

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 39 (1966)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Über den Compton-Effekt am gebundenen K-Elektron  
**Autor:** Lambert, M. / Müller, R. / Lang, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-113690>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Über den Compton-Effekt am gebundenen K-Elektron

von **M. Lambert**

Laboratorium für Hochenergiephysik, ETH

und **R. Müller, J. Lang, R. Bösch** und **W. Wölfli**

Laboratorium für Kernphysik, ETH

(22. III. 66)

*Abstract.* The differential cross section for (incoherent) scattering of  $\gamma$ -rays by the bound K-electrons has been calculated using the form factor approximation. Numerical values are given for  $Z = 13, 29, 50, 79, 92$ ,  $E_\gamma = 164, 328, 662, 1332, 2620$  kev, and  $\theta_{\gamma'} = 30^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ .

Bei der Messung von Wirkungsquerschnitten der elastischen Streuung von  $\gamma$ -Quanten, sei es für die Bestimmung des Rayleigheffektes, des Delbrückeffektes oder sei es zur Messung von Niveaubreiten mit Kernresonanzstreuung, tritt der hochenergetische Anteil der inkohärenten Streuung von  $\gamma$ -Quanten am Elektron (Compton-Effekt) stets sehr störend in Erscheinung und muss in geeigneter Weise berücksichtigt werden. Das Ziel dieser Arbeit ist, diesen hochenergetischen Anteil der Compton-Streuung, der hauptsächlich von der Streuung an gebundenen K-Elektronen herührt, abzuschätzen.

Den Wirkungsquerschnitt für die inelastische Streuung von  $\gamma$ -Quanten an gebundenen Elektronen erhält man durch Einsetzen der Diracschen Wellenfunktionen für den Grundzustand  $\psi_0$  und den Kontinuumszustand  $\psi_f$  in

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{k'}{k} \left| \mathbf{e} \mathbf{e}' \int d^3r \exp(i \Delta \mathbf{k} \mathbf{r}) \psi_f \psi_0 \right|^2 \quad (1)$$

$k$  und  $k'$  sind die Wellenzahlen der einfallenden und der gestreuten Wellen,  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{e}'$  ihre Polarisationsvektoren. Vernachlässigt wird bei dieser Rechnung die Bindung im Zwischenzustand (Formfaktornäherung). Für  $\psi_f$  müssten im Prinzip auch höhere gebundene Zustände eingesetzt werden, was zu diskreten  $k'$ -Werten führen würde.

Für den Anteil der K-Elektronen erhält man (RANDES [1]<sup>1)</sup>; vgl. auch STANDING und JOVANOVIČ [2], wo einige Fehler der ursprünglichen Randlesschen Arbeit erwähnt werden) in Einheiten  $m = c = \hbar = 1$  folgendes Resultat:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= r_0^2 \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2} \frac{(1 + \gamma_0) (2 Z \alpha)^{2\gamma_0+1}}{\pi \Gamma(2\gamma_0+1)} \frac{k'}{k} \\ &\times \dot{p} (W + 1) e^{\pi Z \alpha W / \dot{p}} \sum_{\substack{\kappa = -\infty \\ \kappa \neq 0}}^{+\infty} \frac{|\kappa| |\Gamma(\gamma_\kappa + 1 + i Z \alpha W / \dot{p})|^2}{|\Gamma(2\gamma_\kappa + 1)|^2} (2 \dot{p})^{2\gamma_\kappa - 2} I_\kappa^2 \\ I_\kappa &= \int_0^\infty dr r^{\gamma_0 + \gamma_\kappa} e^{-Z \alpha r} j_l(\Delta k r) \left( 1 - i \sqrt{\frac{1 - \gamma_0}{1 + \gamma_0} \frac{W - 1}{W + 1}} \right) \\ &\times e^{i\beta\kappa} e^{-i\dot{p}r} {}_1F_1(\gamma_\kappa + 1 + i Z \alpha W / \dot{p}; 2\gamma_\kappa + 1; 2i\dot{p}r) + \text{conj. compl.} \end{aligned} \quad (2)$$

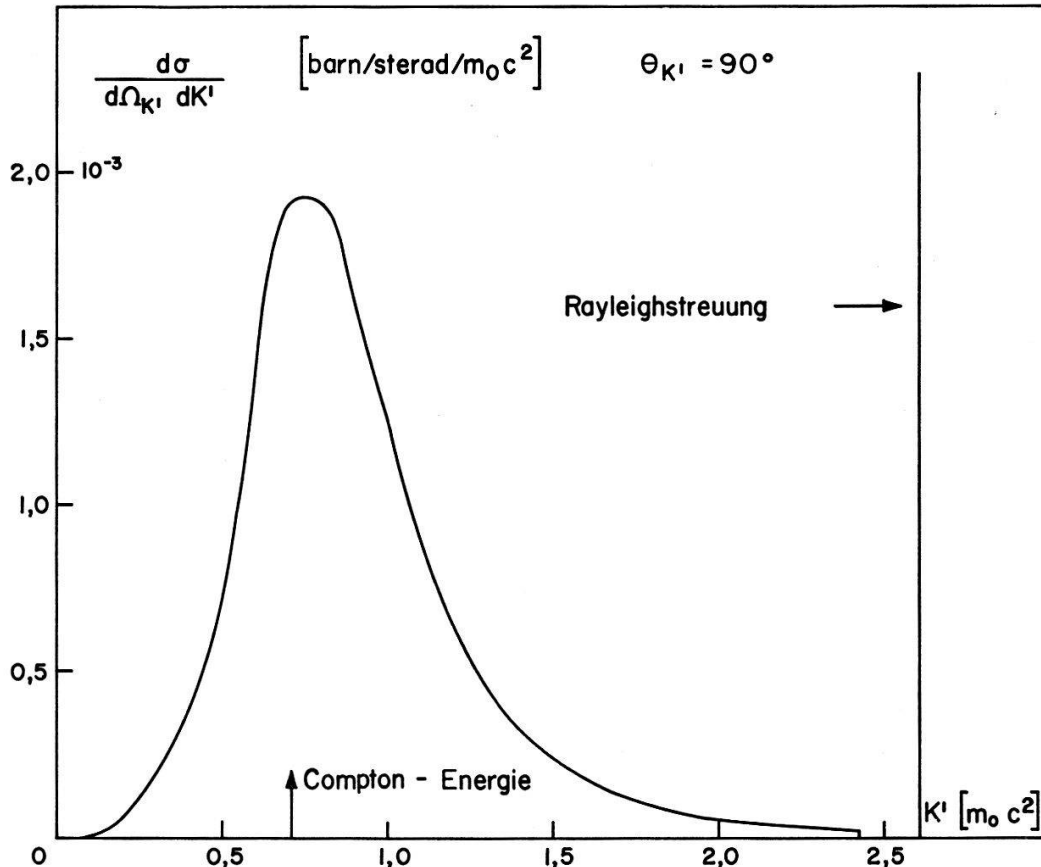
<sup>1)</sup> Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, S. 360.

Für  $\kappa > 0$  ist  $l = \kappa$  und  $\beta_\kappa = 1/2 [\arctg(Z \alpha W / \phi \gamma_\kappa) - \arctg(Z \alpha / \phi \kappa)] + \pi/2$  und für  $\kappa < 0$   $l = -1 - \kappa$  und  $\beta_\kappa = 1/2 [\arctg(Z \alpha W / \phi \gamma_\kappa) - \arctg(Z \alpha / \phi \kappa)]$  zu setzen. Ferner bedeuten

$$\phi = \sqrt{(k - k' + \gamma_0)^2 - 1} = \text{Impuls des Rückstosselektrons}$$

$$W = \sqrt{\phi^2 + 1} = \text{Energie des Rückstosselektrons}$$

$$\Delta k = k - k' = \text{Änderung des Wellenvektors.}$$



Figur 1

Differentieller Wirkungsquerschnitt der inkohärenten Streuung von  $\gamma$ -Strahlen der Energie  $k = 2,607 m_0 c^2$  an den beiden  $K$ -Elektronen von Gold ( $Z = 79$ ) für einen Streuwinkel  $\Theta_{K'} = 90^\circ$ . Der Wirkungsquerschnitt für die Rayleigh-Streuung beträgt (bei  $k = 2,56 m_0 c^2$ ) nach BROWN [6]  $48 \mu\text{barn/sterad}$  und nach der Formfaktornäherung  $105 \mu\text{barn/sterad}$ .

Ausserdem wurden die Abkürzungen

$$\gamma_0 = \sqrt{1 - Z^2 \alpha^2} \quad \text{und} \quad \gamma_\kappa = \sqrt{\kappa^2 - Z^2 \alpha^2}$$

verwendet.  ${}_1F_1$  ist die konfluente hypergeometrische Funktion und  $j_l(\Delta k r)$  die sphärische Besselfunktion  $l$ -ter Ordnung. Setzt man für die letztere

$$j_l(\Delta k r) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^l H_l^j \Delta k^{-j-1} r^{-j-1} e^{i \Delta k r} i^{j-l-1} + \text{conj. compl.}$$

$$H_l^j = \prod_{\mu=1}^j \frac{(l+\mu)(l-\mu+1)}{2\mu} \quad (3)$$

ein, so können die Integrale ausgeführt werden (siehe Nr. (17), p. 219 in ERDÉLY et al. [3]; die Bedingung, dass der Realteil des Exponenten von  $r$  grösser als 1 sein muss, führt auf  $Z\alpha < \sqrt{3}/2$  und ist für alle stabilen Kerne erfüllt). Das Konvergenzverhalten der Reihenentwicklung für die hypergeometrische Funktion kann verbessert werden, wenn auf diejenigen Terme, welche im Exponenten die Differenz  $i p r - i \Delta k r$  enthalten, vor der Integration die Kummersche Transformation [4] angewandt wird.  $I_x$  kann dann in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 I_x = & \frac{1}{2} \sum_{j=0}^l H_l^j \Delta k^{-j-1} \Gamma(\gamma_0 + \gamma_x - j) i^{j-l-1} (Z\alpha - i(\Delta k + p))^{j-\gamma_0-\gamma_x} \\
 & \times \left\{ \left( 1 + i \sqrt{\frac{1-\gamma_0}{1+\gamma_0} \frac{W-1}{W+1}} \right) e^{-i\beta_x} \right. \\
 & \times {}_2F_1 \left( \gamma_x + 1 - i Z \alpha W/p, \gamma_0 + \gamma_x - j; 2\gamma_x + 1; \frac{2p}{\Delta k + p + i Z \alpha} \right) \\
 & + \left( 1 - i \sqrt{\frac{1-\gamma_0}{1+\gamma_0} \frac{W-1}{W+1}} \right) e^{i\beta_x} \\
 & \left. \times {}_2F_1 \left( \gamma_x - i Z \alpha W/p, \gamma_0 + \gamma_x - j; 2\gamma_x + 1; \frac{2p}{\Delta k + p + i Z \alpha} \right) \right\} + \text{conj. compl.} \quad (4)
 \end{aligned}$$

Die Reihenentwicklung für die hypergeometrische Funktion

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \prod_{n=0}^{m-1} \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(n+1)} \right] z^m$$

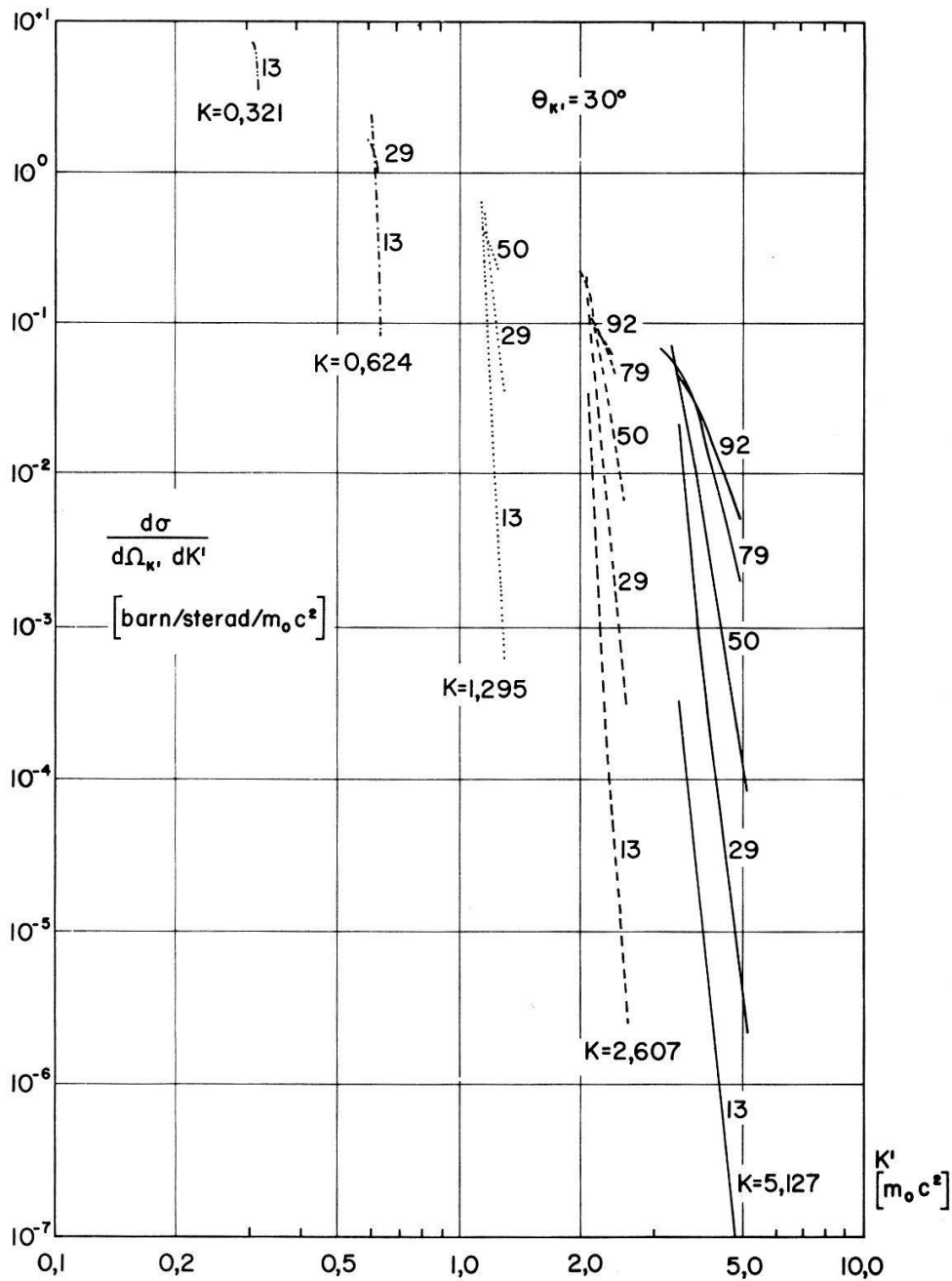
ist brauchbar, solange  $|z| < 1$ . Für grössere  $z$  existieren Formeln für die analytische Fortsetzung. Geeignet sind die Entwicklungen um  $z = 1$  (siehe [4]):

$$\begin{aligned}
 {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma, z) = & \Gamma(\gamma) \left\{ \frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \gamma + 1; 1-z) \right. \\
 & \left. + \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma-\alpha-\beta; 1-z) \right\}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Für die Berechnung der Gammafunktion können, je nach Bereich, verschiedene Näherungspolynome oder asymptotische Entwicklungen verwendet werden [5].

Das Resultat einer Rechnung für  $Z = 79$  (Gold) bei einer  $\gamma$ -Energie von 1,332 MeV und für einen Streuwinkel von  $90^\circ$  zeigt die Figur 1. Wegen der hohen Bindungsenergie der  $K$ -Elektronen ist die Compton-Streulinie stark verbreitert. Der daraus ermittelte integrale Wirkungsquerschnitt beträgt  $1,24 \cdot 10^{-26}$  cm<sup>2</sup>/sterad (gegenüber  $1,72 \cdot 10^{-26}$  cm<sup>2</sup>/sterad nach der Formel von Klein-Nishina, die wegen der starken Bindung der  $K$ -Elektronen allerdings zu grosse Werte liefert). Die Anteile der übrigen Elektronen ergeben sehr viel schmalere Linien und tragen zum Gesamtwirkungsquerschnitt nur in der Umgebung der der Streuung an freien Elektronen entsprechenden Rückstossenergie wesentlich bei. Beschränkt man sich auf den (interessanten) oberen Teil des Spektrums, so genügt die Berücksichtigung der  $K$ -Elektronen.

Beträchtliche Fehler bringt bei hohen  $\gamma$ -Energien die Vernachlässigung der Bindung im Zwischenzustand. Diese Annahme, die auch bei der Berechnung der kohärenten Rayleigh-Streuung gemacht wird und dort als Formfaktornäherung bezeichnet wird, liefert nur für sehr kleine Impulsänderungen  $\Delta k \ll Z\alpha$  brauchbare Resultate.



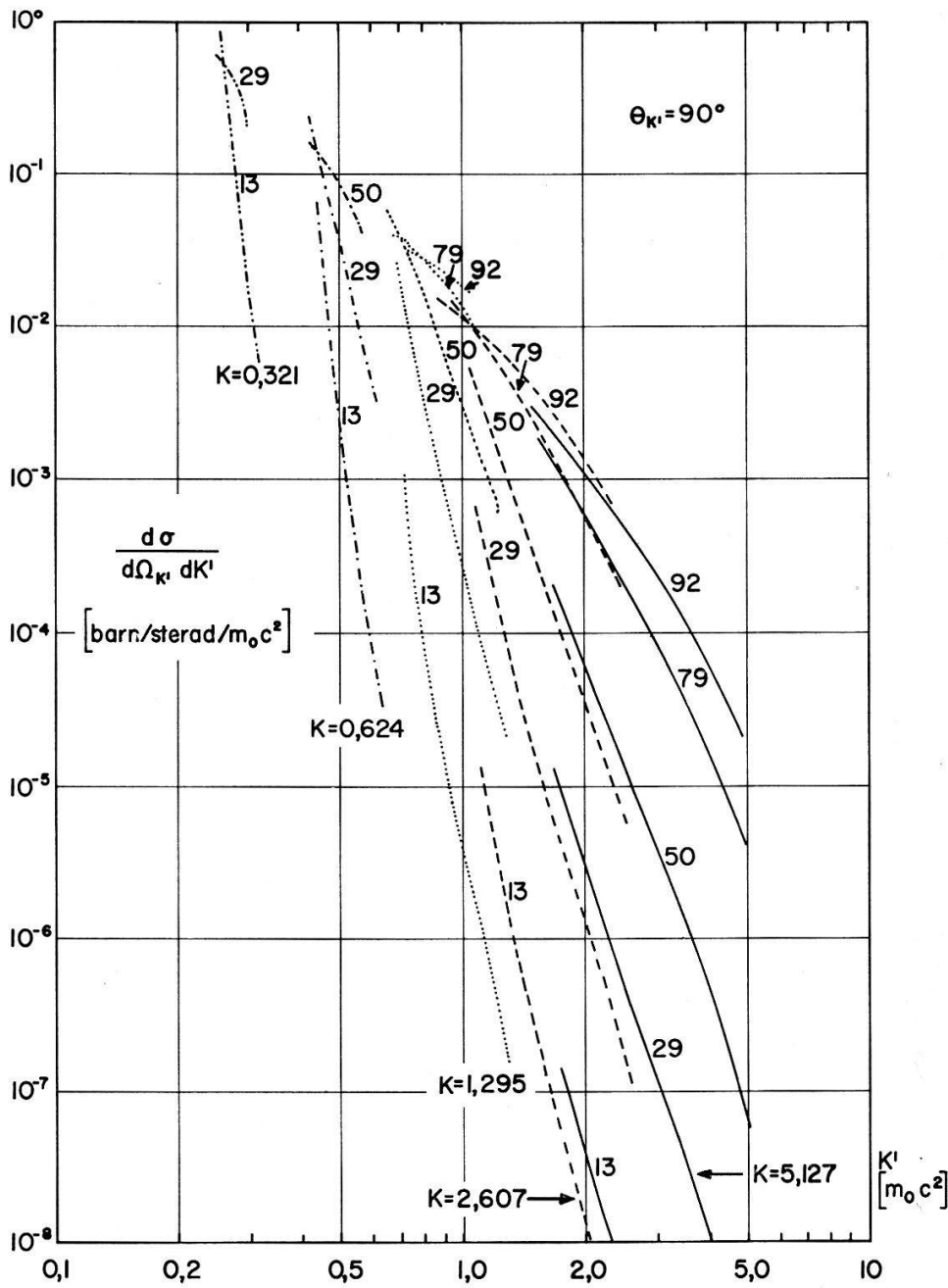
Figur 2

Differentieller Wirkungsquerschnitt der inkohärenten  $\gamma$ -Streuung an Atomen mit  $Z = 13, 29, 50, 79$  und  $92$  für einen Streuwinkel  $\Theta_{k'} = 30^\circ$ .  $\gamma$ -Energien:  $\dots\dots k = 0,321 \text{ mc}^2$ ,  $-\dots k = 0,624 \text{ mc}^2$ ,  $\dots\dots k = 1,295 \text{ mc}^2$ ,  $--- k = 2,607 \text{ mc}^2$ ,  $— k = 5,127 \text{ mc}^2$ .

RANDLES gibt jedoch Argumente dafür, dass das Verhältnis von kohärenter zu inkohärenter Streuung ungefähr richtig wiedergegeben wird, wenn in beiden Fällen die Formfaktornäherung verwendet wird. Die nach (2) berechneten Werte können somit dadurch korrigiert werden, dass sie mit dem Verhältnis von exaktem zu in Formfaktornäherung berechnetem Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{1 + \cos^2\Theta}{2} \left| \frac{2 Z \alpha \sin [2 \gamma_0 \arctg (\Delta k / 2 Z \alpha)]}{\gamma_0 \Delta k \{1 + \Delta k / 2 Z \alpha\}} \right|^2 \tag{7}$$

multipliziert werden. Gute Rechnungen für die Rayleigh-Streuung liegen nur für  $Z = 79$  vor [6]. Die Brauchbarkeit der Formfaktornäherung kann bis etwa  $\Delta k \approx Z \alpha$

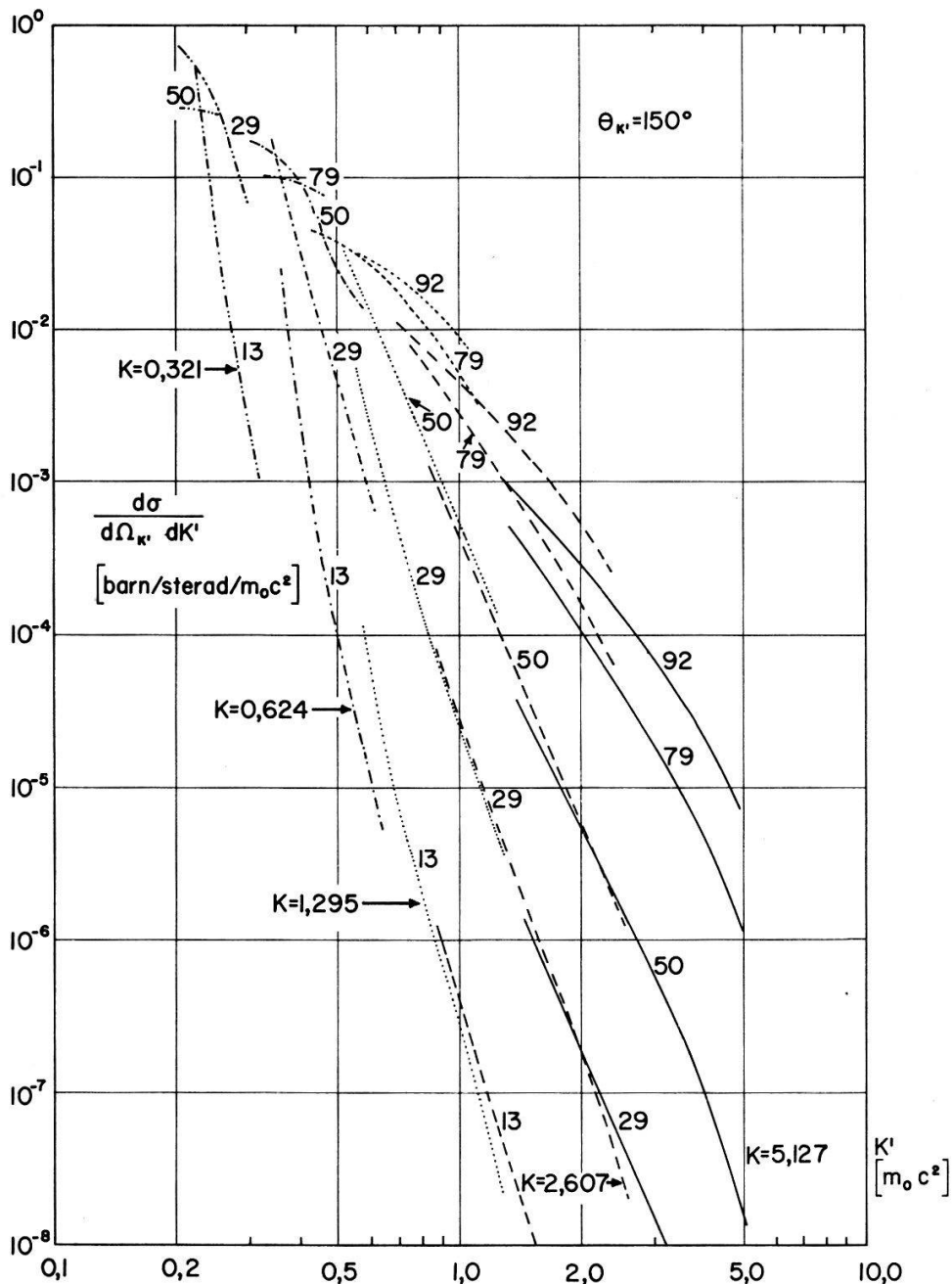


Figur 3

Differentieller Wirkungsquerschnitt der inkohärenten  $\gamma$ -Streuung an Atomen mit  $Z = 13, 29, 50, 79$  und  $92$  für einen Streuwinkel  $\Theta_{K'} = 90^\circ$ .  $\gamma$ -Energien:  $\dots\dots k = 0,321 \text{ mc}^2$ ,  $-\cdot-\cdot-\cdot k = 0,624 \text{ mc}^2$ ,  $\dots\dots k = 1,295 \text{ mc}^2$ ,  $-\cdot-\cdot-\cdot k = 2,607 \text{ mc}^2$ ,  $\text{---} k = 5,127 \text{ mc}^2$ .

ausgedehnt werden durch Einfügen eines Korrekturfaktors  $f(r)$  in der zu (1) analogen Formel, wobei  $f(r) = 1$  zu setzen ist für den Anteil ohne Polarisationsänderung und  $f(r) = 1/(E + Z\alpha/r)$  für den Anteil mit Polarisationsänderung (vgl. BROWN and MAYERS [6]). Für  $\Delta k \gg Z\alpha$  wird der zweite Anteil am besten überhaupt vernachlässigt, während der erste immer noch nach der Formfaktornäherung berechnet werden kann.

Für eine Reihe von  $Z$  und verschiedene  $\gamma$ -Energien sind in den Figuren 2 bis 4 die Resultate für den oberen Teil des Spektrums, wo die  $K$ -Elektronen den Hauptbeitrag liefern, zusammengestellt. Die Genauigkeit der numerischen Rechnungen, die auf einer CDC-1604A durchgeführt wurden, ist im allgemeinen besser als 5%.



Figur 4

Differentieller Wirkungsquerschnitt der inkohärenten  $\gamma$ -Streuung an Atomen mit  $Z = 13, 29, 50, 79$  und  $92$  für einen Streuwinkel  $\theta_{k'} = 150^\circ$ .  $\gamma$ -Energien:  $\dots\dots k = 0,321 \text{ mc}^2$ ,  $-\dots- k = 0,624 \text{ mc}^2$ ,  $\dots\dots k = 1,295 \text{ mc}^2$ ,  $--- k = 2,607 \text{ mc}^2$ ,  $— k = 5,127 \text{ mc}^2$ .

**Literatur**

[1] J. RANGLES, Proc. Phys. Soc. (London) *A 70*, 337 (1957).  
 [2] K. G. STANDING and J. V. JOVANOVICH, Can. J. Phys. *40*, 622 (1962).  
 [3] ERDÉLYI, MAGNUS, OBERHETTINGER, and TRICOMI, *Tables of Integral Transforms*, Vol. 1.  
 [4] ERDÉLYI, MAGNUS, OBERHETTINGER, and TRICOMI, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1.  
 [5] HASTINGS, *Approximations for Digital Computers*.  
 [6] S. BRENNER, G. E. BROWN, and J. B. WOODWARD, Proc. Roy. Soc. (London) *227*, 58 (1955);  
 G. E. BROWN and D. F. MAYERS, Proc. Roy. Soc. (London) *234*, 387 (1956); G. E. BROWN and  
 D. F. MAYERS, Proc. Roy. Soc. (London) *242*, 89 (1957); H. CORNILLE and M. CHAPDELAIN,  
 Nuovo Cimento *14*, 1386 (1959).