

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 39 (1966)

Heft: 7

Artikel: Symmetrieeigenschaft des Zustandsvektors von zwei zerfallenden Teilchen

Autor: Jaus, W.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-113708>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Symmetrieeigenschaft des Zustandsvektors von zwei zerfallenden Teilchen

von **W. Jaus**

Institut für theoretische Physik, Universität Zürich

(26. VII. 66)

Abstract. The statistical behaviour of unstable particles is examined. For this purpose the state vector of the unstable V-particle in the Lee model is constructed and its dependence on the excitation condition shown. The state vector of two unstable V's no longer obeys the symmetrisation postulate (SP) and the violation of SP is a consequence of the fact, that the V's can decay. As an example of the technique we calculate, again in a simple model, the probability, that the long-lived component of K_0 decays into a 2π -state via a CP-invariant decay interaction. This probability measures the deviation from SP of the state vector of two unstable π 's, but because it is very small we can conclude, that in present experiments the π behaves like an exact boson.

Einleitung

Diese Untersuchung wurde veranlasst durch die Frage, welchen Sinn es wohl habe zu behaupten, ein instabiles Teilchen sei ein Boson bzw. ein Fermion. Ein instabiles Teilchen ist ja erst dann vollständig definiert, wenn die Bedingungen, unter denen es erzeugt wurde, mit in dieser Definition enthalten sind. Damit haben wir aber einen Hinweis, dass mehrere gleiche zerfallende Teilchen, die durch verschiedene Prozesse oder unter verschiedenen Anregungsbedingungen erzeugt werden, nicht mehr exakt einer bestimmten Statistik gehorchen werden.

Formal gilt es also die Behauptung zu überprüfen, ob das Symmetrisierungs-postulat für instabile Teilchen gültig ist. Dieses würde besagen, dass ein Zustand, der mehrere (instabile) Teilchen beschreibt, entweder symmetrisch (Definition des Bosons) oder antisymmetrisch (Definition des Fermions) ist bei Permutation dieser Teilchen.

Wir machen die Annahme, dass das Symmetrisierungspostulat für ein zerfallendes Teilchen richtig ist, solange wir die Zerfallswechselwirkung vernachlässigen und untersuchen die Störung dieses Symmetrieverhaltens, welche die Zerfallswechselwirkung verursacht.

Im ersten Abschnitt rechnen wir im Lee-Modell und erzeugen den instabilen Zustand durch Streuung der stabilen Teilchen. Er stimmt überein mit dem Vektor, der dem Pol des Erwartungswertes der Resolventen $(E - H)^{-1}$ im 2. Blatt der E -Ebene zugeordnet ist. Dieser Zustandsvektor beschreibt nun explizit die Abhängigkeit des

instabilen Teilchens von seinen Anregungsbedingungen. Dieser Einfluss lässt sich anschaulich so deuten, dass der Radius des instabilen Teilchens, welcher durch die Ausdehnung der von virtuellen Zerfallsprozessen herrührenden Wolke von Sekundärteilchen gegeben ist, grössenordnungsmässig mit der Breite des anregenden Wellenpakets übereinstimmt.

Der Zustandsvektor von zwei separat, aber zur gleichen Zeit erzeugten nicht wechselwirkenden instabilen Teilchen gehorcht nicht mehr dem Symmetrisierungspostulat, sondern besteht aus einem symmetrischen und einem antisymmetrischen Vektor. Dieses Ergebnis können wir für das Beispiel des π -Mesons wie folgt formulieren

$$|\pi_{k_1} \pi_{k_2}\rangle = |\pi_{k_1} \pi_{k_2}\rangle_+ + |\pi_{k_1} \pi_{k_2}\rangle_- . \quad (\text{a})$$

Auf der linken Seite steht der Zustandsvektor für zwei instabile π -Mesonen, und dieser wird zerlegt in einen bei Vertauschung symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil. Die Amplitude des antisymmetrischen Vektors ist von der Ordnung G klein gegenüber dem symmetrischen (wo G die Kopplungskonstante der Zerfallswechselwirkung ist), und sie hängt ab vom Unterschied der Anregungsbedingungen für die beiden π 's.

Im zweiten Abschnitt wird das π -Meson genauer diskutiert, insbesondere wie sich eine Abweichung vom Symmetriepostulat, d.h. vom reinen Bosecharakter, im Experiment bemerkbar macht. Hierfür untersuchen wir den K_0 -Zerfall und legen der Rechnung ein Modell zugrunde, in welchem wir den Einfluss der starken Wechselwirkungen vernachlässigen und lediglich die schwachen Wechselwirkungen berücksichtigen, die für den Zerfall des K - und des π -Mesons verantwortlich sind. Das Studium dieses einfachen Modells ist deshalb gerechtfertigt, weil es uns erlaubt prinzipielle Überlegungen zu demonstrieren, und es sollte uns zudem die Grössenordnung der zu erwartenden Effekte liefern.

Die beiden Komponenten K_S und K_L des neutralen K -Mesons sind Eigenvektoren der Symmetrie-Operation CP mit den Eigenwerten $+1$ und -1 , und die Erhaltung von CP in den schwachen Wechselwirkungen (welche wir voraussetzen) bedingt ein verschiedenes Verhalten von K_S und K_L . Der Zustand von zwei entgegengesetzt geladenen π -Mesonen im gemeinsamen Ruhesystem ist gegenüber CP symmetrisch, wenn der Zerfall der π 's vernachlässigt wird; in dieser Näherung sind also die π 's Bosonen. Der dominierende Zerfall von K_S ist also $K_S \rightarrow 2\pi$, während K_L nicht in 2π 's zerfallen kann. Berücksichtigt man den instabilen Charakter der π 's, so ist der Zustandsvektor für zwei zerfallende π -Mesonen nicht mehr symmetrisch gegenüber CP , und er lässt sich analog zu Gleichung (a) zerlegen

$$|\pi_k^+ \pi_{-k}^-\rangle = |\pi_k^+ \pi_{-k}^-\rangle_+ + |\pi_k^+ \pi_{-k}^-\rangle_- ; \quad CP |\pi_k^+ \pi_{-k}^-\rangle_{\pm} = \pm |\pi_k^+ \pi_{-k}^-\rangle_{\pm} . \quad (\text{b})$$

Damit wird aber der Zerfall $|K_L\rangle \rightarrow |\pi \pi\rangle_-$ möglich, und die Wahrscheinlichkeit für diesen Prozess relativ zum Zerfall $|K_S\rangle \rightarrow |\pi \pi\rangle_+$ gibt uns direkt die Wahrscheinlichkeit für den antisymmetrischen Anteil des Zustandsvektors zweier instabiler π -Mesonen. Diese Wahrscheinlichkeit ist höchstens von der Grössenordnung $(G m_N^2)^2$, und somit experimentell nicht feststellbar.

Wir haben also gezeigt, dass π -Mesonen nicht exakt Bosonen sind, aber im Rahmen der heutigen Experimente haben sie dieselben Eigenschaften wie diese.

A. Der Zustandsvektor für ein instabiles Teilchen

Wir rechnen im folgenden im einfachsten Modell für den Zerfall eines Teilchens in zwei Sekundärteilchen, dem Lee-Modell. Durch Streuung der stabilen Teilchen (N - und Θ -Teilchen im Lee-Modell) erzeugen wir den instabilen Zustand (V -Teilchen) und finden wie dieser Zustand explizit von den Erzeugungsbedingungen abhängt. Zwei verschiedene instabile Teilchen kann man nicht unter exakt gleichen Bedingungen erzeugen, und diese beiden instabilen Teilchen sind somit auch nicht mehr ununterscheidbar. Diese Tatsache äussert sich formal dadurch, dass der Zustandsvektor von, in unserem Falle, zwei V -Teilchen nicht mehr antisymmetrisch in den Quantenzahlen der beiden V 's ist, sondern aus einem antisymmetrischen und einem symmetrischen Vektor besteht. Die Amplitude des symmetrischen Zustandes ist jedoch sehr klein.

A1. Konstruktion des zerfallenden Zustandes

Die Einheiten sind so gewählt, dass $c = \hbar = 1$. Der Hamiltonoperator im Schrödingerbild ist

$$H = H_0 + \mathcal{H}. \quad (1a)$$

H_0 beschreibt die freien Teilchen mit den Massen m_{V0} , m_N , μ . Dabei ist m_{V0} die «nackte» Masse des V -Teilchens. Die Massen der stabilen Teilchen werden durch die Zerfallswechselwirkung \mathcal{H} nicht beeinflusst.

$$H_0 = m_{V0} \int d^3p V_p^* V_p + m_N \int d^3q N_q^* N_q + \int d^3k \omega_k a_k^* a_k \quad (1b)$$

$$\mathcal{H} = \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2}\omega_k} \int d^3p (V_p^* N_{p-k} a_k + N_{p-k}^* a_k^* V_p)$$

$$\omega_k = \sqrt{\mu^2 + k^2}. \quad (1c)$$

Der Parameter λ_0 charakterisiert die Stärke der Kopplung zwischen den Feldern, und $f(\omega_k)$ ist eine (reelle) «cutoff» Funktion, welche so zu wählen ist, dass die renormalisierte Kopplungskonstante immer kleiner ist als der kritische Wert. Alle Grössen dieses Modells sind dann wohldefiniert.

Die Kommutationsregeln für die Feldoperatoren lauten

$$[a_k, a_{k'}^*] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'); [a_k, a_{k'}] = 0 \quad (2a)$$

$$\{N_q, N_{q'}^*\} = \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{q}'); \{N_q, N_{q'}\} = 0 \quad (2b)$$

$$\{V_p, V_{p'}^*\} = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'); \{V_p, V_{p'}\} = 0 \quad (2c)$$

$$\{N_q, V_p\} = [a_k, N_q] = [a_k, V_p] = 0 \quad (2d)$$

$$\{N_q, V_p^*\} = [a_k, N_q^*] = [a_k, V_p^*] = 0. \quad (2e)$$

Wir nehmen nun an

$$m_{V0} > m_N + \mu \quad (3)$$

d.h. die möglichen Reaktionen dieses Modells sind dann Bildung und Zerfall des instabilen V -Teilchens.

Wir suchen den Zustandsvektor für ein instabiles V -Teilchen, und dieser liegt in jenem Unterraum des Hilbertraumes, der von den Vektoren $|V_p\rangle$ und $|N_{p-K} a_K\rangle$ aufgespannt wird. Es gibt in der Literatur verschiedene Versuche diesen Zustandsvektor zu finden [1, 2]¹⁾; dabei wurde jeweils versucht, einen approximierten Eigenzustand von H (1a), zu konstruieren. Diese Methoden sind jedoch nicht exakt und geben vor allem keinen Einblick, wie der instabile Zustand von seinen Anregungsbedingungen abhängt. Wir wollen nun die Streuung eines Θ -Teilchens an einem N -Teilchen diskutieren. Zu einer Zeit $t \rightarrow -\infty$ wird der Zustand eines nicht wechselwirkenden N und Θ beschrieben durch

$$|\phi, t\rangle = e^{-iH_0 t} \int d^3q e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} A_N(\vec{q}) A_\Theta(\vec{k}) N_q^* a_k^* |0\rangle \quad (4)$$

wo die Funktionen A_Θ , A_N die Amplituden der Wellenpakete für das Θ - bzw. N -Teilchen sind. Die Mittelpunkte dieser Wellenpakete sollen zur Zeit $t = 0$ im Punkt \vec{x} zusammenfallen.

Der Zustandsvektor für das wechselwirkende $N + \Theta$ -System lautet für Zeiten $t \geq 0$

$$|\psi, t\rangle = \int d^3q e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-iEt} A_N(\vec{q}) A_\Theta(\vec{k}) |q, k\rangle_+ \quad (5)$$

$$E = m_N + \omega_k \quad (6)$$

und der Streuzustand $|q, k\rangle_+$ ist ein Eigenvektor von H

$$H |q, k\rangle_+ = E |q, k\rangle_+ \quad (7)$$

$$|q, k\rangle_+ = N_q^* a_k^* |0\rangle + \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2}\omega_K} G^+(E) V_{q+k}^* |0\rangle \quad (8)$$

$$G^+(E) = \frac{1}{E - H + i\varepsilon}. \quad (9)$$

Für die weitere Rechnung benötigen wir die beiden folgenden Matrixelemente von $G^+(E)$

$$\langle V_p | G^+(E) | V_{p'} \rangle = \delta^{(3)}(p - p') G_V^+(E) \quad (10)$$

$$G_V^+(E) = \frac{1}{E - m_{V_0} + i/2 \Gamma_V(E) + i\varepsilon} \quad (11)$$

$$\frac{i}{2} \Gamma_V(E) = - \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{2\omega_{k'}} \frac{f^2(\omega_{k'})}{E - m_N - \omega_{k'} + i\varepsilon} \quad (12)$$

$$\langle V_p | G^+(E) | N_q a_{k'} \rangle = \frac{\langle V_p | H | N_q a_{k'} \rangle}{E - m_N - \omega_{k'} + i\varepsilon} G_V^+(E) \quad (13)$$

¹⁾ Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 640.

und finden damit für den Streuzustand (8)

$$|q, k\rangle_+ = N_q^* a_k^* |0\rangle + \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2}\omega_k} G_V^+(E) \times \left(V_{q+k}^* |0\rangle + \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2}\omega_{k'}} \frac{f(\omega_{k'})}{E - m_N - \omega_{k'} + i\varepsilon} N_{q+k-k'}^* a_{k'}^* |0\rangle \right). \quad (14)$$

Über die Funktionen $G_V^+(E)$ und $\Gamma_V(E)$ gilt der Satz [3]: $G_V^+(E)$ ist analytisch in der ganzen komplexen E -Ebene mit einem Verzweigungsschnitt $m_N + \mu \leq E < \infty$. Dasselbe gilt für $\Gamma_V(E)$.

Die Wellenpaketfunktionen A_N, A_Θ beschreiben, unter welchen experimentellen Bedingungen das V -Teilchen erzeugt wird. Wir stellen uns ein Experiment vor, in welchem die in der z -Richtung fliegenden Θ -Teilchen ausgefiltert und an einem ruhenden N -Teilchen gestreut werden. Wir tragen nur der hierdurch resultierenden Unschärfe der Energieverteilung der Θ 's Rechnung und vernachlässigen die Streuung in die x, y -Ebene. Wir machen also den Ansatz

$$A_N(\vec{q}) = (2\pi)^{-3/2} \quad (15)$$

$$A_\Theta(\vec{k}) = \delta(k_x) \delta(k_y) \frac{|\vec{k}|}{E} A(E). \quad (16)$$

Als einfachste Funktion $A(E)$, mit der wir unsere Behauptungen demonstrieren können, wählen wir

$$A(E) = n \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + (m_V - E)^2} \quad (17)$$

und n ist eine Normierungskonstante, α die Breite des anregenden Wellenpakets. Diese spezielle Form von A_N, A_Θ schränkt die Allgemeinheit unserer Rechnung nicht ein, weil wir uns nur für die Größenordnung interessieren. Lediglich an die Breite α müssen wir eine allgemeine Forderung stellen, denn es ist natürlich nur dann sinnvoll von einem instabilen Teilchen zu sprechen, wenn dieses sehr viel länger lebt als die Stosszeit $1/\alpha$. Wir setzen darum die folgende Ungleichung voraus

$$\alpha \gg \Gamma \quad (18)$$

und Γ ist die noch zu bestimmende Zerfallskonstante des V -Teilchens. Jetzt können wir die gestreute Welle $|\psi, t\rangle - |\phi, t\rangle$ weiter diskutieren, indem wir als neue Integrationsvariable die Energie $E = m_N + \omega_k$ und den Gesamtimpuls $\vec{p} = \vec{q} + \vec{k}$ einführen

$$|\psi, t\rangle - |\phi, t\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \int_{\mu+m_N}^{\infty} dE e^{-iEt} A'(E) \times G_V^+(E) \left(V_{\vec{p}}^* |0\rangle + \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2}\omega_{k'}} \frac{f(\omega_{k'})}{E - m_N - \omega_{k'} + i\varepsilon} N_{\vec{p}-\vec{k}'}^* a_{\vec{k}'}^* |0\rangle \right) \quad (19)$$

$$A'(E) = \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(E - m_N)}{\sqrt{E - m_N}} A(E). \quad (20)$$

Wir benutzen nun die Tatsache, dass die analytische Fortsetzung der Funktion $G_V^+(E)$ durch den Schnitt $m_N + \mu \leq E < \infty$ ins 2. Blatt der unteren Halbebene, nennen wir sie $G_V^{II}(E)$, dort einen Pol hat, um die Integration über E in (19) auszuführen.

Im 2. Blatt ist $G_V^{II}(E)$ definiert durch

$$G_V^{II}(E) = \frac{1}{E - m_{V0} + i/2 \Gamma_V^{II}(E)} \tag{21}$$

und die Funktion $\Gamma_V^{II}(E)$ hat den Randwert

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{i}{2} \Gamma_V^{II}(E - i\varepsilon) = \frac{i}{2} \Gamma_V(E) + 2\pi i \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{2\omega_{k'}} f^2(\omega_{k'}) \delta(E - m_N - \omega_{k'}) \tag{22}$$

$G_V^{II}(E)$ hat einen Pol für

$$E = m_{V0} - \frac{i}{2} \Gamma_V^{II}(E) \tag{23}$$

und diese Gleichung hat für schwache Kopplung die Lösung

$$E = E_0 \equiv m_V - \frac{i}{2} \Gamma \tag{24a}$$

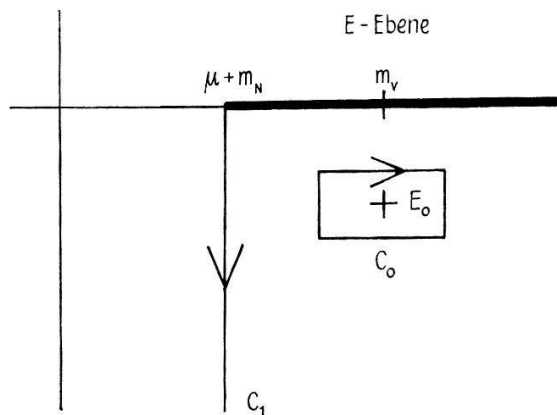
$$m_V = m_{V0} + \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} P \int \frac{d^3k'}{2\omega_{k'}} \frac{f^2(\omega_{k'})}{m_V - m_N - \omega_{k'}} + O(\lambda_0^4) \tag{24b}$$

$$\Gamma = 2\pi \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{2\omega_{k'}} f^2(\omega_{k'}) \delta(m_V - m_N - \omega_{k'}) + O(\lambda_0^4) \tag{24c}$$

m_V ist die physikalische Masse des V -Teilchens, und wir müssen von unserem Modell fordern, dass $m_V > m_N + \mu$, also eine stärkere Bedingung wie (3). Γ ist die Zerfallskonstante.

Dieser Pol im 2. Blatt der E -Ebene ist in der Literatur, insbesondere bei Untersuchungen des Zerfallsgesetzes für instabile Teilchen, schon ausführlich diskutiert worden [3-9].

Wir werden hier den diesem Pol zugeordneten Zustandsvektor bestimmen. Hierfür drehen wir den Integrationsweg $m_N + \mu \dots \infty$ um $-\pi/2$ ins 2. Blatt, was wir in Figur 1 skizziert haben,



Figur 1

Integrationsweg $C_0 + C_1$ in der komplexen E -Ebene für die Berechnung der gestreuten Welle $|\psi, t\rangle - |\phi, t\rangle$.

und erhalten für die Gleichung (19)

$$|\psi, t\rangle - |\phi, t\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p e^{i\vec{p}\vec{x}} (|\phi, t\rangle_{C_0} + |\phi, t\rangle_{C_1}). \quad (25)$$

Die beiden Vektoren von Gleichung (25) symbolisieren die Beiträge der Wege C_0 und C_1 , und durch diese spezielle Wahl des Integrationsweges wird dem Pol der Vektor $|\phi, t\rangle_{C_0}$ zugeordnet.

$$\begin{aligned} |\phi, t\rangle_{C_0} &= \frac{-2\pi i}{1+i/2 \dot{I}_V^{\text{II}}(E_0)} \left(A'(E_0) e^{-iE_0 t} V_p^* |0\rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}} f(\omega_{k'}) \frac{A'(E_0) e^{-iE_0 t} - A'(E') e^{-iE' t}}{E_0 - E'} N_{p-k'}^* a_{k'}^* |0\rangle \right) \end{aligned} \quad (26)$$

wo die Funktion $G_V^{\text{II}}(E)$ durch

$$G_V^{\text{II}}(E) = \frac{1}{E - E_0} \frac{1}{1+i/2 \dot{I}_V^{\text{II}}(E_0)} + O(\lambda_0^2) \quad (27)$$

approximiert wurde. Die Pole der Wellenpaketfunktion $A'(E)$ (und eventuelle Pole der Funktion $f(\omega_{k'})$) geben einen zu (26) analogen Beitrag, jedoch haben diese Zustände lediglich eine Lebensdauer von der Grössenordnung $1/\alpha$. Nun ist aber der Zeitpunkt der Erzeugung des V -Teilchens nicht scharf, sondern innerhalb des Stosszeitintervalls τ_C , welches von der Ordnung $1/\alpha$ ist, unbestimmt. Das heisst erst nach einer Zeit τ_C kann man gestreute und ungestreute Welle in einem Streuexperiment getrennt beobachten. Aber innerhalb τ_C zerfallen diese Zustände; sie beschreiben also unbeobachtbare Einschwingvorgänge, und wir können sie vernachlässigen. Weiter ist

$$\begin{aligned} |\phi, t\rangle_{C_1} &= \int_{\mu+m_N-i\epsilon}^{\mu+m_N-i\infty} dE e^{-iEt} A'(E) G_V^{\text{II}}(E) \\ &\quad \times \left(V_p^* |0\rangle + \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \frac{f(\omega_{k'})}{E - E_0} N_{p-k'}^* a_{k'}^* |0\rangle \right) \end{aligned} \quad (28)$$

und in den Gleichungen (26) und (27) haben wir die Abkürzung

$$E' = m_N + \omega_{k'} \quad (29)$$

verwendet.

Das asymptotische Verhalten des Zustandes $|\phi, t\rangle_{C_1}$ wird für Zeiten $t > 1/\mu$ beschrieben durch

$$\begin{aligned} |\phi, t\rangle_{C_1} &= e^{-i(m_N+\mu)t} \frac{\mu}{m_N+\mu-m_V} A'(m_N+\mu) \left(\frac{1}{\mu t} + O\left(\frac{1}{(\mu t)^{3/2}}\right) \right) \\ &\quad \left(V_p^* |0\rangle + \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \frac{f(\omega_{k'})}{m_N+\mu-E'} N_{p-k'}^* a_{k'}^* |0\rangle \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Das Verhältnis der Amplituden von $|\phi, t\rangle_{C_1}$ und $|\phi, t\rangle_{C_0}$ ist also nach (26) und (30) (für ein Zeitintervall von der Grössenordnung $1/I'$) von der Ordnung

$$\frac{1}{2\pi\mu t} \frac{A'(\mu+m_N)}{A'(E_0)}.$$

Es soll anschliessend gezeigt werden, dass dieser Ausdruck notwendig klein sein muss, wenn man Erzeugung und Zerfall des instabilen Zustandes als einen 2-Stufen-Prozess betrachten will. Wir verlangen deshalb von unserem Wellenpaket, dass sich das wechselwirkende System $|\psi, t\rangle$ für Zeiten, welche grösser sind als die Stosszeit $1/\alpha$, in ungestreute Welle $|\phi, t\rangle$ und gestreute Welle $|\psi, t\rangle - |\phi, t\rangle$ zerlegen lässt, d.h. die beiden Wellen sollen nicht mehr wechselwirken, jede ist für sich eine Lösung der Schrödinger Gleichung. Nun gilt aber

$$\frac{i \partial}{\partial t} (|\psi, t\rangle - |\phi, t\rangle) = H (|\psi, t\rangle - |\phi, t\rangle) + \mathcal{H} |\phi, t\rangle \quad (31)$$

und für Zeiten $t > 1/\alpha$

$$\mathcal{H} |\phi, t\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i(m_N + \mu)t} \left(\frac{1}{t} + 0 \frac{1}{t^2} \right) A' (m_N + \mu) \int d^3p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} V_p^* |0\rangle. \quad (32)$$

Um das zweite Glied der rechten Seite von (31) vernachlässigen zu können, muss gelten (für $t > 1/\alpha$, und für ein Zeitintervall von der Grössenordnung $1/\Gamma$)

$$\left| \frac{\langle V_p | H | \phi, t \rangle}{\langle V_p | H (|\psi, t\rangle - |\phi, t\rangle)} \right| \cong \frac{1}{2\pi m_V t} \frac{A' (m_N + \mu)}{A' (m_V)} \ll 1 \quad (33)$$

eine Forderung, die besagt, dass der «Schwanz» des Wellenpaketes genügend klein sein soll. Wir können folglich $|\phi, t\rangle_{C_1}$ gegen $|\phi, t\rangle_{C_0}$ vernachlässigen. Der einzige Beitrag zur gestreuten Welle $|\psi, t\rangle - |\phi, t\rangle$ rührt also vom Weg C_0 her, und $|\phi, t\rangle_{C_0}$ beschreibt somit den zerfallenden Zustand, der bei der N, Θ -Streuung gebildet wird.

Wir definieren den normierten Vektor

$$|V_p, t\rangle = \frac{|\phi, t\rangle_{C_0}}{\sqrt{C_0 \langle \phi, t | \phi, t \rangle_{C_0}}} \quad (34)$$

und mit (26) folgt

$$\begin{aligned} |V_p, t\rangle &= Z_V^{-1/2} \left(e^{-iE_0 t} V_p^* |0\rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}} f(\omega_{k'}) \frac{e^{-iE_0 t} - A'(E')/A'(E_0) e^{-iE' t}}{E_0 - E'} N_{p-k'}^* a_{k'}^* |0\rangle \right) \quad (35) \\ Z_V &= 1 + \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{2\omega_{k'}} f^2(\omega_{k'}) \frac{|1 - A'(E')/A'(E_0)|^2}{|E_0 - E'|^2}. \end{aligned}$$

Mit (35) haben wir den zerfallenden Zustand hergeleitet, der bei der Streuung eines Θ -Teilchens an einem N -Teilchen erzeugt wird. Damit dieser Zustand überhaupt beobachtet werden kann haben wir (18) und (33) verlangt, d.h. das Wellenpaket der Θ 's soll die Resonanzstelle gut überlappen, doch weit ausserhalb soll es rasch abfallen.

Für $t = 0$ erhalten wir den Zustandsvektor eines instabilen V -Teilchens, $|V_p, t = 0\rangle$. Da $|V_p, t\rangle$ der Schrödingergleichung genügt, gilt

$$|V_p, t\rangle = e^{-iHt} |V_p, t = 0\rangle. \quad (36)$$

Für $t > 0$ besteht der zerfallende Zustand $|V_p, t\rangle$ aus einer Superposition des V -Teilchenzustandes $|V_p, t = 0\rangle$ und eines Zustandes $|S, t\rangle$, welcher die Sekundär-

teilchenwelle beschreibt. Diese beiden Zustände sollen nicht interferieren, deshalb fordern wir

$$\langle V_p, t = 0 | S, t \rangle = 0 \quad (37)$$

und damit ist bis auf Glieder der Ordnung λ_0^2

$$| V_p, t \rangle = e^{-iE_0 t} | V_p, t = 0 \rangle + | S, t \rangle. \quad (38)$$

Eine Zerlegung dieser Art werden wir im nächsten Abschnitt benutzen, um den Zerfall des K -Mesons zu diskutieren.

Das instabile Teilchen hat im Konfigurationsraum einen bestimmten Radius, der durch die Reichweite der $N + \Theta$ -Wolke definiert wird. Als eine Anwendung unseres bisherigen Ergebnisses, wollen wir nun diesen Radius berechnen. Ein Mass für die Ausdehnung der $N + \Theta$ -Wolke ist das asymptotische Verhalten für grosse $r = |\vec{x} - \vec{y}|$ der Amplitude

$$\psi_p(x, y) \equiv \langle N(x) a(y) | V_p, t = 0 \rangle \quad (39)$$

$$N(x) = \int d^3q e^{-i\vec{q}\vec{x}} N_q; \quad a(y) = \int d^3k e^{-i\vec{k}\vec{y}} a_k$$

und man findet sofort

$$\begin{aligned} \psi_p(x, y) &= e^{-i\vec{p}\vec{x}} Z_V^{-1/2} \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}} f(\omega_{k'}) e^{i\vec{k}'(\vec{x}-\vec{y})} \frac{1 - A'(E')/A'(E_0)}{E_0 - E'} \\ &= e^{-i\vec{p}\vec{x}} Z_V^{-1/2} \frac{\lambda_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{\sqrt{2\omega_{k'}}} f(\omega_{k'}) e^{ik'r} \frac{1 - A'(E')/A'(E_0)}{E_0 - E'}. \end{aligned} \quad (40)$$

Der Integrand von $\psi_p(x, y)$ hat in der oberen komplexen k' -Ebene zwei Pole (von $A'(E')$) und einen Verzweigungsschnitt $i\mu \leq k' \leq i\infty$ (von $\omega(k')$). Die Pole liegen bei

$$\begin{aligned} k' = k_\alpha &\equiv \mp \sqrt{(m_V - m_N)^2 - \mu^2 - \alpha^2 \pm i\alpha(m_V - m_N)} \\ &= \pm \sqrt{(m_V - m_N)^2 - \mu^2} + i\alpha \frac{m_V - m_N}{\sqrt{(m_V - m_N)^2 - \mu^2}} + 0(\alpha^2) \end{aligned} \quad (41)$$

(denn $\alpha \ll m_V - m_N - \mu$). Für $\alpha < \mu$ dominiert der Pol das asymptotische Verhalten der Amplitude, und es ist

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi_p(x, y) \sim \frac{1}{r} e^{ik_\alpha r}. \quad (42)$$

Das V -Teilchen hat folglich einen Radius von der Grössenordnung $1/\alpha$.

Dieser Radius hängt erwartungsgemäss nur von der Breite α des anregenden Wellenpaketes ab und ist ganz unabhängig von Γ .

Damit haben wir ein Bild dafür gefunden, wie die Anregungsbedingungen das instabile Teilchen beeinflussen.

A2. Die Gültigkeit des Symmetrisierungspostulates

Bei der Behandlung gleicher Teilchen nimmt man gewöhnlich das Symmetrisierungspostulat an, nämlich, dass Zustände mit mehreren gleichen Elementarteilchen bei deren Permutation entweder symmetrisch (Bosonen) oder antisymmetrisch (Fermionen) sind. Dieses Postulat ist ohne Zweifel gültig für alle bekannten stabilen Elementarteilchen, ist aber weder experimentell gesichert [9], noch theoretisch erfüllbar für instabile Teilchen. Im Rahmen unserer Theorie können wir nämlich zeigen, dass das Symmetrisierungspostulat für instabile Teilchen tatsächlich nicht exakt gilt. Der Zustandsvektor von zwei nicht wechselwirkenden V -Teilchen ist das Produkt von zwei Vektoren der Form (35). Dabei wird angenommen, dass die beiden V 's die Impulse \vec{p}_1 und \vec{p}_2 haben, zur selben Zeit erzeugt wurden, aber auf verschiedene Weise, d. h.

$$A_1(E) \neq A_2(E); A_i(E) = A'_i(E)/A'_i(E_0) \quad i = 1, 2.$$

Wir wollen diesen 2-Teilchenzustand in der Form

$$|V_{p_1} V_{p_2}, t\rangle = |V_{p_1} V_{p_2}, t\rangle_- + |V_{p_1} V_{p_2}, t\rangle_+ \quad (43a)$$

schreiben, wo bis Ordnung λ_0 gilt

$$\begin{aligned} |V_{p_1} V_{p_2}, t\rangle_- &= Z_{V_2}^{-1/2} Z_{V_1}^{-1/2} \left\{ e^{-2iE_0 t} V_{p_1}^* V_{p_2}^* \right. \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} e^{-iE_0 t} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}} f(\omega_k) \left(\frac{e^{-iE_0 t} - e^{-iE' t}}{E_0 - E'} A_1(E') + \frac{e^{-iE_0 t} - e^{-iE' t}}{E_0 - E'} A_2(E') \right) \\ &\times N_{p_1-k'}^* a_{k'}^* V_{p_2}^* + \frac{1}{2} \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} e^{-iE_0 t} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}} f(\omega_{k'}) \\ &\times \left. \left(\frac{e^{-iE_0 t} - e^{-iE' t}}{E_0 - E'} A_1(E') + \frac{e^{-iE_0 t} - e^{-iE' t}}{E_0 - E'} A_2(E') \right) V_{p_1}^* N_{p_2-k'}^* a_{k'}^* \right\} |0\rangle \end{aligned} \quad (43b)$$

$$\begin{aligned} |V_{p_1} V_{p_2}, t\rangle_+ &= Z_{V_1}^{-1/2} Z_{V_2}^{-1/2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} e^{-iE_0 t} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}} f(\omega_k) e^{-iE' t} \frac{A_2(E') - A_1(E')}{E_0 - E'} \right. \\ &\times N_{p_1-k'}^* a_{k'}^* V_{p_2}^* + \frac{1}{2} \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} e^{-iE_0 t} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}} f(\omega_k) e^{-iE' t} \frac{A_1(E') - A_2(E')}{E_0 - E'} \\ &\times \left. V_{p_1}^* N_{p_2-k'}^* a_{k'}^* \right\} |0\rangle. \end{aligned} \quad (43c)$$

Der Zustand (43b) ist gegen Vertauschung der Impulse p_1 und p_2 antisymmetrisch, (43c) dagegen symmetrisch.

Der symmetrische Zustand ist also eine Funktion der Differenz $A_1(E') - A_2(E')$, hängt folglich davon ab, wie sich die Anregungsbedingungen der beiden V 's unterscheiden. Nehmen wir den idealen Fall an, dass die Sekundärteilchen N und Θ , mit denen wir die beiden V 's erzeugen, genau gleich präpariert werden, so unterscheiden sich die beiden V -Zustände noch dadurch, dass der Zeitpunkt der Erzeugung innerhalb des Stosszeitintervalles $1/\alpha$ unbestimmt ist. Das bedeutet aber, dass die spezielle Funktion $A_1(E') - A_2(E') \equiv 0$ die Wahrscheinlichkeit 0 hat.

$|V_{p_1} V_{p_2}, t=0\rangle$ ist der Zustandsvektor von zwei V -Teilchen, und dieser hat nun einen symmetrischen Anteil mit einer gegen den antisymmetrischen Teil von der Ordnung λ_0 kleinen Amplitude. Seine Existenz ist nur möglich, weil ein instabiler Zustand von der Art seiner Anregung abhängt.

In diesem einfachen Modell hat es keinen Sinn die Wahrscheinlichkeit für den symmetrischen Zustand quantitativ zu diskutieren; wir bemerken lediglich, dass er existiert und eine Amplitude besitzt, die die Grössenordnung der Zerfallswechselwirkung hat.

B. Der Zerfall des K -Mesons

Wir versuchen nun abzuschätzen wie stark die Instabilität des π -Mesons seinen Bose-Charakter beeinflusst. Hierfür müssen wir eine Reaktion suchen, an der mehrere π 's teilnehmen und welche empfindlich vom Symmetriecharakter dieser π 's abhängt. Eine solche Untersuchung haben GREENBERG und MESSIAH [9] unternommen, mit dem Ergebnis, dass (bei Erhaltung der CP-Invarianz) das Nichtauftreten des Zerfalls $K_L \rightarrow 2\pi$ der einzige experimentelle Beweis dafür darstellt, dass das π -Meson ein Boson ist; denn $|K_L\rangle$ ist ein Eigenvektor von CP mit dem Eigenwert -1 und, wenn die π 's Bosonen sind, ist der Vektor $|\pi_p^+ \pi_{-p}^-\rangle$ ein Eigenzustand von CP mit dem Eigenwert $+1$. Weil die π -Mesonen instabil sind, ist zu erwarten, dass diese Aussage nicht mehr exakt gilt. Analog den Überlegungen von Abschnitt A ist die folgende Zerlegung richtig

$$|\pi_p^+ \pi_{-p}^-\rangle = |\pi_p^+ \pi_{-p}^-\rangle_+ + |\pi_p^+ \pi_{-p}^-\rangle_-; \quad \text{CP} |\pi_p^+ \pi_{-p}^-\rangle_{\pm} = \pm |\pi_p^+ \pi_{-p}^-\rangle. \quad (44)$$

Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall

$$|K_L\rangle \longrightarrow |\pi_p^+ \pi_{-p}^-\rangle_- \quad (45)$$

wenn wir annehmen, dass die Zerfallswechselwirkung invariant ist gegenüber CP?

Wir untersuchen also das Verhalten von $|\pi_p^+ \pi_{-p}^-\rangle$ gegenüber CP, und folgern im Rahmen der Isotopenspinhypothese den Symmetriecharakter des Zustandes $|\pi^+ \pi^+\rangle$.

B1. Die Symmetrie des π - und des K -Mesons

Zunächst bemerken wir, dass ein Zustand mit zwei verschieden geladenen π -Mesonen (wenn wir jetzt von der Zerfallswechselwirkung absehen) in einem relativen S -Zustand und im gemeinsamen Ruhesystem sich unter der CP-Operation folgendermassen transformiert

$$\text{CP} |\pi_p^+ \pi_{-p}^-\rangle = + |\pi_p^+ \pi_{-p}^-\rangle \quad (46)$$

wobei man annimmt, dass die π 's Bosonen sind. Man verlangt also von Bosonen gemäss der Isotopenspinhypothese gerade Symmetrie beim Vertauschen irgend zweier Mitglieder des Isotopenspintripletts.

Weil die π -Mesonen zerfallen, gilt jedoch (46) nicht mehr; statt dessen ist die Zerlegung (44) richtig. Wir werden diese Behauptung beweisen, indem wir zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall (45) verschieden von Null ist.

Bezüglich des K -Mesons folgen wir der Konvention, dieses als pseudoskalares Teilchen zu definieren. Daraus folgt, dass im Ruhesystem des K -Mesons die beiden Beziehungen gelten

$$\text{CP} | K_0 \rangle = - | \bar{K}_0 \rangle; \quad \text{CP} | \bar{K}_0 \rangle = - | K_0 \rangle.$$

Um die schwachen Wechselwirkungen des K -Mesons zu studieren, werden die Zustände $| K_0 \rangle$ und $| \bar{K}_0 \rangle$ nach Eigenvektoren von CP zerlegt gemäss

$$| K_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| K_L \rangle + | K_S \rangle) \quad | \bar{K}_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| K_L \rangle - | K_S \rangle)$$

und

$$\text{CP} | K_S \rangle = + | K_S \rangle \quad (47a)$$

$$\text{CP} | K_L \rangle = - | K_L \rangle \quad (47b)$$

(Es ist folglich der Zustand $| K_S \rangle$ der in zwei Bosonen zerfallen kann.)

Die für die beiden «Mesonen» K_S und K_L vorhandenen Endzustände sind also vollkommen verschieden, was sich in der Lebensdauer widerspiegelt

$$\tau_{K_S} = 0,9 \cdot 10^{-10} \text{ sec} \quad (48a)$$

$$\tau_{K_L} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ sec} . \quad (48b)$$

B2. Der Zustandsvektor des instabilen K -Mesons

Der Zerfall des K -Mesons wird dadurch kompliziert, dass die Zerfallsprodukte ebenfalls instabil sind. Dieser Zerfall wird durch die Vektoren $| K_S, t \rangle$ und $| K_L, t \rangle$ (die dem Zustand $| V, t \rangle$ entsprechen) beschrieben, welche für $t = 0$ die Zustandsvektoren des K_S - und K_L -Mesons darstellen.

Um überhaupt rechnen zu können, vernachlässigen wir den Einfluss der starken Wechselwirkungen und berücksichtigen lediglich die schwachen Wechselwirkungen, die für den Zerfall von K - und π -Meson verantwortlich sind. Das μ -Meson nehmen wir als stabil an. In diesem Modell verschwinden also alle Matrixelemente, ausgenommen die folgenden

$$\langle K_S | \mathcal{H} | \pi_k^+ \pi_{-k}^- \rangle \quad (49a)$$

$$\langle K_L | \mathcal{H} | \pi_{-k}^+ \mu_{k-k''} \bar{\nu}_{k''} \rangle = - \langle K_L | \mathcal{H} | \pi_k^- \bar{\mu}_{-k+k''} \nu_{-k''} \rangle \quad (49b)$$

$$\langle \pi_k^+ | \mathcal{H} | \bar{\mu}_{k-k''} \nu_{k''} \rangle = \langle \pi_{-k}^- | \mathcal{H} | \mu_{-k+k''} \bar{\nu}_{-k''} \rangle \quad (49c)$$

$$\langle \pi_{k'} \pi_k | \mathcal{H} | \pi_{k'} \mu_{k-k''} \nu_{k''} \rangle = \langle \pi_k | \mathcal{H} | \mu_{k-k''} \nu_{k''} \rangle . \quad (49d)$$

Der Zerfall $K_L \rightarrow 3 \pi$ beeinflusst unsere Rechnung nur in höherer Ordnung als jene, die wir hier betrachten.

Denken wir uns in diesem Rahmen das K -Meson in einer schwachen Wechselwirkung erzeugt, so folgt wie in Abschnitt A für die (nicht normierten) Vektoren $|K_S, t\rangle$, $|K_L, t\rangle$ im Ruhesystem des K -Mesons

$$|K_i, t\rangle = -\frac{1}{2\pi i} \int_{2m_\pi}^{\infty} dE e^{-iEt} A(E) \frac{1}{E-H+i\varepsilon} K_i^* |0\rangle \quad (50)$$

$$i = S, L.$$

$H = H_0 + \mathcal{H}$ und \mathcal{H} ist die schwache Wechselwirkung. $A(E)$ beschreibt das Energiespektrum der anregenden Teilchen und ist um das Zentrum $E \cong m_K$ (m_K ist die Masse des K -Mesons) mit der Breite α verteilt. Wir rechnen nur bis zur ersten Ordnung in \mathcal{H} und dann findet man mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} E'(k) &= E_\mu(\vec{k} - \vec{k}') + k' \\ E_\mu(k) &= \sqrt{m_\mu^2 + \vec{k}^2} \\ E_\pi(k) &= \sqrt{m_\pi^2 + \vec{k}^2} \end{aligned} \quad (51)$$

die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{E-H+i\varepsilon} K_i^* |0\rangle &= G_i^+(E) (K_i^* |0\rangle \\ &+ \int d^3k G_{2\pi}^+(k, E) \langle \pi_{-k}^- \pi_k^+ | \mathcal{H} | K_i \rangle | \pi_{-k}^- \pi_k^+ \rangle \\ &+ \int d^3(k, k') G_{\pi\mu\nu}^+(k, k', E) \langle \pi_k^+ \mu_{-k-k'} \bar{\nu}_{k'} | \mathcal{H} | K_i \rangle | \pi_k^+ \mu_{-k-k'} \bar{\nu}_{k'} \rangle \\ &+ \int d^3(k, k') G_{\pi\mu\nu}^+(-k, k', E) \langle \pi_{-k}^- \bar{\mu}_{k-k'} \nu_{k'} | \mathcal{H} | K_i \rangle | \pi_{-k}^- \bar{\mu}_{k-k'} \nu_{k'} \rangle). \end{aligned} \quad (52)$$

Die G -Funktionen sind im Appendix C1 angegeben.

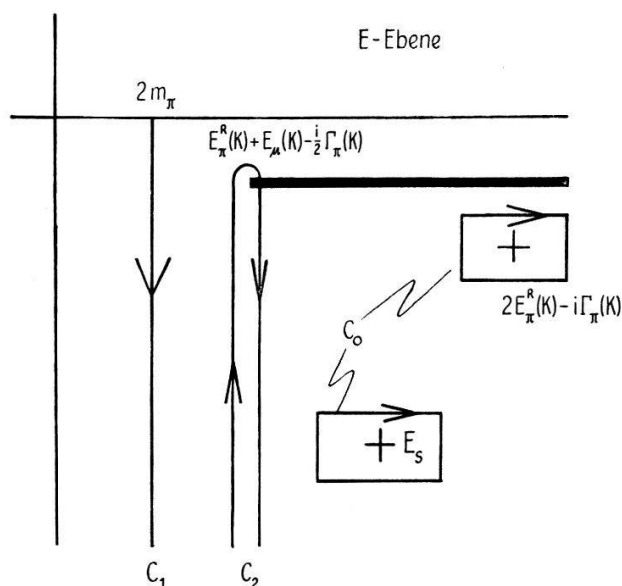
Die Zustandsvektoren für die zwei Komponenten des K_0 -Mesons sind nun wiederum bestimmt durch die Pole von Gleichung (52) in der unteren komplexen E -Ebene. Das Problem der analytischen Fortsetzung von Gleichung (52) wird ebenfalls im Appendix C1 behandelt.

Wir berechnen zuerst den Vektor für das K_S -Meson, wobei wir nur berücksichtigen wollen, dass K_S in zwei verschieden geladene π 's zerfällt. Hierzu integrieren wir die Gleichung (50) für $|K_S, t\rangle$ längs des in Figur 2 skizzierten Integrationsweges.

Für Realteil $E \geq 2m_\pi$ ist $G_S(E)$ eine in der unteren E -Ebene analytische Funktion (im Sinne der Fortsetzung bis ins 4. Blatt) mit einem Pol für $E = E_S \equiv m_K - i/2\Gamma_S$. $G_{2\pi}(k, E)$ ist analytisch im 2. Blatt und hat dort einen Verzweigungsschnitt $E_\pi^R(k) + E_\mu(k) - i/2\Gamma_\pi(k) \leq E < \infty$ und im 3. Blatt den Pol $E = 2E_\pi^R(k) - i\Gamma_\pi(k)$. Der Integrationsweg C_2 um den Verzweigungspunkt liegt mit einem Ast im 2. Blatt, mit dem anderen im 3. Blatt. Die Residuen der beiden G -Funktionen sind in den Gleichungen (C24) und (C25) angegeben und haben bis auf Glieder der Ordnung \mathcal{H}^2 den Wert 1. Damit wird

$$|K_S, t\rangle = |K_S, t\rangle_{C_0} + |K_S, t\rangle_{C_1} + |K_S, t\rangle_{C_2} \quad (53)$$

wo die drei Vektoren der rechten Seite die Beiträge der Wege C_0 , C_1 und C_2 symbolisieren.



Figur 2

Integrationsweg $C_0 + C_1 + C_2$ in der komplexen E -Ebene für die Berechnung des Zustandsvektors $|K_S, t\rangle$. Der Weg C_2 liegt mit einem Ast im 2. Blatt, mit dem anderen im 3. Blatt.

Im Lee-Modell haben wir gezeigt, dass wir von unserem Wellenpaket fordern müssen, dass es genügend rasch abfällt, damit man Produktion und Zerfall des instabilen Zustandes als getrennte Vorgänge ansehen kann. In dem vorliegenden Fall fordern wir dementsprechend

$$A(2m_\pi) \ll A(E_S). \quad (54)$$

Wie in Abschnitt A, insbesondere Gleichung (33), kann man zeigen, dass die Amplitude des Vektors $|K_S, t\rangle_{C_1}$ proportional zu $A(2m_\pi)$ ist. Den Beitrag des Weges C_1 zu Gleichung (53) können wir somit vernachlässigen.

Für die beiden restlichen Vektoren gilt

$$\begin{aligned} |K_S, t\rangle_{C_0} &= A(E_S) e^{-iE_S t} K_S^* |0\rangle + \int d^3k \langle \pi_{-k}^- \pi_k^+ | \mathcal{H} | K_S \rangle \\ &\times \{ e^{-\Gamma_\pi(k)t} e^{-i2E_\pi^R(k)t} A(2E_\pi^R(k) - i\Gamma_\pi(k)) G_S(2E_\pi^R(k) - i\Gamma_\pi(k)) + A(E_S) e^{iE_S t} \\ &\times [G_{2\pi}^{\text{III}}(k, E_S) \Theta(m_K - E_\pi^R(k) - E_\mu(k)) + G_{2\pi}^{\text{II}}(k, E_S) \Theta(E_\pi^R(k) + E_\mu(k) - m_K)] \} \\ &\times | \pi_{-k}^- \pi_k^+ \rangle \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} |K_S, t\rangle_{C_2} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{E_\pi^R(k) + E_\mu(k) > 2m_\pi} d^3k \langle \pi_{-k}^- \pi_k^+ | \mathcal{H} | K_S \rangle \\ &\times P \int_{C_2} dE e^{-iEt} A(E) \frac{1}{E - m_N + i/2\Gamma_S(E)} G_{2\pi}(k, E) | \pi_{-k}^- \pi_k^+ \rangle. \end{aligned} \quad (56)$$

Im Integranden von (56) steht die Differenz von zwei G -Funktionen.

Mit (C10) und (C13) finden wir

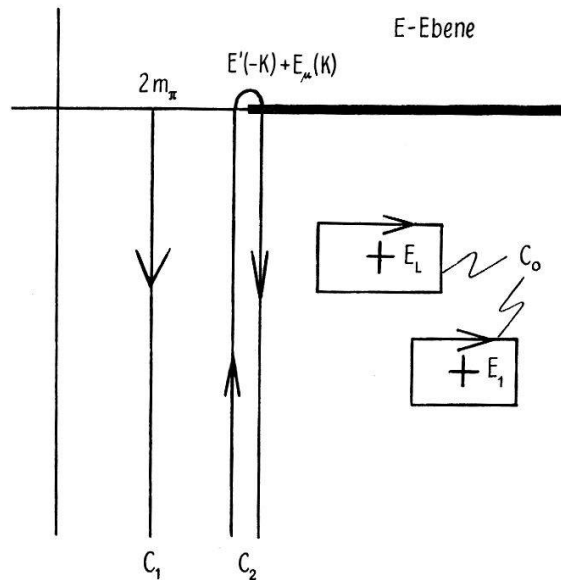
$$G_{2\pi}^{\text{III}}(k, E) - G_{2\pi}^{\text{II}}(k, E) = (i \Gamma_{2\pi}^{\text{II}}(k, E) - i \Gamma_{2\pi}(k, E)) G_{2\pi}^{\text{II}}(k, E) G_{2\pi}^{\text{III}}(k, E)$$

$$i \Gamma_{2\pi}^{\text{II}}(k, E) - i \Gamma_{2\pi}^{\text{III}}(k, E) = -4\pi i \int d^3k' |\langle \pi_{-k} | \mathcal{H} | \mu_{-k-k'} \nu_{k'} \rangle|^2$$

$$\times \delta \left(E - E'(-k) - E_{\pi}^R(k) + \frac{i}{2} \Gamma_k(k) \right).$$

Diese Differenz ist also von der Ordnung \mathcal{H}^2 , denn $G_{2\pi}^{\text{II}}$ und $G_{2\pi}^{\text{III}}$ sind längs des Integrationsweges C_2 nicht singular. Damit ist $|K_S, t\rangle_{C_2}$ von der Ordnung \mathcal{H}^2 klein gegenüber den entsprechenden Beiträgen von Gleichung (55).

Der Zerfall des K_S -Mesons in zwei verschieden geladene π -Mesonen wird somit in niedrigster Ordnung einer Entwicklung nach der Kopplungskonstante der schwachen Wechselwirkung durch $|K_S, t\rangle_{C_0}$, Gleichung (55), beschrieben.



Figur 3

Integrationsweg $C_0 + C_1 + C_2$ in der komplexen E -Ebene für die Berechnung des Zustandsvektors $|K_L, t\rangle$. Der Weg C_2 liegt mit einem Ast im 1. Blatt, mit dem anderen im 2. Blatt.

Wir können (55) noch umformen, wenn wir beachten, dass nur der Teil des k -Spektrums zu (55) beiträgt, für den $2 E_{\pi}^R(k) \cong m_K$ (dann ist also $E_{\pi}^R(k) + E_{\mu}(k) < m_K$) und die Approximationen (C24) und (C25) für die G -Funktionen benützen, dabei das Residuum gleich 1 setzen, also wieder Glieder der Ordnung \mathcal{H}^2 gegen 1 vernachlässigen

$$|K_S, t\rangle \cong |K_S, t\rangle_{C_0} \cong A(E_S) e^{-iE_S t} K_S^* |0\rangle$$

$$+ \int d^3k \langle \pi_{-k}^- \pi_k^+ | \mathcal{H} | K_S \rangle \frac{A(E_S) e^{-iE_S t} - A(2 E_{\pi}^R(k) - i \Gamma_{\pi}(k)) e^{-\Gamma_{\pi}(k) t} e^{-i2 E_{\pi}^R(k) t}}{E_S - 2 E_{\pi}^R(k) + i \Gamma_{\pi}(k)}$$

$$\times | \pi_{-k}^- \pi_k^+ \rangle. \tag{57}$$

Diese Gleichung stimmt formal überein mit (39), d. h. der Gleichung für den zerfallenden Zustand im Lee-Modell.

Analog bestimmen wir den Zustandsvektor des K_L -Mesons, wobei wir nur den leptonischen Zerfall berücksichtigen. Wir erhalten $|K_L, t\rangle$, wenn wir Gleichung (50) mit dem in Figur 3 aufgezeichneten Integrationsweg berechnen.

Für Realteil $E \geq m_\pi + m_\mu$ lässt sich $G_L(E)$ analytisch in die untere E -Ebene fortsetzen und hat für $E = E_L \equiv m_K - i/2 \Gamma_L$ einen Pol. $G_{\pi\mu\nu}(k, k', E)$ definiert einen Verzweigungsschnitt $E_\mu(k) + E'(-k) \leq E < \infty$ und besitzt einen Pol im 2. Blatt für $E = E_1 \equiv E'(-k) + E_\pi^R(k) - i/2 \Gamma(k)$.

Mit denselben Argumenten wie oben lässt sich zeigen, dass der Beitrag der Wege C_1 und C_2 zu $|K_L, t\rangle$ vernachlässigbar ist, also dass

$$|K_L, t\rangle \cong |K_L, t\rangle_{C_0} \quad (58)$$

und

$$\begin{aligned} |K_L, t\rangle_{C_0} &= A(E_L) e^{-iE_L t} K_L^* |0\rangle \\ &+ \int d^3(k, k') \langle \pi_k^+ \mu_{-k-k'} \nu_{k'} | \mathcal{H} | K_L \rangle (|\pi_k^+ \mu_{-k-k'} \bar{\nu}_{k'}\rangle - |\pi_{-k}^- \bar{\mu}_{k-k'} \nu_{k'}\rangle) \\ &\times \{A(E_1) e^{-iE_1 t} G_L(E_1) + A(E_L) e^{-iE_L t} [G_{\pi\mu\nu}^{\text{II}}(k, k', E_L) \Theta(m_K - E_\mu(k) - E'(-k)) \\ &+ G_{\pi\mu\nu}^+(k, k', E_L) \Theta(E_\mu(k) - E'(-k) - m_K)]\}. \end{aligned} \quad (59)$$

Dabei haben wir Gleichung (49b) benutzt.

Mit (C9) und (C26) finden wir wieder bis auf Glieder höherer Ordnung in \mathcal{H} für $|K_L, t\rangle$ die vertraute Form

$$\begin{aligned} |K_L, t\rangle_{C_0} &\cong A(E_L) e^{-iE_L t} K_L^* |0\rangle + \int d^3(k, k') \langle \pi_k \mu_{-k-k'} \nu_{k'} | \mathcal{H} | K_L \rangle \\ &\times (|\pi_k^+ \mu_{-k-k'} \bar{\nu}_{k'}\rangle - |\pi_{-k}^- \bar{\mu}_{k-k'} \nu_{k'}\rangle) \frac{A(E_L) e^{-iE_L t} - A(E_1) e^{-iE_1 t}}{E_L - E_1}. \end{aligned} \quad (60)$$

Die beiden zerfallenden Zustände des K_0 -Mesons, die wir jetzt hergeleitet haben, bilden den Ausgangspunkt für die nachfolgenden Betrachtungen.

B3. Der Zerfall von K_L in zwei π -Mesonen

Wir sind nun imstande die am Anfang dieses Abschnittes formulierte Frage zu beantworten, wie gross die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall $K_L \rightarrow 2 \pi$ relativ zum Zerfall $K_S \rightarrow 2 \pi$ ist.

Der zerfallende Zustand $|K_L, t\rangle$, Gleichung (60), beschreibt für $t = 0$ den Zustand eines instabilen K_L -Mesons. Für $t > 0$ besteht er aus einer Superposition des instabilen Teilchen- und des Sekundärteilchenzustandes, nennen wir ihn $|S, t\rangle$

$$|K_L, t\rangle = f(t) |K_L, t = 0\rangle + |S, t\rangle. \quad (61)$$

Dabei ist $|S, t\rangle$ durch die Forderung definiert, dass

$$\langle S, t | K_L, t = 0 \rangle = 0 \quad (62)$$

d.h. das instabile Teilchen soll mit der Sekundärteilchenwelle nicht interferieren.

Wir werden zeigen, dass $|S, t\rangle$ seinerseits aus zwei orthogonalen Zuständen besteht, von denen einer die drei Sekundärteilchen π, μ, ν beschreibt, und der andere den Zerfall von K_L in einen 2π -Zustand. Mit der Definition

$$\begin{aligned} |\pi_k(\mu \nu)_{-k}\rangle &\equiv \int d^3k' \langle \pi_k \mu_{-k-k'} \nu_{k'} | \mathcal{H} | K_L \rangle \\ &\times \frac{A(E_L) - A(E_1)}{E_L - E_1} (|\pi_k^+ \mu_{-k-k'} \bar{\nu}_{k'}\rangle - |\pi_{-k}^- \bar{\mu}_{k+k'} \nu_{k'}\rangle) \end{aligned} \quad (63)$$

können wir den Vektor für das K_L -Meson in der folgenden Form schreiben

$$|K_L, t = 0\rangle = A(E_L) K_L^* |0\rangle + \int d^3k |\pi_k(\mu \nu)_{-k}\rangle. \quad (64)$$

$|\pi_k(\mu \nu)_{-k}\rangle$ ist der Zustandsvektor eines nackten π -Mesons und einer $\mu - \nu$ -Wolke mit einem Radius von der Ordnung $1/\alpha$. Dieser Zustand stimmt formal überein mit dem Vektor $|V_K V_{-K}, t = 0\rangle$, Gleichung (43c), für zwei instabile V -Teilchen im Lee-Modell, und wir identifizieren ihn mit dem gesuchten 2π -Zustand, also (und wir erinnern hier an die Gleichung (44))

$$|\pi_k^+ \pi_{-k}^-\rangle_- \equiv |\pi_k(\mu \nu)_{-k}\rangle. \quad (65)$$

Der Zerfall von K_L in diesen Zustand wird beschrieben durch den noch zu bestimmenden Vektor $|\pi \pi, t\rangle$.

Der Zustand der drei Sekundärteilchen π, μ, ν , sein Symbol sei $|\pi \mu \nu, t\rangle$ muss zum Zustand (65) orthogonal sein, damit man π, μ, ν separat beobachten kann, folglich ist

$$\langle \pi_k(\mu \nu)_{-k} | \pi \mu \nu, t \rangle = 0. \quad (66)$$

Die zu (62) analogen Gleichungen lauten jetzt

$$\langle \pi \mu \nu, t | K_L, t = 0 \rangle = 0 \quad (67)$$

$$\langle \pi \pi, t | K_L, t = 0 \rangle = 0. \quad (68)$$

Mit (66)–(68) ist die folgende Zerlegung eindeutig

$$|K_L, t\rangle = f(t) |K_L, t = 0\rangle + |\pi \pi, t\rangle + |\pi \mu \nu, t\rangle. \quad (69)$$

Dabei gilt

$$f(t) = e^{-iE_L t} \quad (70)$$

$$|\pi\pi, t\rangle = \int d^3k \frac{1}{N(k)} \left(e^{-iE_L t} \varphi(k, t=0) - e^{-1/2 \Gamma_\pi(k)t} e^{-i(E_\pi^R(k) + E_\mu(k))t} \varphi(k, t) \right) \\ \times |\pi_k(\mu\nu)_{-k}\rangle \quad (71)$$

$$\varphi(k, t) = e^{iE_\mu(k)t} \int d^3k' |\langle \pi_k \mu_{-k-k'} \nu_{k'} | \mathcal{H} | K_L \rangle|^2 \\ \times e^{-iE'(-k)t} A(E_1) \frac{A^*(E_L) - A^*(E_1)}{|E_L - E_1|^2} \quad (72)$$

$$N(k) = \int d^3k' |\langle \pi_k \mu_{-k-k'} \nu_{k'} | \mathcal{H} | K_L \rangle|^2 \frac{|A(E_L) - A(E_1)|^2}{|E_L - E_1|^2} \quad (73)$$

$$|\pi\mu\nu, t\rangle = |K_L, t\rangle - f(t) |K_L, t=0\rangle - |\pi\pi, t\rangle. \quad (74)$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass K_L in 2π 's zerfällt, ist folglich gegeben durch

$$w_{K_L \rightarrow 2\pi}(t) = \langle \pi\pi, t | \pi\pi, t \rangle. \quad (75)$$

Für die nachfolgenden Rechnungen benötigen wir die explizite Form der Matrixelemente. Für \mathcal{H} wird reine Vektorkopplung angenommen

$$\langle \pi_k^+ \mu_{-k-k'} \bar{\nu}_{k'} | \mathcal{H} | K_L \rangle = \frac{iG}{\sqrt{2}(2\pi)^5} \frac{m_\pi}{\sqrt{E_\pi^R(k)} m_K} \sqrt{\frac{m_\mu}{E_\mu(k+k')}} \frac{1}{m_K} \\ \times ((p^\mu + k^\mu) f_V^+ + (p^\mu - k^\mu) f_V^-) \tilde{v}_{(\nu)}(\vec{k}') \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) w_{(\mu)}(-\vec{k} - \vec{k}') \quad (76)$$

$$p = (m_K, 0, 0, 0); \quad k = (E_\pi^R(k), \vec{k}); \quad G \cdot m_N^2 = 1,06 \cdot 10^{-5}$$

(wo m_N die Nukleonenmasse ist).

Wir wählen

$$f_V^+ = 1; \quad f_V^- = 0 \quad (77)$$

welche Werte innerhalb der experimentellen Fehlergrenzen liegen (siehe STEINBERGER [10]).

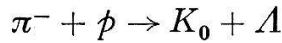
Mit diesen Voraussetzungen gilt für die Amplitude $\varphi(k, t)$ für Zeiten t von der Größenordnung $1/\Gamma_L$

$$\varphi(k, t) \sim 1/t^3 \quad (78)$$

d. h. $\varphi(k, t)$ ist dann von der Ordnung \mathcal{H}^6 klein gegen $\varphi(k, t=0)$. Somit wird

$$w_{K_L \rightarrow 2\pi}(t) = e^{-\Gamma_L t} \int d^3k \frac{|\varphi(k, t=0)|^2}{N(k)}. \quad (79a)$$

Wir können nun abschätzen wie stark sich dieser Effekt im Experiment bemerkbar macht. CHRISTENSON u. a. [10] haben den K_L -Zerfall untersucht und dabei die Reaktion $K_L \rightarrow 2\pi$ gefunden. Die K -Mesonen werden in der Reaktion



erzeugt. Die Breite der Energiespektren der π -Mesonen und Protonen bezeichnen wir mit α_π bzw. α_p . α_π liegt in diesen Experimenten zwischen 40 MeV und 60 MeV, α_p ist von der Größenordnung der Bindungsenergie pro Nukleon des Kernes, aus welchem das Proton stammt, also $1 \text{ MeV} \gtrsim \alpha_p \gtrsim 9 \text{ MeV}$.

Damit gilt für die Breite α von $A(E)$

$$\alpha = \inf(\alpha_\pi, \alpha_p) = \alpha_p. \quad (80)$$

In diesem Experiment werden alle Ereignisse gezählt, die, in unserer Terminologie, im Spektrum

$$491 \text{ MeV} \leq 2 E_\pi^R(k) \leq 509 \text{ MeV} \quad (81a)$$

$$1,45 m_\pi \leq k \leq 1,55 m_\pi \quad (81b)$$

liegen. Die Wahrscheinlichkeit in diesem Intervall unseren 2π -Zustand zu finden ist dann

$$w_{K_L \rightarrow 2\pi}(t) = e^{-\Gamma_L t} \int_{2 E_\pi^R(k) = 491 \text{ MeV}}^{2 E_\pi^R(k) = 509 \text{ MeV}} d^3k \frac{|\varphi(k, t=0)|^2}{N(k)}. \quad (79b)$$

Bei der numerischen Auswertung von (79b) wurde, da die genaue Form der Wellenfunktion $A(E)$ unbekannt ist, mit den Approximationen

$$\frac{A^*(E_L) - A^*(E_1)}{|E_L - E_1|^2} A(E_1) \cong \frac{A^*(E_L)}{\alpha^2} A(E_1) \quad (82a)$$

$$\int dE A(E) g(E) \cong A(E_L) \int_{m_{K-\alpha}}^{m_{K+\alpha}} dE g(E) \quad (82b)$$

gerechnet. Das Ergebnis lautet

$$w_{K_L \rightarrow 2\pi}(t) = e^{-\Gamma_L t} (G \cdot m_N^2)^2 f(\alpha) \frac{m_\pi}{A} |A(E)|^2. \quad (83)$$

Dabei ist

$$0,4 \cdot 10^{-2} < f(\alpha = 1 \text{ MeV}) < 1,2$$

$$0,5 \cdot 10^{-4} < f(\alpha = 9 \text{ MeV}) < 1,5 \cdot 10^{-2}$$

(für kleine Werte von α ist $f(\alpha) \sim \alpha^{-2}$) und A ist die Abschneideenergie der schwachen Wechselwirkungen, die bei der Integration von $N(k)$ über den Impuls k' des

Leptonensystems auftritt. Aus der Abwesenheit eines «cut-off» abhängigen Effektes in allen bekannten Prozessen schliesst man, dass $\Lambda > 1 \text{ GeV}$, während der Erfolg der Theorie der schwachen Wechselwirkungen als Störungstheorie $\Lambda < 300 \text{ GeV}$ erfordert, also

$$1 \text{ GeV} < \Lambda < 300 \text{ GeV} . \quad (84)$$

Mit Hilfe des Zustandsvektors $|K_S, t\rangle$, Gleichung (57), für den instabilen K_S -Zustand finden wir die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall $K_S \rightarrow 2\pi$ für eine Zeit $t \gg 1/\Gamma_S$ und wenn wir beachten $\Gamma_S \gg \Gamma_L$

$$w_{K_S \rightarrow 2\pi}(t) = e^{-2\Gamma_S t} |A(E_S)|^2 \left(1 + O\left(\frac{\Gamma_S}{\alpha}\right)\right). \quad (85)$$

Die fünf letzten Gleichungen liefern nun sofort obere Schranken für die relative Wahrscheinlichkeit des Zerfalles $K_L \rightarrow 2\pi$

$$\left. \frac{w_{K_L \rightarrow 2\pi}}{w_{K_S \rightarrow 2\pi}} \right|_{\text{theor.}} < \begin{cases} 2 \cdot 10^{-11} \text{ für } \alpha = 1 \text{ MeV} \\ 2 \cdot 10^{-13} \text{ für } \alpha = 9 \text{ MeV} . \end{cases} \quad (86)$$

Im Experiment wurde für diese Grösse der Wert

$$\left. \frac{w_{K_L \rightarrow 2\pi}}{w_{K_S \rightarrow 2\pi}} \right|_{\text{exp.}} = 3 \cdot 10^{-6} \quad (87)$$

gemessen [10].

Mit der Gleichung (86) haben wir die Wahrscheinlichkeit für den antisymmetrischen Anteil des Zustandsvektors von zwei instabilen π -Mesonen abgeschätzt. Der experimentelle Wert, Gleichung (87), welcher dadurch zustande kommt, dass die schwachen Wechselwirkungen nicht invariant gegenüber CP sind, kennzeichnet nun die heute erreichbare experimentelle Genauigkeit, die nicht ausreicht um die in Gleichung (86) ausgedrückte Grössenordnung zu messen. Im Rahmen der Experimente [10] macht sich also der Effekt (86) nicht bemerkbar.

In diesem Sinne haben π -Mesonen folglich exakt die Eigenschaften von Bosonen.

Schlussfolgerung

Der Zerfall $K_L \rightarrow 2\pi$ kann auf zwei grundsätzlich verschiedene Weisen zustande kommen.

a) Einmal durch den in dieser Arbeit untersuchten Effekt, der sicher existiert, nämlich dass der Zustandsvektor von mehreren instabilen π 's nicht mehr dem Symmetrisierungspostulat genügt, π -Mesonen also nicht exakt Bosonen sind. Wir haben die Wahrscheinlichkeit für den Prozess $K_L \rightarrow 2\pi$ in Gleichung (86) abgeschätzt unter der Annahme, dass die Zerfallswechselwirkung CP-invariant ist.

b) Eine andere mögliche Annahme ist die, dass die Zerfallswechselwirkung nicht mehr invariant ist gegenüber CP. Der experimentelle Wert (87) für den Zerfall

$K_L \rightarrow 2 \pi$ zeigt, dass die schwachen Wechselwirkungen unter der CP-Operation nicht exakt invariant sind (weitere Experimente haben dies bestätigt und verschiedene andere Hypothesen, auf die wir hier nicht eingegangen sind, widerlegt).

Mit dem Effekt a) können wir dieses Experiment also nicht erklären, selbst dann nicht, wenn die vernachlässigten starken Wechselwirkungen die Grössenordnung von (86) ändern, denn ein kohärenter Strahl von K_S - und K_L -Mesonen zeigt Interferenzerscheinungen in gemeinsamen Zerfallsmoden, d.h. die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall $K_0 \rightarrow 2 \pi$ in Abhängigkeit von der Zeit oszilliert [11]. Mit a) kann man aber den Interferenzeffekt zwischen den Reaktionen $|K_S\rangle \rightarrow |2 \pi\rangle_+$ und $|K_L\rangle \rightarrow |2 \pi\rangle_-$ nicht erklären, weil $+\langle 2 \pi | 2 \pi \rangle_- = 0$.

Es war nun nicht das Ziel dieser Arbeit den K_0 -Zerfall zu interpretieren, sondern wir haben versucht zu demonstrieren, dass ein instabiles Teilchen nicht mehr dem Symmetrisierungspostulat gehorcht. Insbesondere sind π -Mesonen keine Bosonen, wenn man berücksichtigt, dass sie zerfallen können. Die Störung ihres Bose-Charakters ist jedoch experimentell nicht festzustellen.

Im Rahmen der gegenwärtigen Experimente haben π -Mesonen also streng die Eigenschaften von Bosonen.

Meinem verehrten Lehrer Herrn Professor W. HEITLER, der dieses Problem vorgeschlagen hat und unter dessen Leitung diese Arbeit durchgeführt wurde, möchte ich herzlich danken. Den Herren PD Dr. N. STRAUMANN und Dr. G. RASCHE danke ich für Diskussionen und dem SCHWEIZERISCHEN NATIONALFONDS für finanzielle Unterstützung.

Appendix

C1. Die analytischen Eigenschaften der Γ - und G -Funktionen, Gleichung (52)

Wir beschränken uns auf den niedrigsten Ausdruck für die Γ -Funktion. Dann ist

$$\frac{i}{2} \Gamma_{\pi\mu\nu}^+(k, k', E) = - \int d^3k'' \frac{|\langle \pi_k | \mathcal{H} | \mu_{k-k''} \nu_{k''} \rangle|^2}{E - E'(-k) - E''(k) + i \varepsilon} \quad (C1)$$

$$E'(-k) = E_\mu(-\vec{k} - \vec{k}') + k' \quad (C2)$$

$$E''(k) = E_\mu(\vec{k} - \vec{k}'') + k'' \quad (C3)$$

Die Funktion $\Gamma_{\pi\mu\nu}^+(k, k', E)$ ist analytisch in der ganzen komplexen E -Ebene mit einem Verzweigungsschnitt $E'(-k) + E_\mu(k) \leq E \leq \infty$. Wir setzen durch diesen Schnitt fort und erhalten die im 2. Blatt der E -Ebene definierte Funktion $\Gamma_{\pi\mu\nu}^{II}(k, k', E)$, die den folgenden Randwert besitzt

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{i}{2} \Gamma_{\pi\mu\nu}^{II}(k, k', E - i \varepsilon) = \frac{i}{2} \Gamma_{\pi\mu\nu}^+(k, k', E) + 2 \pi i \int d^3k'' |\langle \pi_k | \mathcal{H} | \mu_{k-k''} \nu_{k''} \rangle|^2 \delta(E - E'(-k) - E''(k)) \quad (C4)$$

Damit hat die G -Funktion

$$G_{\pi\mu\nu}^+(k, k', E) = \frac{1}{E - E_\pi(k) - E'(-k) + i/2 \Gamma_{\pi\mu\nu}^+(k, k', E) + i\varepsilon} \quad (C5)$$

im 2. Blatt den Pol

$$E_1 \equiv E'(-k) + E_\pi^R(k) - \frac{i}{2} \Gamma_\pi(k) \quad (C6)$$

dabei ist $E_\pi^R(k)$ die renormierte Energie des π -Mesons

$$E_\pi^R(\pi) = E_\pi(\pi) - P \int d^3k'' \frac{|\langle \pi_k | \mathcal{H} | \mu_{k-k''} \nu_{k''} \rangle|^2}{E''(k) - E_\pi^R(k)} + O(\mathcal{H}^4) \quad (C7)$$

und $\Gamma_\pi(k')$ seine Zerfallskonstante

$$\Gamma_\pi(k') = 2\pi \int d^3k'' |\langle \pi_k | \mathcal{H} | \mu_{k-k''} \nu_{k''} \rangle|^2 \delta(E_\pi^R(k) - E''(k)) + O(\mathcal{H}^4). \quad (C8)$$

In der Umgebung dieses Poles gilt für (C5) die Entwicklung

$$G_{\pi\mu\nu}^{\text{II}}(k, k', E) \cong \frac{1}{E - E_1} \frac{1}{1 + i/2 \dot{\Gamma}_{\pi\mu\nu}^{\text{II}}(E_1)}. \quad (C9)$$

Wir betrachten nun als nächste G -Funktion

$$G_{2\pi}^+(k, E) = \frac{1}{E - 2E_\pi(k) + 2i/2 \Gamma_{2\pi}^+(k, E) + i\varepsilon} \quad (C10)$$

und die Γ -Funktion

$$\frac{i}{2} \Gamma_{2\pi}^+(k, E) = - \int d^3k' \frac{|\langle \pi_{-k} | \mathcal{H} | \mu_{-k-k'} \nu_{k'} \rangle|^2}{E - E_\pi(k) - E'(-k) + i/2 \Gamma_{\pi\mu\nu}^+(k, k', E)} \quad (C11)$$

und definieren durch analytische Fortsetzung ins 2. Blatt der E -Ebene die Funktion $\Gamma_{2\pi}^{\text{II}}(k, E)$ mit dem Randwert

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon=0} \frac{i}{2} \Gamma_{2\pi}^{\text{II}}(k, E - i\varepsilon) = & - \int_{E < E_\mu(k) + E'(-k)} d^3k' \frac{|\langle \pi_{-k} | \mathcal{H} | \mu_{-k-k'} \nu_{k'} \rangle|^2}{E - E_\pi(k) - E'(-k) + i/2 \Gamma_{\pi\mu\nu}^+(k, k', E)} \\ & - \int_{E_\mu(k) + E'(-k) \leq E} d^3k' \frac{|\langle \pi_{-k} | \mathcal{H} | \mu_{-k-k'} \nu_{k'} \rangle|^2}{E - E_\pi(k) - E'(-k) + i/2 \Gamma_{\pi\mu\nu}^{\text{II}}(k, k', E)}. \end{aligned} \quad (C12)$$

Die Funktion $\Gamma_{2\pi}^{\text{II}}(k, E)$ ist analytisch im 2. Blatt mit einem Verzweigungsschnitt $E_\mu(k) + E_\pi^R(k) - i/2 \Gamma_\pi(k) \leq E < \infty$. Fortsetzung durch diesen Schnitt definiert uns die Funktion $\Gamma_{2\pi}^{\text{III}}(k, E)$ in einem 3. Blatt, und ihr Randwert auf dem Schnitt lautet mit E_1 von Gleichung (C6)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon=0} \frac{i}{2} \Gamma_{2\pi}^{\text{III}}(k, E_1 - i\varepsilon) = & \Gamma_{2\pi}^{\text{II}}(k, E_1) \\ & + 2\pi i \int d^3k' |\langle \pi_{-k} | \mathcal{H} | \mu_{-k-k'} \nu_{k'} \rangle|^2 \delta(E_1 - E_\pi^R(k) - E'(-k) + \frac{i}{2} \Gamma_\pi(k)). \end{aligned} \quad (C13)$$

Auf diesem 3. Blatt liegt der Pol der G -Funktion $G_{2\pi}^{\text{III}}(k, E)$ bei

$$E = 2 E_{\pi}^R(k) - i \Gamma_{\pi}(k). \quad (\text{C14})$$

Analoge Betrachtungen kann man nun für die Γ -Funktionen

$$\frac{i}{2} \Gamma_S^+(E) = - \int d^3k \frac{|\langle \pi_{-k}^- \pi_k^+ | \mathcal{H} | K_S \rangle|^2}{E - 2 E_{\pi}(k) + i \Gamma_{2\pi}^+(k, E) + i \varepsilon} \quad (\text{C15})$$

$$\frac{i}{2} \Gamma_L^+(E) = - \int d^3(k, k') \frac{|\langle \pi_k \mu_{-k-k'} \nu_{k'} | \mathcal{H} | K_L \rangle|^2}{E - E_{\pi}(k) - E'(-k) + i/2 \Gamma_{\pi\mu\nu}^+(k, k', E) + i \varepsilon} \quad (\text{C16})$$

anstellen. $\Gamma_S^+(E)$ lässt sich in das 3. Blatt fortsetzen und ist dort analytisch bis auf einen Verzweigungsschnitt $2 m_{\pi} - i \Gamma_{\pi}(0) \leq E < \infty$. Wie oben kann man dann in einem 4. Blatt die Funktion $\Gamma_S^{\text{IV}}(E)$ definieren und hier hat die Fortsetzung $G_S^{\text{IV}}(E)$ der G -Funktion

$$G_S^+(E) = \frac{1}{E - m_K + i/2 \Gamma_S^+(E) + i \varepsilon} \quad (\text{C17})$$

einen Pol an der Stelle

$$E = E_S \equiv m_K - \frac{i}{2} \Gamma_S \quad (\text{C18})$$

mit

$$\Gamma_S = 2 \pi \int d^3k |\langle \pi_{-k} \pi_k | \mathcal{H} | K_S \rangle|^2 \delta(m_K - 2 E_{\pi}^R(k)). \quad (\text{C20})$$

Der Verzweigungsschnitt von $\Gamma_L(E)$ liegt im 2. Blatt im Intervall $m_{\pi} + m_{\mu} - i/2 \Gamma_{\pi}(0) \leq E < \infty$ und die G -Funktion

$$G_L^+(E) = \frac{1}{E - m_K + i \Gamma_L^+(E) + i \varepsilon} \quad (\text{C21})$$

besitzt auf dem 3. Blatt den Pol

$$E = E_L \equiv m_K - \frac{i}{2} \Gamma_L \quad (\text{C22})$$

$$\Gamma_L = 4 \pi \int d^3(k, k') |\langle \pi_k \mu_{-k-k'} \nu_{k'} | \mathcal{H} | K_L \rangle|^2 \delta(m_K - E_{\pi}^R(k) - E'(-k)). \quad (\text{C23})$$

Die drei zuletzt definierten G -Funktionen können in der Nähe ihrer Pole folgendermassen approximiert werden

$$G_{2\pi}(k, E) \cong \frac{1}{E - 2 E_{\pi}^R(k) + i \Gamma_{\pi}(k)} \frac{1}{1 + i \dot{\Gamma}_{2\pi}^{\text{III}}(k, 2 E_{\pi}^R(k) - i \Gamma_{\pi}(k))} \quad (\text{C24})$$

$$G_S(E) \cong \frac{1}{E - E_S} \frac{1}{1 + i/2 \dot{\Gamma}_S^{\text{IV}}(E_S)} \quad (\text{C25})$$

$$G_L(E) \cong \frac{1}{E - E_L} \frac{1}{1 + i \dot{\Gamma}_L^{\text{III}}(E_L)}. \quad (\text{C26})$$

Literatur

- [1] V. GLASER, G. KÄLLÉN, Nucl. Phys. 2, 706 (1956).
- [2] T. GOTO, Prog. Theor. Phys. 21, 1 (1959).
- [3] M. GOLDBERGER, K. WATSON, *Collision Theory*, Ch. 8 (1964).
- [4] G. HÖHLER, Z. Phys. 152, 546 (1958).
- [5] M. LÉVY, Nuovo Cim. 13, 115 (1959); 14, 612 (1959).
- [6] H. ARAKI, Y. MUNAKATA, M. KAWAGUCHI, T. GOTO, Prog. Theor. Phys. 17, 419 (1957).
- [7] R. JACOB, R. G. SACHS, Phys. Rev. 121, 350 (1961).
- [8] J. HENNING, Z. Phys. 177, 227 (1964).
- [9] A. MESSIAH, O. W. GREENBERG, Phys. Rev. 136, B248 (1964).
- [10] J. CHRISTENSON, J. CRONIN, V. FITCH, R. TURLAY, Phys. Rev. Lett. 13, 138 (1964); J. S. BELL, J. STEINBERGER, *Weak Interactions of Kaons* (Lectures given at Oxford International Conference on Elementary Particles, September 1965).
- [11] C. ALFF-STEINBERGER, W. HEUER, K. KLEINKNECHT, C. RUBBIA, A. SCRIBANO, J. STEINBERGER, M. J. TANNENBAUM, T. TITTEL, Phys. Lett. 20, 207 (1966).