

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 39 (1966)  
**Heft:** 5

**Artikel:** Bemerkungen zur physikalischen Deutung der SU(6,6)-Theorie  
**Autor:** Sheldon, E. / Baltes, H.P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-113695>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Bemerkungen zur physikalischen Deutung der $SU(6,6)$ -Theorie

von E. Sheldon und H. P. Baltes

Laboratorium für Kernphysik, Eidg. Techn. Hochschule, 8049 Zürich, Schweiz

(29. IV. 66)

**Zusammenfassung.** Auf Grund einer Matrixdarstellung der Gruppenalgebra  $A(SU(6,6))$  werden die Unteralgebren  $A(SU(6))$ ,  $A(SU(3))$  und  $A(SU(2,2))$  identifiziert. Aus der Unteralgebra  $A(\mathcal{L}_+^\uparrow \otimes SU(3))$  lässt sich ein maximaler Satz von kommutierenden physikalischen Observablen gewinnen, deren simultane Eigenzustände (Quarks) die Darstellung 12 der  $SU(6,6)$  aufspannen. Die Darstellung 4 der  $SU(2,2)$  wird als Bispinordarstellung der eigentlichen Lorentzgruppe  $\mathcal{L}_+^\uparrow \subset SU(2,2)$  erkannt. Dieser Sachverhalt begründet, dass der Übergang von 12 zu einer äquivalenten Darstellung als Wechsel des physikalischen Bezugssystems zu interpretieren ist und dass ferner die  $SU(6,6)$ -Quarks einer ( $SU(3)$ -erweiterten) Diracschen Gleichung zu unterwerfen sind. Von dort führt die physikalisch inspirierte Forderung nach positiven Energien eigenwerten zu (erweiterten) Bargmann-Wigner-Gleichungen, deren Lösungen diskutiert werden. Für die Darstellungen 12<sup>+</sup>, 143 und 364 werden analoge Gleichungen und ihre Lösungen sowie insbesondere die Untergruppenstruktur bezüglich  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  angegeben. So gelingt es, die  $SU(6,6)$ -Theorie vollständig aus dem  $A(SU(6,6))$ -Matrixformalismus herzuleiten und insbesondere die von SALAM, DELBOURGO und STRATHDEE eingeführten Bargmann-Wigner-Gleichungen gruppentheoretisch zu begründen. Es wird gezeigt, dass sich auch die Raumspiegelung, die Zeitumkehr und die Teilchenkonjugation zwanglos diesem Rahmen einfügen.

## Einleitung

Die Invarianz eines physikalischen Systems unter einer Gruppe  $G$  von Transformationen erlaubt die Einordnung der Zustände in Multipletts, d. h. irreduzible Darstellungen von  $G$ , die unter der Wirkung von  $G$  in sich übergeführt werden. Eine solche Klassifizierung der Zustände ist selbst dann noch möglich, wenn das System nur angenähert symmetrisch bezüglich  $G$  ist. Von dieser Tatsache wurde bei Beschreibungen der starken Wechselwirkung Gebrauch gemacht, die von den angenäherten Symmetriegruppen [1]<sup>1)</sup>  $SU(3) \supset SU(2)_{\text{Isospin}} \otimes U(1)_{\text{Hyperladung}}$  bzw. [2]  $SU(6) \supset SU(3) \otimes SU(2)_{\text{Spin}}$  ausgingen.

Die Suche nach einer relativistischen Version der  $SU(6)$ -Theorie führte im Frühjahr 1965 zur Betrachtung der Gruppe  $SU(6,6)$ , die von SALAM *et al.* [3] vorgeschlagen wurde. (Gewisse Züge einer  $SU(6,6)$ -Theorie sind auch in den Arbeiten von BÉG und PAIS [4] implizit enthalten.) Es ist das Ziel dieser Bemühungen, die «innere» Symmetriegruppe  $SU(3)$  durch eine möglichst vollständige Raum-Zeit-Gruppe zu erweitern, nämlich nicht nur, wie es bei der  $SU(6)$ -Theorie vorgenommen wurde, durch die eigentliche Drehgruppe, sondern darüberhinaus durch die Lorentz- oder gar die Poincaré-Gruppe.

Dabei stösst man auf die  $SU(6,6)$ , wenn man von der erweiterten Symmetriegruppe fordert, dass sie neben  $SU(3)$  noch  $SU(2,2)$  als unabhängige Untergruppe

---

<sup>1)</sup> Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 419.

enthalten soll:  $SU(2, 2) \otimes SU(3) \subset SU(6, 6)$ . Die Wahl von  $SU(2, 2)$  hinwiederum wird getroffen, weil, wie SALAM *et al.* zeigen [5], ihre Gruppenalgebra isomorph zur Diracschen  $\gamma$ -Algebra ist und so den Zugang zu einer Lorentz-kovarianten Theorie bietet. Wir werden in Teil 2 darüberhinaus zeigen, dass die Selbstdarstellung 4 der  $SU(2, 2)$  genau die zur Diracschen Theorie für Teilchen vom Spin 1/2 gehörende Bispinordarstellung  $\tau$  der eigentlichen Lorentz-Gruppe  $\mathcal{L}_+^\uparrow \subset SU(2, 2)$  enthält. Wir wollen bei der Entwicklung der  $SU(6, 6)$ -Theorie mit rein gruppentheoretischen Hilfsmitteln auskommen und insbesondere die von SALAM *et al.* *ad hoc* eingeführten Bargmann-Wigner-Gleichungen [6] aus der Gruppe  $SU(6, 6)$  heraus begründen.

Zur Bezeichnung der Gruppe: Unter  $U(n, m)$  verstehen wir die Gruppe der Automorphismen eines  $(n + m)$ -dimensionalen komplexen Vektorraumes, die zugleich die hermitesche Bilinearform

$$\sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i - \sum_{i=n+1}^m x_i \bar{y}_i$$

invariant lassen; für die Elemente von  $SU(n, m)$  ist außerdem noch die Determinante gleich 1 zu fordern. Es sei noch kurz daran erinnert, dass es sich bei den oben genannten Gruppen um Liesche Gruppen handelt, deren Elemente analytisch von Parametern  $a_1, \dots, a_r$  abhängen, so dass man von der infinitesimalen Methode [7] Gebrauch machen kann: Oft genügt es, die Umgebung der Gruppeneins,

$$g(a_1, \dots, a_r) \approx E + \sum_{i=1}^r a_i X_i$$

zu betrachten und statt der Gruppe selbst die von den infinitesimalen Erzeugenden

$$X_i = \left( \frac{\partial g}{\partial a_i} \right)_{a_1 = \dots = a_r = 0}$$

aufgespannte Gruppenalgebra zu studieren. Ihre Elemente sind Operatoren auf dem Hilbertschen Raum des Systems. Die Gruppenalgebra lässt sich durch zu ihr homomorphe Matrix-Algebren darstellen.

### 1. Die Gruppenalgebra

In diesem ersten Abschnitt werden wir eine Matrixdarstellung der Gruppenalgebra konstruieren, mit deren Hilfe wir die von SALAM *et al.* [8] angegebene Algebrastruktur herleiten sowie ferner Matrixdarstellungen von gewissen, als physikalische Observable interpretierbaren Algebraoperatoren gewinnen.

Sei mit  $A = A(SU(6, 6))$  die Gruppenalgebra der  $SU(6, 6)$  bezeichnet. Es lassen sich 144 Elemente  $M_{kl} \in A$  (mit  $k, l = 1, \dots, 12$ ) wählen, die durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert sind:

i. Es ist

$$\sum_{k=1}^{12} M_{kk} = 0. \quad (1)$$

ii. Es gelten die Vertauschungsregeln

$$[M_{kl}, M_{rs}] = \delta_{rl} M_{ks} - \delta_{ks} M_{rl}. \quad (2)$$

iii. Je 143 linearunabhängige unter den  $M_{kl}$  bilden eine Basis von  $A$ .

Zum Beweise betrachte man den pseudo-unitären Vektorraum  $V = V(6, 6)$  über  $C$ , dessen Geometrie bezüglich einer geeigneten Basis durch die Matrix

$$G_0 = \left( \begin{array}{c|c} E_6 & O \\ \hline O & -E_6 \end{array} \right) \quad (3)$$

beschrieben wird. Dabei ist  $E_6$  die  $(6 \times 6)$ -Einheitsmatrix,  $O$  die  $(6 \times 6)$ -Nullmatrix. Die abstrakte Gruppe  $SU(6, 6)$  lässt sich durch die Gruppe der speziellen Isometrien von  $V$  realisieren, diese letztere hinwiederum ist isomorph zur Gruppe der komplexen  $(12 \times 12)$ -Matrizen  $U$  mit

$$U G_0 \bar{U}^T = G_0, \quad (4)$$

$$\det U = 1. \quad (5)$$

Es hängt daher  $U$  analytisch von 143 reellen Parametern  $a_i \in (-\infty, \infty)$  ab und wird infinitesimal erzeugt durch

$$i F_m = \frac{\partial}{\partial a_m} U \Big|_{a_i=0} \quad (i=1, \dots, 143), \quad (6)$$

so dass

$$U = \exp \left( \sum_{m=1}^{143} i a_m F_m \right) \quad (7)$$

gilt. Man betrachte nun insbesondere die Gruppenelemente

$$U_m = U (a_m = 1, a_{i \neq m} = 0) = \exp (i F_m). \quad (8)$$

Aus Gleichung (4) folgt:

$$\exp (i F) G_0 \overline{\exp (i F)}^T = G_0. \quad (9)$$

Wie wir sehen werden, lassen sich alle  $F = F_m$  reell oder rein imaginär wählen. Deshalb ergibt sich

$$\bar{F}^T = G_0^{-1} F G_0, \quad (10)$$

d. h.  $F_m$  ist pseudo-hermitesch. Aus Gleichung (5) folgt

$$\text{Spur } F = 0. \quad (11)$$

Nun kann man stets höchstens 143 linear unabhängige  $(12 \times 12)$ -Matrizen der Spur 0 wählen. Ein solcher Satz von Matrizen ist daher in jedem Falle zu einer Basis  $\{F_m\}$  von  $A$  isomorph. Wir wählen die Matrizen darüberhinaus so, dass auch Gleichung (10) erfüllt ist:

Seien

$$a, b = 1, 2, \dots, 6; \quad \alpha, \beta = 7, 8, \dots, 12.$$

Es impliziert (10) für die Komponenten  $F_{kl}$  von  $F$  die Bedingungen

$$F_{ab} = \bar{F}_{ba} \quad F_{\alpha\beta} = \bar{F}_{\beta\alpha} \quad (12)$$

$$F_{a\beta} = -\bar{F}_{\beta a} \quad F_{\alpha b} = -\bar{F}_{b\alpha}. \quad (13)$$

Es ist also  $F$  hermitesch in «ungemischten» Indizes und schieferhermitesch in «gemischten» Indizes. Daher werden die Gleichungen (10) und (11) erfüllt von den Matrizen

$$M_{ab} = e_{ab} \quad (\text{für } a \neq b) \quad M_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} \quad (\text{für } \alpha \neq \beta) \quad (14)$$

$$M_{aa} = e_{aa} - \frac{1}{12} E_{12} \quad M_{\alpha\alpha} = e_{\alpha\alpha} - \frac{1}{12} E_{12} \quad (15)$$

für ungemischte Indizes und

$$M_{\alpha b} = i e_{\alpha b} \quad M_{a\beta} = i e_{a\beta} \quad (16)$$

für gemischte Indizes. Dabei ist  $(e_{kl})$  die  $(12 \times 12)$ -Matrix, die an der Stelle  $(k, l)$  eine Eins und sonst lauter Nullen hat,  $E_{12}$  ist die  $(12 \times 12)$ -Einheitsmatrix. Die Matrizen  $M_{kl}$  erfüllen die Forderungen I, II und III. Zugleich haben wir durch sie eine Matrixdarstellung von  $A$  gewonnen, die die Matrixdarstellung 12 der Gruppe erzeugt.

Da die Vertauschungsrelationen mit denen einer Basis von  $A(SU(12))$  identisch sind [9], ist  $A(SU(6, 6))$  eine halbeinfache Algebra vom Cartanschen Typ  $A_{11}$ . Ferner ist  $\dim A = 143$  und Rang  $A = 11$ , weil  $[M_{kk}, M_{rr}] = 0$  ist und 11 linear unabhängige  $M_{kk}$  vorliegen. Daher erfüllt  $A$  den Zusammenhang  $\dim = r(r+2)$  (mit  $r = \text{Rang}$ ) des  $A_r$ -Typus und nur diesen [10]. Auch das beweist, dass  $A$  isomorph zu  $A_{11}$  ist. Mithin kann man bei der Ausreduktion von Tensorprodukten und Bestimmung der Untergruppenstruktur von Darstellungen der  $SU(6, 6)$  mit Hilfe der Youngschen Tableaux wie bei der  $SU(12)$  verfahren [11].

Unsere Matrixdarstellung (14), (15), (16) der  $A(SU(6, 6))$  gestattet uns, die Unteralgebren  $A(SU(6))$ ,  $A(SU(3))$ ,  $A(SU(2, 2))$  der  $A(SU(6, 6))$  aufzusuchen [12]:

Wir betrachten zunächst

$$K_{ab} = :M_{ab} + M_{a+6, b+6} \quad (17)$$

aus  $A$  mit  $a, b = 1, \dots, 6$ . Es gilt

$$\sum_{a=1}^6 K_{aa} = 0 \quad (18)$$

und

$$K_{ab} = E_2 \otimes f_{ab} \quad (\text{für } a \neq b) \quad K_{aa} = E_2 \otimes \left( f_{aa} - \frac{1}{6} E_6 \right) \quad (19)$$

mit  $(f_{ab}) = (6 \times 6)$ -Matrix mit einer Eins an der Stelle  $(a, b)$  und sonst überall Null. Die  $K_{ab}$  haben also, sieht man von dem Faktor  $E_2$  ab, die Gestalt der bekannten Basis von  $A(SU(6))$  [13] und sind zu dieser isomorph.

Eine Basis der Unteralgebra  $A(SU(3))$  finden wir, wenn wir

$$L_{ij} = :M_{ij} + M_{i+3, j+3} + M_{i+6, j+6} + M_{i+9, j+9} \quad (20)$$

bilden (mit  $i, j = 1, 2, 3$ ). Die so definierten  $L_{ij} \in A$  haben die Eigenschaften

$$\sum_{i=1}^3 L_{ii} = 0 \quad (21)$$

$$L_{ij} = E_4 \otimes g_{ij} \quad (\text{für } i \neq j) \quad L_{ii} = E_4 \otimes \left( g_{ii} - \frac{1}{3} E_3 \right) \quad (22)$$

mit  $(g_{ij}) = (3 \times 3)$ -Matrix, die an der Stelle  $(i, j)$  den Wert 1 und sonst 0 hat. Die  $L_{ij}$  sind isomorph zu der bekannten  $A(SU(3))$ -Basis [14].

Im Falle der  $A(SU(2, 2))$  muss man ein wenig umständlicher verfahren und definiert

$$N_{st} = : M_{st} + M_{s+4, t+4} + M_{s+8, t+8} \quad (23)$$

für ungemischte Indizes  $s, t = 1, 2$  oder  $s, t = 3, 4$ ,

$$N_{st} = : i M_{st} + M_{s+4, t+4} + i M_{s+8, t+8} \quad (24)$$

für gemischte Indizes  $s = 1, 2, t = 3, 4$  oder  $s = 3, 4, t = 1, 2$ . Dann gilt nämlich

$$\sum_{s=1}^4 N_{ss} = 0 \quad (25)$$

$$N_{st} = E_3 \otimes h_{st} \quad N_{ss} = E_3 \otimes \left( h_{ss} - \frac{1}{4} E_4 \right) \quad (26)$$

für ungemischte Indizes, und für gemischte Indizes hat man

$$N_{st} = E_3 \otimes i h_{st}. \quad (27)$$

Dabei ist  $(h_{st})$  die  $(4 \times 4)$ -Matrix mit 1 an der Stelle  $(s, t)$  und 0 auf allen anderen Plätzen. Die  $N_{st}$  bilden, sieht man von  $(E_3 \otimes)$  ab, eine zur Basis (14), (15), (16) der  $A(SU(6, 6))$  analoge Basis von  $A(SU(2, 2))$ .

## 2. Physikalische Interpretation

Physikalisch von Bedeutung ist nur die Unteralgebra  $A(SU(2, 2) \otimes SU(3)) = A(SU(2, 2)) \oplus A(SU(3))$ . Sie wird aufgespannt durch

$$\left. \begin{array}{l} h_{st} \otimes E_3 \text{ (für } s \neq t\text{)} \\ \left( h_{ss} - \frac{1}{4} E_4 \right) \otimes E_3 \\ i h_{st} \otimes E_3 \\ E_4 \otimes g_{ij} \text{ (für } i \neq j\text{)} \\ E_4 \otimes \left( g_{ii} - \frac{1}{3} E_3 \right). \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(ungemischt)} \\ \text{(gemischt)} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} =: N'_{st} \\ \\ \\ \\ =: L_{ij} \end{array} \quad (28)$$

Wir verstehen  $SU(3)$  als  $SU(3)_{I,Y} \supseteq SU(2)_I \otimes U(1)_Y$  mit  $I$  = Isospin,  $Y$  = Hyperladung. Die beiden simultan diagonalen Operatoren sind z.B.

$$I_3 = : \frac{1}{2} (L_{11} - L_{22}) = E_4 \otimes \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

und

$$Y = : -L_{33} = E_4 \otimes \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Daher erhält man in der vorliegenden Darstellung viermal das Triplet von Eigenzuständen

$$|i_3, y\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle, \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle, \left| 0, -\frac{2}{3} \right\rangle. \quad (31)$$

Dabei ist  $i_3 = : \langle I_3 \rangle, y = : \langle Y \rangle$ .

An der  $SU(2, 2)$  interessiert vor allem die Untergruppe  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  vom Range 2 (siehe unten). Ihre beiden simultan diagonalen Operatoren sind

$$\sigma_3 = : N'_{11} + N'_{33} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes E_3 \quad (32)$$

und

$$G_0 = : 2(N'_{11} + N'_{22}) = \gamma_0 \otimes E_3 \quad (33)$$

mit

$$\gamma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Es ist  $\gamma_0$  zugleich die Matrix, die die Geometrie des Raumes  $V(2, 2)$  beschreibt, dessen Isometrien die Gruppe  $SU(2, 2)$  realisieren. Beide Operatoren entstehen aus der Unteralgebra  $A(SU(2))$ :

$$\sigma_3 = E_2 \otimes \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes E_3 \quad (35)$$

$$G_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes E_2 \otimes E_3. \quad (36)$$

In der vorliegenden Matrixdarstellung hat  $\sigma_3$  die Eigenwerte  $s_3 = 1/2$  und  $s_3 = -1/2$ . Man interpretiert  $s_3$  als die dritte Komponente des Spins. Der Operator  $G_0$  hat als Eigenwerte die Vorzeichen  $v$  zur Ruhemasse  $m$  eines Zustandes:  $\langle G_0 \rangle = v = +1$  oder  $-1$ . Anstelle von  $G_0$  kann man auch den Operator

$$D_0 = : p_0 G_0 = m G_0 \quad (37)$$

betrachten. Dann ist

$$\langle D_0 \rangle = +m \text{ oder } -m. \quad (38)$$

Hier ist  $p_0$  die Null-Komponente des Viererimpulses im Ruhesystem. In der vorliegenden Darstellung erhalten wir dreimal das Quadruplett von Eigenzuständen

$$|s_3, v\rangle = \left| \frac{1}{2}, 1 \right\rangle, \left| -\frac{1}{2}, 1 \right\rangle, \left| \frac{1}{2}, -1 \right\rangle, \left| -\frac{1}{2}, -1 \right\rangle. \quad (39)$$

Die Gruppe  $SU(2, 2)$  und die eigentliche Lorentzgruppe  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  hängen auf die folgende Weise zusammen:

- I. Es ist  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  Untergruppe von  $SU(2, 2)$ .
- II. Die Darstellung 4 der  $SU(2, 2)$  enthält genau die Bispinordarstellung  $\tau = D_{1/2, 0} \otimes D_{0, 1/2}$  der Untergruppe  $\mathcal{L}_+^\uparrow$

Zum Beweis von I fasse man  $SU(2, 2)$  als die Gruppe der Isometrien von  $V(2, 2)$  auf. Die Geometrie von  $V(2, 2)$  wird durch  $\gamma_0$  beschrieben. Das heisst, man hat eine Basis von  $V(2, 2)$  derart gewählt, dass die Skalarprodukte aller Basiselemente miteinander gerade die Komponenten von  $\gamma_0$  ergeben:

$$(A_\mu, A_\nu) = (\gamma_0)_\mu, \nu \quad (40)$$

mit  $A_\mu = \text{Basis } (\mu = 1, 2, 3, 4)$ . Wir nehmen nun den Basiswechsel  $B_\nu = S A_\mu$  vor, wobei  $S$  zu beschreiben ist durch die Matrix

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Bezüglich der neuen Basis wird die Geometrie beschrieben durch [15]

$$\gamma'_0 =: (B_\mu, B_\nu) = S^T \gamma_0 S, \quad (42)$$

also in unserem Falle durch

$$\gamma'_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Bezüglich der Basis  $A_\mu$  liess sich  $SU(2, 2)$  durch die  $(4 \times 4)$ -Matrizen  $U$  der Selbstdarstellung 4 realisieren mit

$$U \gamma_0 \bar{U}^T = \gamma_0, \quad (44)$$

$$\det U = 1. \quad (45)$$

Die Basistransformation  $S$  lässt 4 in eine äquivalente Darstellung übergehen: Es wird  $U$  zu  $S^{-1} U S =: V$ , und die  $V$  erfüllen die Bedingung

$$V \gamma'_0 \bar{V}^T = \gamma'_0, \quad (46)$$

$$\det V = 1. \quad (47)$$

Man betrachte nun insbesondere die Untergruppe derjenigen  $V$ , die mit  $\gamma_0$  kommutieren, für die also

$$V \gamma_0 = \gamma_0 V \quad (48)$$

gilt. (Vgl. die Methode von W. RÜHL [16].) Schreibt man  $V$  in Blockform,

$$V =: \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ \hline V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}, \quad (49)$$

so folgt aus Gleichung (48)  $V_{12} = V_{21} = 0$ . Ferner ist wegen Gleichung (46)  $V_{11} V_{22}^T = E_2$ , so dass  $V$  die Form

$$V =: \begin{bmatrix} A & 0 \\ \hline 0 & (\bar{A}^T)^{-1} \end{bmatrix} \quad (50)$$

hat. Berücksichtigt man noch Gleichung (47), so ist weiterhin  $\det A = r$  mit  $r = \text{reelle Zahl}$  zu fordern. Wir beschränken uns auf die Untergruppe zu  $r = 1$ . Für ihre Elemente gilt: Es gehorcht  $V$  der Gleichung (50) mit  $A \in SL(2, C)$ . Nun ist aber  $SL(2, C)$  (bis auf das Vorzeichen von  $A$ ) isomorph zu  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  [17].

Zum Beweise von II erinnern wir uns daran, dass die Darstellung 4 von  $SU(2, 2)$  die Menge der  $(2 \times 2)$ -Matrizen  $U$  mit  $U \gamma_0 \bar{U}^T = \gamma_0$  und  $\det U = 1$  ist. Bei Beschränkung auf die Untergruppe  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  nimmt, wie im Beweis von I gezeigt,  $U$  die Form

$$U = : S^{-1} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & (\bar{A}^T)^{-1} \end{bmatrix} S \quad (51)$$

an, wobei  $A \in SL(2, C)$  ist. Das ist, bis auf Äquivalenz, die Bispinordarstellung [18]. – Wir haben somit die physikalisch wichtige Untergruppenkette  $\mathcal{L}_+^\uparrow \otimes SU(3) \subset SU(2, 2) \otimes SU(3) \subset SU(6, 6)$ .

### 3. Quarkzustände und Bargmann-Wigner-Gleichungen

Die Selbstdarstellung 12 der  $SU(6, 6)$  hat die Untergruppenstruktur

$$12 = (4, 3) = (\tau, 3) \quad (52)$$

bezüglich  $SU(2, 2) \otimes SU(3)$  bzw.  $\mathcal{L}_+^\uparrow \otimes SU(3)$ . Das folgt aus den Ergebnissen des 1. und 2. Teils. Nach den Gleichungen (31) und (39) wird der Darstellungsraum von 12 aufgespannt von den simultanen Eigenzuständen der Operatoren  $\sigma_3$ ,  $D_0$ ,  $I_3$  und  $Y$ :

$$\begin{aligned} \psi_A &= | s_3, v m, i_3, y \rangle \\ &=: | s_3, v m \rangle \otimes | i_3, y \rangle = \psi_\mu \otimes \psi_j \end{aligned} \quad (53)$$

mit  $A = 1, \dots, 12$  = « $SU(6, 6)$ -Index»,  $\mu = 1, \dots, 4$  = «Dirac-Index»,  $j = 1, 2, 3$  = « $SU(3)$ -Index». Das sind die zwölf Quarkzustände.

Natürlich ist die Darstellung 12 nur bis auf Äquivalenz definiert. Von nun an wollen wir daher unter 12 die ganze Äquivalenzklasse von Darstellungen verstehen. Die Quantenzahlen  $s_3, v m, i_3, y$  sind Invarianten auf der Klasse.

Die Geometrie des Darstellungsraums einer Darstellung aus der Klasse 12 werde durch die Matrix  $G$  beschrieben. Dann bezeichnen wir diese Darstellung mit  $12(G)$ . Ihre Matrizen erfüllen die Beziehungen  $U G \bar{U}^T = G$  und  $\det U = 1$ . Wir legen darüberhinaus die folgende Zuordnung fest: Es soll  $12(G_0) =: 12(0)$  zum simultanen Ruhssystem der Quarks gehören, in welchem  $\vec{p} = (\vec{p}_0, 0, 0, 0)$  ist mit  $\vec{p}_0 = m$ . Dabei ist  $G_0$  durch Gleichung (3) definiert. Die Basis von  $12(0)$  ist daher mit

$$| s_3, v m, i_3, y \rangle_{(\vec{p}=0)} \text{ oder } \psi_A (\vec{p} = 0)$$

zu bezeichnen. Wir deuten die Komponenten eines Vektors  $\psi(0) \in 12(0)$  als stationäre ebene Wellen. So ist z.B. die Basis gegeben durch

$$\psi_A(x) = \psi_A (\vec{p} = 0) \exp(-i \vec{p}_0 x_0) \quad (54)$$

mit  $\psi_A(0)$  = Amplitude. Diese Auffassung liegt nahe, da wir freie Teilchen in ihrem Ruhssystem betrachten.

Sei  $L(\vec{p})$  eine eigentliche Lorentztransformation aus  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ , die vom Ruhssystem zu einem mit dem Impuls  $\vec{p}$  bewegten System führt. Dann ist  $\vec{p} = L(\vec{p}) (m, 0, 0, 0)$ . Die Auswirkung auf  $12(0)$  ist wie folgt [19]:

$$\begin{aligned}\psi_A(0) \exp(-i \vec{p}_0 x_0) &\rightarrow \psi_A(\vec{p}) \exp(-i (\vec{p}_0 x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x})) \\ &= S(\vec{p}) \psi_A(0) \exp(-i (\vec{p}_0 x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x})).\end{aligned}\quad (55)$$

Dabei ist

$$S(\vec{p}) =: T(\vec{p}) \otimes E_3 = \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & (\bar{A}^T)^{-1} \end{array} \right) \otimes E_3 \quad (56)$$

und  $T(\vec{p})$  der Darstellungsoperator zu  $L(\vec{p})$  in der Bispinordarstellung  $\tau$ ,  $A \in SL(2, \mathbb{C})$ . («relativistic boost» [20]). Es führt  $L(\vec{p})$  bzw.  $S(\vec{p})$  die Darstellung  $12(0)$  in eine äquivalente Darstellung  $12(\vec{p}) =: 12(G(\vec{p}))$  über mit  $G(\vec{p}) =: \bar{S}^T(\vec{p}) G_0 S(\vec{p})$ . Die Menge der zugehörigen Darstellungsmatrizen kann man mit  $SU(6, 6)_\rho$  bezeichnen.

Der lineare Operator  $D_0$  auf  $12(0)$  (vgl. Gleichung (37)) geht über [21] in

$$D(\vec{p}) = S^{-1}(\vec{p}) D_0 S(\vec{p}) = \vec{p} \gamma \otimes E_3 \quad (57)$$

Dabei ist

$$\vec{p} \gamma = \vec{p}_0 \gamma_0 - \vec{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} \text{ und } \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

wobei  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \text{Pauli-Matrizen}$ . Da  $D_0 = m \gamma_0 \otimes E_3$  ist, kann man auch sagen: Es geht  $m \gamma_0$  über in  $T^{-1}(\vec{p}) m \gamma_0 T(\vec{p}) = \vec{p} \gamma$ . Wegen der Invarianz der Eigenwerte unter Basiswechsel gilt nach wie vor  $D(\vec{p}) \psi_A(x) = v m \psi_A(x)$  oder

$$\boxed{(\vec{p} \gamma \otimes E_3) \psi_A(x) = v m \psi_A(x)} \quad (58)$$

Das ist die ( $SU(3)$ -erweiterte) Diracsche Gleichung. Für ebene Wellen

$$\psi_A(x) = \psi_A(\vec{p}) \exp(-i (\vec{p}_0 x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x})) \quad (59)$$

erhält man nach Einsetzen bei Gleichung (58) für die Amplituden

$$\left( \frac{1}{m} \vec{p} \gamma \otimes E_3 \right) \psi_A(\vec{p}) = v \psi_A(\vec{p}) \quad (60)$$

oder, ausgeschrieben,

$$\frac{1}{m} \left( \begin{array}{cc|cc} \vec{p}_0 & 0 & -\vec{p}_3 & -\vec{p}_1 + i \vec{p}_2 \\ 0 & \vec{p}_0 & -\vec{p}_1 - i \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \\ \hline \vec{p}_3 & \vec{p}_1 - i \vec{p}_2 & -\vec{p}_0 & 0 \\ \vec{p}_1 + i \vec{p}_2 & -\vec{p}_3 & 0 & -\vec{p}_0 \end{array} \right) \otimes E_3 \psi_A(\vec{p}) = v \psi_A(\vec{p}). \quad (61)$$

Gleichung (58) oder (60) bedeutet physikalisch: Wir haben jedes der  $SU(3)$ -Quarks aus der Darstellung 3 der Diracschen Theorie für Spin-1/2-Teilchen mit nicht-verschwindender Ruhemasse unterworfen. (Die Massen der drei Quarks wurden der

Einfachheit halber als gleich angenommen.) Dabei stossen wir auf den folgenden Widerspruch: Man pflegt die Zustände  $\psi_{3,4} = |\pm 1/2, -m\rangle$  als Antiteilchen von  $\psi_{1,2} = |\pm 1/2, +m\rangle$  zu deuten. Dem steht hier entgegen, dass die  $SU(3)$ -Quantenzahlen in allen vier Fällen solche von Quarks aus der Darstellung 3 sind und keine Antiquarks vorkommen. Der Ausweg liegt in der *zusätzlichen Forderung*  $v = +1$  für alle Quarks zur Darstellung 12. Das ist wegen (60) gleichbedeutend mit der Bedingung

$$\left( \frac{1}{m} \not{p} \gamma \otimes E_3 \right) \psi_A(\not{p}) = \psi_A(\not{p}) \quad (62)$$

für alle  $A = 1, \dots, 12$  (früher nur für die ersten sechs Indizes). Das sind die sogenannten (erweiterten) *Bargmann-Wigner-Gleichungen* [22].

Die Folgen der Bedingung (62) untersuchen wir zunächst für den Grenzfall  $\not{p} \rightarrow 0$ : Dann wird Gleichung (62) zu

$$\gamma_0 \otimes E_3 \psi_A(0) = \psi_A(0) . \quad (63)$$

Daraus folgt

$$\psi_A(0) = (\psi_1(0), \dots, \psi_6(0), 0, \dots, 0) . \quad (64)$$

Im allgemeinen Fall lautet Gleichung (62)

$$\frac{1}{m} \begin{pmatrix} \not{p}_0 & 0 \\ 0 & \not{p}_0 \\ \hline \sigma \not{p} & -\not{p}_0 \\ -\not{p}_0 & 0 \end{pmatrix} \otimes E_3 \psi_A(\not{p}) = \psi_A(\not{p}) . \quad (65)$$

Um eine nicht-triviale Lösung zu erhalten muss man fordern

$$\not{p}_0^2 - \not{p}^2 = m^2 . \quad (66)$$

Dann findet man

$$\boxed{\psi_A = \begin{bmatrix} \phi \\ R \phi \end{bmatrix}, \quad \phi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_6 \end{bmatrix}, \\ R = R(\not{p}) = \frac{\not{p} \sigma}{\not{p}_0 + m} \otimes E_3 .} \quad (67)$$

Es ist Gleichung (67) der Ausgangspunkt der  $SU(6,6)$ -Theorie bei BÉG und PAIS [23]. Die Forderung (62) macht also die sechs sogenannten kleinen Komponenten von den sechs grossen abhängig ( $R(\not{p}) \rightarrow 0$  für  $\not{p} \rightarrow 0$ ).

Welche Auswirkungen hat Gleichung (62) auf die Darstellungsmatrizen von 12? Für  $\psi \in 12$  folgt durch Anwendung von Gleichung (62)

$$\psi = \begin{bmatrix} \phi \\ R \phi \end{bmatrix} . \quad (68)$$

Mit  $\psi$  ist auch  $U\psi \in 12$ , falls  $U$  eine Darstellungsmatrix ist. Für die Wirkung von Gleichung (62) machen wir den Ansatz

$$U\psi = \begin{bmatrix} V\phi \\ R V\phi \end{bmatrix} \quad (69)$$

mit  $V$  = unitäre  $(6 \times 6)$ -Matrix. Schreiben wir noch  $U$  in Blockform,

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}, \quad (70)$$

so erhalten wir

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ R\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11}\phi + U_{12}R\phi \\ U_{21}\phi + U_{22}R\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V\phi \\ R V\phi \end{bmatrix}. \quad (71)$$

Daraus folgt

$$U_{11}\phi + U_{12}R\phi = V\phi \quad U_{21}\phi + U_{22}R\phi = R V\phi. \quad (72)$$

Durch Grenzübergang  $R(\not p \rightarrow 0) \rightarrow 0$  erhält man

$$U_{11} = V, \rightarrow U_{12} = 0 \quad U_{21} = 0, \rightarrow U_{22} = R V R^{-1} \quad (73)$$

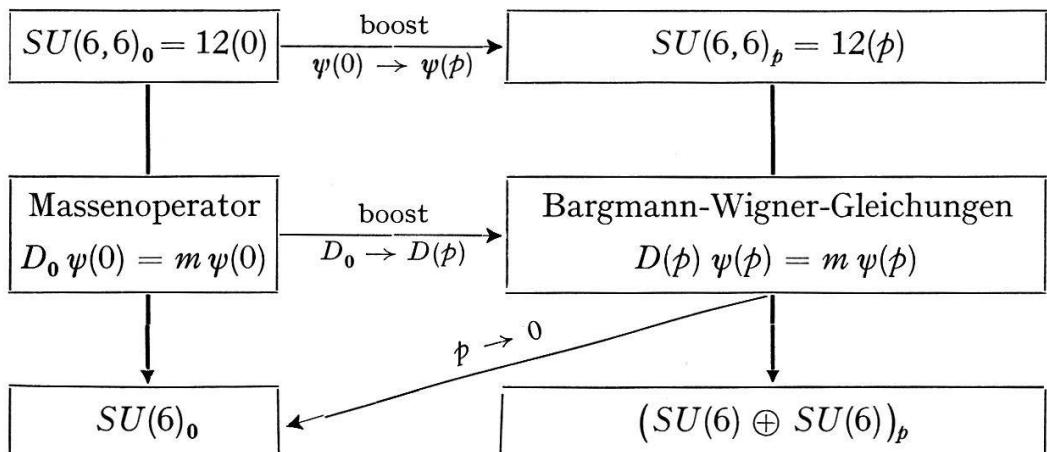
und somit

$$U = \boxed{\begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & R V R^{-1} \end{bmatrix}}. \quad (74)$$

Dabei ist  $V$  als  $SU(6)$ -Matrix wählbar und mithin  $U \in SU(6) \oplus SU(6)$ .

Wir sind also mit Hilfe der Bargmann-Wigner-Gleichungen (62) zur maximalen kompakten Untergruppe der  $SU(6, 6)$  übergegangen. Die (nicht-komplexe) Gruppe  $SU(6, 6)$  besitzt keine nicht-trivialen endlich-dimensionalen unitären irreduziblen Darstellungen (Beweis: Andernfalls besäße auch die  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ -Untergruppe solche Darstellungen, was aber nicht richtig ist [24]). Daher ist z. B. die Invariante  $(\psi, G\psi)$  von 12 nicht positiv-definit, mithin nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte zu deuten. Der Übergang zur kompakten Untergruppe behebt diese Schwierigkeit.

Das ganze Procedere lässt sich schematisch folgendermassen darstellen:



#### 4. Die Bargmann-Wigner-Gleichungen für physikalische Multipletts

Die zu 12 konjugierte Darstellung  $12^+$  der  $SU(6,6)$  hat die Untergruppenstruktur

$$12^+ = (4^+, 3^+) = (\tau, 3^+) , \quad (75)$$

denn es ist

$$\tau^+ = (D_{1/2\mathbf{0}} \oplus D_{01/2})^+ = (D_{01/2} \oplus D_{1/2\mathbf{0}}) = \tau . \quad (76)$$

Da alle zwölf Eigenzustände  $\psi^A$ , die den Darstellungsraum aufspannen, nur *Anti*-quark- $SU(3)$ -Indizes tragen, ist

$$\langle \psi^A | D(\not{p}) | \psi^A \rangle = -m \quad (77)$$

zu fordern. Daher lauten die zu Gleichung (62) analogen Bargmann-Wigner-Gleichungen für die Antiquark-Zustände

$$\boxed{\frac{1}{m} D(\not{p}) \psi^A = -\psi^A} \quad (78)$$

mit  $D(\not{p})$  wie in Gleichung (57) definiert. Die Lösung ist

$$\psi^A = \begin{bmatrix} R \Gamma \\ \Gamma \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \psi^7 \\ \vdots \\ \psi^{12} \end{bmatrix}, \quad R = \frac{\sigma \not{p}}{\not{p}_0 + m} \otimes E_3 . \quad (79)$$

Das hat für die Darstellungsmatrizen zur Folge

$$U = \left[ \begin{array}{c|c} R V R^{-1} & 0 \\ \hline 0 & V \end{array} \right] = R V R^{-1} \oplus V , \quad (80)$$

mit  $V = SU(6)$ -Matrix.

Nun betrachten wir das Tensorprodukt

$$12 \otimes 12^+ = 143 \oplus 1 \quad (81)$$

mit der Untergruppenstruktur

$$\begin{aligned} 143 = & 2(D_{1/2\mathbf{1}/2}, 8) \oplus 2(D_{1/2\mathbf{1}/2}, 1) \oplus (D_{01}, 8) \oplus (D_{01}, 1) \oplus (D_{10}, 8) \\ & \oplus (D_{10}, 1) \oplus 2(D_{00}, 8) \oplus (D_{00}, 1) , \end{aligned} \quad (82)$$

wobei  $D_{ij}$  eine nicht-unitäre Darstellung der  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  der Dimension  $(2i+1)(2j+1)$  ist. (Es steht 143 für die ganze Äquivalenzklasse  $143(\not{p})$  zu verschiedenen  $\not{p}$ .) Dieses Überangebot von Multipletts wird durch die Bargmann-Wigner-Gleichungen reduziert: Es wird 143 aufgespannt von den Zuständen

$$\Phi_A^B = \psi_A \otimes \psi^B - \text{Spur} (\psi_A \otimes \psi^B) \quad (83)$$

mit  $\psi_A \in 12$ ,  $\psi^B \in 12^+$ . Man fordere nun im Sinne von Gleichung (62) und (78) für untere Indizes («Quark-Indizes»)  $v = +1$ , für obere Indizes («Anti-Quark-Indizes»)  $v = -1$ . Damit ist gemeint (es ist über  $A'$  bzw.  $B'$  zu summieren):

$$\boxed{\left( \frac{1}{m} D(\not{p}) \right)_A^{A'} \Phi_{A'}^B = \Phi_A^B \quad \left( \frac{1}{m} D(\not{p}) \right)_{B'}^A \Phi_A^{B'} = -\Phi_A^B .} \quad (84)$$

Das sind die Bargmann-Wigner-Gleichungen für 143. Die Lösung ist

$$\Phi_A^B = \begin{pmatrix} -R\phi_C^D & \phi_C^D \\ -R^2\phi_C^D & R\phi_C^D \end{pmatrix} \quad (85)$$

mit  $C, D = 1, \dots, 6$ ,  $\phi_C^D = 35$  von  $SU(6)$ , d.h. das Mesonenmultiplett [25].

Auf ähnliche Weise kommt man zu Baryonenzuständen, wenn man betrachtet:

$$12 \otimes 12 \otimes 12 = 364 \oplus \dots \quad (86)$$

mit der Untergruppenstruktur

$$364 = (20, 10) \oplus (20', 8) \oplus (4^+, 1) . \quad (87)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} 20 &= \psi_{\{\alpha\beta\gamma\}} = \text{total-symmetrischer } SU(2,2)\text{-Tensor} \\ 20' &= \psi_{[\alpha\beta]\gamma} = \text{gemischter } SU(2,2)\text{-Tensor} . \end{aligned} \quad (88)$$

Die  $SU(2, 2)$ -Darstellungen  $20, 20', 4^+$  zerfallen weiter gemäss

$$20 = D_{0 \ 3/2} \oplus D_{3/2 \ 0} \oplus D_{1/2 \ 1} \oplus D_{1 \ 1/2} \quad (89)$$

$$20' = D_{1/2 \ 1} \oplus D_{1 \ 1/2} \oplus 2(D_{0 \ 1/2} \oplus D_{1/2 \ 0}) \quad (90)$$

$$4^+ = D_{1/2 \ 0} \oplus D_{0 \ 1/2} = \tau . \quad (91)$$

Wir geben die Bargmann-Wigner-Gleichungen nur für Dirac-Indizes an; sie lauten für 20

$$\boxed{\left( \frac{1}{m} \gamma \not{p} \right)_\alpha^{\alpha'} \psi_{\{\alpha'\beta\gamma\}} = \psi_{\{\alpha\beta\gamma\}}} \quad (92)$$

und für  $20'$

$$\boxed{\left( \frac{1}{m} \gamma \not{p} \right)_\alpha^{\alpha'} \psi_{[\alpha'\beta]\gamma} = \psi_{[\alpha\beta]\gamma}, \quad \left( \frac{1}{m} \gamma \not{p} \right)_{\gamma'}^\gamma \psi_{[\alpha\beta]\gamma'} = \psi_{[\alpha\beta]\gamma}} . \quad (93)$$

Sie reduzieren [26] 364 auf ein Dekuplett zum Spin 3/2 und ein Oktett zum Spin 1/2; das entspricht dem Baryonenmultiplett [27] 56 von  $SU(6)$ .

## 5. Parität, Zeitumkehr und Teilchenkonjugation

Das  $SU(6, 6)$ -Symmetrie-Schema impliziert Invarianz unter Raumspiegelung, und zwar bleibt auch nach Anwendung der Bargmann-Wigner-Gleichungen die Parität eine Erhaltungsgröße. Dieses von SALAM *et al.* [28] mitgeteilte Ergebnis lässt sich mühelos im Rahmen unseres  $A(SU(6, 6))$ -Formalismus gewinnen; darüberhinaus können wir in formal analoger Weise dasselbe für die Zeitumkehr zeigen:

Die Matrix  $G_0$  (vgl. Gleichung (3)) beschreibt die Geometrie des Darstellungsraumes  $V(6, 6)$  von 12. Sie stellt ferner den Operator  $(1/m) D_0$  aus  $A(SU(6, 6))$  dar (vgl. Gleichung (37)). Daneben ist  $G_0$  noch einer dritten Deutung fähig: Es ist  $G_0$  eine Matrix aus der Darstellung 12 der  $SU(6, 6)$ , denn es gilt (vgl. Gleichung (4))

$$G_0 G_0 \overline{G}_0^T = G_0 . \quad (94)$$

Die Anwendung von  $G_0$  auf  $\psi_A$  aus 12 ergibt (vgl. Gleichung (67)):

$$G_0 \psi_A(\not{p}) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_6 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{E}_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \not{p} \sigma \\ \hline p_0 + m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{(-\not{p}) \sigma}{p_0 + m} \phi \end{pmatrix} =: \psi_A(-\not{p}) . \quad (95)$$

Es geht also  $\mathbf{p}$  über in  $-\mathbf{p}$ . Das legt die Vermutung nahe, dass  $G_0$  den Paritätsoperator  $\mathcal{D}$  darstellt. Tatsächlich ist (vgl. Gleichung (33) und (34))

$$G_0 = \gamma_0 \otimes E_3 \quad (96)$$

und  $\gamma_0$  stellt bekanntlich [29] den Operator  $\mathcal{D}$  der Raumspiegelung aus der sogenannten «vollständigen» Lorentz-Gruppe  $\mathcal{L}^\uparrow = \mathcal{L}_+^\uparrow + \mathcal{P} \mathcal{L}_+^\uparrow$  dar, und durch Hinzufügen von  $\gamma_0$  zur Menge der Matrizen (von der Gestalt wie in Gleichung (50)) der Bispinordarstellung  $\tau$  der  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  macht man diese zu einer irreduziblen Darstellung  $\tau'$  von  $\mathcal{L}^\uparrow$ . Mithin ist die Raumspiegelung Element von  $SU(6,6)$ , und  $SU(6,6)$ -Symmetrie hat Paritätserhaltung zur Folge.

Der  $A(SU(6,6))$ -Operator  $(1/m) D(\mathbf{p}) = (1/m) \mathbf{p} \gamma \otimes E_3$  (vgl. Gleichung (57) und (61)) geht unter  $\mathcal{D}$  über in

$$G_0 \frac{1}{m} D(\mathbf{p}) G_0^{-1} = \begin{pmatrix} p_0 E_2 & -\sigma(-\mathbf{p}) \\ \sigma(-\mathbf{p}) & -p_0 E_2 \end{pmatrix} \otimes E_3 =: \frac{1}{m} D(-\mathbf{p}) . \quad (97)$$

Wegen Gleichung (95) lauten daher die Bargmann-Wigner-Gleichungen nach Anwendung von  $\mathcal{D}$ :

$$\frac{1}{m} D(-\mathbf{p}) \psi_A(-\mathbf{p}) = \psi_A(-\mathbf{p}) . \quad (98)$$

Das ist aber gleichbedeutend mit den alten Bargmann-Wigner-Gleichungen (62), wie das Ausschreiben der Gleichungen (98) und Multiplikation mit  $G_0$  von links her lehren. Mithin sind die Bargmann-Wigner-Gleichungen invariant unter Raumspiegelung.

Die Wirkung der Raumspiegelungsoperation  $\mathcal{D}$  betrifft nur Dirac-Indizes (vgl. Gleichung (53)):

$$\mathcal{D} \psi_A(x_0, x) = \mathcal{D} \psi_\mu(x_0, x) \otimes \psi_j = P \psi_\mu(x_0, -x) \otimes \psi_j \quad (99)$$

mit  $P \equiv \gamma_0$ . Dasselbe lässt sich für die Operation der Zeitumkehr aussprechen, die wir mit  $\mathcal{T}$  bezeichnen wollen:

$$\mathcal{T} \psi_A(x_0, x) = \mathcal{T} \psi_\mu(x_0, x) \otimes \psi_j = T \psi_\mu(-x_0, x) \otimes \psi_j . \quad (100)$$

Dabei ist  $T$  die Matrix, die  $\mathcal{T}$  im Rahmen der Diracschen Theorie (auf ganz  $\mathcal{L}$  erweiterte Bispinordarstellung) darstellt; aus den Bedingungen, die z.B. KÄLLEN angibt [30], errechnen wir für  $T$  im Zusammenhang unseres Formalismus'

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (101)$$

Die Matrix  $(T \otimes E_3)$  stellt dann die Zeitumkehr in der Darstellung 12 der  $SU(6,6)$  dar, falls  $(T \otimes E_3)$  eine  $SU(6,6)$ -Matrix ist. Das ist tatsächlich der Fall, denn es gilt

$$(T \otimes E_3) G_0 \overline{(T \otimes E_3)^T} = G_0 . \quad (102)$$

Daraus folgt: Auch die Zeitumkehr ist Element von  $SU(6,6)$ , und  $SU(6,6)$ -Symmetrie impliziert Invarianz unter Zeitumkehr. Dieser Tatbestand wird auch durch die

Bargmann-Wigner-Gleichungen nicht aufgehoben, denn diese lauten nach Anwendung von  $\mathcal{J}$ :

$$(T \otimes E_3) \left( \frac{1}{m} D(p) \right) (T \otimes E_3)^{-1} (T \otimes E_3) \psi_A(p) = (T \otimes E_3) \psi_A(p). \quad (103)$$

Multiplikation mit  $(T \otimes E_3)^{-1}$  zeigt, dass (103) mit den alten Gleichungen (62) äquivalent ist.

Die Operation  $\mathbf{C}$  der Teilchenkonjugation ist formal anders zu behandeln als  $\mathbf{P}$  und  $\mathcal{J}$ , da sie sich auch auf  $SU(3)$ -Indizes (vgl. Gleichung (53)) erstreckt. Es gilt

$$\mathbf{C} \psi_j = \psi^j \quad (104)$$

mit  $\psi_j = | i_3; y \rangle$  = Quark aus der Darstellung 3 der  $SU(3)$  und  $\psi^j = | -i_3; -y \rangle$  = Antiquark aus der konjugierten Darstellung  $3^+$ . Denn beim Übergang  $U = \exp(iF) \rightarrow \bar{U} = \exp(i(-F))$  zur konjugierten Darstellung ändern die Operatoren  $F$  und mithin ihre Eigenwerte das Vorzeichen. Insbesondere geht  $y/2 + i_3 = q$  über in  $-y/2 - i_3 = -q$  («Ladungskonjugation»).

Im Rahmen der Diracschen Theorie wird die Ladungskonjugation  $\mathbf{C}$  dargestellt durch die Matrix [31]

$$C = \gamma_0 \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (105)$$

und es gilt [32]

$$\mathbf{C} \psi_\mu = C \bar{\psi}_\mu. \quad (106)$$

(Diesen Dirac-Aspekt von  $\mathbf{C}$  berücksichtigen auch SALAM *et al.* [33].)

Insgesamt geht unter  $\mathbf{C}$  die Darstellung  $12 = (\tau, 3)$  der  $SU(6, 6)$  über in die konjugierte Darstellung  $12^+ = (\tau, 3^+)$  (vgl. Gleichung (75)):

$$\mathbf{C} 12 = 12^+, \quad \mathbf{C} 12^+ = 12. \quad (107)$$

Es führt also  $\mathbf{C}$  i. a. aus einer irreduziblen Darstellung der  $SU(6, 6)$  hinaus. Dann kann  $\mathbf{C}$  nicht Element von  $SU(6, 6)$  sein:  $SU(6, 6)$ -Symmetrie schliesst nicht automatisch Invarianz unter Teilchenkonjugation mit ein. Man kann aber  $\mathbf{C}$  leicht durch den Übergang zu der erweiterten Gruppe  $SU(6, 6) \otimes [\mathbf{C}]$  mit  $[\mathbf{C}] = \{\mathbf{C}, \mathbf{C}^2 = E\}$  berücksichtigen. Irreduzible Darstellungen dieser erweiterten Gruppe enthalten dann stets zugleich Teilchen und Antiteilchen, sind also invariant unter  $\mathbf{C}$ . Beispiele sind  $12 \oplus 12^+$  (Quarks und Antiquarks),  $143 = 143^+$  (Mesonen) und  $364 \oplus 364^+$  (Baryonen und Antibaryonen).

## Schluss

Wir haben einige wesentliche Züge der  $SU(6, 6)$ -Theorie der starken Wechselwirkung an Hand einer Matrixdarstellung der Gruppenalgebra entwickelt. Dabei haben wir uns auf das Studium der Quarkdarstellung 12 konzentriert. Bei der Behandlung der physikalischen Multipletts beschränkten wir uns auf die Berechnung der  $(\mathcal{L}_+^\dagger \otimes SU(3))$ -Untergruppenstruktur, da die weiteren Ergebnisse, wie insbesondere die Konsequenzen der Bargmann-Wigner-Gleichungen, nicht über das hinausgehen,

was auch SALAM *et al.* erhalten haben. Durch die explizite Berechnung der Zustände  $\psi_A(p)$  aus 12 unter Berücksichtigung der Bargmann-Wigner-Gleichungen konnten wir den Anschluss an die Arbeiten von BÉG und PAIS herstellen.

Diese Arbeit wurde unterstützt vom Schweizerischen Nationalfonds. Einer der Autoren (H. P. B.) ist dem Cusanuswerk dankbar für die geistige und materielle Förderung seiner Studien.

### Literaturverzeichnis

- [1] M. GELL-MANN und Y. NE'EMAN, *The Eightfold Way*, Benjamin, New York 1964.
- [2] B. SAKITA, Phys. Rev. 136, B 1756 (1964); F. GÜRSEY und L. A. RADICATI, Phys. Rev. Letters 13, 173 (1964); A. PAIS, Phys. Rev. Letters 13, 175 (1964).
- [3] A. SALAM, R. DELBOURGO und J. STRATHDEE Proc. Roy. Soc. A 284 146 (1965).
- [4] M. A. BÉG und A. PAIS Phys. Rev. 137 B 1514 (1965); M. A. BÉG und A. PAIS Phys. Rev. 138 B 692 (1965).
- [5] R. DELBOURGO, M. A. RASHID, A. SALAM und J. STRATHDEE, *The  $\tilde{U}(12)$ -Symmetry*, International Centre for Theoretical Physics, Trieste (Italy), IC/65/57 (1965).
- [6] A. SALAM, R. DELBOURGO und J. STRATHDEE, a. a. O.
- [7] H. J. LIPKIN, *Lie Groups for Pedestrians*, North Holland 1965; G. RACAH, *Group Theory and Spectroscopy*, CERN 61-8 (1965); K. Mc VOY, Rev. Mod. Phys. 37, 84 (1965); G. DE FRANCESCHI und L. MAIANI, Fortschr. Phys. 13, 279 (1965).
- [8] R. DELBOURGO, M. A. RASHID, A. SALAM und J. STRATHDEE, a. a. O.
- [9] G. FÄLDT, *Simple Discussion of  $SU(3)$  and  $SU(6)$* , Seminar Notes, University of Lund (Sweden) (1965).
- [10] G. DE FRANCESCHI und L. MAIANI, a. a. O.
- [11] G. DE FRANCESCHI und L. MAIANI, a. a. O.
- [12] R. DELBOURGO, M. A. RASHID, A. SALAM und J. STRATHDEE, a. a. O.
- [13] G. FÄLDT, a. a. O.
- [14] G. FÄLDT, a. a. O.
- [15] E. ARTIN, *Geometric Algebra*, S. 108, Interscience 1957.
- [16] W. RÜHL, International Centre for Theoretical Physics, Trieste (Italy), SMR 2/20 (1965).
- [17] H. BOERNER, *Darstellungen von Gruppen*, S. 273, Springer 1955.
- [18] I. M. GEL'FAND, R. A. MINLOS und Z. Y. SHAPIRO, *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications*, S. 254, Pergamon 1963.
- [19] I. M. GEL'FAND, R. A. MINLOS und Z. Y. SHAPIRO, a. a. O., S. 327.
- [20] S. WEINBERG, Phys. Rev. 133, B 1318 (1964).
- [21] R. DELBOURGO, M. A. RASHID, A. SALAM und J. STRATHDEE, a. a. O.
- [22] A. SALAM, R. DELBOURGO und J. STRATHDEE, a. a. O.; J. M. CHARAP, P. T. MATTHEWS und R. F. STREATER, Proc. Roy. Soc. A 290, 24 (1966).
- [23] M. A. BÉG und A. PAIS, a. a. O.
- [24] I. M. GEL'FAND, R. A. MINLOS und Z. Y. SHAPIRO, a. a. O., S. 200.
- [25] F. GÜRSEY und L. A. RADICATI, a. a. O.
- [26] A. SALAM, R. DELBOURGO und J. STRATHDEE, a. a. O.
- [27] F. GÜRSEY und L. A. RADICATI, a. a. O.
- [28] A. SALAM, J. STRATHDEE, J. M. CHARAP und P. T. MATTHEWS, Phys. Letters 15, 184 (1965).
- [29] I. M. GEL'FAND, R. A. MINLOS und Z. Y. SHAPIRO, a. a. O. S. 255 und S. 305.
- [30] G. KÄLLEN *Elementarteilchenphysik* S. 346 Bibliographisches Institut Mannheim 1965.
- [31] G. KÄLLEN a. a. O. S. 329/330.
- [32] G. KÄLLEN a. a. O. S. 350.
- [33] A. SALAM R. DELBOURGO und J. STRATHDEE a. a. O.; A. SALAM, J. STRATHDEE, J. M. CHARAP und P. T. MATTHEWS, a. a. O.