Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 39 (1966)

Heft: 4

Artikel: Nouvelles formes des représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré. II

Autor: Guillot, J.C. / Petit, J.L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-113687

Nouvelles formes des représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré

II

par **J. C. Guillot**[1]) et **J. L. Petit**[1])
Institut de Physique Théorique, Université de Genève, Suisse

(29 I 66)

Abstract II. A new form of representations of the Poincaré group (considered in I) is studied in detail by means of functions defined on the Lorentz group. We consider several parametrizations of this group which allow us to construct representations of the Poincaré group and its Lie algebra for the cases $m \geqslant 0$. Some of these parametrizations define forms corresponding to the canonical and to the helicity formalisms. We use mainly two methods for calculating the infinitesimal operators: the one is related directly to the mass hyperboloïd and the other one is constructed by replacing the spin matrices by differential operators.

Introduction

Nous nous proposons d'étudier une nouvelle forme des représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré à l'aide des résultats obtenus explicitement dans «Nouvelles formes des représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré I» article auquel on se refèrera dans la suite par I. Les avantages d'une telle forme ont déjà été partiellement exploités (cf. I et [1]). Dans la première partie de cet article nous considérons le cas des masses positives et nous écrivons les opérateurs infinitésimaux correspondant à différentes paramétrisations du groupe de Lorentz et ceci à l'aide de plusieurs méthodes de calcul. Dans la deuxième partie nous traitons le cas des masses nulles. Dans ce qui suit l'opérateur W^μ (cf. I) sera considéré comme l'opérateur du spin relativiste.

I. Cas des masses positives

Nous allons maintenant étudier les représentations irréductibles $[m; j]$ (avec $m > 0$) et la forme correspondante des opérateurs infinitésimaux pour différentes paramétrisations du groupe de Lorentz. Parmi toutes les paramétrisations possibles, celles qui comportent une rotation sont plus simples à calculer car le stabilisateur des masses positives est le groupe des rotations. Considérons en effet une décomposition du type $\Lambda = L\, R$ où R est une rotation dépendant de 3 paramètres. La transformation L dépend aussi de 3 paramètres et paramétrise donc le quotient $S\,L(2, \mathbf{C})/S\,U(2, \mathbf{C})$, c'est-à-dire l'hyperboloïde $p^2 = m^2$. Cette correspondance se réalise à partir de l'équation $p = L \overset{\circ}{p}$ qui permet d'associer biunivoquement un p à chaque L. Ainsi cet élément est la transformation Λ_p employée dans I pour définir les représentations

---

[1]) Boursiers O.T.A.N.

induites. Nous emploierons deux méthodes de calcul pour obtenir ces opérateurs infinitésimaux correspondant à la partie homogène et nous allons les schématiser ici car elles se retrouveront tout au long de cet article. Pour calculer ces opérateurs nous avons à évaluer des quantités du type $\Lambda_0^{-1} \Lambda_p R$ où Λ_0 est une transformation homogène infinitésimale. Pour calculer les variations des paramètres de Λ_p et de R sous l'effet d'une telle transformation nous devons redécomposer $\Lambda_0^{-1} \Lambda_p R$ sous la forme $\Lambda_{p'} R'$ et comme cette décomposition est unique, la solution est:

$$\Lambda_0^{-1} \Lambda_p R = \Lambda_{\Lambda_0^{-1} p} \left(\Lambda^{-1}_{\Lambda_0^{-1} p} \Lambda_0^{-1} \Lambda_p\right) R .$$

$\Lambda^{-1}_{\Lambda_0^{-1} p} \Lambda_0^{-1} \Lambda_p$ étant un élément du stabilisateur de $\mathring{p}$. Là nous avons deux possibilités.

Première méthode:

On utilise directement la condition (I-19), soit:

$$f(\Lambda_0^{-1} \Lambda_p R) = D^{j^{-1}}(R)\, D^j(\Lambda_p^{-1} \Lambda_0 \Lambda_{\Lambda_0^{-1} p})\, D^j(R) f(\Lambda_{\Lambda_0^{-1} p} R).$$

La partie $f(\Lambda_{\Lambda_0^{-1} p} R)$ nous fournit la contribution correspondante aux termes $\boldsymbol{p} \wedge \partial \boldsymbol{p}$ et $p^0\, \partial \boldsymbol{p}$ sur l'hyperboloïde.

Deuxième méthode:

On compose les 2 rotations $(\Lambda_p^{-1} \Lambda_0 \Lambda_{\Lambda_0^{-1} p})^{-1}$ et R et on calcule la variation des paramètres de Λ_p et de R, ce qui nous introduit des dérivations par rapport à ces paramètres. Les opérateurs calculés ainsi, que nous noterons $\boldsymbol{J}'$, $\boldsymbol{N}'$, ne sont pas ceux désirés car nous n'avons pas tenu compte de la condition (I-19); ce sont ceux de la représentation «régulière»: $f(\Lambda) \xrightarrow{\Lambda_0} f(\Lambda_0^{-1} \Lambda)$. Nous pouvons maintenant tenir compte de la condition (I-19) par l'égalité suivante:

$$f(\Lambda_p R \Lambda_p^{-1} \Lambda_0 \Lambda_{\Lambda_0^{-1} p}) = D^{j^{-1}}(\Lambda_p^{-1} \Lambda_0 \Lambda_{\Lambda_0^{-1} p})\, f(\Lambda_p R).$$

Les modifications apportées par cette équation nous permettent de corriger les opérateurs $\boldsymbol{J}'$ et $\boldsymbol{N}'$ afin d'obtenir les opérateurs $\boldsymbol{J}$ et $\boldsymbol{N}$. Nous montrerons, dans l'étude des différentes paramétrisations, comment on démontre l'équivalence entre les formes calculées par les deux méthodes. Notons que tout ceci se transpose au cas des masses nulles à condition de remplacer le groupe des rotations par le groupe E_2; ainsi pour $m = 0$, les paramétrisations simples sont celles de la forme

$$\Lambda = \Lambda_p E \quad \text{où} \quad E \in E_2 .$$

Comme les opérateurs calculés ne sont pas bornés, nous devons préciser leur domaine de définition. Le théorème de L. GARDING (cf. [2] [2])) nous assure l'existence pour chaque représentation considérée d'un domaine de définition commun des opérateurs infinitésimaux, dense dans l'espace d'Hilbert et sur lequel ces opérateurs sont essentiellement auto-adjoints. Le domaine de L. GARDING est formé par l'ensemble des vecteurs de la forme $\int_G T(g)\, \varphi(g)\, \boldsymbol{x}\, dg$ où $T(g)$ est la représentation considérée

---

[2]) Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie, page 324.

opérant dans $\mathfrak{H}$, $\boldsymbol{x}$ un vecteur dans $\mathfrak{H}$, $\varphi(g)$ une fonction indéfiniment différentiable à support compact et dg la mesure de Haar. Signalons que dans chaque cas rencontré, il sera préférable de substituer au domaine de L. GARDING un domaine de définition plus adapté à la forme particulière de la représentation.

A. Soit la décomposition du groupe de Lorentz en une transformation de Lorentz pure Λ_p et une rotation R qu'on écrira:

$$\Lambda = A(\chi; \boldsymbol{l})\, A(\boldsymbol{n}; \theta) = \left(\operatorname{ch} \frac{\chi}{2} - \operatorname{sh} \frac{\chi}{2}\, \boldsymbol{l}\, \boldsymbol{\tau}\right) \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2}\, \boldsymbol{n}\, \boldsymbol{\tau}\right) = \Lambda_p R.$$

Ceci correspond à paramétrer l'hyperboloïde ($p^2 = m^2$; $p^0 > 0$) par l'ensemble des transformations $A(\chi; \boldsymbol{l})$ et ce n'est rien d'autre que le formalisme canonique de E. WIGNER (cf. [3]). Les fonctions sur lesquelles nous écrivons la représentation dépendent ainsi des arguments (χ; $\boldsymbol{l}$; θ; $\boldsymbol{n}$) et le produit scalaire dans l'espace $\mathfrak{H}^{D^j}$ est

$$\langle f, g \rangle = \int \bar{f}(\Lambda_p R)\, g(\Lambda_p R)\, m^4 (\operatorname{sh} \chi)^4\, \delta(|\boldsymbol{l}|^2 - 1)\, d\boldsymbol{l}\, d\chi\,.$$

Un domaine naturel de définition de l'ensemble des opérateurs infinitésimaux est l'ensemble des fonctions des variables χ, $\boldsymbol{l}$, θ, $\boldsymbol{n}$, indéfiniment différentiables et à support compact.

Cette représentation s'écrit dans l'espace $\mathfrak{H}^{D^j}$ d'après (I-20)

$$\left({}_G U^{D^j}(a_0, \Lambda_0) f\right)(\Lambda) = e^{i a_0 \Lambda \mathring{p}} f(\Lambda_0^{-1} \Lambda) \tag{II-1}$$

c'est-à-dire

$$[{}_G U^{D^j}(\{a_0; A(\chi'; \boldsymbol{l}')\, A(\boldsymbol{n}'; \theta')\}) f]\, \left(A(\chi; \boldsymbol{l})\, A(\boldsymbol{n}; \theta)\right)$$
$$= e^{i a_0 A(\chi; \boldsymbol{l}) \mathring{p}} f[A(\boldsymbol{n}'; -\theta)\, A(-\chi'; \boldsymbol{l}')\, A(\chi; \boldsymbol{l})\, A(\boldsymbol{n}; \theta)]\,.$$

Nous allons maintenant calculer les opérateurs infinitésimaux associés à cette représentation (Note: pour simplifier l'écriture nous noterons D pour $D^{(j)}$).

Générateurs des translations d'espace-temps

Par définition $A(\chi; \boldsymbol{l})$ est la transformation qui amène le point stabilisé $\mathring{p}$ en p:

$$\underset{\sim}{p} = A(\chi; \boldsymbol{l})\, \underset{\sim}{\mathring{p}}\, A(\chi; \boldsymbol{l}) = m\, A(2\chi; \boldsymbol{l})$$

d'où

$$\underset{\sim}{p} = p^0 \tau^0 - \boldsymbol{p}\, \boldsymbol{\tau} = m \left(\operatorname{ch} \chi - \operatorname{sh} \chi\, (\boldsymbol{l}\, \boldsymbol{\tau})\right)$$

donc

$$(P^0 f)(\Lambda) = (m \operatorname{ch} \chi) f(\Lambda) \qquad (\boldsymbol{P} f)(\Lambda) = (m \operatorname{sh} \chi\, \boldsymbol{l}) f(\Lambda). \tag{II-2}$$

Générateurs des rotations et des transformations de Lorentz pures.

Comme nous l'avons vu précédemment, le calcul des opérateurs infinitésimaux fait intervenir la rotation $\Lambda_p^{-1} \Lambda_0 \Lambda_{\Lambda_0^{-1} p}$ où Λ_0 est successivement une rotation et une transformation de Lorentz pure, infinitésimales toutes les deux. Si Λ_0 est la rotation infinitésimale $1 - i\, \alpha/2\, \boldsymbol{q}\, \boldsymbol{\tau} = R(\boldsymbol{q}; \alpha)$, alors

$$\Lambda_p^{-1} R(\boldsymbol{q}; \alpha)\, \Lambda_{R^{-1}_{(\boldsymbol{q}; \alpha)}} = R(\boldsymbol{q}; \alpha)\,.$$

cette égalité ne se limite pas d'ailleurs aux seules rotations infinitésimales. Par contre si Λ_0 est une transformation de Lorentz pure; $\Lambda_0 = 1 - \chi_0/2\, \boldsymbol{q}\, \boldsymbol{\tau}$ on a: (cf. [9])

$$\Lambda_p^{-1}\, \Lambda_0\, \Lambda_{\Lambda_0^{-1} p} = R(\boldsymbol{q}''; \alpha'')$$

avec

$$D(\Lambda_p^{-1}\, \Lambda_0\, \Lambda_{\Lambda_0^{-1} p}) = D\big(R(\boldsymbol{q}''; \alpha'')\big) = 1 - i\, \alpha''\, \boldsymbol{q}''\, \boldsymbol{S} = 1 - i\, \chi_0\, \boldsymbol{q}\, \boldsymbol{S}''$$

la dernière égalité définissant $\boldsymbol{S}''$, où

$$\boldsymbol{q}'' = \frac{\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}|}; \qquad \alpha'' = \chi_0\, \frac{|\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}|}{p^0 + m} \qquad \boldsymbol{u} = \gamma\, \boldsymbol{v}; \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}; \quad \boldsymbol{v} = \chi_0\, \boldsymbol{q}$$

et par suite:

$$\boldsymbol{S}'' = -\operatorname{th} \frac{\chi}{2}\, \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{S}\,.$$

Les formules générales écrites précédemment donnent le résultat suivant:

$$(\boldsymbol{J} f)\,(\Lambda) = [D^{-1}\big(\Lambda(\boldsymbol{n};\, \theta)\big)\, \boldsymbol{S}\, D\big(\Lambda(\boldsymbol{n};\, \theta)\big) - i\, \boldsymbol{l} \wedge \partial_l]\, f(\Lambda)\,.$$

$$(\boldsymbol{N} f)\,(\Lambda) = -\left[D^{-1}\big(\Lambda(\boldsymbol{n};\, \theta)\big) \operatorname{th} \frac{\chi}{2}\, \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{S}\, D\big(\Lambda(\boldsymbol{n};\, \theta)\big) + \boldsymbol{O}\right] f(\Lambda)\,. \qquad \text{(II-3)}$$

On peut, en tenant compte de l'equation (I-2 bis), mettre ces opérateurs sous la forme suivante:

$$(\boldsymbol{J} f)\,(\Lambda) = [\cos\theta\, \boldsymbol{S} + (1 - \cos\theta)\, (\boldsymbol{n}\, \boldsymbol{S})\, \boldsymbol{n} + \sin\theta\, (\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{S}) - i\, \boldsymbol{l} \wedge \partial_l]\, f(\Lambda)$$

$$(\boldsymbol{N} f)\,(\Lambda) = -\Big[\operatorname{th} \frac{x}{2}\, \big(\cos\theta\, \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{S} + (1 - \cos\theta)\, (\boldsymbol{n}\, \boldsymbol{S})\, \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{n}$$

$$+ \sin\theta\, \boldsymbol{l} \wedge (\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{S})\big) + \boldsymbol{O}\Big]\, f(\Lambda). \qquad \text{(II-3bis)}$$

où nous avons posé pour la partie orbitale $\boldsymbol{O}$:

$$(\boldsymbol{O}\, f)\,(\Lambda) = i\left[-\, \boldsymbol{l}\, \partial_x + \frac{\operatorname{ch} \chi}{\operatorname{sh} \chi}\, \big(-\, \partial_l + \boldsymbol{l}(\boldsymbol{l}\, \partial_l)\big)\right] f(\Lambda)\,. \qquad \text{(II-4)}$$

On détermine aisément la forme de l'opérateur de spin $W^\mu = 1/2\, \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\, M_{\nu\varrho}\, P_\sigma$ soit:

$$(W^0 f)\,(\Lambda) = m \operatorname{sh} \chi\, [D^{-1}\big(\Lambda(\boldsymbol{n};\, \theta)\big)\, \boldsymbol{l}\, \boldsymbol{S}\, D\big(\Lambda(\boldsymbol{n};\, \theta)\big)]\, f(\Lambda)$$

$$(\boldsymbol{W} f)\,(\Lambda) = m\, D^{-1}\big(\Lambda(\boldsymbol{n};\, \theta)\big) \left[\operatorname{ch} \chi\, \boldsymbol{S} - 2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}\, \boldsymbol{l} \wedge (\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{S})\right] D\big(\Lambda(\boldsymbol{n};\, \theta)\big)\, f(\Lambda)\,.$$

Nous allons maintenant établir le lien entre cette forme de représentations et celle de la forme Standard de E. WIGNER associée au champ $\Lambda(\chi;\, \boldsymbol{l})$. En effet, les opérateurs infinitésimaux que nous venons de calculer sont tous de la forme

$$(A\, f)\,(\Lambda) = \big(D^{-1}\big(\Lambda(\boldsymbol{n};\, \theta)\, A'\, D\big(\Lambda(\boldsymbol{n};\, \theta)\big)\big)\, f(\Lambda)\,. \qquad \text{(II-5)}$$

Or, A' est la forme de l'opérateur A lorsqu'on «restreint» les fonctions $f(\Lambda)$ à l'ensemble des transformations de Lorentz pures $\Lambda(\chi;\, \boldsymbol{l})$ et là on obtient une forme en correspondance évidente avec la forme Standard habituelle. L'expression (II-5) exprime alors, puisque $D(\Lambda(\boldsymbol{n};\, \theta))$ est la fonction $B(\Lambda)$ correspondante de la forme de E. WIGNER, que les opérateurs calculés sont bien les opérateurs associés par l'isomorphisme à ceux de la théorie habituelle. En effet, on a

$$\boldsymbol{l} \wedge \partial_{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{p} \wedge \partial_{\boldsymbol{P}}$$

où $\boldsymbol{P}$ est l'opérateut scalaire de translation dans la forme Standard de E. Wigner. Ceci se calcule aisément à partir de (II-2).

De même

$$- \boldsymbol{l}\, \partial_x = P^0\, \partial_{\boldsymbol{P}}\,.$$

On retrouve donc les expressions bien connues pour les opérateurs (cf. 4)

$$\boldsymbol{J} = - i\, \boldsymbol{P} \wedge \partial_{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{S}$$

$$\boldsymbol{N} = - i\, P^0\, \partial_{\boldsymbol{P}} - (m + P^0)^{-1}\, (\boldsymbol{P}_\Lambda\, \boldsymbol{S})\,.$$

Signalons que cette paramétrisation est la seule qui nous fournisse une décomposition du moment angulaire total $\boldsymbol{J}$ en une partie orbitale et une partie spin, situation qui ne se retrouvera pas avec les autres paramétrisations. Ceci est dû au fait que pour le Λ_p choisi on a:

$$\Lambda_p^{-1}\, R\, \Lambda_{R^{-1}p} = R$$

pour toute rotation R.

*Calcul des opérateurs **J** et **N** par la deuxième méthode*

Calculons d'abord les opérateurs de la représentation $f(\Lambda) \xrightarrow{\Lambda_0} f(\Lambda_0^{-1}\, \Lambda)$ où f est une fonction définie sur le groupe $\boldsymbol{L}$ et à valeur dans l'espace $\mathfrak{H}_{2j+1}$.

$$(\boldsymbol{J}' f)\, (\Lambda) = \Big\{- i\, \boldsymbol{n}\, \partial_\theta + \frac{i}{2 \sin \theta/2} \Big(\cos \frac{\theta}{2}\, \boldsymbol{n}\, (\boldsymbol{n}\, \partial_{\boldsymbol{n}}) - \cos \frac{\theta}{2}\, \partial_{\boldsymbol{n}} - \sin \frac{\theta}{2} \boldsymbol{n} \wedge \partial_{\boldsymbol{n}}\Big) - i\, \boldsymbol{l} \wedge \partial_{\boldsymbol{l}}\Big\} f(\Lambda)\,.$$

$$(\boldsymbol{N}' f)\, (\Lambda) = \Big\{\boldsymbol{O} + i \operatorname{th} \frac{\chi}{2}\, (\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{n}) \partial_\theta - \frac{i}{2} \operatorname{th} \frac{\chi}{2}\, \frac{1}{\sin \theta/2} \Big[\cos \frac{\theta}{2}\, (\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{n})\, (\boldsymbol{n}\, \partial_{\boldsymbol{n}}) - \cos \frac{\theta}{2}\, \boldsymbol{l} \wedge \partial_{\boldsymbol{n}} - \sin \frac{\theta}{2}\, \big(\boldsymbol{n} (\boldsymbol{l}\, \partial_{\boldsymbol{n}}) - (\boldsymbol{l}\, \boldsymbol{n})\, \partial_{\boldsymbol{n}}\big)\Big]\Big\} f(\Lambda)\,.$$

A l'aide de la forme infinitésimale de la condition (I-19), nous pouvons déduire l'opérateur $\boldsymbol{S}$ dans cette paramétrisation:

$$f(\Lambda_p\, R\, \Lambda_p^{-1} \Lambda_0 \Lambda_{\Lambda_0^{-1}p}) = D^{-1}(\Lambda_p^{-1} \Lambda_0\, \Lambda_{\Lambda_0^{-1}p})\, f(\Lambda) = (1 + i\, \alpha\, \boldsymbol{q}\, \boldsymbol{S})\, f(\Lambda)$$

où

$$\Lambda_0 = 1 - i\, \frac{\alpha}{2}\, \boldsymbol{q}\, \boldsymbol{\tau}\,,$$

c'est-à-dire en explicitant:

$$(\boldsymbol{S} f)\, (\Lambda) = \Big\{- i\, \boldsymbol{n}\, \partial_\theta - \frac{i}{2 \sin \theta/2} \Big[\cos \frac{\theta}{2}\, \partial_{\boldsymbol{n}} - \sin \frac{\theta}{2}\, \boldsymbol{n} \wedge \partial_{\boldsymbol{n}} - \cos \frac{\theta}{2}\, \boldsymbol{n} (\boldsymbol{n}\, \partial_{\boldsymbol{n}})\Big]\Big\} f(\Lambda)\,. \tag{II-6}$$

Compte tenu de l'expression de $\boldsymbol{S}$, nous déduisons les opérateurs $\boldsymbol{J}$ et $\boldsymbol{N}$ à partir de $\boldsymbol{J}'$ et $\boldsymbol{N}'$:

$$(\boldsymbol{J} f)(\Lambda) = \{\boldsymbol{S} - i(\boldsymbol{l} \wedge \partial_{\boldsymbol{l}}) - i(\boldsymbol{n} \wedge \partial_{\boldsymbol{n}})\} f(\Lambda) .$$

$$(\boldsymbol{N} f)(\Lambda) = \left\{- \operatorname{th} \frac{\chi}{2} \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{S} + \boldsymbol{O} + i \operatorname{th} \frac{\chi}{2} \boldsymbol{l} \wedge (\boldsymbol{n} \wedge \partial_{\boldsymbol{n}})\right\} f(\Lambda) . \qquad \text{(II-7)}$$

où $\boldsymbol{O}$ est définie par (II-4).

Etablissons maintenant l'identité entre les formes (II-3) et (II-7) ce qui revient à démontrer l'égalité suivante:

$$\big(\boldsymbol{S} - i(\boldsymbol{n}_\Lambda \wedge \partial_{\boldsymbol{n}})\big) f(\Lambda) = \big(D^{-1}(A(\boldsymbol{n};\theta)) \boldsymbol{S} D(A(\boldsymbol{n};\theta))\big) f(\Lambda). \qquad \text{(II-8)}$$

En effet considérons la rotation infinitésimale $A(\boldsymbol{q};\alpha) = 1 - i\,\alpha/2\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{\tau}$. Nous obtenons à l'aide de la condition (I-19):

$$\begin{aligned} f(\Lambda_p A(\boldsymbol{q};\alpha) R) &= D^{-1}(A(\boldsymbol{n};\theta)) \{1 + i\alpha\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{S}\} D(A(\boldsymbol{n};\theta)) f(\Lambda) \\ &= (1 + i\alpha\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{S}) f(\Lambda_p A(\boldsymbol{q};\alpha) A(\boldsymbol{n};\theta) A^{-1}(\boldsymbol{q};\alpha)) \\ &= (1 + i\alpha\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{S}) (1 + \alpha(\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{n}) \partial_{\boldsymbol{n}}) f(\Lambda) . \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Remarque: On constate que deux méthodes de calcul mènent naturellement à deux décompositions «canoniques» en spin et en moment orbital différentes, ce qui montre bien que cette décomposition n'a aucun sens intrinsèque. Il est toujours possible de faire sortir, à l'aide de la condition (I-19) une rotation de façon à modifier cette décomposition.

B. On peut aussi considérer la paramétrisation suivante légèrement différente de la précédente:

$$\Lambda = A(\boldsymbol{n};\theta)\, A(\chi;\boldsymbol{l}).$$

Il est facile de trouver les opérateurs infinitésimaux à l'aide des précédents en remplaçant $\boldsymbol{l}$ par $R(\boldsymbol{n};\theta)\,\boldsymbol{l}$ en vertu de l'égalité (I-2): d'où par un calcul analogue au précédent, les expressions suivantes des opérateurs infinitésimaux (par la première méthode)

$$(P^0 f)(\Lambda) = m \operatorname{ch} \chi f(\Lambda) \qquad (\boldsymbol{P} f)(\Lambda) = m \operatorname{sh} \chi\, R(\boldsymbol{n};\theta)\, \boldsymbol{l} f(\Lambda)$$

$$(\boldsymbol{J} f)(\Lambda) = \big(D^{-1}(A(\boldsymbol{n};\theta)) \boldsymbol{S} D(A(\boldsymbol{n};\theta)) - i\,(R(\boldsymbol{n};\theta)\,\boldsymbol{l}) \wedge \partial_{\boldsymbol{l}}$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{N} f)(\Lambda) = - \Big\{ & D^{-1}(A(\boldsymbol{n},\theta)) \operatorname{th} \frac{\chi}{2} (R(\boldsymbol{n};\theta)\,\boldsymbol{l}) \wedge \boldsymbol{S} D(A(\boldsymbol{n};\theta)) \\ & + i\, R(\boldsymbol{n};\theta)\, \boldsymbol{l}\, \partial_\chi + i \frac{\operatorname{ch}\chi}{\operatorname{sh}\chi} \big(+ \partial_{\boldsymbol{l}} - R(\boldsymbol{n},\theta)\, \boldsymbol{l}\, (R(\boldsymbol{n};\theta)\, \boldsymbol{l}\, \partial_{\boldsymbol{l}})\big)\Big\} f(\Lambda). \end{aligned} \qquad \text{(II-9)}$$

on obtient la forme standard correspondant sur l'hyperboloïde avec la fonction:

$$B(\Lambda) = D(A(\boldsymbol{n};\theta)).$$

C. *Formalisme d'hélicité.*

Nous allons maintenant étudier la section associée à l'hélicité (cf. [6–8]). Le choix de l'élément dans chaque classe, c'est-à-dire le choix de l'élément du groupe amenant $\overset{0}{p}$ sur p est le produit des deux transformations suivantes

1) une Lorentz pure le long de $0z$:

$$\Lambda^H_{p_z};\ \overset{0}{p} = (m, 0, 0, 0) \to \tilde{p} = (p^0, 0, 0, p)$$

où $p = |\boldsymbol{p}|$;

2) une rotation R^H_p amenant $\tilde{p}$ sur p;

$$R^H_p:\quad \tilde{p} = (p^0, 0, 0, p) \to p = (p^0; p^1; p^2; p^3).$$

Il est aisé d'écrire ces deux transformations

$$\Lambda^H_{p_z} = \{2\,m\,(m + p^0)\}^{-1/2} \begin{pmatrix} m + p^0 - p; & 0 \\ 0; & m + p^0 + p \end{pmatrix}.$$

$$R^H_p = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}; & -\sin\frac{\theta}{2}\, e^{-i\varphi} \\ \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\varphi}; & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

où nous avons posé

$$p^1 = p \sin\theta \cos\varphi$$
$$p^2 = p \sin\theta \sin\varphi$$
$$p^3 = p \cos\theta$$

et $\boldsymbol{k}$ pour le vecteur unitaire de l'axe $0z$. Nous obtenons ainsi pour la section

$$\Lambda^H_p = \{2\,m\,(m + p^0)\}^{-1/2} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\,(m + p^0 - p); & -\sin\frac{\theta}{2}\, e^{-i\varphi}\,(m + p^0 + p) \\ \sin\frac{\theta}{2}\, e^{+i\varphi}\,(m + p^0 - p); & \cos\frac{\theta}{2}\,(m + p^0 + p) \end{pmatrix}$$

Nous paramétrons ainsi l'hyperboloïde $p^2 = m^2$ par (p, θ, φ). Le produit scalaire dans l'espace $\mathfrak{H}^D$ est ainsi:

$$\langle f, g \rangle = \int \bar{f}(\Lambda^H_p\, R)\; g(\Lambda^H_p\, R)\; \frac{p^2 \sin\theta\; dp\; d\theta\; d\varphi}{p^0}$$

Calculons les opérateurs infinitésimaux de la représentation $[m, j]$.

Générateurs des translations d'espace-temps

De l'équation $\Lambda\,\overset{0}{p} = p$ où $\Lambda = \Lambda^H_p\, R = \Lambda^H_p(p; \theta, \varphi)\; R(\boldsymbol{n}_1; \theta_1)$ nous déduisons les opérateurs $\boldsymbol{P}$:

$$(\boldsymbol{P}^0 f)\,(\Lambda) = (p^0 f)\,(\Lambda); \qquad (\boldsymbol{P}^1 f)\,(\Lambda) = p \sin\theta \cos\varphi\, f(\Lambda)$$
$$(\boldsymbol{P}^3 f)\,(\Lambda) = p \cos\theta\, f(\Lambda); \qquad (\boldsymbol{P}^2 f)\,(\Lambda) = p \sin\theta \sin\varphi\, f(\Lambda). \qquad \text{(II-10)}$$

Calcul des opérateurs $\boldsymbol{J}$ *et* $\boldsymbol{N}$ *par la première méthode*

Cette paramétrisation diffère de la paramétrisation canonique par le fait que $(\Lambda^H_p)^{-1} \Lambda_0 \Lambda^{H\,-1}_{\Lambda_0\,p}$ n'est pas égal à Λ_0, si Λ_0 est une rotation; c'est une rotation d'axe $0z$ comme on peut le vérifier aisément. Aussi allons-nous préciser nos calculs pour cette paramétrisation.

Dans les autres paramétrisations (pour $m > 0$ et $m = 0$) la situation sera très similaire au cas de l'hélicité aussi nous nous contenterons d'indiquer le résultat des calculs. Définissons la rotation $R(\boldsymbol{q}'; \alpha')$ et l'opérateur $\boldsymbol{S}'$ par les égalités suivantes:

$$\Lambda^{H^{-1}}_p \Lambda_0 \Lambda^{H\,-1}_{\Lambda_0\,p} = R(\boldsymbol{q}'; \alpha') \quad \text{où } \Lambda_0 = 1 - i \frac{\alpha}{2} \boldsymbol{q}\,\boldsymbol{\tau} .$$

$$D(\Lambda^{H^{-1}}_p \Lambda_0 \Lambda^{H\,-1}_{\Lambda_0\,p}) = D\big(R(\boldsymbol{q}'; \alpha')\big) = 1 - i\,\alpha'\,\boldsymbol{q}'\,\boldsymbol{S} = 1 - i\,\alpha\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{S}' .$$

Nous obtenons explicitement pour la matrice $R(\boldsymbol{q}'; \alpha')$ les expressions suivantes:
Si Λ_0 est une rotation autour de $0x$ (c. à d. $q^2 = q^3 = 0$)

$$\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{k}; \qquad \alpha' = \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}(1 - \cos\theta)\,\alpha$$

Si Λ_0 est une rotation autour de $0y$ (c. à. d. $q^1 = q^3 = 0$)

$$\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{k}; \qquad \alpha' = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}(1 - \cos\theta)\,\alpha$$

Si Λ_0 est une rotation autour de $0z$ (c. à d. $q^1 = q^2 = 0$)

$$\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{k}; \qquad \alpha' = \alpha$$

Nous obtenons ainsi pour l'opérateur $\boldsymbol{S}'$

$$S'^1 = \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}(1 - \cos\theta)\,S^3 = \frac{P^1}{P + P^3}\,S^3 \qquad S'^2 = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}(1 - \cos\theta)\,S^3 = \frac{P^2}{P + P^3}\,S^3$$

$$S'^3 = S^3 .$$

Posons de même dans le cas d'une transformation Lorentz pure $\Lambda_0 = 1 = \chi/2\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{\tau}$

$$(\Lambda^H_p)^{-1} \Lambda_0 \Lambda^{H\,-1}_{\Lambda_0\,p} = R(\boldsymbol{q}''; \alpha'')$$

$$D(\Lambda^{H^{-1}}_p \Lambda_0 \Lambda^{H\,-1}_{\Lambda_0\,p}) = D\big(R(\boldsymbol{q}''; \alpha'')\big) = 1 - i\,\alpha''\,\boldsymbol{q}''\,\boldsymbol{S} = 1 - i\,\alpha\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{S}''$$

ces égalités nous définissant la rotation $R(\boldsymbol{q}''; \alpha'')$ et l'opérateur $\boldsymbol{S}''$. Nous obtenons pour la matrice $R(\boldsymbol{q}''; \alpha'')$:
Si Λ_0 est une transformation de Lorentz pure le long de $0x$

$$\alpha''\,q''_1 = -\frac{m}{p}\sin^2\frac{\theta}{2}\sin 2\varphi\,\alpha \qquad \alpha''\,q''_2 = -\frac{m}{p}\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\varphi\right)\alpha$$

$$\alpha''\,q''_3 = -\frac{p^0}{p}\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\sin\varphi\alpha.$$

Si Λ_0 est une transformation de Lorentz pure le long de $0y$

$$\alpha'' q_1'' = \frac{m}{p}\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\varphi\right)\alpha \qquad \alpha'' q_2'' = \frac{m}{p}\sin^2\frac{\theta}{2}\sin 2\varphi\,\alpha$$

$$\alpha'' q_3'' = \frac{p^0}{p}\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\cos\varphi\,\alpha.$$

Si Λ_0 est une transformation de Lorentz pure le long de $0z$

$$\alpha'' q_1'' = -\frac{m}{p}\sin\varphi\sin\theta \qquad \alpha'' q_2'' = \frac{m}{p}\cos\varphi\sin\theta \qquad \alpha'' q_3'' = 0$$

Nous obtenons ainsi:

$$S''^1 = -\frac{m}{p}\sin^2\frac{\theta}{2}\sin 2\varphi\, S^1 - \frac{m}{p}\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\varphi\right) S^2 - \frac{p^0}{p}\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\sin\varphi\, S^3 .$$

$$S''^2 = \frac{m}{p}\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\varphi\right) S^1 + \frac{m}{p}\sin^2\frac{\theta}{2}\sin 2\varphi\, S^2 + \frac{p^0}{p}\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\cos\varphi\, S^3 .$$

$$S''^3 = -\frac{m}{p}\sin\varphi\sin\theta\, S^1 + \frac{m}{p}\cos\varphi\sin\theta\, S^2 .$$

Nous trouvons ainsi pour les opérateurs $\boldsymbol{J}$ et $\boldsymbol{N}$:

$$(\boldsymbol{J} f)\,(\Lambda) = \big(D^{-1}(R)\,\boldsymbol{S}'\,D(R) + \boldsymbol{O}'\big) f(\Lambda)\,. \tag{II-11}$$

$$(\boldsymbol{N} f)\,(\Lambda) = \big(D^{-1}(R)\,\boldsymbol{S}''\,D(R) + \boldsymbol{O}''\big) f(\Lambda)\,. \tag{II-12}$$

où nous avons posé pour les parties orbitales:

$$O'^1 = i\sin\varphi\,\partial_\theta + i\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi\,\partial_\varphi \qquad O'^2 = -i\cos\varphi\,\partial_\theta + i\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\,\partial_\varphi$$

$$O'^3 = -i\,\partial_\varphi .$$

$$O''^1 = -i\,\frac{p^0}{p}\cos\theta\cos\varphi\,\partial_\theta + i\,\frac{p^0}{p}\,\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\,\partial_\varphi - i\,p^0\sin\theta\cos\varphi\,\partial_p .$$

$$O''^2 = -i\,\frac{p^0}{p}\cos\theta\sin\varphi\,\partial_\theta - i\,\frac{p^0}{p}\,\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\,\partial_\varphi - i\,p^0\sin\theta\sin\varphi\,\partial_p .$$

$$O''^3 = i\,\frac{p^0}{p}\sin\theta\,\partial_\theta - i\,p^0\cos\theta\,\partial_p .$$

Nous voyons bien que dans ce formalisme nous n'avons pas obtenu une décomposition de $\boldsymbol{J}$ en $\boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ car l'opérateur $\boldsymbol{S}'$ ne peut être assimilé à un opérateur de spin. Cependant dans l'opérateur $\boldsymbol{J}$ nous voyons apparaître une partie orbitale $\boldsymbol{O}$ qui est l'opérateur de moment angulaire de la représentation régulière du groupe des rotations (cf. [5]). A l'aide de ces opérateurs, nous déduisons l'opérateur de spin W^μ (cf. I):

$$W^0 = p\,D^{-1}(R)\,S^3\,D(R)$$

$$W^1 = D^{-1}(R)\,\{m\,(\sin^2\varphi + \cos\theta\cos^2\varphi)\,S^1 + m\sin\varphi\cos\varphi\,(\cos\theta - 1)\,S^2 + p^0\cos\varphi\sin\theta\,S^3\}\,D(R)\,.$$

$$W^2 = D^{-1}(R)\,\{m\cos\varphi\sin\varphi\,(\cos\theta - 1)\,S^1 + m\,(\cos^2\varphi + \cos\theta\sin^2\varphi)\,S^2 + p^0\sin\varphi\sin\theta\,S^3\}\,D(R)\,.$$

$$W^3 = D^{-1}(R)\,\{-\,m\sin\theta\cos\varphi\,S^1 - m\sin\theta\sin\varphi\,S^2 + p^0\cos\theta\,S^3\}\,D(R)\,.$$

L'isomorphisme avec la forme standard associée à Λ_p^H est obtenu par la fonction $B(\Lambda)$ suivante:

$$B(\Lambda) = D(R) = D(\Lambda_p^{H^{-1}}\Lambda)\,.$$

Cet isomorphisme met en correspondance la forme des opérateurs infinitésimaux précédents avec celle déterminée par V. J. RITUS (cf. [9]).

Calcul des opérateurs J *et* N *par la deuxième méthode*

Nous pouvons calculer les opérateurs $\boldsymbol{J}'$, $\boldsymbol{N}'$ de la représentation «régulière»: $f(\Lambda) \xrightarrow{\Lambda_0} f(\Lambda_0^{-1}\Lambda)$ à l'aide des identités suivantes:

$$(1 - i\,\alpha\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{J}')\,f(\Lambda) = f\big(\Lambda^{H}_{\Lambda_0^{-1}p}\,R(\boldsymbol{q}';-\alpha')\,R\big)\,.$$

$$(1 - i\,\alpha\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{N}')\,f(\Lambda) = f\big(\Lambda^{H}_{\Lambda_0^{-1}p}\,R(\boldsymbol{q}'';-\alpha'')\,R\big)\,.$$

(nous ne les expliciterons pas ici).

Calculons maintenant les opérateurs $\boldsymbol{S}'$ et $\boldsymbol{S}''$ en fonction des paramètres $\boldsymbol{n}_1$ et θ_1, de la rotation $R(n_1;\theta_1)$. Des identités suivantes:

$$f\big(\Lambda_p^H\,R\,R(\boldsymbol{q}';\alpha')\big) = (1 + i\,\alpha\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{S}')\,f(\Lambda)\,.$$

$$f\big(\Lambda_p^H\,R\,R(\boldsymbol{q}'';\alpha'')\big) = (1 + i\,\alpha\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{S}'')\,f(\Lambda)\,.$$

nous tirons:

$$i\,\alpha\,(\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{S}')\,f(\Lambda) = \Big(\alpha'(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{q}')\,\partial_{\theta_1} + \frac{\alpha'}{2\sin\theta_1/2}\,\boldsymbol{A}'\,\partial_{\boldsymbol{n}_1}\Big)\,f(\Lambda)\,.$$

$$i\,\alpha\,(\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{S}'')\,f(\Lambda) = \Big(\alpha''(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{q}'')\,\partial_{\theta_1} + \frac{\alpha''}{2\sin\theta_1/2}\,\boldsymbol{A}''\,\partial_{\boldsymbol{n}_1}\Big)\,f(\Lambda)\,. \qquad \text{(II-13)}$$

où nous avons posé

$$\boldsymbol{A}' = -\cos\frac{\theta_1}{2}\,(\boldsymbol{n}_1\,\boldsymbol{q}')\,\boldsymbol{n}_1 + \cos\frac{\theta_1}{2}\,\boldsymbol{q}' + \sin\frac{\theta_1}{2}\,\boldsymbol{n}_1\wedge\boldsymbol{q}'$$

(et une expression semblable pour $\boldsymbol{A}''$ où $\boldsymbol{q}''$ remplace $\boldsymbol{q}'$).

On peut aisément expliciter les composantes de $\boldsymbol{S}'$ et de $\boldsymbol{S}''$ à l'aide des expressions précédentes de $(\boldsymbol{q}';\alpha')$ et de $(\boldsymbol{q}'';\alpha'')$.

A l'aide de ces expressions et des opérateurs $\boldsymbol{J}'$ et $\boldsymbol{N}'$, nous obtenons ainsi les opérateurs $\boldsymbol{J}$ et $\boldsymbol{N}$ suivants:

$$(\alpha\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{J})\,f(\Lambda) = \{\alpha\,\boldsymbol{q}\,(\boldsymbol{S}' + \boldsymbol{O}') - i\,\alpha'\,(\boldsymbol{q}'\wedge\boldsymbol{n}_1)\,\partial_{\boldsymbol{n}_1}\}\,f(\Lambda)\,.$$

$$(\alpha\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{N})\,f(\Lambda) = \{\alpha\,\boldsymbol{q}\,(\boldsymbol{S}'' + \boldsymbol{O}'') - i\,\alpha''\,(\boldsymbol{q}''\wedge\boldsymbol{n}_1)\,\partial_{\boldsymbol{n}_1}\}\,f(\Lambda)\,. \qquad \text{(II-14)}$$

Nous pouvons faire le lien entre les deux formes à l'aide de l'identité suivante:

$$f(\Lambda_p^H \Lambda_p^{H^{-1}} \Lambda_0 \Lambda^H_{\Lambda_0^{-1} p} R) = D^{-1}(R)\,(1 + i\,\alpha\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{S}')\,D(R)\,f(\Lambda)$$

$$= (1 + i\,\alpha\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{S}')\,f\big(\Lambda_p^H(\Lambda_p^{H^{-1}} \Lambda_0 \Lambda^H_{\Lambda_0^{-1} p})\; R(\Lambda_p^{H^{-1}} \Lambda_0 \Lambda^H_{\Lambda_0^{-1} p})^{-1}\big).$$

qui nous fournit, en prenant pour Λ_0 une rotation infinitésimale puis une transformation de Lorentz pure, les deux résultats suivants:

$$\alpha\, D^{-1}(R)\; \boldsymbol{q}\, \boldsymbol{S}'\; D(R) = \alpha\, \boldsymbol{q}\, \boldsymbol{S}' - i\,\alpha'\,(\boldsymbol{q}' \wedge \boldsymbol{n}_1)\,\partial_{\boldsymbol{n}_1}.$$

$$\alpha\, D^{-1}(R)\; \boldsymbol{q}\, \boldsymbol{S}''\; D(R) = \alpha\, \boldsymbol{q}\, \boldsymbol{S}'' - i\,\alpha''\,(\boldsymbol{q}'' \wedge \boldsymbol{n}_1)\,\partial_{\boldsymbol{n}_1}.$$

A l'aide de ces formules on etablit l'équivalence entre les formes (II-14) et (II-11), (II-12).

Remarque: Une autre méthode équivalente de réaliser l'isomorphisme est de partir de l'identité:

$$f(\Lambda_p^H \Lambda_0 R) = D^{-1}(R)\,(1 + i\,\alpha\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{S})\,D(R)\,f(\Lambda)$$

qui nous fournit en explicitant

$$D^{-1}(R)\;\boldsymbol{S}\,D(R) = \boldsymbol{S} - i\,(\boldsymbol{n}_1 \wedge \partial_{\boldsymbol{n}_1}).$$

Ceci prouve qu'il revient au même de transformer les matrices $\boldsymbol{S}$ ou les matrices $\boldsymbol{S}'$ et $\boldsymbol{S}''$.

D. Considérons maintenant la décomposition suivante:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = L_p\, R$$

avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$ (cf. [10]).

On obtient les relations suivantes pour les paramètres:

$$\lambda = \{|\gamma|^2 + |\delta|^2\}^{1/2}; \quad a = \frac{\bar{\delta}}{\lambda}; \quad b = -\frac{\bar{\gamma}}{\lambda}$$

$$\mu = \begin{cases} \dfrac{\beta - \lambda^{-1}\, b}{a} & \text{pour } a \neq 0 \\[2ex] -\dfrac{\alpha}{b} & \text{pour } a = 0. \end{cases}$$

L'unicité de la décomposition provient de notre choix de λ réel.

Remarque: Nous ne pouvons employer des paramètres complexes dans ces décompositions car dans l'espace d'Hilbert de la représentation $\mathfrak{H}^{\mathrm{D}}$, les opérateurs infinitésimaux doivent être définis sur une partie dense commune. L'emploi de paramètres complexes nous obligerait pour calculer $\boldsymbol{J}$ et $\boldsymbol{N}$ à considérer des fonctions analytiques de ces paramètres. Or l'on voit aisément que les opérateurs $\boldsymbol{P}$ font sortir de ce domaine car ils contiennent les modules et les conjugués des paramètres (les fonctions $z \to |z|$ et $z \to \bar{z}$ ne sont évidemment pas analytiques). Pour éviter cette difficulté, nous n'imposerons que l'analycité réelle, c'est-à-dire nous considérerons des paramètres réels. Le produit scalaire dans l'espace $\mathfrak{H}^D$ est ainsi:

$$\langle f, g\rangle = \int \bar{f}(L_p R)\, g(L_p R)\, 2\, m^2 \lambda\, d\lambda\, d\mu_1\, d\mu_2 \quad \text{ou} \quad \mu = \mu_1 + i\,\mu_2\,.$$

Calculons les opérateurs infinitésimaux pour la représentation $[m, j]$.

Générateurs des translations d'espace-temps

De l'égalité $\Lambda \overset{0}{p} = p$ nous tirons:

$$(P^0 f)\,(\Lambda) = \frac{m}{2}\,\{\lambda^2 + \lambda^{-2} + |\,\mu\,|^2\} f(\Lambda)\,.$$

$$(P^3 f)\,(\Lambda) = \frac{m}{2}\,\{\lambda^2 - \lambda^{-2} - |\,\mu\,|^2\} f(\Lambda)\,.$$

$$(P^1 f)\,(\Lambda) = -\, m\,\lambda\,\mu_1 f(\Lambda)\,.$$

$$(P^2 f)\,(\Lambda) = m\,\lambda\,\mu_2 f(\Lambda)\,. \tag{II-15}$$

*Calcul des opérateurs **J** et **N** par la première méthode*

Posons, comme pour l'hélicité

$$L_p^{-1}\,\Lambda_0\,L_{\Lambda_0^{-1}p} = R(\boldsymbol{q}';\alpha') \quad \text{où} \quad \Lambda_0 = 1 - i\,\frac{\alpha}{2}\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{\tau}\,.$$

$$D(L_p^{-1}\,\Lambda_0\,L_{\Lambda_0^{-1}p}) = 1 - i\,\alpha'\,\boldsymbol{q}'\,\boldsymbol{S} = 1 - i\,\alpha\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{S}'.$$

Nous obtenons pour la matrice $R(\boldsymbol{q}';\alpha')$

$$\alpha'\,\boldsymbol{q}' = \alpha\,\{\lambda^{-2}\,q^1;\,\lambda^{-2}\,q^2;\,q^3 - \lambda^{-1}\,(\mu_1\,q^1 - \mu_2\,q^2)\}\,.$$

d'où

$$S'^1 = \lambda^{-2}\,S^1 - \lambda^{-1}\,\mu_1\,S^3 = \frac{m}{P^0+P^3}\,S^1 + \frac{P^1}{P^0+P^3}\,S^3$$

$$S'^2 = \lambda^{-2}\,S^2 + \lambda^{-1}\,\mu_2\,S^3 = \frac{m}{P^0+P^3}\,S^2 + \frac{P^2}{P^0+P^3}\,S^3$$

$$S'^3 = S^3$$

De même, pour une transformation de Lorentz pure $\Lambda_0 = 1 - \chi/2\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{\tau}$ posons:

$$L_p^{-1}\,\Lambda_0\,L_{\Lambda_0^{-1}p} = R(\boldsymbol{q}'';\alpha'')\,.$$

$$D(L_p^{-1}\,\Lambda_0\,L_{\Lambda_0^{-1}p}) = 1 - i\,\alpha''\,\boldsymbol{q}''\,\boldsymbol{S} = 1 - i\,\alpha\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{S}''\,.$$

Nous obtenons:

$$\alpha''\,\boldsymbol{q}'' = \alpha\,\{\lambda^{-2}\,q^2;\,-\,\lambda^{-2}\,q^1;\,-\,\lambda^{-1}\,(q^1\,\mu_2 + q^2\,\mu_1)\}$$

d'où

$$S''^1 = -\,\lambda^{-2}\,S^2 - \lambda^{-1}\,\mu_2\,S^3 = -\,\frac{m}{P^0+P^3}\,S^2 - \frac{P^2}{P^0+P^3}\,S^3$$

$$S''^2 = \lambda^{-2}\,S^1 - \lambda^{-1}\,\mu_1\,S^3 = \frac{m}{P^0+P^3}\,S^1 + \frac{P^1}{P^0+P^3}\,S^3$$

$$S''^3 = 0$$

Nous en déduisons la valeur des opérateurs $\boldsymbol{J}$ et $\boldsymbol{N}$:

$$(\boldsymbol{J} f)(\Lambda) = \{D^{-1}(R)\, \boldsymbol{S}'\, D(R) + \boldsymbol{O}\} f(\Lambda)$$

$$(\boldsymbol{N} f)(\Lambda) = \{D^{-1}(R)\, \boldsymbol{S}''\, D(R) + \boldsymbol{O}'\} f(\Lambda) \tag{II-16}$$

où nous avons posé pour les parties orbitales:

$$O^1 = - i\, \mu_2\, \partial_\lambda + i\, \lambda^{-1} \mu_1\, \mu_2\, \partial\mu_1 + i\, \lambda^{-1} \left(\mu_2^2 + \frac{1}{2} (\lambda^2 - \lambda^{-2} - |\, \mu\, |^2)\right) \partial\mu_2$$

$$O^2 = - i\, \mu_1\, \partial_\lambda + i\, \lambda^{-1} \left(\mu_1^2 + \frac{1}{2} (\lambda^2 - \lambda^{-2} - |\, \mu\, |^2)\right) \partial\mu_1 + i\, \lambda^{-1} \mu_1\, \mu_2\, \partial\mu_2$$

$$O^3 = - i\, (\mu_2\, \partial\mu_1 - \mu_1\, \partial\mu_2)$$

$$O'^1 = \frac{i}{2}\, \mu_1\, \partial_\lambda + \frac{i}{2}\, \lambda^{-1} \left(\lambda^2 + \lambda^{-2} + \mu_2^2\right) \partial\mu_1 - \frac{i}{2}\, \lambda^{-1} \mu_1\, \mu_2\, \partial\mu_2$$

$$O'^2 = - \frac{i}{2}\, \mu_2\, \partial_\lambda + \frac{i}{2}\, \lambda^{-1} \mu_1\, \mu_2\, \partial\mu_1 - \frac{i}{2}\, \lambda^{-1} (\lambda^2 + \lambda^{-2} + \mu_1^2)\, \partial\mu_2$$

$$O'^3 = - \frac{i}{2}\, \lambda\, \partial_\lambda + \frac{i}{2}\, (\mu_1\, \partial\mu_1 + \mu_2\, \partial\mu_2).$$

Nous obtenons ainsi pour les opérateurs de spin W^μ:

$$W^0 = D^{-1}(R)\, \mathsf{P}\, \boldsymbol{S}'\, D(R)$$

$$W^1 = m\, D^{-1}(R)\, (S^1 - \lambda\, \mu_1\, S^3)\, D(R)$$

$$W^2 = m\, D^{-1}(R)\, (S^2 + \lambda\, \mu_2\, S^3)\, D(R)$$

$$W^3 = m\, D^{-1}(R) \left(\frac{1}{2} (\lambda^2 + \lambda^{-2} - |\, \mu\, |^2)\, S^3 - \lambda^{-1} (\mu_2\, S^2 - \mu_1\, S^1)\right) D(R).$$

La fonction $B(\Lambda)$ permettant de retrouver la forme standard associée est:

$$B(\Lambda) = D^{-1}(R) = D^{-1}(L_p^{-1}\, \Lambda).$$

Le calcul des opérateurs $\boldsymbol{J}$ et $\boldsymbol{N}$ par la deuxième méthode est identique au cas de l'hélicité à condition de remplacer $R(\boldsymbol{q}'\,; \alpha')$ et $R(\boldsymbol{q}''\,; \alpha'')$ par leurs valeurs dans cette paramétrisation.

Remarque: Cette paramétrisation ne semble pas avoir un intérêt physique direct dans le cas des masses positives. En effet «l'axe de quantification du spin» est $n^3(p) = L_p(0, 0, 0, 1) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ avec

$$x^0 = \frac{|\, \boldsymbol{p}\, |^2 - p^0\, p^3}{m\, (p^0 + p^3)}\,; \qquad x^1 = \frac{p^1}{m}$$

$$x^3 = \frac{p^3}{m} + \frac{m}{p^0 + p^3}\,; \qquad x^2 = \frac{p^2}{m}$$

Mais nous pouvons remarquer que la présence d'un terme nul dans L_p entraîne des calculs beaucoup plus simples que dans le cas de l'hélicité.

D'un autre côté, cette paramétrisation permet un passage direct au cas $m = 0$ et en particulier de retomber sur la représentation obtenue à partir de la section choisie par A. S. WIGHTMAN (cf. partie II de cet article).

E. Pour terminer l'étude du cas $m > 0$ considérons la paramétrisation:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha\,\delta - \beta\,\gamma = 1$$

Dans cette paramétrisation n'apparaît pas de décomposition $\Lambda_p\, R$; aussi la forme standard associée sur l'hyperboloïde n'existe-t-elle plus. Ainsi la représentation correspondante est plus originale que les précédentes.

Calculons les opérateurs infinitésimaux correspondant à la représentation $[m; j]$ c'est-à-dire la représentation suivante:

$$\left\{U\left(a, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right) f\right\} (\alpha', \beta', \gamma', \delta') = e^{i a . \Lambda' \overset{0}{p}} f(\alpha'\,\delta - \gamma'\,\beta; \beta'\,\delta - \delta'\,\beta; -\alpha'\,\gamma + \gamma'\,\alpha;$$

$$\delta'\,\alpha - \beta'\,\gamma) \quad \text{où} \quad \Lambda' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}.$$

Générateurs des translations d'espace-temps

De l'équation $\Lambda \overset{0}{p} = p$ nous tirons:

$$(P^0 f)\,(\Lambda) = \frac{m}{2} \{|\,\gamma\,|^2 + |\,\delta\,|^2 + |\,\alpha\,|^2 + |\,\beta\,|^2\} f(\Lambda)$$

$$(P^3 f)\,(\Lambda) = \frac{m}{2} \{|\,\gamma\,|^2 + |\,\delta\,|^2 - |\,\alpha\,|^2 - |\,\beta\,|^2\} f(\Lambda)$$

$$(P^1 f)\,(\Lambda) = -\,m\,\mathrm{Re}\,(\alpha\,\bar{\gamma} + \beta\,\bar{\delta})$$

$$(P^2 f)\,(\Lambda) = m\,\mathrm{Im}\,(\alpha\,\bar{\gamma} + \beta\,\bar{\delta}). \tag{II-17}$$

D'après une remarque précédente, nous savons qu'il nous faut employer des variables réelles. Ainsi en posant: $\alpha = \alpha_1 + i\,\alpha_2$; $\beta = \beta_1 + i\,\beta_2 \ldots$ etc., les opérateurs P s'écrivent:

$$(P^0 f)\,(\Lambda) = \frac{m}{2} \{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2\} f(\Lambda)$$

$$(P^3 f)\,(\Lambda) = \frac{m}{2} \{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2\} f(\Lambda)$$

$$(P' f)\,(\Lambda) = -\,m\,\{\alpha_1\,\gamma_1 + \alpha_2\,\gamma_2 + \beta_1\,\delta_1 + \beta_2\,\delta_2\} f(\Lambda)$$

$$(P^2 f)\,(\Lambda) = m\,\{\alpha_2\,\gamma_1 - \alpha_1\,\gamma_2 + \beta_2\,\delta_1 - \beta_1\,\delta_2\} f(\Lambda)$$

Calcul des opérateurs $\boldsymbol{J}$ *et* $\boldsymbol{N}$

Nous devons employer la deuxième méthode de calcul car la première n'a pas de sens ici ($\Lambda_{\Lambda_0^{-1} p}$ ne peut être défini). Calculons les opérateurs de la représentation régulière $f(\Lambda) \xrightarrow{\Lambda_0} f(\Lambda_0^{-1} \Lambda)$:

$$(J'^1 f)(\Lambda) = \frac{i}{2} \{- \gamma_2\, \partial\alpha_1 + \gamma_1\, \partial\alpha_2 - \delta_2\, \partial\beta_1 + \delta_1\, \partial\beta_2 - \alpha_2\, \partial\gamma_1 + \alpha_1\, \partial\gamma_2 - \beta_2\, \partial\delta_1 + \beta_1\, \partial\delta_2\} f(\Lambda)$$

$$(J'^2 f)(\Lambda) = \frac{i}{2} \{\gamma_1\, \partial\alpha_1 + \gamma_2\, \partial\alpha_2 + \delta_1\, \partial\beta_1 + \delta_2\, \partial\beta_2 - \alpha_1\, \partial\gamma_1 - \alpha_2\, \partial\gamma_2 - \beta_1\, \partial\delta_1 - \beta_2\, \partial\delta_2\} f(\Lambda)$$

$$(J'^3 f)(\Lambda) = \frac{i}{2} \{- \alpha_2\, \partial\alpha_1 + \alpha_1\, \partial\alpha_2 - \beta_2\, \partial\beta_1 + \beta_1\, \partial\beta_2 + \gamma_2\, \partial\gamma_1 - \gamma_1\, \partial\gamma_2 + \delta_2\, \partial\delta_1 - \delta_1\, \partial\delta_2\} f(\Lambda) \tag{II-18}$$

$$(N'^1 f)(\Lambda) = \frac{i}{2} \{\gamma_1\, \partial\alpha_1 + \gamma_2\, \partial\alpha_2 + \alpha_1\, \partial\gamma_1 + \alpha_2\, \partial\gamma_2 + \delta_1\, \partial\beta_1 + \delta_2\, \partial\beta_2 + \beta_1\, \partial\delta_1 + \beta_2\, \partial\delta_2\} f(\Lambda)$$

$$(N'^2 f)(\Lambda) = \frac{i}{2} \{\gamma_2\, \partial\alpha_1 - \gamma_1\, \partial\alpha_2 - \alpha_2\, \partial\gamma_1 + \alpha_1\, \partial\gamma_2 + \delta_2\, \partial\beta_1 - \delta_1\, \partial\beta_2 - \beta_2\, \partial\delta_1 + \beta_1\, \partial\delta_2\} f(\Lambda)$$

$$(N'^3 f)(\Lambda) = \frac{i}{2} \{\alpha_1\, \partial\alpha_1 + \alpha_2\, \partial\alpha_2 - \gamma_1\, \partial\gamma_1 - \gamma_2\, \partial\gamma_2 + \beta_1\, \partial\beta_1 + \beta_2\, \partial\beta_2 - \delta_1\, \partial\delta_1 - \delta_2\, \partial\delta_2\} f(\Lambda)$$

Pour obtenir les opérateurs $\boldsymbol{J}$ et $\boldsymbol{N}$, il faut tenir compte de la condition (I-19) vérifiée par les fonctions f. Ceci nous fournit en explicitant cette condition du point de vue infinitésimal:

$$(S^1 f)(\Lambda) = -\frac{i}{2} \{\beta_2\, \partial\alpha_1 - \beta_1\, \partial\alpha_2 + \alpha_2\, \partial\beta_1 - \alpha_1\, \partial\beta_2 + \delta_2\, \partial\gamma_1 - \delta_1\, \partial\gamma_2 + \gamma_2\, \partial\delta_1 - \gamma_1\, \partial\delta_2\} f(\Lambda)$$

$$(S^2 f)(\Lambda) = -\frac{i}{2} \{\beta_1\, \partial\alpha_1 + \beta_2\, \partial\alpha_2 - \alpha_1\, \partial\beta_1 - \alpha_2\, \partial\beta_2 + \delta_1\, \partial\gamma_1 + \delta_2\, \partial\gamma_2 - \gamma_1\, \partial\delta_1 - \gamma_2\, \partial\delta_2\} f(\Lambda)$$

$$(S^3 f)(\Lambda) = -\frac{i}{2} \{\alpha_2\, \partial\alpha_1 - \alpha_1\, \partial\alpha_2 - \beta_2\, \partial\beta_1 + \beta_1\, \partial\beta_2 + \gamma_2\, \partial\gamma_1 - \gamma_1\, \partial\gamma_2 - \delta_2\, \partial\delta_1 + \delta_1\, \partial\delta_2\} f(\Lambda) \tag{II-19}$$

L'absence de décomposition $\Lambda_p\, R$ dans cette paramétrisation ne permet pas d'introduire d'une manière analogue aux cas précédents ces conditions dans les opérateurs $\boldsymbol{J}'$ et $\boldsymbol{N}'$.

Le calcul de l'opérateur de spin W^{μ} nous fournit:

$$W^0 = \frac{i P^0 A}{2} + \frac{m i}{2} (\delta_2\, \partial\alpha_1 + \delta_1\, \partial\alpha_2 - \gamma_2\, \partial\beta_1 - \gamma_1\, \partial\beta_2 - \beta_2\, \partial\gamma_1 - \beta_1\, \partial\gamma_2 + \alpha_2\, \partial\delta_1 + \alpha_1\, \partial\delta_2)$$

$$W^1 = \frac{i P^1 A}{2} + \frac{m i}{2} (- \beta_2\, \partial\alpha_1 - \beta_1\, \partial\alpha_2 + \alpha_2\, \partial\beta_1 + \alpha_1\, \partial\beta_2 + \delta_2\, \partial\gamma_1 + \delta_1\, \partial\gamma_2 - \gamma_2\, \partial\delta_1 - \gamma_1\, \partial\delta_2)$$

$$W^2 = \frac{i P^2 A}{2} + \frac{m i}{2} (- \beta_1\, \partial\alpha_1 + \beta_2\, \partial\alpha_2 + \alpha_1\, \partial\beta_1 - \alpha_2\, \partial\beta_2 - \delta_1\, \partial\gamma_1 + \delta_2\, \partial\gamma_2 + \gamma_1\, \partial\delta_1 - \gamma_2\, \partial\delta_2)$$

$$W^3 = \frac{i P^3 A}{2} + \frac{m i}{2} (\delta_2\, \partial\alpha_1 + \delta_1\, \partial\alpha_2 - \gamma_2\, \partial\beta_1 - \gamma_1\, \partial\beta_2 + \beta_2\, \partial\gamma_1 + \beta_1\, \partial\gamma_2 - \alpha_2\, \partial\delta_1 - \alpha_1\, \partial\delta_2)$$

où nous avons posé:

$$A = \alpha_2\, \partial\alpha_1 - \alpha_1\, \partial\alpha_2 + \beta_2\, \partial\beta_1 - \beta_1\, \partial\beta_2 + \gamma_2\, \partial\gamma_1 - \gamma_1\, \partial\gamma_2 + \delta_2\, \partial\delta_1 - \delta_1\, \partial\delta_2$$

II. Cas des masses nulles

Nous allons maintenant étudier les représentations irréductibles et unitaires de masse nulle et comme dans le cas des masses positives nous considérons la forme correspondante des opérateurs infinitésimaux à l'aide de différentes paramétrisations du groupe de Lorentz. Auparavant nous étudierons la forme habituelle des représentations (c'est-à-dire les formes (I-26) et (I-27)) et surtout la représentation de l'algèbre de Lie associée à ces formes. Pour cela il nous faut préciser les représentations $U^{(j)}$ et $U^{(\varepsilon, r)}$ du groupe spinoriel associé à E_2 qu'on induit ensuite à $S\,L(2;\,C)$ pour obtenir des représentations du groupe de Poincaré.

Le groupe spinoriel attaché à E_2 est le groupe des matrices 2×2 suivantes:

$$\begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ z & e^{i\phi/2} \end{pmatrix} = (\phi;\, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z\, e^{i\phi/2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$$

muni de la loi de groupe suivante:

$$(\phi_1;\, z_1)\, (\phi_2;\, z_2) = (\phi_1 + \phi_2;\, z_1\, e^{-i\phi_2/2} + z_2\, e^{+i\phi_1/2})$$

E_2 est l'ensemble des transformations du plan de la forme

$$\boldsymbol{u} = R_\phi\, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}$$

où R_ϕ désigne une rotation d'angle ϕ autour de l'origine. Cet ensemble est muni de la loi de groupe suivante:

$$(R_{\phi_1};\, \boldsymbol{a}_1)\, (R_{\phi_2};\, \boldsymbol{a}_2) = (R_{\phi_1 + \phi_2};\, \boldsymbol{a}_1 + R_{\Phi_1}\, \boldsymbol{a}_2)$$

L'homomorphisme $2 \to 1$ du groupe spinoriel sur le groupe euclidien est:

$$(\phi; z) \to \left(R_\phi; \boldsymbol{a}(z\, e^{i\phi/2})\right)$$

où $\boldsymbol{a}(Z\, e^{i\phi})$ désigne le vecteur $(\mathrm{Re}(z\, e^{i\phi/2}); \mathrm{Im}\,(z e^{i\phi/2}))$. (Les éléments $(\phi; z)$ et $(\phi+\pi; -z)$ ont ainsi la même image). Le sous-groupe $(0; z)$ est un sous-groupe abelien distingué, la détermination explicite des représentations $U^{(j)}$ et $U^{(\varepsilon r)}$ relève donc aussi de la théorie de G. MACKEY.

Représentations unitaires irréductibles du groupe spinoriel associé à E_2

Le dual $\hat{H}$ de H est ici l'ensemble des vecteurs du plan. Soit $\boldsymbol{a} \in \hat{H}$; H agit trivialement sur $\hat{H}$ et seules les rotations autour de 0: $(\phi; 0)$ opèrent sur $\hat{H}$ par: $\boldsymbol{a} \to R_\Phi\, \boldsymbol{a}$ (cf. I-12); où R_Φ désigne la rotation d'angle ϕ associée à la matrice 2×2 précédente par l'homomorphisme. Les orbites sont donc l'ensemble des cercles de rayon $r \geqslant 0$ centrés à l'origine. Pour tout $r > 0$ on stabilisera le point d'intersection de l'axe $0\,x$ et du cercle, soit A ce point. On passe du point A à un point quelconque M du cercle par la rotation $(\theta; 0)$ où $\theta = (0\,A, 0\,M)$. Le stabilisateur de A est le centre du groupe spinoriel c'est-à-dire le sous-groupe constitué par $(0; 0)$ et $(2\,\pi; 0)$. Le stabilisateur de l'origine $(r = 0)$ est l'ensemble des matrices $(\phi; 0)$. Dans le cas $r > 0$ les représentations unitaires irréductibles du stabilisateur sont la représentation triviale et la représentation alternée qu'on distinguera par $\varepsilon = +1$ pour la première et par $\varepsilon = -1$ pour la deuxième, soit V^ε. La représentation opère sur l'espace d'Hilbert des fonctions définies sur le cercle, à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ et telles que:

$$\int_0^{2\pi} |\, f(\theta)\, |^2 \, \frac{d\theta}{2\,\pi} < +\infty$$

cette représentation s'écrit:

$$\{U^{(\varepsilon, r)}\left((\phi; z)\right) f\}\,(\theta) = e^{-i\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{u}}\, V^\varepsilon\,(A_\theta^{-1}\, A_\phi\, A_{\theta-\phi})\, f(\theta - \phi)$$

avec

$|\,\boldsymbol{u}\,| = r$

$\boldsymbol{u} = \mathrm{Re}\, \boldsymbol{u}_0$ où $\boldsymbol{u}_0$ est le point stabilisé $(r, 0)$

$\boldsymbol{a} = (\mathrm{Re}(z\, e^{i\phi/2}); \mathrm{Im}(z\, e^{i\phi/2}))$.

La représentation $U^{(j)}$ s'écrit simplement

$$U^{(j)}\left((\phi; z)\right) = e^{-i \cdot j\phi}$$

avec j entier ou $1/2$ entier, positif négatif ou nul. On désignera par S, $\boldsymbol{T}$ les générateurs de E_2. Ainsi $e^{-i\,\theta\, S}$ représente une rotation d'angle θ et $e^{-i\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{T}}$ une translation de vecteur $\boldsymbol{a}$.

Nous sommes maintenant en mesure de donner les différentes représentations irréductibles de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré pour les masses nulles.

Les représentations $U^{(j)}$ fournissent le cas «du spin discret» et les représentations $U^{(\varepsilon, r)}$ le cas «du spin continu».

Cas des spins discrets

Il importe de remarquer que, dans ce cas, la représentation de l'algèbre de Lie qu'on obtient est la même pour les deux champs de transformations choisis (cf. (I-24) et (I-25)). En effet, comme nous l'avons montré dans I (cf. (I-9)) la transformation unitaire qui permet de passer du choix $\Lambda_p^{(2)}$ au choix $\Lambda_p^{(1)}$, est $U^{(j)}(\Lambda_p^{(1)-1}\Lambda_p^{(2)})$ où $U^{(j)}$ est la représentation du petit groupe qu'on induit. Dans notre cas $\Lambda_p^{(1)-1}\Lambda_p^{(2)}$ appartient au petit groupe, plus précisément:

$$\Lambda_p^{(1)-1}\Lambda_p^{(2)} = \begin{pmatrix} 1; & 0 \\ \frac{1}{p} e^{i\phi} \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}; & 1 \end{pmatrix}$$

Mais dans la représentation $U^{(j)}$ considérée, les translations sont représentées trivialement ($\boldsymbol{T} \equiv 0$), ainsi la transformation unitaire permettant de passer de $\Lambda_p^{(1)}$ à $\Lambda_p^{(2)}$ se réduit à l'identité. Il suffit de se placer dans le cas le plus simple, c'est-à-dire dans la représentation correspondant à $\Lambda_p^{(1)}$ et on obtient les expressions suivantes pour les opérateurs infinitésimaux associés à la représentation $[0; j]$:

$$\left.\begin{aligned} (J^1 f)(p) &= \left\{-i(\boldsymbol{p}\wedge\partial\boldsymbol{p})^1 + \frac{p^1}{p+p^3}S\right\}f(p) \\ (J^2 f)(p) &= \left\{-i(\boldsymbol{p}\wedge\partial\boldsymbol{p})^2 + \frac{p^2}{p+p^3}S\right\}f(p) \\ (J^3 f)(p) &= \{-i(\boldsymbol{p}\wedge\partial\boldsymbol{p})^3 + S\}f(p) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II-20)}$$

avec $(Sf)(p) = j\,f(p)$

$$\left.\begin{aligned} (N^1 f)(p) &= \left\{-i\,p\,\partial p^1 - \frac{p^2}{p+p^3}S\right\}f(p) \\ (N^2 f)(p) &= \left\{-i\,p\,\partial p^2 + \frac{p^1}{p+p^3}S\right\}f(p) \\ (N^3 f)(p) &= \{-i\,p\,\partial p^3\}f(p). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II-20)}$$

(Ces expressions sont bien connues cf. [12] par exemple.)

Cas des spins continus

Dans ce cas, par contre, les translations étant représentées dans la représentation $U^{(\varepsilon, r)}$ il nous faut distinguer les deux $\Lambda_p^{(i)}$ ($i = 1, 2$). Avec le choix du premier $\Lambda_p^{(1}$ nous obtenons les expressions suivantes:

$$\left.\begin{aligned} (J^1 f)(p) &= \left\{-i(\boldsymbol{p}\wedge\partial\boldsymbol{p})^1 + \frac{p^1}{p+p^3}S - \frac{T_2}{p+p^3}\right\}f(p) \\ (J^2 f)(p) &= \left\{-i(\boldsymbol{p}\wedge\partial\boldsymbol{p})^2 + \frac{p^2}{p+p^3}S + \frac{T_1}{p+p^3}\right\}f(p) \\ (J^3 f)(p) &= \{-i(\boldsymbol{p}\wedge\partial\boldsymbol{p})^3 + S\}f(p) \\ (N^1 f)(p) &= \left\{-i\,p\,\partial p^1 - \frac{p^2}{p+p^3}S - \frac{T_1}{p+p^3}\right\}f(p) \\ (N^2 f)(p) &= \left\{-i\,p\,\partial p^2 + \frac{p^1}{p+p^3}S - \frac{T_2}{p+p^3}\right\}f(p) \\ (N^3 f)(p) &= \{-i\,p\,\partial p^3\}f(p) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II-21)}$$

(ces expressions semblent n'avoir jamais été données).

En choisissant $\Lambda_p^{(2)}$ nous obtenons:

$$\left.\begin{aligned}
(J^1 f)(p) &= \left\{-i\,(\boldsymbol{p} \wedge \partial \boldsymbol{p})^1 + \frac{p^1}{p+p^3}\,S\right\} f(p)\\
(J^2 f)(p) &= \left\{-i\,(\boldsymbol{p} \wedge \partial \boldsymbol{p})^2 + \frac{p^2}{p+p^3}\,S\right\} f(p)\\
(J^3 f)(p) &= \{-i\,(\boldsymbol{p} \wedge \partial \boldsymbol{p})^3 + S\} f(p)\\
(N^1 f)(p) &= \left\{-i\,p\,\partial p^1 - \frac{p^2}{p+p^3}\,S + \frac{1}{2\,p}\left(\frac{(p^1)^2}{p\,(p+p^3)} - 1\right) \times T_1\right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{2\,p}\,\frac{p^1\,p^2}{p\,(p+p^3)}\,T_2\right\} f(p)\\
(N^2 f)(p) &= \left\{-i\,p\,\partial p^2 + \frac{p^1}{p+p^3}\,S + \frac{1}{2\,p}\,\frac{p^1\,p^2}{p\,(p+p^3)} \times T_1\right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{2\,p}\left(\frac{(p^2)^2}{p\,(p+p^3)} - 1\right) T_2\right\} f(p)\\
(N^3 f)(p) &= \left\{-i\,p\,\partial p^3 + \frac{p^1}{2\,p}\,\frac{T_1}{p} + \frac{p^2}{2\,p}\,\frac{T_2}{p}\right\} f(p)
\end{aligned}\right\} \quad \text{(II-22)}$$

Ce ne sont pas les expressions données par J. S. LOMONT et M. E. MOSES (cf. [11]) mais on passe des nôtres aux leurs en échangeant les indices 1 et 3. Ceci provient du fait que J. S. LOMONT et M. E. MOSES ont stabilisé le point (1, 1, 0, 0) alors que nous avons stabilisé (1, 0, 0, 1).

Nous allons maintenant étudier les représentations qui correspondent aux masses nulles dans un espace d'Hilbert de fonctions sur le groupe d'une manière identique au cas des masses positives. Nous considérons des paramétrisations du groupe de Lorentz adaptées à notre problème (c'est-à-dire contenant un élément de E_2). Nous ne calculerons pas les opérateurs de spin W^μ car dans le cas physiquement intéressant (spin discret) il est bien connu que

$$W^\mu = j\,\mathsf{P}^\mu.$$

A. Soit la décomposition du groupe de Lorentz suivante:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\,\phi/2} & 0 \\ z & e^{i\,\phi/2} \end{pmatrix} = \Lambda_p^{(1)} \cdot (\phi; z)$$

avec

$$\lambda \in \mathsf{R}; \quad z = x + i\,y; \quad \mu = \mu_1 + i\,\mu_2.$$

Cette décomposition est unique par les transformations telles que $\delta \neq 0$ comme le montre les formules suivantes

$$\alpha = \lambda^{-1}\,e^{-i\,\phi/2} + \mu\,z \qquad \beta = \mu\,e^{i\,\phi/2} \qquad \gamma = \lambda\,z \qquad \delta = \lambda\,e^{i\,\phi/2}$$

$$\text{et réciproquement} \quad \lambda = |\,\delta\,| \quad \mu = \beta\,|\,\delta\,|\,\delta^{-1} \quad z = \gamma\,|\,\delta\,|^{-1}.$$

Pour $\delta = 0$, suivant M. A. MAIMARK (cf. [10]), $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$ sera représenté par le point à l'infini du plan.

Nous sommes donc amenés à considérer des fonctions de 6 variables $f(\lambda; \mu_1; \mu_2; \phi; x; y)$ telles que

$$f\left(\begin{pmatrix}\lambda^{-1} & \mu \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-i\phi/2} & 0 \\ z & e^{i\phi/2}\end{pmatrix}\right) = U^{-1()}\left[\begin{pmatrix}e^{-i\phi/2} & 0 \\ z & e^{i\phi/2}\end{pmatrix}\right] f\left(\begin{pmatrix}\lambda^{-1} & \mu \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right).$$

$U^{()}$ notant la représentation de E_2 que l'on induit (c'est-à-dire $U^{(j)}$ ou $U^{(\varepsilon, r)}$). Calculons maintenant les opérateurs infinitésimaux associés à cette représentation.

Générateurs des translations d'espace-temps

On sait que si $\overset{0}{p}$ est le point stabilisé, la représentation associée aux translations d'espace-temps a^μ est alors

$$f(\Lambda) \to e^{i\, a_0 \wedge \overset{0}{p}} f(\Lambda)$$

Dans notre cas, puisque par définition les transformations

$$\begin{pmatrix}e^{-i\phi/2} & 0 \\ z & e^{i\phi/2}\end{pmatrix}$$

stabilisent $\overset{0}{p} = (1, 0, 0, 1)$ on a donc

$$\underset{\sim}{\Lambda \overset{0}{p}} = \begin{pmatrix}\lambda^{-1} & \mu \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^{-1} & 0 \\ \bar{\mu} & \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}|\mu|^2 & \mu\lambda \\ \bar{\mu}\lambda & \lambda^2\end{pmatrix}$$

Donc on obtient pour les opérateurs $\boldsymbol{P}$

$$\left.\begin{aligned} &(\boldsymbol{P}^1 f)(\Lambda) = (-2\lambda\mu_1) f(\Lambda) \qquad &&(\boldsymbol{P}^2 f)(\Lambda) = (2\lambda\mu_2) f(\Lambda) \\ &(\boldsymbol{P}^3 f)(\Lambda) = (\lambda^2 - |\mu|^2) f(\Lambda) \qquad &&(\boldsymbol{P}^0 f)(\Lambda) = (\lambda^2 + |\mu|^2) f(\Lambda). \end{aligned}\right\} \quad \text{(II-23)}$$

On remarque que si on fait le changement de variables suivant:

$$p^1 = -2\lambda\mu_1 \quad p^2 = 2\lambda\mu_2 \quad p^3 = \lambda^2 - |\mu|^2 \quad p^0 = \lambda^2 + |\mu|^2$$

la transformation $\begin{pmatrix}\lambda^{-1} & \mu \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ s'écrit alors:

$$\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{2}{p+p^3}}\,; & -\dfrac{p^1 - i\,p^2}{\sqrt{2\,(p+p^3)}} \\ 0 & \sqrt{\dfrac{p+p^3}{2}}\end{pmatrix}$$

et on retrouve ainsi $\Lambda_p^{(1)}$ (cf. I).

Ainsi la forme standard associée à cette paramétrisation est celle où l'on choisit pour champ de transformations Λ_p celui fait par A. S. WIGHTMAN c'est-à-dire $\Lambda_p^{(1)}$. L'opérateur unitaire permettant d'effectuer ce passage entre les deux formes est la fonction $B(\Lambda)$:

$$B(\Lambda) = U^{(\,)}\,(\Lambda_p^{(1)-1}\,\Lambda) = U^{(\,)}\,((\phi; z)).$$

Calcul des opérateurs $\boldsymbol{J}$ *et* $\boldsymbol{N}$ *par la première méthode*

Donnons les résultats dans le cas du spin discret et du spin continu; nous avons:

$$\begin{aligned}
(J^1 f)\,(\Lambda) &= \{O_1 - \mu_1\,\lambda^{-1}\,S\}\,f(\Lambda)\\
(J^2 f)\,(\Lambda) &= \{O_2 + \mu_2\,\lambda^{-1}\,S\}\,f(\Lambda)\\
(J^3 f)\,(\Lambda) &= \{O_3 + S\}\,f(\Lambda)\\
(N^1 f)\,(\Lambda) &= \{O_1' - \mu_2\,\lambda^{-1}\,S\}\,f(\Lambda)\\
(N^2 f)\,(\Lambda) &= \{O_2' - \mu_1\,\lambda^{-1}\,S\}\,f(\Lambda)\\
(N^3 f)\,(\Lambda) &= \{O_3'\}\,f(\Lambda)
\end{aligned} \tag{II-24}$$

pour le cas du spin discret. Nous avons posé pour les parties «orbitales»:

$$\begin{aligned}
O_1 &= -\,i\,\mu_2\,\partial_\lambda + i\,\mu_2\,\mu_1\,\lambda^{-1}\,\partial\mu_1 + i\,(\lambda - \mu_1^2\,\lambda^{-1})\,\partial\mu_2\\
O_2 &= -\,i\,\mu_1\,\partial_\lambda + i\,(\lambda - \mu_2^2\,\lambda^{-1})\,\partial\mu_1 + i\,\mu_2\,\mu_1\,\lambda^{-1}\,\partial\mu_2\\
O_3 &= -\,i\,(\mu_2\,\partial\mu_1 - \mu_1\,\partial\mu_2)\\
O_1' &= \frac{i}{2}\,\mu_1\,\partial_\lambda + \frac{i}{2}\,(\lambda + \mu_2^2\,\lambda^{-1})\,\partial\mu_1 - \frac{i}{2}\,\mu_1\,\mu_2\,\lambda^{-1}\,\partial\mu_2\\
O_2' &= -\,\frac{i}{2}\,\mu_2\,\partial_\lambda + \frac{i}{2}\,\mu_1\,\mu_2\,\lambda^{-1}\,\partial\mu_1 - \frac{i}{2}\,(\lambda + \mu^2\,\lambda^{-1})\,\partial\mu_2\\
O_3' &= -\,\frac{i}{2}\,\lambda\,\partial_\lambda + \frac{i}{2}\,(\mu_1\,\partial\mu_1 + \mu_2\,\partial\mu_2)\,.
\end{aligned}$$

Pour le cas du spin continu, nous avons:

$$\left.\begin{aligned}
(J^{(1)} f)\,(\Lambda) &= \left\{O_1 - \lambda^{-1}\,U^{-1(\varepsilon,r)}\,(\phi; z)\left[\mu_1\,\lambda\,S + \frac{1}{2}\,T_2\right]U^{(\varepsilon,r)}(\phi; z)\right\}f(\Lambda)\\
(J^{(2)} f)\,(\Lambda) &= \left\{O_2 + \lambda^{-2}\,U^{-1(\varepsilon,r)}\,(\phi; z)\left[\mu_2\,\lambda\,S + \frac{1}{2}\,T_1\right]U^{(\varepsilon,r)}(\phi; z)\right\}f(\Lambda)\\
(J^3 f)\,(\Lambda) &= \left\{O_3 + U^{-1(\varepsilon,r)}\,(\phi; z)\;S\;U^{(\varepsilon,r)}(\phi; z)\right\}f(\Lambda)\,.\\
(N^{(1)} f)\,(\Lambda) &= \left\{O_1' - \lambda^{-2}\,U^{-1(\varepsilon,r)}\,(\phi; z)\left[\mu_2\,\lambda\,S + \frac{1}{2}\,T_1\right]U^{(\varepsilon,r)}(\phi; z)\right\}f(\Lambda)\\
(N^{(2)} f)\,(\Lambda) &= \left\{O_2' - \lambda^{-2}\,U^{-1(\varepsilon,r)}\,(\phi; z)\left[\mu_1\,\lambda\,S + \frac{1}{2}\,T_2\right]U^{(\varepsilon,r)}(\phi; z)\right\}f(\Lambda)\\
(N^{(3)} f)\,(\Lambda) &= \{O_3'\}\,f(\Lambda)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{II-25}$$

On peut mettre ces opérateurs sous une forme équivalente à (II-3bis) à l'aide des relations suivantes:

$$\begin{aligned}
U^{-1(\varepsilon,r)}\,(\phi; z)\;S\;U^{(\varepsilon,r)}(\phi; z) &= S + T_1\left(x\,\sin\frac{\phi}{2} - y\,\cos\frac{\phi}{2}\right)\\
&\quad + T_2\left(x\,\cos\frac{\phi}{2} + y\,\sin\frac{\phi}{2}\right)\\
U^{-1(\varepsilon,r)}\,(\phi; z)\;T_1\;U^{(\varepsilon,r)}(\phi; z) &= T_1\,\cos\phi - T_2\,\sin\phi\\
U^{-1(\varepsilon,r)}\,(\phi; z)\;T_2\;U^{(\varepsilon,r)}(\phi; z) &= T_1\,\sin\phi + T_2\,\cos\phi\,.
\end{aligned}$$

Calcul des opérateurs **J** *et* **N** *par la deuxième méthode*

Tout d'abord nous devons calculer les opérateurs infinitésimaux pour la représentation «régulière» $f(\Lambda) \xrightarrow{\Lambda_0} f(\Lambda_0^{-1}\,\Lambda)$. Ces opérateurs sont les mêmes pour le cas du spin discret et du spin continu.

$$(J'^{(1)} f)\,(\Lambda) = \Big\{O_1 + i\,\lambda^{-1}\,\mu_1\,\partial_\phi + \frac{i}{2}\Big[\lambda^{-2}\sin\frac{\phi}{2} - \lambda^{-1}\,\mu_1\,y\Big] \times \partial_x + \frac{i}{2}\Big[\lambda^{-2}\cos\frac{\phi}{2} + \lambda^{-1}\,\mu_1\,x\Big]\,\partial_y\Big\} f(\Lambda)$$

$$(J'^{(2)} f)\,(\Lambda) = \Big\{O_2 - i\,\lambda^{-1}\,\mu_2\,\partial_\phi + \frac{i}{2}\Big[-\lambda^{-2}\cos\frac{\phi}{2} + \lambda^{-1}\,\mu_2\,y\Big] \times \partial_x + \frac{i}{2}\Big[\lambda^{-2}\sin\frac{\phi}{2} - \lambda^{-1}\,\mu_2\,x\Big]\,\partial_y\Big\} f(\Lambda)$$

$$(J'^{(3)} f)\,(\Lambda) = \Big\{O_3 - i\,\partial_\phi + \frac{i}{2}\Big[y\,\partial_x - x\,\partial_y\Big]\Big\} f(\Lambda)\,.$$

$$(N'^{(1)} f)\,(\Lambda) = \Big\{O_1' + i\,\lambda^{-1}\,\mu_2\,\partial_\phi + \frac{i}{2}\Big[\lambda^{-2}\cos\frac{\phi}{2} - \lambda^{-1}\,\mu_2\,y\Big] \times \partial_x + \frac{i}{2}\Big[-\lambda^{-2}\sin\frac{\phi}{2} + \lambda^{-1}\,\mu_2\,x\Big]\,\partial_y\Big\} f(\Lambda)$$

$$(N'^{(2)} f)\,(\Lambda) = \Big\{O_2' + i\,\lambda^{-1}\,\mu_1\,\partial_\phi + \frac{i}{2}\Big[\lambda^{-2}\sin\frac{\phi}{2} - \lambda^{-1}\,\mu_1\,y\Big] \times \partial_x + \frac{i}{2}\Big[\lambda^{-2}\cos\frac{\phi}{2} + \lambda^{-1}\,\mu_1\,x\Big]\,\partial_y\Big\} f(\Lambda)$$

$$(N'^{(3)} f)\,(\Lambda) = \{O_3'\}\,f(\Lambda)\,.$$

En utilisant la condition (I-19) nous pouvons modifier ces opérateurs (cf. par exemple les équations (II-13) et (II-14)):

$$\left.\begin{aligned}
(J^{(1)} f)\,(\Lambda) &= \Big\{O_1 - \mu_1\,\lambda^{-1}\,S - \frac{1}{2}\,\lambda^{-2}\,T_2 + i\,\Big(\lambda^{-2}\sin\frac{\phi}{2} - \lambda^{-1}\,\mu_1\,y\Big) \times \partial_x \\
&\quad + i\,\lambda^{-1}\,\mu_1\,x\,\partial_y\Big\} f(\Lambda) \\
(J^{(2)} f)\,(\Lambda) &= \Big\{O_2 + \mu_2\,\lambda^{-1}\,S + \frac{1}{2}\,\lambda^{-2}\,T_1 + i\,\lambda^{-1}\,\mu_2\,y\,\partial_x \\
&\quad + i\,\Big(\lambda^{-2}\sin\frac{\phi}{2} - \lambda^{-1}\,\mu_2\,x\Big)\,\partial_y\Big\} f(\Lambda) \\
(J^{(3)} f)\,(\Lambda) &= \{O_3 + S + i\,(y\,\partial_x - x\,\partial_y)\,\} f(\Lambda)\,. \\
(N^{(1)} f)\,(\Lambda) &= \Big\{O_1' - \mu_2\,\lambda^{-1}\,S - \frac{1}{2}\,\lambda^{-2}\,T_1 - i\,\lambda^{-1}\,\mu_2\,y\,\partial_x \\
&\quad + i\,\Big(-\lambda^{-2}\sin\frac{\phi}{2} + \lambda^{-1}\,\mu_2\,x\Big)\,\partial_y\Big\} f(\Lambda) \\
(N^{(2)} f)\,(\Lambda) &= \Big\{O_2' - \mu_1\,\lambda^{-1}\,S - \frac{1}{2}\,\lambda^{-2}\,T_2 + i\,\Big(\lambda^{-2}\sin\frac{\phi}{2} - \lambda^{-1}\,\mu_1\,y\Big) \times \partial_x \\
&\quad + i\,\lambda^{-1}\,\mu_1\,x\,\partial_y\Big\} f(\Lambda) \\
(N^{(3)} f)\,(\Lambda) &= \{O_3'\}\,f(\Lambda)\,.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(II-26)}$$

Nous n'avons écrit ces opérateurs que pour le cas du spin continu car les résultats obtenus par les deux méthodes sont identiques dans le cas du spin discret (ceci provenant du fait que $U^{-1\,(j)}(\phi; z)\; S\; U^{(j)}(\phi; z) = S$).

Montrons l'identité des résultats obtenus par les deux méthodes. Des égalités suivantes:

$$f(\Lambda_p^{(1)}(\phi'; z')\,(\phi; z)) = U^{-1\,(\varepsilon, r)}\,(\phi; z)\; U^{-1\,(\varepsilon, r)}(\phi'; z')\; U^{(\varepsilon, r)}(\phi; z)\; f(\Lambda_p^{(1)}(\phi; z))$$
$$= U^{-1\,(\varepsilon, r)}(\phi'; z')\, f(\Lambda_p^{(1)}(\phi'; z')\,(\phi; z)\,(\phi'; z')^{-1})\,.$$

nous tirons

$$\left.\begin{aligned} U^{-1\,(\varepsilon, r)}_{(\phi;\, z)}\; S\; U^{(\varepsilon, r)}_{(\phi:\, z)} &= S - i\,x\,\partial_y + i\,y\,\partial_x \\ U^{-1\,(\varepsilon, r)}_{(\phi;\, z)}\; T_1\; U^{(\varepsilon, r)}_{(\phi;\, z)} &= T_1 + 2\,i\,\sin\frac{\phi}{2}\,\partial_y \\ U^{-1\,(\varepsilon, r)}_{(\phi;\, z)}\; T_2\; U^{(\varepsilon, r)}_{(\phi;\, z)} &= T_2 - 2\,i\,\sin\frac{\phi}{2}\,\partial_x \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II-27)}$$

A l'aide de ces formules il est aisé de passer d'une forme à l'autre (il importe de remarquer, pour la suite, que ces identités sont indépendantes de la transformation Λ_p choisie).

B. Considérons maintenant la décomposition du groupe de Lorentz suivante:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\,p^{-1/2}; & -\sin\frac{\theta}{2}\,p^{1/2}\,e^{-i\varphi}\\ \sin\frac{\theta}{2}\,p^{-1/2}\,e^{i\varphi}; & \cos\frac{\theta}{2}\,p^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-i\,\phi/2} & 0\\ z & e^{i\,\phi/2}\end{pmatrix} = \Lambda_p^{(2)}\,(\phi; z) = \Lambda\,.$$

Le principe de calcul des opérateurs infinitésimaux reste le même, aussi nous nous contenterons de donner les résultats:

Générateurs des translations d'espace-temps

$$(P^0 f)\,(\Lambda) = (p\,f)\,(\Lambda) \qquad (P^3 f)\,(\Lambda(= (p\cos\theta)\,f(\Lambda)$$
$$(P^1 f)\,(\Lambda) = (p\sin\theta\cos\varphi)\,f(\Lambda) \qquad (P^2 f)\,(\Lambda) = (p\sin\theta\sin\varphi)\,f(\Lambda) \qquad \text{(II-28)}$$

*Opérateurs **J** et **N** obtenus par la première méthode*

$$(J^{(1)} f)\,(\Lambda) = \left\{O_1 + \cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,U^{-1\,(\varepsilon, r)}_{(\phi;\, z)}\;S\;U^{(\varepsilon, r)}_{(\phi;\, z)}\right\}f(\Lambda)$$
$$(J^{(2)} f)\,(\Lambda) = \left\{O_2 + \sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,U^{-1\,(\varepsilon, r)}\,(\phi; z)\;S\;U^{(\varepsilon, r)}\,(\phi; z)\right\}f(\Lambda)$$
$$(J^3 f)\,(\Lambda) = \{O_3 + U^{-1\,(\varepsilon, r)}\,(\phi; z)\;S\;U^{(\varepsilon, r)}\,(\phi; z)\}\,f(\Lambda)\,. \qquad \text{(II-29)}$$

$$(N^1 f)\,(\Lambda) = \left\{O_1' + U^{-1\,(\varepsilon, r)}\,(\phi; z)\left[-\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,S + \frac{1}{2p}\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\varphi - 1\right)T_1 + \frac{1}{p}\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\varphi\cos\varphi\;T_2\right]U^{(\varepsilon, r)}(\phi; z)\right\}f(\Lambda)$$

$$(N^2 f)(\Lambda) = \Big\{O_2' + U^{-1\,(\varepsilon,r)}(\phi; z)\Big[\cos\varphi \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} S + \frac{1}{p}\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\varphi\cos\varphi\, T_1$$

$$+ \frac{1}{2p}\Big(2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\varphi - 1\Big) T_2\Big] U^{(\varepsilon,r)}_{(\phi;z)}\Big\} f(\Lambda)$$

$$(N^3 f)(\Lambda) = \Big\{O_3' + U^{-1\,(\varepsilon,r)}(\phi; z)\Big[\sin\theta\cos\varphi\frac{T_1}{2p} + \sin\theta\sin\varphi\frac{T_2}{2p}\, U^{(\varepsilon,r)}_{(\phi;z)}\Big\} f(\Lambda)\,.$$

Nous avons posé pour les parties orbitales:

$$O_1 = i\sin\varphi\,\partial_\theta + i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi\,\partial_\varphi$$

$$O_2 = -i\cos\varphi\,\partial_\theta + i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\,\partial_\varphi$$

$$O_3 = -i\,\partial_\varphi$$

$$O_1' = -i\cos\theta\sin\varphi\,\partial_\theta + i\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\,\partial_\varphi - i\sin\theta\sin\varphi\,\partial_p$$

$$O_2' = -i\cos\theta\cos\varphi\,\partial_\theta - i\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\,\partial_\varphi - i\sin\theta\cos\varphi\,\partial_p$$

$$O_3' = i\sin\theta\,\partial_\theta - i\cos\theta\,\partial_p$$

Pour obtenir les opérateurs dans le cas du spin discret il suffit de faire $T_1 = T_2 = 0$ dans ces formules et de remplacer $U^{-1\,(\varepsilon,r)}\, S\, U^{(\varepsilon,r)}$ par S.

*Opérateurs **J** et **N** obtenus par la deuxième méthode*

$$\left.\begin{aligned}
(J^1 f)(\Lambda) &= \Big\{O_1 + \cos\varphi\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big[S - i\,x\,\partial_y + i\,y\,\partial_x\Big]\Big\} f(\Lambda)\\
(J^2 f)(\Lambda) &= \Big\{O_2 + \sin\varphi\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big[S - i\,x\,\partial_y + i\,y\,\partial_x\Big]\Big\} f(\Lambda)\\
(J^3 f)(\Lambda) &= \{O_3 + S - i\,x\,\partial_y + i\,y\,\partial_x\} f(\Lambda)\\
(N^1 f)(\Lambda) &= \Big\{O_1' - \sin\varphi\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}(S - i\,x\,\partial_y + i\,y\,\partial_x) + \frac{1}{2p}\Big(2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\varphi - 1\Big)\\
&\quad\times\Big(T_1 + 2i\sin\frac{\phi}{2}\,\partial_y\Big) + \frac{1}{p}\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\varphi\cos\varphi\Big(T_2 - 2i\sin\frac{\phi}{2}\,\partial_x\Big)\Big\} f(\Lambda)\\
(N^2 f)(\Lambda) &= \Big\{O_2' + \cos\varphi\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}(S - i\,x\,\partial_y + i\,y\,\partial_x) + \frac{1}{p}\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\varphi\cos\varphi\\
&\quad\times\Big(T_1 + 2i\sin\frac{\phi}{2}\,\partial_y\Big) + \frac{1}{2p}\Big(2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\varphi - 1\Big)\Big(T_2 - 2i\sin\frac{\phi}{2}\,\partial_x\Big)\Big\} f(\Lambda)\\
(N^3 f)(\Lambda) &= \Big\{O_3' + \frac{1}{2p}\sin\theta\cos\varphi\Big(T_1 + 2i\sin\frac{\phi}{2}\,\partial_y\Big) + \frac{1}{2p}\sin\theta\sin\varphi\\
&\quad\times\Big(T_2 - 2i\sin\frac{\phi}{2}\,\partial_y\Big)\Big\} f(\Lambda)\,.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(II-30)}$$

Il est facile de voir, à l'aide des formules (II-27), l'équivalence des formes (II-29) et (II-30).

C. Pour terminer, comme dans le cas des masses positives, considérons la paramétrisation

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha\,\delta - \beta\,\gamma = 1$$

Il n'apparaît pas d'éléments de E_2 dans cette décomposition, aussi nous ne pouvons pas tenir compte de la condition pour modifier les opérateurs de la représentation «régulière» d'une manière analogue aux cas précédents. Donnons les opérateurs infinitésimaux de la représentation $[0, j]$:

$$(P^0 f)\,(\Lambda) = (|\,\delta\,|^2 + |\,\beta\,|^2)\,f(\Lambda)$$

$$(P^1 f)\,(\Lambda) = (-\,2\,\mathrm{Re}\,\beta\,\overline{\delta})\,f(\Lambda)$$

$$(P^2 f)\,(\Lambda) = (2\,\mathrm{Im}\,\beta\,\overline{\delta})\,f(\Lambda)$$

$$(P^3 f)\,(\Lambda) = (|\,\delta\,|^2 - |\,\beta\,|^2)\,f(\Lambda) \tag{II-31}$$

Les opérateurs $\boldsymbol{J}'$ et $\boldsymbol{N}'$ sont les mêmes que ceux donnés par les formules (II-18). Le seul changement dans notre cas est l'expression de la condition qui nous fournit les relations suivantes que doivent vérifier les fonctions f:

$$(S f)\,(\Lambda) = \frac{i}{2}\,\{-\,\alpha_2\,\partial_{\alpha_1} + \alpha_1\,\partial_{\alpha_2} + \beta_2\,\partial_{\beta_1} - \beta_1\,\partial_{\beta_2} - \gamma_2\,\partial_{\gamma_1} + \gamma_1\,\partial_{\gamma_2}$$

$$+\,\delta_2\,\partial_{\delta_1} - \delta_1\,\partial_{\delta_2}\}\,f(\Lambda)$$

$$(T_1 f)\,(\Lambda) = \frac{i}{2}\,\{-\,\beta_1\,\partial_{\alpha_1} - \beta_2\,\partial_{\alpha_2} - \delta_1\,\partial_{\gamma_1} - \delta_2\,\partial_{\gamma_2}\}\,f(\Lambda)$$

$$(T_2 f)\,(\Lambda) = \frac{i}{2}\,\{\beta_2\,\partial_{\alpha_1} - \beta_1\,\partial_{\alpha_2} + \delta_2\,\partial_{\gamma_1} - \delta_1\,\partial_{\gamma_2}\}\,f(\Lambda) \tag{II-32}$$

Bibliographie

[1] E. Wigner, Phys. Rev. *94*, 17 (1954); M. Töller, Nuov. Cim. *37*, 631 (1965); P. Moussa et R. Stora, Boulder (1964).
[2] L. Gärding, Proc. Nat. Acad. Sci. *33*, 331 (1947).
[3] A. S. Wightman, *Les Houches, Relations de dispersion et particules élémentaires* (1961).
[4] A. J. Mac-Farlane, J.M.P. *3*, 1116 (1962).
[5] A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press).
[6] L. Michel and A. S. Wightman, Phys. Rev. *98*, 1190 (1955).
[7] M. Jacob and G. C. Wick, Ann. Physics 7, 404 (1959).
[8] G. C. Wick, Ann. Physics *18*, 65 (1962).
[9] V. J. Ritus, JETP *13*, 240 (1961).
[10] M. A. Naïmark, *Les représentations linéaires du groupe de Lorentz* (Dunod 1962), p. 128.
[11] J. S. Lomont and M. E. Moses, J.M.P. *3*, 405 (1962).
[12] A. Chakrabarti, Thèse, Faculté des Sciences d'Orsay, Mai 1965.
[13] E. Wigner, Rev. mod. Phys. *29*, 255 (1957).