} \omega^\mu = i^{\mu k}\, \Gamma_\pm^\mu$$

mit

$$\Gamma_\pm^\mu = \int_{\mathfrak{r}_0^\pm}^{\mathfrak{q}_0^\pm} \omega^\mu = 2 \int_{\mathfrak{v}_1}^{\mathfrak{q}_0^\pm} \omega^\mu \; .$$

Ferner gilt:

$$\sum_{k=0}^{3} i^{\mu k}\, \Gamma_\pm^\mu = 0$$

und daher

$$B_\mu(\varrho_1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} k \left(\int_{\mathfrak{r}_k^+}^{\mathfrak{q}_k^+} + \int_{\mathfrak{r}_k^-}^{\mathfrak{q}_k^-} \right) \varphi^\mu$$

oder, nach einigen Rechnungen und unter Benützung der $\mathfrak{Z}_4$-Symmetrie von $\mathfrak{F}(v, u)$:

$$
\begin{aligned}
{}^t\boldsymbol{B} &= \pi \left(\int_{v_1}^{q_0^+} + \int_{v_1}^{q_0^-} \right) \left(-i \frac{\omega^1}{A^1} - i \frac{\omega^2}{A^2} + i \frac{\omega^3}{A^1}, \right. \\
&\quad \left. -(1+i) \frac{\omega^1}{A^1} - (1-i) \frac{\omega^3}{A^1}, \quad -\frac{\omega^1}{A^1} - i \frac{\omega^2}{A^2} - \frac{\omega^3}{A^1} \right) \\
&= 4 \left(i D + i D^- + i E + i E^-, \quad D_i^+ + E_i^+, \quad D^+ + i D + E^+ + i E \right) \qquad (7.8)
\end{aligned}
$$

mit den Bezeichnungen von (7.4′) und

$$E = -\frac{\pi}{4} \int_{v_1}^{q_0^-} \frac{J}{A^2};$$

weiter, mit Hilfe vom Automorphismus j von $\mathfrak{F}$ ((7.4″) und $E = \pi/8 + D$):

$${}^t\boldsymbol{B} = 4 \left(\frac{\pi}{8} i + 2 i D, \quad \frac{\pi}{4} i + 2 D^+, \quad 3 \frac{\pi}{8} i + 2 D^+ + 2 i D \right).$$

Somit haben wir alle Perioden von ϱ_1 durch bestimmte elliptische Integrale ausgedrückt.

7.3 *Bestimmung der Multiplikatoren von exp* $(\int z d \log w + \varrho_1)$

Wir berechnen nun die Perioden $\mathcal{A}_\lambda$ bzw. $\mathcal{B}_\lambda$ von $\int z \, d \log w$ an den Rückkehrschnitten β_λ bzw. α_λ. Es gilt:

$$\mathcal{A}_\lambda = \int_{\beta_\lambda} z \, d \log w \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_\lambda} \log v \, d \log w \equiv -\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_\lambda} \frac{dv}{v} \log w,$$

wobei $\equiv$ modulo $2\pi i$ bedeutet. Lassen wir die β_λ auf die Verzweigungsschnitte fallen, so erhalten wir

$$\int_{\beta_\lambda} \frac{dv}{v} \log w = -2 \int_{2\lambda+1}^{2\lambda+2} \frac{dv}{v} \log w,$$

wobei die Integration auf dem oberen Blatt auszuführen ist; daher

$$\mathcal{A}_\lambda \equiv +\frac{1}{\pi i} \int_{2\lambda+1}^{2\lambda+2} \frac{dv}{v} \log w. \qquad (7.9)$$

Da $1/v \log w$ regulär für $v = 0$ ist, wie man aus (4.47) sieht, so kann man folgende Umformung machen:

$$\mathcal{A}_2 \equiv +\frac{1}{\pi i} \int_{iv_3}^{iv_4} \frac{dv}{v} \log w \equiv -\mathcal{A}_1 \qquad (7.10)$$

und analog

$$\mathcal{A}_3 \equiv \mathcal{A}_1 \equiv +\frac{1}{\pi i} \int_{v_3}^{v_4} \frac{dv}{v} \log w. \qquad (7.11)$$

Analog berechnet man:

$$\mathcal{B}_1 \equiv -\frac{1}{\pi i} \int_3^2 \frac{dv}{v} \log w, \quad \mathcal{B}_2 \equiv 2 \mathcal{B}_1, \quad \mathcal{B}_3 \equiv \mathcal{B}_1. \qquad (7.12)$$

Man sieht leicht, dass $\int(z\,d\log w)$ und somit $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$ auf elliptische Grössen reduzierbar sind. Es gilt nämlich

$$\int z\,d\log w = \int \pi_1\,d\log\pi_2\,,$$

wobei

$$\Pi_1 = \frac{1}{4\pi i}\log V\,,\quad \Pi_2 = \frac{p_1(V)+2\sqrt{\alpha-\beta}\;V\;U(V)}{p_0(V)}$$

mit $V = v^2$, $U = u$: Π_1, Π_2 sind Integrale 3. Gattung auf $\mathfrak{E}$. Berücksichtigt man (7.7), (7.8), so erhält man nun für die Grössen $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ in (5.13):

$${}^t\boldsymbol{\mu} = (-\mathcal{A}, +\mathcal{A}, -\mathcal{A})$$

$${}^t\boldsymbol{\nu} = \left(-\mathcal{B}-\frac{\pi}{2}i-8\,i\,D\,,\ -2\,\mathcal{B}-\pi\,i-8\,D^+,\ -\mathcal{B}-\frac{3\,\pi\,i}{2}-8\,D^+-8\,i\,D\right) \tag{7.13}$$

mit

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 = -\frac{1}{\pi\,i}\int_4^3 \frac{dv}{v}\log w\,,\qquad \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 = \frac{1}{\pi\,i}\int_2^3 \frac{dv}{v}\log w\,. \tag{7.14}$$

Ferner:

$$\boldsymbol{e}(1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\pi\,i + 3\,a - \frac{1}{2\pi\,i}(b-a)\,\mathcal{A} - \frac{1}{2}\mathcal{B} + 4\,F_i^+ + 12\,i\,F - 2\,i\,F^- - D_i^+ - 2\,i\,D - 2\,i\,D^- \\ \pi\,i + 6\,b + \frac{1}{2\pi\,i}\,b\,\mathcal{A} - \mathcal{B} + 6\,F^+ - 2\,F_i^+ - 6\,D^+ + 2\,D_i^- \\ \frac{3}{2}\pi\,i + 3\,a - \frac{1}{2\pi\,i}(b-a)\,\mathcal{A} - \frac{1}{2}\mathcal{B} - 2\,F^+ + 12\,i\,F + 4\,F_i^- - 2\,D^+ - 2\,i\,D - D_i^- \end{pmatrix}. \tag{7.15}$$

7.4 *Die explizite Lösung des Problems*

Wir fassen nun die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammen in folgendem *Satz:* Die erwünschte Lösung der Hilfsgleichung (4.26) ist gegeben durch:

$$\mathfrak{H}'(\mathfrak{p}) = T(\mathfrak{p})\exp\left[\int^{\mathfrak{p}}\left(z'\,d\log w' - \mathcal{A}\,\frac{J}{A^2} + \varrho_1\right)\right], \tag{7.16}$$

wobei $\mathfrak{p} = (z, w)$ der laufende Punkt auf $\mathfrak{F}(z, w)$ (**4.**) ist; ferner gilt

$$T(\mathfrak{p}) = \prod_{l=1}^{3}\frac{\sum_{j=2}^{3}\theta_j(s_1(l;\mathfrak{p});2\,b)\;\theta_j(s_2(l;\mathfrak{p});2\,b)\;\theta_j(s_3(l;\mathfrak{p});4\,(a-b))}{\sum_{j=2}^{3}\theta_j(t_1(l;\mathfrak{p});2\,b)\;\theta_j(t_2(l;\mathfrak{p});2\,b)\;\theta_j(t_3(l;\mathfrak{p});4\,(a-b))}$$

$${}^t\boldsymbol{s}(l;\mathfrak{p}) = \left(\left[\int^{\mathfrak{p}}\varphi^2(\mathfrak{p})\right] - e^2(l)\,,\ \left[\int^{\mathfrak{p}}(\varphi^1-\varphi^3)\,(\mathfrak{p})\right] - \left(e^1(l)-e^3(l)\right),\right.$$
$$\left.\left[\int^{\mathfrak{p}}(\varphi^1-\varphi^2+\varphi^3)\,(\mathfrak{p})\right] - \left(e^1(l)-e^2(l)+e^3(l)\right)\right),$$

$${}^t\boldsymbol{t}(l;\mathfrak{p}) = \left(\left[\int^{\mathfrak{p}}\varphi^2(\mathfrak{p})\right] - f^2(l)\,,\ \left[\int^{\mathfrak{p}}(\varphi^1-\varphi^3)\,(\mathfrak{p})\right] - \left(f^1(l)-f^3(l)\right),\right.$$
$$\left.\left[\int^{\mathfrak{p}}(\varphi^1-\varphi^2+\varphi^3)\,(\mathfrak{p})\right] - \left(f^1(l)-f^2(l)+f^3(l)\right)\right)$$

und ϱ_1 ist durch (7.5), (7.6) (oder (5.20)) gegeben.

Alle Integrationen sind vom festen Punkt $\mathfrak{v}_1 = (v = v_0, w = -1)$ aus vorzunehmen: dabei ist v_0 die in (6.3) eingehende Grösse. Die Normaldifferentiale sind durch (6.29) in Funktion der elliptischen Differentiale J, $J^{\pm}$ (6.22), (6.28) gegeben; es gilt $\mathfrak{q}_k^{\pm} = (z = z_k^{\pm}, w = \infty)$, $\mathfrak{r}_k^{\pm} = (z = z_k^{\pm}, w = 0)$ mit $z_k^{\pm}$ aus (5.16) und ζ_0 aus (2.15). Ferner sind alle in (7.16) auftretenden Konstanten explizit angegeben worden: und zwar $[\mathcal{A}]$, $[(A^1, A^2)]$, [2b], [4 $(a - b)$], $[\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}]$ der Reihe nach durch (7.14), (6.30), (6.19), (6.23), (7.13), $[\boldsymbol{e}(2), \boldsymbol{e}(3)]$, $[\boldsymbol{f}(1), \boldsymbol{f}(2), \boldsymbol{f}(3)]$ durch (7.4), (7.3) und $\boldsymbol{e}(1)$ durch (7.15). Alle in der obigen Lösung (7.16) auftretenden Grössen sind elliptisch. Weitere Ausdrücke für die Thetafunktionen in (7.16) wurden in (6.20), (6.21), (6.24) gegeben.

Durch diesen Satz und den Satz 3 vom Unterabschnitt 4.4 ist unsere Lösung des Modells gegeben.

Es ist für mich eine grosse Freude, hier meinen hochverehrten akademischen Lehrern, den Herren Professoren RES JOST und MARKUS FIERZ für die Ermöglichung dieser Arbeit danken zu dürfen. Ganz besonders möchte ich Prof. Dr. R. JOST für die Anregung zu diesem Thema so wie für seinen ständigen, liebenswürdigen und sehr hilfreichen persönlichen Einsatz meinen herzlichen Dank aussprechen.

Literaturverzeichnis

[1] V. DE ALFARO – T. REGGE, Potential Scattering, North-Holland, 1965.
[2] L. D. FADDEEV, Trudy Mat. Inst. Steklova USSR, Akad. Nauk 1963, Moskau; englische Übersetzung: *Mathematical Aspects of the Three-Body Problem in the Quantum Theory of Scattering*, Israel progr. for scientific translations, Jerusalem 1965.
[3] W. HEISENBERG, Z. Phys. *120*, 513, 673 (1943).
[4] W. HEISENBERG, Z. Naturf. *1*, 11 (1946).
[5] K. WILDERMUTH, Z. Phys. *127*, 92–121 (1949).
[6] H. M. NUSSENZVEIG, Proc. Roy. Soc. [A] *264*, 408 (1961).
[7] E. LIEB – H. KOPPE, Phys. Rev. *116*, 367 (1959).
[8] P. M. MORSE – H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics*, Mc Graw-Hill, 1953.
[9] R. JOST, J. Appl. Math. Phys. *6*, 316 (1955).
[10] R. JOST, Comm. Math. Helv. *28*, 173 (1954).
[11] L. EYGES, Phys. Rev. *115*, 1643 (1959).
[12] G. GRÜNBERG, Phys. Rev. *63*, 185 (1943).
[13] D. S. JONES – F. B. PIDDUCK, Quart. J. Math. (2), *1*, 229 (1950).
[14] a) W. E. WILLIAMS, Proc. Roy. Soc. A *252*, 376 (1959).
b) G. D. MALYUGHINETZ, Ann. Phys., Lpz. *6*, 107 (1960).
[15] a) B. NOBLE, *Methods based on the Wiener-Hopf Technique*, Pergamon Press, 1958;
b) A. E. HEINS, Comm. pure appl. Math. *9*, 447 (1956).
[16] P. APPELL, Acta Math. *13*, 5 (1890).
[17] B. RIEMANN, Gesammelte Werke, Dover, 1953.
[18] a) P. APPELL – E. GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques*, I–II, Gauthier-Villars, 1929.
b) H. BEHNKE – F. SOMMER, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, Springer, 1955.
c) C. CHEVALLEY, *Introduction to the Theory of Algebraic Functions of one Variable*, Am. Math. Soc., 1951.
d) W. F. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, II, 2, Teubner, 1932.
e) A. PFLUGER, *Theorie der Riemannschen Flächen*, Springer, 1957.
f) G. SPRINGER, *Introduction to Riemann Surfaces*, Addison-Wesley, 1957.
g) H. WEYL, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Teubner, L. Angl. 1964.
h) W. WIRTINGER, *Algebraische Funktionen und ihre Integrale*, Enz. d. Math. Wiss. II B2.
[19] a) F. CONFORTO, *Abelsche Funktionen und Algebraische Geometrie*, Springer, 1956.
b) F. CONFORTO, *Funzioni Abeliane Modulari*, Docet, Roma 1951.
c) A. KRAZER, *Lehrbuch der Thetafunktionen*, Teubner, Leipzig, 1903.

d) A. KRAZER – W. WIRTINGER, *Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen*, Enz. Math. Wiss.; II B7.
e) E. LANDFRIEDT, *Thetafunktionen und hyperelliptische Funktionen*, Göschen, 1902.
f) C. L. SIEGEL, Nachr. Akad. der Wiss.; Göttingen, S.365 (1963).
g) A. WEIL, Séminaire Bourbaki, Mai 1949, 16 – 01.
[20] a) J. LEWITTES, Acta Math. *111*, 37 (1964).
b) A. L. MAYER, Math. Ann. *153*, 163 (1964).
[21] a) M. EICHLER, *Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen*, Birkhäuser, 1963.
b) S. LEFSCHETZ, *Algebraic Geometry*, Princeton Univ. Press, 1953.
c) F. SEVERI, *Vorlesungen über Algebraische Geometrie*, Teubner, 1921.
d) B. L. v. D. WAERDEN, *Einführung in die Algebraische Geometrie*, Springer, 1939.
e) R. J. WALKER, *Algebraic Curves*, Dover, 1962.
f) A. WEIL, *Foundations of Algebraic Geometry*, Am. Math. Soc. Coll. Publ., XXIX, 1962.
[22] a) L. BERS, *On Moduli of Riemann Surfaces*, Lectures at ETH Zürich, Sommer 1964.
b) H. E. RAUCH, Bull. am. Math. Soc. *71*, 1 (1965).
c) J. P. SERRE, Proc. Int. Congr. Math., Schweden 1962, S.190.
d) A. WEIL, Sémin. Bourbaki, Mai 1958, S.168 – 01.
[23] a) R. TORELLI, Rom. Acc. Lincei Rend. Vol. 22, 98 (1913) und auch
b) A. ANDREOTTI, Am. J. Math. *80* (801) (1958).
c) H. MARTENS, Ann. Math. *28*, 107 (1963).
d) H. MARTENS, Comm. Pure Appl. Math. *16*, 97 (1963).
e) A. WEIL, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen *2*, 33 (1957).
[24] a) A. HURWITZ, Gesamm. Werke, 163; 241; 391.
b) F. SEVERI, Math. Ann. *74*, 515 (1913).
c) J. LEWITTES, Am. J. Math. *85*, 734 (1963).
[25] a) O. HAUPT, Math. Z., *6*, 219 (1920) und auch
b) M. GERSTENHABER, Proc. Am. Math. Soc. *4*, 476 (1953).
[26] a) F. KLEIN, *Lectures on the Icosahedron*, Dover, 1956.
b) F. KLEIN, *Vorlesungen über Riemannsche Flächen*, 1891–92.
c) F. SCHOTTKY, J. reine und angew. Math. *106*, 199 (1890).
[27] F. TRICOMI, Funzioni ellittiche, Zanichelli, 1951.
[28] E. B. CHRISTOFFEL, Math. Ann. *54*, 1347 (1901).
[29] a) W. GILLESPIE, Thesis, Chicago 1900.
b) J. I. HUTCHINSON, Thesis, Chicago, 1897.
[30] a) H. A. SCHWARZ, Gesamm. math. Abhandlungen, Bd. 1, 6–125 (1890).
b) K. WEIERSTRASS, Math. Werke, Bd. 3, 241–247 (1903).
c) G. HETTNER, J. f. Math. *138*, 54 (1910).
[31] G. FLAMAND, Notes of a lecture given at Cargèse Summer School 1965, preprint Jan. 1966

Bei der Korrektur der Probeabzüge hinzugefügt: Nach Einsendung dieser Arbeit sind dem Verfasser noch zwei Arbeiten zur Kenntnis gekommen, die direkt in den Rahmen von Anm. 2), S. 136 passen und im wesentlichen die N-Teilchen-Verallgemeinerung vom Fall (1.1) mit $A = B = 0$, d. h. den Fall des Hamilton-Operators

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - C\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant N}\delta(x_i - x_j)$$

behandeln: J. B. MC GUIRE, J. Math. Phys. *5*, 622 (1964). E. BREZIN – J. ZINN – JUSTIN, C. R. Acad. Sc. Paris, *B 263*, 670 (1966).