

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 38 (1965)  
**Heft:** VIII  
  
**Artikel:** Berechnungen über den Ladungstransport in dünnen Filmen  
**Autor:** Brändli, G. / Cotti, P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-113621>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Berechnungen über den Ladungstransport in dünnen Filmen

von G. Brändli und P. Cotti \*)

Institut für kalorische Apparate und Kältetechnik,  
Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich

(20. VII. 65)

*Abstract.* An eddy current size effect in the electrical resistivity of thin plates having electron mean free path,  $l$ , comparable to the plate thickness,  $d$ , has been described recently by COTTI. This paper presents calculations and tables of the effective eddy current resistivity for a range of ratios  $l/d$  and for various surface scattering situations. An extension of existing tables for the D.C. size effect in plates is also given.

### I. Einleitung

Bei der Berechnung von Transportphänomenen in festen Körpern wird üblicherweise das Produkt der Relaxationszeit mit der Geschwindigkeit als die «freie Weglänge»  $l$  der Elektronen bezeichnet. In den heute zur Verfügung stehenden hochreinen Metallen kann die Streuwahrscheinlichkeit der Elektronen bei genügend tiefen Temperaturen so klein gemacht werden, dass diese freie Weglänge die Grössenordnung von Millimetern erreichen kann. In solchen Materialien können deshalb die Streuungen der Elektronen an den Probenoberflächen in dünnen Proben einen starken Einfluss auf die Transportkoeffizienten ausüben. Es treten sogenannte «Size-Effekte» auf, die in diesen hochreinen Materialien oft schon an Millimeter dicken Proben beobachtet werden können, was deren experimentelle Untersuchung ausserordentlich erleichtert hat.

Solche Untersuchungen gestatten, Rückschlüsse über die mittlere freie Weglänge und über den Charakter der Streuung der Elektronen an der Probenoberfläche zu ziehen. Die Kenntnis der freien Weglänge ist vor allem deshalb interessant, weil das Produkt  $\varrho l$  ( $\varrho$  = spezifischer Widerstand einer dicken Probe des gleichen Materials) umgekehrt proportional zur Fermi-Oberfläche ist [vergleiche zum Beispiel <sup>1)</sup>].

Der Charakter der Streuung an der Probenoberfläche wird hauptsächlich von deren Rauheit, verglichen mit der De-Broglie-Wellenlänge der Elektronen, abhängen. Es scheint, dass nur in Halbmetallen wie Wismut die Leitungselektronen so grosse De-Broglie-Wellenlängen aufweisen, dass zwischen den Bewegungsrichtungen der auftreffenden und der gestreuten Elektronen eine Korrelation angenommen werden muss <sup>2)</sup>.

Als einfachste Modellvorstellung für eine solche Korrelation wird üblicherweise angenommen, dass eine Wahrscheinlichkeit  $p$  für Spiegelreflexionen an den Proben-

\*) Gegenwärtige Adresse: Labor für Festkörperphysik, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich.

oberflächen existiere. Mit  $p = 0$  wird so der Fall einer vollständig diffusen Streuung der Elektronen an den Proben-Oberflächen beschrieben. Als etwas allgemeineres Modell könnte ein vom Auftreffwinkel der Elektronen abhängiges  $p$  gewählt werden, indem zum Beispiel vorausgesetzt wird, dass  $p$  für alle Elektronen, deren Geschwindigkeitsrichtung mit der Oberflächennormalen einen Winkel zwischen  $\theta$  und  $90^\circ$  einschliesst, gleich Eins sei, für die übrigen Auftreffwinkel aber gleich Null sei. Ein solches Modell ist kürzlich von PARROTT<sup>3)</sup>\*) behandelt worden. PARROTT weist darauf hin, dass damit, in Analogie zur Streuung von Licht an matten Flächen, eine den Tatsachen eher gerecht werdende Beschreibung der Oberflächenstreuungen möglich sei, und dass auch die bei Wismut beobachtete «Sättigung» des Size-Effektes in sehr dünnen Proben damit erklärt werden kann.

Eine experimentelle Bestimmung von  $p$  oder  $\theta$  stösst auf die Schwierigkeit, dass bei der Auswertung von «Size-Effekt»-Untersuchungen zwei Parameter (die Oberflächenstreuparameter  $p$  oder  $\theta$  und die mittlere freie Weglänge  $l$ ) oder, wenn die Reinheit des Probenmaterials unbekannt ist, sogar drei Parameter (der spezifische Widerstand  $\rho$  einer dicken Probe des gleichen Materials) anzupassen sind.

Eine eindeutige Anpassung würde in diesem Fall erst möglich, wenn an einer Probe drei verschiedene Grössen (die von diesen drei Parametern abhängen) gemessen werden könnten. Wie kürzlich in diesem Laboratorium gezeigt wurde<sup>1)</sup>, liefert die Messung der Abklingzeit  $\tau$  von induzierten Wirbelströmen die Möglichkeit, wenigstens eine zweite Information (neben der Gleichstrommessung) über diese Parameter zu erhalten. Diese Abklingzeit stellt in dicken Proben ein Mass für die elektrische Leitfähigkeit des Probematerials dar<sup>4)</sup>. Sie kann deshalb auch als Definition für einen effektiven Wert des spezifischen Widerstandes  $\rho_\tau$  für Wirbelströme in dünnen Proben herangezogen werden.

Die Berechnung von  $\rho_\tau$  führt schon für die einfachste Vorstellung eines Sommerfeld-Modells der Leitungselektronen zu relativ komplizierten Ausdrücken, die nicht mehr elementar ausgewertet werden können. Wir waren daher im Rahmen unserer Size-Effekt-Untersuchungen genötigt, die im folgenden Abschnitt hergeleitete Formel für  $\rho_\tau$  mit einem Rechenautomaten für verschiedene Werte der Parameter  $p$  oder  $\theta$  zu tabellieren. Im gleichen Arbeitsgang erweiterten wir die von SONDHEIMER<sup>5)</sup> berechneten Tabellen für  $\rho_F$  (als Funktion von  $p$ ) und erstellten neu eine Tabelle für  $\rho_F$  als Funktion von  $\theta$ . Die vorliegende Arbeit soll nun dazu dienen, unsere Wirbelstromrechnungen im Detail vorzuführen und die von uns berechneten Tabellen allgemein zugänglich zu machen.

## II. Die Rechnungen

### a) Chambers' verallgemeinertes Ohmsches Gesetz

Nach dem Ohmschen Gesetz ist der Strom im Innern eines Leiters an jedem Ort proportional dem dort herrschenden elektrischen Feld. Ein solches Gesetz kann aber nur gelten, solange die freie Weglänge der Ladungsträger sehr klein ist. Andernfalls hat das in einer grösseren Umgebung wirkende elektrische Feld einen Einfluss auf den Strom am Beobachtungsort.

\*) Wir danken Dr. PARROTT dafür, dass er uns vor der Veröffentlichung Einblick in seine Arbeit gewährt hat.

CHAMBERS gelang es, diesen Einfluss zu berechnen. Ausgehend von einem Sommerfeld-Modell für die Leitungselektronen fand er eine Formel, welche eine endliche freie Weglänge der Elektronen berücksichtigt und im Prinzip eine Verallgemeinerung des Ohmschen Gesetzes ist. (Eine Herleitung der Formel findet man zum Beispiel im Handbuch der Physik<sup>6</sup>.)

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{3}{4\pi\varrho l} \int_{\text{ganzer Raum}} dx' dy' dz' \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) [(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}', t)] e^{-|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|/l}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^4}. \quad (1)$$

Dabei bedeuten:  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  den Punkt, wo zur Zeit  $t$  der Strom  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  beobachtet wird.

$\mathbf{r}' = (x', y', z')$  den Startpunkt eines Elektrons, welches nach stossfreiem Weg bei  $\mathbf{r}$  zum Strom  $\mathbf{J}$  beiträgt.

Im Grenzfall sehr kleiner freier Weglängen geht die Chamberssche Formel in das Ohmsche Gesetz  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, t)/\varrho$  über.

#### b) Anwendung der Chambersschen Formel auf ein Size-Effekt-Problem

Formel (1) gilt für eine unendlich ausgedehnte Probe. Sie lässt sich aber auch sehr gut verwenden, um Size-Effekte zu beschreiben. Dabei ist das Integral statt über den ganzen Raum nur über das Probenvolumen zu erstrecken, da ja kein Elektron seinen Startpunkt ausserhalb der Probe wählen kann. Die Elektronen, welche von der Probenoberfläche starten, müssen allerdings noch genauer betrachtet werden. Von ihnen muss vorausgesetzt werden, dass ihre Geschwindigkeitsverteilung von der Vorgeschichte unabhängig ist, was nur dann der Fall ist, wenn die Probenwände auftreffende Elektronen vollkommen diffus streuen ( $p = 0$ ).

Unter dieser Voraussetzung erhält man für das in der vorliegenden Arbeit untersuchte Size-Effekt-Problem [dünner Film, in der  $(x, y)$ -Ebene ausgebreitet und durch  $z = -d/2$  und  $z = +d/2$  begrenzt; Wirbelströme induziert durch plötzliche Entfernung eines in  $y$ -Richtung liegenden Magnetfeldes] ausgehend von der Chambersschen Formel:

$$J_x(z, t) = \frac{3}{4\pi\varrho l} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{(x')^2 \varepsilon_x(z', t) e^{-\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z' - z)^2}/l}}{[(x')^2 + (y')^2 + (z' - z)^2]^2}, \quad (2)$$

$J_y$  und  $J_z$  sind bei der hier gewählten geometrischen Anordnung Null. Nach geeigneten Substitutionen kann in Formel (2) wenigstens eine Integration ausgeführt werden:

$$J_x(z, t) = \frac{3}{4\varrho l} \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} \int_{-d/2}^{+d/2} dz' \varepsilon_x(z', t) e^{-\frac{|z' - z|}{l \cos \theta}}, \quad (3)$$

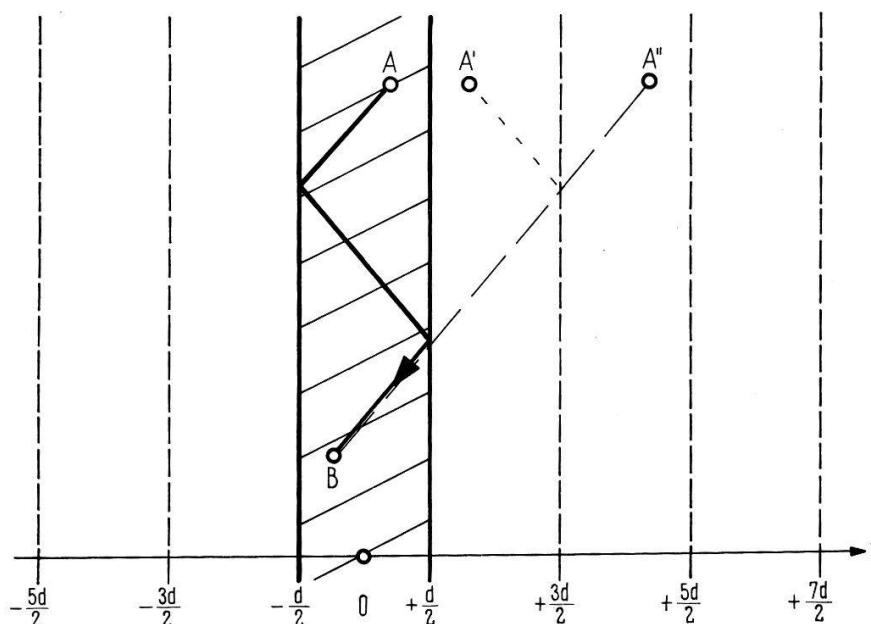
$\theta$  misst den Winkel zwischen der Geschwindigkeitsrichtung der Elektronen und der Oberflächennormalen.

#### c) Erweiterte Randbedingungen durch Zulassung von spiegelreflektierten Elektronen ( $p \neq 0$ )

Wenn die Streuung an den Probenwänden nicht mehr vollkommen diffus ist, tragen noch weitere, in Formel (3) nicht berücksichtigte Elektronen zum Strome im

Punkte  $r$  bei. Und zwar sind das solche, die ihren Startpunkt irgendwo im Probeninnern haben und erst nach einfacher oder mehrfacher Reflexion an der Oberfläche der Probe den Punkt  $r$  erreichen. Nach jeder Reflexion bleiben nur  $p$  aller Elektronen wirksam; die übrigen, diffus gestreuten, tragen im Mittel keinen Strom mehr.

Statt dass man nun diese vielen, zum Teil mehrfach gebrochenen Elektronenbahnen durchrechnet, kann man folgendes Gedankenexperiment machen: Man denke sich den Metallfilm und den elektrischen Feldverlauf nach links und rechts an seinen Wänden gespiegelt, die Spiegelbilder wieder gespiegelt und so fort, bis der ganze Raum von gespiegelten Filmen erfüllt ist (Figur 1).



Figur 1

Querschnitt durch einen dünnen Film. Ein Elektron, welches bei  $A$  startet, trägt nach zweimaliger Spiegelreflexion an der Filmoberfläche zum Strom im Punkte  $B$  bei. Denkt man sich den Film zweimal an der jeweils rechts liegenden Seite gespiegelt, so geht  $A$  in  $A''$  über und der Weg des Elektrons kann durch die Gerade, welche  $A''$  mit  $B$  verbindet, beschrieben werden.

In jedem Film sollen die unter b) beschriebenen Prozesse ablaufen. Neu kommt gegenüber b) dazu, dass für Elektronen, welche eine Zwischenwand erreichen, eine Wahrscheinlichkeit  $p$  besteht, dass sie ihren Weg geradlinig fortsetzen können. Die restlichen verlieren sich infolge diffuser Streuung im Meer der Elektronen mit isotroper Geschwindigkeitsverteilung.

Auf Grund dieser Überlegungen und unter Anwendung von Formel (3) findet man folgenden Ausdruck für  $J_x$ :

$$J_x(z, t) = \frac{3}{4 q l} \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} \left\{ \int_{-d/2}^{+d/2} dz' \varepsilon_x(z', t) e^{-\frac{|z'-z|}{l \cos \theta}} \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ p^n \int_{-(n+\frac{1}{2})d}^{-(n-\frac{1}{2})d} dz' \varepsilon_x(z', t) e^{-\frac{|z'-z|}{l \cos \theta}} + p^n \int_{+(n-\frac{1}{2})d}^{+(n+\frac{1}{2})d} dz' \varepsilon_x(z', t) e^{-\frac{|z'-z|}{l \cos \theta}} \right] \right\}. \quad (4)$$

Die Summe enthält zu jedem  $n$  die Beiträge der links und rechts genau  $n$ -fach gespiegelten Filme. Da  $\varepsilon_x(z', t)$  für jedes  $z'$  im Intervall  $(-\infty, +\infty)$  auf ein  $\varepsilon_x(z', t)$  mit  $z'$  im Intervall  $(-d/2, +d/2)$  zurückgeführt werden kann (Umkehrung der Spiegelungen), können sämtliche Integrale über  $z'$  auf Integrale mit den Grenzen  $-d/2$  und  $+d/2$  reduziert werden. Für einen einzelnen Summanden von (4) lässt sich daher schreiben:

$$\begin{aligned} & p^n \int_{-(n+\frac{1}{2})d}^{-(n-\frac{1}{2})d} dz' \varepsilon_x(z', t) e^{-\frac{|z'-z|}{l \cos \theta}} + p^n \int_{+(n-\frac{1}{2})d}^{+(n+\frac{1}{2})d} dz' \varepsilon_x(z', t) e^{-\frac{|z'-z|}{l \cos \theta}} \\ &= 2 p^n \int_{-d/2}^{+d/2} dz' \varepsilon_x(z', t) e^{-\frac{2nd}{l \cos \theta}} \cosh \left( \frac{z' - (-1)^n z}{l \cos \theta} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Wird (5) in (4) eingesetzt und werden die geometrischen Reihen, welche dabei entstehen, summiert, so folgt:

$$\begin{aligned} J_x(z, t) &= \frac{3}{4 \varrho l} \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} \int_{-d/2}^{+d/2} dz' \varepsilon_x(z', t) \left\{ e^{-\frac{|z'-z|}{l \cos \theta}} + \left[ \frac{p e^{-\frac{d}{l \cos \theta}}}{1 - p^2 e^{-\frac{2d}{l \cos \theta}}} \right] \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[ p e^{-\frac{d}{l \cos \theta}} \cosh \left( \frac{z' - z}{l \cos \theta} \right) + \cosh \left( \frac{z' + z}{l \cos \theta} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Definiert man:

$$\begin{aligned} g(z, z') &= \frac{3}{4 l} \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} \left\{ e^{-\frac{|z'-z|}{l \cos \theta}} + \frac{p e^{-\frac{d}{l \cos \theta}}}{1 - p^2 e^{-\frac{2d}{l \cos \theta}}} \left[ p e^{-\frac{d}{l \cos \theta}} \cosh \left( \frac{z' - z}{l \cos \theta} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cosh \left( \frac{z' + z}{l \cos \theta} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

so lässt sich (6) vereinfacht angeben:

$$J_x(z, t) = \frac{1}{\varrho} \int_{-d/2}^{+d/2} dz' \varepsilon_x(z', t) g(z, z'). \quad (8)$$

#### d) Berücksichtigung der Maxwellschen Gleichungen

Aus den ersten beiden Maxwellschen Gleichungen kann durch Elimination des Magnetfeldes folgende – gleich auf die geometrischen Verhältnisse eines Filmes zugeschnittene – Differentialgleichung gewonnen werden:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon_x(z, t) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} J_x(z, t). \quad (9)$$

Elimination von  $J$  aus (8) und (9) ergibt:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon_x(z, t) = \frac{\mu_0}{\varrho} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-d/2}^{+d/2} dz' \varepsilon_x(z', t) g(z, z'). \quad (10)$$



Im Grenzfall sehr kleiner freier Weglängen geht  $g(z, z')$  in eine Deltafunktion  $\delta(z' - z)$  über. Aus Gleichung (10) wird daher in diesem Grenzfall:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon_x(z, t) = \frac{\mu_0}{\varrho} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_x(z, t). \quad (11)$$

Diese Differentialgleichung gleicht formal der Wärmeleitungsgleichung und hat nachstehende, allgemeine, die Randbedingungen erfüllende Lösung: (Randbedingungen: verschwindendes Magnetfeld an der Probenoberfläche)

$$\varepsilon_x(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-t/\tau_i} \sin \left( (2i-1) \frac{\pi z}{d} \right), \quad (12)$$

wobei

$$\tau_i = \frac{\mu_0 d^2}{(2i-1)^2 \varrho \pi^2}. \quad (13)$$

Eine Eigenfunktion von (11) hat daher die Gestalt:  $e^{-t/\tau_i} \sin((2i-1)\pi z/d)$ . In Analogie dazu lässt sich die  $i$ -te Eigenfunktion von (10) schreiben:

$$e^{-t/\tau_i} \sum_{n=1}^{\infty} B_{in} \sin \left( (2n-1) \frac{\pi z}{d} \right). \quad (14)$$

Die Summe in (14) beschreibt eine allgemeine, die Randbedingungen erfüllende Ortsfunktion, welche mit einer bestimmten, noch nicht bekannten Zeitkonstanten  $\tau_i$  abklingt. Wird  $\varepsilon_x$  in (10) durch (14) ersetzt, so folgen die Gleichungen:

$$B_{ii} \sin \left( (2i-1) \frac{\pi z}{d} \right) \frac{(2i-1)^2 \pi^2}{d^2} = \frac{\mu_0}{\varrho \tau_i'} \int_{-d/2}^{+d/2} dz' g(z, z') \sum_{n=1}^{\infty} B_{in} \sin \left( (2n-1) \frac{\pi z'}{d} \right). \quad (15)$$

Wird jede Gleichung mit  $\sin((2j-1)\pi z/d)$  multipliziert und wird nachher über  $z$  integriert, so resultiert das Gleichungssystem:

$$B_{jj} \frac{(2j-1)^2 \pi^2}{d^2} \frac{d}{2} - \frac{\mu_0}{\varrho \tau_i'} \sum_{n=1}^{\infty} B_{in} \int_{-d/2}^{+d/2} dz \int_{-d/2}^{+d/2} dz' g(z, z') \cdot \sin \left( (2i-1) \frac{\pi z'}{d} \right) \sin \left( (2j-1) \frac{\pi z}{d} \right) = 0. \quad (16)$$

Das Gleichungssystem (16) hat nur nichttriviale Lösungen für die  $B$ , wenn die Determinante verschwindet. Daher liessen sich die  $\tau_i'$  aus der Säkulargleichung berechnen. Sie lassen sich aber in eleganterer Weise finden, wenn aus (16) die Matrix ( $A_{ij}$ ) hergeleitet wird, da dann die Eigenwerte dieser Matrix gerade den gesuchten  $\tau_i'$  entsprechen.

$$A_{ij} = \frac{\mu_0 d^2}{\varrho \pi^2 (2j-1) (2i-1)} \frac{2}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} dz \int_{-d/2}^{+d/2} dz' g(z, z') \sin \left( (2i-1) \frac{\pi z'}{d} \right) \cdot \sin \left( (2j-1) \frac{\pi z}{d} \right). \quad (17)$$

Nach Einsetzen von (7) in (17) können die im Matrixelement  $A_{ij}$  enthaltenen Integrale fast vollständig ausgerechnet werden. Es bleibt in einem Term ein Integral über  $\cos \theta$ . In Analogie zu Formel 25 von SONDHEIMER<sup>5)</sup> wurden  $1/t$  für  $\cos \theta$  und  $k$  für  $d/l$  substituiert. Ferner wurde  $A_{ij}$  wegen (13) durch  $\mu_0 d^2/\rho \pi^2$  dividiert, damit die Eigenwerte der so gebildeten Matrix ( $M_{ij}$ ) gerade die relativen Widerstände  $\rho_{\tau i}/\rho$ , welche den einzelnen Eigenfunktionen von (10) zugeschrieben werden können, darstellen.

$$M_{ij} = \frac{3/2 \, k^2/\pi^2}{(2j-1)(2i-1)} \left\{ \delta_{ij} \left[ -\frac{1}{(2i-1)^2} + \frac{\pi^2(2i-1)^2 + k^2}{\pi k(2i-1)^3} \arctan \left( \frac{\pi}{k} (2i-1) \right) \right] \right. \\ \left. + (-1)^{i+j+1} \frac{2k}{\pi^2} (1-p) \int_1^\infty dt \frac{(1+e^{-tk})(t-t^{-1})}{(1+pe^{-tk}) \left[ (2i-1)^2 + \left( \frac{tk}{\pi} \right)^2 \right] \left[ (2j-1)^2 + \left( \frac{tk}{\pi} \right)^2 \right]} \right\}. \quad (18)$$

### e) Die numerischen Rechnungen

Die numerische Auswertung gestaltete sich relativ einfach, da das Rechenzentrum der ETH in entgegenkommender Weise zwei Unterprogramme zur Verfügung stellte. Das eine berechnete nach der Methode von ROMBERG (Eine Beschreibung dieser Methode gab zum Beispiel STIEFEL<sup>7)</sup>.) die Integrale, während das andere die Eigenwerte der symmetrischen Matrix ( $M_{ij}$ ) bestimmte. Den dazu verwendeten Algorithmus beschrieben FORSYTHE and HENRICI<sup>8)</sup>. Da die Matrix ( $M_{ij}$ ) von unendlicher Ordnung ist, kann man prinzipiell die Eigenwerte nicht exakt berechnen. Es zeigte sich aber, da die Matrix ( $M_{ij}$ ) schon fast diagonal ist, dass die Berücksichtigung dreier Zeilen und Spalten genügt, um eine relative Genauigkeit von  $10^{-4}$  zu erreichen.

Für die numerischen Integrationen wurde die Integrationsvariable  $t$  jeweils durch  $u^{-8}$  substituiert, weil dadurch die Stützwerte in der Umgebung der kritischen Stelle (Maximum des Integranden für sehr grosse  $t$ ) gehäuft werden.

## III. Die Resultate

Unsere Tabellen gelten für ein Sommerfeldmodell, das heisst für ein quadratisches Dispersionsgesetz mit kugelförmigen Energieflächen. Eine Berechnung für ellipsoidförmige Energieflächen (bei  $p = 0$ ) ist in einer früheren Arbeit gegeben worden<sup>1)</sup>. Es wird eine ortsunabhängige Relaxationszeit vorausgesetzt, was allerdings für die Berechnung des Ladungstransportes in dünnen Proben nicht mehr gerechtfertigt ist, wenn viele Kleinwinkelstreuungen der Elektronen auftreten (OLSEN<sup>9)</sup>).

Die numerische Auswertung wurde so weit getrieben, dass die letzte Stelle der in den Tabellen aufgeführten Zahlen bis auf Rundungsfehler als gesichert betrachtet werden kann. Dabei zeigte es sich, dass die in <sup>1)</sup> angewandte Näherung (Vernachlässigung der Ausserdiagonalterme in der Matrix  $M_{ij}$  (18)) Fehler bis zu 1,5 ‰ ergaben, was jedoch wesentlich kleiner als die im Experiment erreichbare Genauigkeit ist.

In der Tabelle 1 wird der Effektivwert  $\rho_\tau$  des spezifischen Widerstandes für Wirbelströme in dünnen Filmen dividiert durch den spezifischen Widerstand  $\rho$  einer dicken Probe des gleichen Materials als Funktion von  $l/d$  für sieben verschiedene Werte des Oberflächenstreuparameters  $p$  tabelliert, während in Tabelle 2 eine Erweiterung

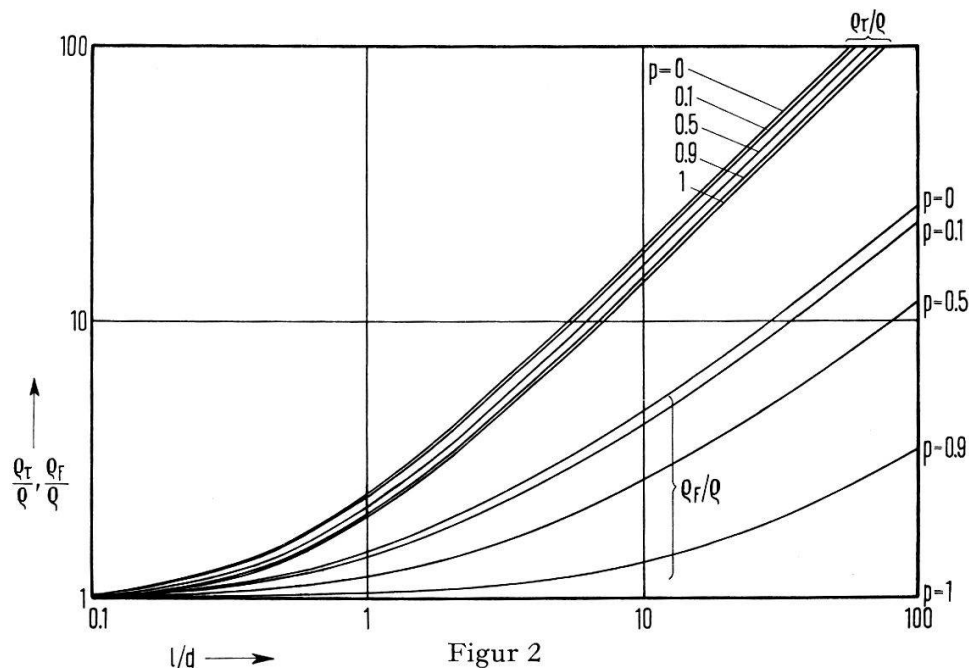


Tabelle 1

Die für ein Sommerfeldmodell berechneten relativen *Wirbelstromwiderstände*  $\varrho_r/\varrho$  dünner Filme bei variablem  $p$  und  $d/l$ .

$d$  = Dicke der Probe.  $l$  = mittlere freie Weglänge der Elektronen.  $p$  = Wahrscheinlichkeit für Spiegelreflexion an der Probenoberfläche.  $\varrho$  = spezifischer elektrischer Widerstand einer unbegrenzten Probe.  $\varrho_r$  = effektiver Wirbelstromwiderstand.

$k = d/l$	$p = 0$	$p = 0,1$	$p = 0,3$	$p = 0,5$	$p = 0,7$	$p = 0,9$	$p = 1$
$k \gg 1$	$1 + 3/4 \cdot (1 - p)/k$						
100	1,0077	1,0070	1,0055	1,0040	1,0025	1,0009	1,0002
50	1,0160	1,0144	1,0114	1,0083	1,0053	1,0023	1,0008
20	1,0434	1,0394	1,0316	1,0238	1,0162	1,0086	1,0049
10	1,0975	1,0892	1,0729	1,0571	1,0417	1,0267	1,0193
5	1,2293	1,2118	1,1781	1,1461	1,1157	1,0868	1,0729
2	1,7049	1,6612	1,5804	1,5075	1,4413	1,3810	1,3528
1,8	1,7979	1,7498	1,6614	1,5819	1,5102	1,4451	1,4148
1,5	1,9857	1,9292	1,8260	1,7343	1,6521	1,5781	1,5438
1,2	2,270	2,202	2,078	1,9686	1,8719	1,7854	1,7455
1,0	2,556	2,476	2,333	2,207	2,097	1,9985	1,9533
0,8	2,987	2,891	2,719	2,570	2,440	2,324	2,272
0,5	4,284	4,141	3,889	3,674	3,487	3,323	3,248
0,2	9,467	9,152	8,603	8,137	7,735	7,384	7,224
0,1	$1,809 \times 10$	$1,750 \times 10$	$1,647 \times 10$	$1,559 \times 10$	$1,484 \times 10$	$1,418 \times 10$	$1,388 \times 10$
0,05	$3,532 \times 10$	$3,418 \times 10$	$3,220 \times 10$	$3,051 \times 10$	$2,906 \times 10$	$2,779 \times 10$	$2,721 \times 10$
0,02	$8,699 \times 10$	$8,422 \times 10$	$7,938 \times 10$	$7,527 \times 10$	$7,173 \times 10$	$6,862 \times 10$	$6,721 \times 10$
0,01	$1,731 \times 10^2$	$1,676 \times 10^2$	$1,580 \times 10^2$	$1,499 \times 10^2$	$1,428 \times 10^2$	$1,367 \times 10^2$	$1,339 \times 10^2$
0,005	$3,453 \times 10^2$	$3,344 \times 10^2$	$3,153 \times 10^2$	$2,991 \times 10^2$	$2,851 \times 10^2$	$2,728 \times 10^2$	$2,672 \times 10^2$
0,002	$8,619 \times 10^2$	$8,347 \times 10^2$	$7,870 \times 10^2$	$7,466 \times 10^2$	$7,117 \times 10^2$	$6,811 \times 10^2$	$6,672 \times 10^2$
0,001	$1,723 \times 10^3$	$1,668 \times 10^3$	$1,573 \times 10^3$	$1,493 \times 10^3$	$1,423 \times 10^3$	$1,362 \times 10^3$	$1,334 \times 10^3$
0,0001	$1,722 \times 10^4$	$1,667 \times 10^4$	$1,572 \times 10^4$	$1,492 \times 10^4$	$1,422 \times 10^4$	$1,361 \times 10^4$	$1,333 \times 10^4$
$k \ll 1$	$1,722/k$	$1,667/k$	$1,572/k$	$1,492/k$	$1,422/k$	$1,361/k$	$1,333/k$



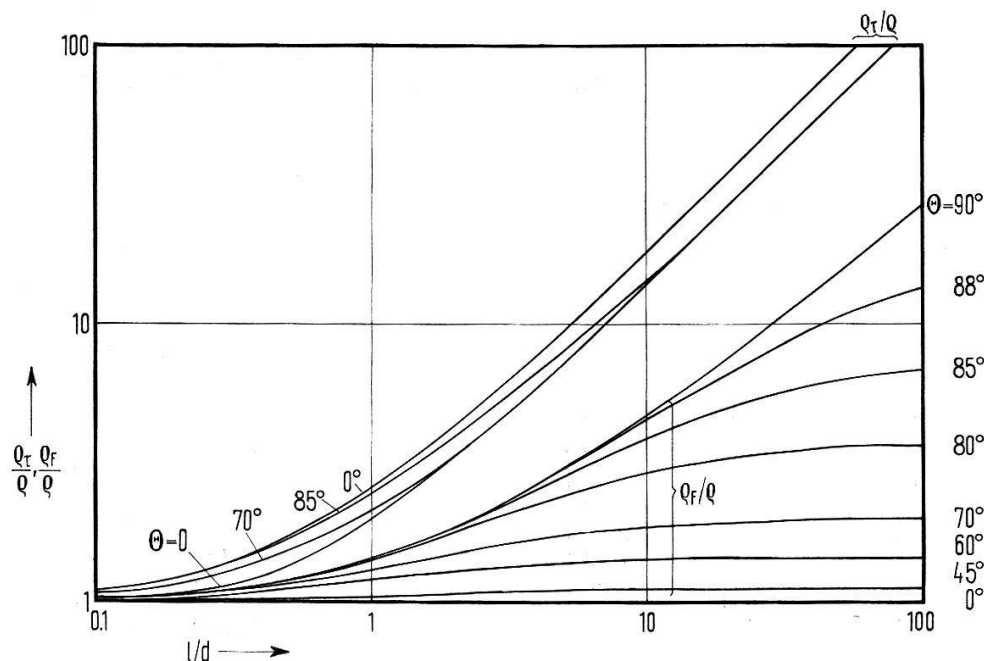
Graphische Darstellung der Tabellen 1 und 2.

$d$  = Dicke des Filmes.  $l$  = mittlere freie Weglänge der Elektronen.  $p$  = Wahrscheinlichkeit für Spiegelreflexion an der Probenoberfläche.  $\varrho$  = spezifischer elektrischer Widerstand einer unbegrenzten Probe.  $\varrho_F$  = effektiver Gleichstromwiderstand.  $\varrho_r$  = effektiver Wirbelstromwiderstand.

Tabelle 2

Die für ein Sommerfeldmodell berechneten relativen *Gleichstromwiderstände*  $q_F/q$  dünner Filme bei variablem  $p$  und  $d/l$ .  $q_F$  = effektiver Gleichstromwiderstand. Übrige Bezeichnungen wie bei Tabelle 1.

$k = d/l$	$p = 0$	$p = 0,1$	$p = 0,3$	$p = 0,5$	$p = 0,7$	$p = 0,9$	$p = 1$
$k \gg 1$	$1 + 3/8 \cdot (1 - p)/k$						
100	1,0038	1,0034	1,0026	1,0019	1,0011	1,0004	1,0000
50	1,0076	1,0068	1,0053	1,0038	1,0023	1,0008	1,0000
20	1,0191	1,0172	1,0133	1,0095	1,0057	1,0019	1,0000
10	1,0390	1,0349	1,0270	1,0191	1,0114	1,0038	1,0000
5	1,0810	1,0723	1,0554	1,0389	1,0230	1,0076	1,0000
2	1,2208	1,1953	1,1467	1,1014	1,0589	1,0190	1,0000
1,8	1,2477	1,2188	1,1640	1,1131	1,0656	1,0212	1,0000
1,5	1,3017	1,2659	1,1987	1,1366	1,0790	1,0254	1,0000
1,2	1,3824	1,3363	1,2503	1,1715	1,0990	1,0318	1,0000
1,0	1,4623	1,4059	1,3013	1,2061	1,1188	1,0382	1,0000
0,8	1,5799	1,5083	1,3764	1,2572	1,1482	1,0476	1,0000
0,5	1,9161	1,8011	1,5915	1,4041	1,2337	1,0758	1,0000
0,2	3,096	2,826	2,346	1,9251	1,5444	1,1832	1,0000
0,1	4,782	4,286	3,417	2,668	1,9958	1,3483	1,0000
0,05	7,728	6,825	5,269	3,950	2,778	1,6455	1,0000
0,02	$1,533 \times 10$	$1,335 \times 10$	9,981	7,184	4,741	2,405	1,0000
0,01	$2,648 \times 10$	$2,287 \times 10$	$1,680 \times 10$	$1,182 \times 10$	7,526	3,477	1,0000
0,005	$4,658 \times 10$	$3,997 \times 10$	$2,896 \times 10$	$2,002 \times 10$	$1,240 \times 10$	5,327	1,0000
0,002	$1,004 \times 10^2$	$8,560 \times 10$	$6,115 \times 10$	$4,156 \times 10$	$2,506 \times 10$	$1,002 \times 10$	1,0000
0,001	$1,819 \times 10^2$	$1,544 \times 10^2$	$1,094 \times 10^2$	$7,361 \times 10$	$4,372 \times 10$	$1,680 \times 10$	1,0000
0,0001	$1,384 \times 10^3$	$1,165 \times 10^3$	$8,101 \times 10^2$	$5,331 \times 10^2$	$3,064 \times 10^2$	$1,086 \times 10^2$	1,0000
0,00001	$1,116 \times 10^4$	$9,340 \times 10^3$	$6,420 \times 10^3$	$4,180 \times 10^3$	$2,350 \times 10^3$	$8,008 \times 10^2$	1,0000
$k \ll 1$	$4(1 - p)/3(1 + p) k \ln(1/k)$ (gilt nur für $p < 1$ )						
							1,0000



Figur 3

Graphische Darstellung der Tabellen 3 und 4.

$\theta$  = Grenzwinkel für Spiegelreflexion: Elektronen, deren Geschwindigkeitsvektor mit der Oberflächennormalen einen Winkel zwischen  $\theta$  und  $90^\circ$  einschliesst, werden spiegelreflektiert, die übrigen diffus gestreut. Übrige Bezeichnungen wie in Figur 2.

der schon von FUCHS<sup>10)</sup> berechneten spezifischen Gleichstromwiderstände  $\varrho_F$  auf sieben verschiedene  $p$ -Werte gegeben wird. Die beiden Tabellen sind in Figur 1 auch noch graphisch dargestellt.

Es zeigt sich, dass  $\varrho_F$  viel stärker von  $p$  abhängt als  $\varrho_T$ . Dies ist folgendermassen zu erklären. Bei einer Spiegelreflexion an der Probenoberfläche wird das Elektron seine Driftgeschwindigkeit behalten, ein solcher Stoss also im Gleichstromfall keinen Einfluss auf den Ladungstransport ausüben. Dementsprechend wird  $\varrho_F$  für  $p = 1$  unabhängig von der Filmdicke, gleich dem spezifischen Widerstand  $\varrho$  einer dicken Probe des gleichen Materials. Im Wirbelstromfall heben sich andererseits je zwei Elektronen, die – ohne Stösse zu erleiden – in entgegengesetzter Richtung von Oberfläche zu Oberfläche fliegen, wegen der Antisymmetrie des elektrischen Feldes<sup>1)</sup> für den Ladungstransport gegenseitig auf. Daran vermag auch das Auftreten von Spiegelreflexionen nichts zu ändern. Spiegelreflexionen haben deshalb nur bei denjenigen Elektronen, welche nicht von Wand zu Wand fliegen, einen Einfluss auf den Ladungstransport. Dementsprechend tritt hier auch für  $p = 1$  ein starker «Size-Effekt» auf.

Tabelle 3

Die für ein Sommerfeldmodell berechneten relativen *Wirbelstromwiderstände*  $\varrho_T/\varrho$  dünner Filme bei variablem  $\theta$  und  $d/l$ .

$\theta$  = Grenzwinkel für Spiegelreflexion: Elektronen, deren Geschwindigkeitsvektor mit der Oberflächennormalen einen Winkel zwischen  $\theta$  und  $90^\circ$  einschliesst, werden spiegelreflektiert, die übrigen diffus gestreut. Übrige Bezeichnungen wie bei Tabelle 1.

$k = d/l$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 70^\circ$	$\theta = 80^\circ$	$\theta = 85^\circ$	$\theta = 88^\circ$	$\theta = 89^\circ$
$k \gg 1$	$1 + 3/4 \cdot \sin^4 \theta / k$						
100	1,0021	1,0044	1,0061	1,0073	1,0076	1,0077	1,0077
50	1,0045	1,0093	1,0126	1,0150	1,0157	1,0159	1,0160
20	1,0141	1,0261	1,0346	1,0410	1,0428	1,0433	1,0434
10	1,0367	1,0606	1,0784	1,0922	1,0961	1,0973	1,0974
5	1,1008	1,1459	1,1841	1,2165	1,2260	1,2288	1,2292
2	1,3808	1,4494	1,5377	1,6478	1,6893	1,7023	1,7043
1,8	1,4414	1,5098	1,6033	1,7287	1,7787	1,7948	1,7971
1,5	1,5676	1,6338	1,7343	1,8888	1,9579	1,9811	1,9846
1,2	1,7656	1,8267	1,9312	2,124	2,226	2,263	2,268
1,0	1,9705	2,026	2,130	2,352	2,491	2,545	2,554
0,8	2,286	2,334	2,432	2,684	2,880	2,968	2,983
0,5	3,257	3,290	3,368	3,642	3,988	4,222	4,268
0,2	7,227	7,241	7,279	7,466	7,950	8,882	9,283
0,1	$1,388 \times 10$	$1,389 \times 10$	$1,391 \times 10$	$1,402 \times 10$	$1,439 \times 10$	$1,571 \times 10$	$1,702 \times 10$
0,05	$2,721 \times 10$	$2,722 \times 10$	$2,723 \times 10$	$2,729 \times 10$	$2,751 \times 10$	$2,864 \times 10$	$3,077 \times 10$
0,02	$6,721 \times 10$	$6,721 \times 10$	$6,721 \times 10$	$6,724 \times 10$	$6,734 \times 10$	$6,796 \times 10$	$6,970 \times 10$
0,01	$1,339 \times 10^2$	$1,339 \times 10^2$	$1,339 \times 10^2$	$1,339 \times 10^2$	$1,339 \times 10^2$	$1,343 \times 10^2$	$1,354 \times 10^2$
0,005	$2,672 \times 10^2$	$2,672 \times 10^2$	$2,672 \times 10^2$	$2,672 \times 10^2$	$2,672 \times 10^2$	$2,674 \times 10^2$	$2,680 \times 10^2$
0,002	$6,672 \times 10^2$	$6,672 \times 10^2$	$6,672 \times 10^2$	$6,672 \times 10^2$	$6,672 \times 10^2$	$6,673 \times 10^2$	$6,676 \times 10^2$
0,001	$1,334 \times 10^3$	$1,334 \times 10^3$	$1,334 \times 10^3$	$1,334 \times 10^3$	$1,334 \times 10^3$	$1,334 \times 10^3$	$1,334 \times 10^3$
$k \ll 1$ $\theta < 90^\circ$	$(4/3)/k$						

Die Kolonnen  $\theta = 0^\circ$  und  $\theta = 90^\circ$  entsprechen genau den Kolonnen  $p = 1$  und  $p = 0$  von Tabelle 1.

Tabelle 4

Die für ein Sommerfeldmodell berechneten relativen *Gleichstromwiderstände*  $\varrho_F/\varrho$  dünner Filme bei variablem  $\theta$  und  $d/l$ .

$\varrho_F$  = effektiver Gleichstromwiderstand.  $\theta$  = Grenzwinkel für Spiegelreflexion: Elektronen, deren Geschwindigkeitsvektor mit der Oberflächennormalen einen Winkel zwischen  $\theta$  und  $90^\circ$  einschliesst, werden spiegelreflektiert, die übrigen diffus gestreut. Übrige Bezeichnungen wie bei Tabelle 1.

$k = d/l$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 70^\circ$	$\theta = 80^\circ$	$\theta = 85^\circ$	$\theta = 88^\circ$	$\theta = 89^\circ$
$k \gg 1$	$1 + 3/8 \cdot \sin^4 \theta/k$						
100	1,0009	1,0021	1,0029	1,0035	1,0037	1,0038	1,0038
50	1,0019	1,0042	1,0059	1,0071	1,0074	1,0075	1,0076
20	1,0047	1,0107	1,0148	1,0180	1,0188	1,0191	1,0191
10	1,0095	1,0215	1,0301	1,0366	1,0383	1,0389	1,0389
5	1,0191	1,0440	1,0621	1,0758	1,0797	1,0808	1,0810
2	1,0448	1,1102	1,1623	1,2045	1,2166	1,2202	1,2207
1,8	1,0486	1,1213	1,1803	1,2288	1,2429	1,2470	1,2476
1,5	1,0556	1,1419	1,2149	1,2770	1,2953	1,3007	1,3015
1,2	1,0642	1,1691	1,2634	1,3479	1,3735	1,3810	1,3821
1,0	1,0712	1,1924	1,3074	1,4162	1,4503	1,4603	1,4618
0,8	1,0794	1,2215	1,3657	1,5135	1,5623	1,5770	1,5791
0,5	1,0946	1,2805	1,4974	1,7683	1,8754	1,9095	1,9145
0,2	1,1145	1,3687	1,7352	2,412	2,855	3,053	3,085
0,1	1,1225	1,4081	1,8609	2,909	3,911	4,586	4,730
0,05	1,1268	1,4304	1,9382	3,301	5,056	6,877	7,470
0,02	1,1295	1,4446	1,9906	3,617	6,304	10,79	13,41
0,01	1,1304	1,4495	2,009	3,742	6,909	13,68	19,42
0,005	1,1309	1,4520	2,019	3,808	7,266	15,90	25,54
0,002	1,1312	1,4535	2,024	3,850	7,501	17,67	31,80
0,001	1,1313	1,4540	2,026	3,864	7,584	18,36	34,69
0,0001	1,1314	1,4545	2,028	3,877	7,660	19,03	37,82
0,00001	1,1314	1,4545	2,028	3,878	7,668	19,10	38,16
$k \ll \cos \theta$	$2/(3 \cdot \cos \theta - \cos^3 \theta)$						
$\theta < 90^\circ$							

Die Kolonnen  $\theta = 0^\circ$  und  $\theta = 90^\circ$  entsprechen genau den Kolonnen  $p = 1$  und  $p = 0$  von Tabelle 2.

In Tabelle 3 sind  $\varrho_\tau/\varrho$  für sieben verschiedene Werte des Grenzwinkels  $\theta$  (Spiegelreflexionen für alle Elektronen, die so flach auf die Oberfläche auftreffen, dass der Winkel zwischen der Auftreffrichtung und der Normalen zur Oberfläche grösser als  $\theta$  ist) tabelliert. Diese beiden Tabellen sind in Figur 2 auch noch graphisch dargestellt. Auch hier ist wiederum  $\varrho_\tau$  viel weniger von  $p$  abhängig als  $\varrho_F$ . Auffallend ist, dass schon für  $\theta = 88^\circ$  (wenn also nur diejenigen Elektronen Spiegelreflexionen erleiden, die sehr flach auf die Oberfläche auftreffen) eine spürbare Reduktion des «Size-Effektes» von  $\varrho_F$  gegenüber dem Fall mit  $\theta = 90^\circ$  (völlig diffuse Streuung aller Elektronen) auftritt. In sehr dünnen Proben können nur die sehr flach auftreffenden Elektronen lange freie Weglängen hinter sich haben und damit stark zum Ladungstransport beitragen.  $\varrho_F$  wird deshalb besonders stark vom Charakter der Oberflächenstreuungen dieser Elektronen abhängen.

Es sei uns hier gestattet, Herrn Prof. Dr. P. GRASSMANN, dem Vorstand des Institutes für kalorische Apparate und Kältetechnik der Eidgenössischen Technischen Hochschule, für seine wohlwollende Unterstützung unseren herzlichen Dank auszusprechen. Besonders liegt es uns daran, Herrn Prof. Dr. J. L. OLSEN, der uns auch die Anregung zu dieser Arbeit gab, für viele interessante Diskussionen zu danken. Ausserdem sind wir Herrn Prof. Dr. H. RUTISHAUSER und Herrn Dr. H. THOMAS (IBM Forschungslaboratorium, Rüschlikon/ZH) für viele wertvolle Hinweise zu tiefem Dank verpflichtet. Diese Arbeit wurde dank der finanziellen Unterstützung durch den Schweizerischen Nationalfonds ermöglicht.

### Literatur

- 1) P. COTTI, Phys. kondens. Materie *3*, 40 (1964).
- 2) A. N. FRIEDMAN und S. H. KOENIG, IBM J. Research Develop. *4*, 158 (1960).
- 3) J. E. PARROTT, Proc. Phys. Soc. *85*, 1143 (1965).
- 4) C. P. BEAN, R. W. DEBLOIS und L. B. NESBITT, J. Appl. Phys. *30*, 1976 (1959).
- 5) E. H. SONDHEIMER, Phil. Mag. Suppl. *1*, 1 (1952).
- 6) J. BARDEEN: in Handbuch der Physik, Bd. 15, S. 300. Göttingen: Springer 1956.
- 7) E. STIEFEL, *Einführung in die numerische Mathematik*, Seiten 131 ff, Teubner, Stuttgart (1961).
- 8) A. FORSYTHE and P. HENRICI, Trans. Amer. Math. Soc. *94*, 1–23 (1960).
- 9) J. L. OLSEN, Helv. Phys. Acta *31*, 713 (1958).
- 10) K. FUCHS, Proc. Camb. Phil. Soc. *34*, 100 (1938).