

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta

**Band:** 38 (1965)

**Heft:** VIII

**Artikel:** Blasendichtemessungen an Spuren hochenergetischer Elektronen in einer Blaskammer

**Autor:** Hofmann, J. / Hugentobler, E.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-113620>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Blasendichtemessungen an Spuren hochenergetischer Elektronen in einer Blasenkammer

von J. Hofmann und E. Hugentobler

Physik-Institut der Universität Freiburg/Schweiz

(19. 7. 65)

*Abstract.* We have measured the bubble-density of electron-tracks in a bubble-chamber filled with Freon. The energy of the electrons varied between 50 MeV and 3700 MeV. The results show a nearly constant value of the bubble-density above an energy of 150 MeV.

The comparison between the theory and the experiment shows that the present theory gives no satisfactory explanation of the bubble-density above 150 MeV.

## 1. Einleitung

Obwohl Blasenkammern heute zu einem Standardinstrument der Hochenergiephysik geworden sind, bestehen über den Mechanismus der Blasenbildung noch verschiedene Unklarheiten. Um speziell über die Blasendichte hochenergetischer Teilchen Aufschluss zu erhalten, wurden in Freiburg schon seit einiger Zeit Messungen an Spuren schneller Teilchen durchgeführt. HUGENTOBLE et al.<sup>1)</sup> haben die Blasendichte als Funktion der kinetischen Energie des einfallenden Teilchens an Protonen- und  $\pi$ -Spuren bis zu  $\gamma = 125$  gemessen ( $\gamma - 1 = E_k/m_0 c^2$ ,  $m_0$  = Ruhemasse,  $E_k$  = kinetische Energie,  $c$  = Lichtgeschwindigkeit). Um höhere  $\gamma$  zu erreichen, muss man heutzutage notgedrungen Elektronen als einfallende Teilchen wählen.

Über den Verlauf der Blasendichte als Funktion von  $\gamma$  bis zu einem  $\gamma = \gamma_{min} \simeq 4$  bestehen keine Zweifel: Die Blasendichte fällt mit  $1/\beta^2$  ab<sup>1)2)21-27)</sup> ( $\beta = v/c$ ;  $v$  = Teilchengeschwindigkeit). Von  $\gamma = \gamma_{min}$  bis zu  $\gamma \simeq 100$  wurde ein sogenannter relativistischer Anstieg der Blasendichte in Freon<sup>1)</sup> und Propan<sup>2)3)</sup> beobachtet. Im Gegensatz dazu wurde in Wasserstoff kein Anstieg festgestellt<sup>4)</sup>.

Am Elektronensynchrotron der Universität Bonn und am Deutschen Elektronensynchrotron (DESY) in Hamburg haben wir Blasendichtemessungen in einer Freon-Blasenkammer im Bereich von  $\gamma = 100$  bis  $\gamma = 880$  (Bonn) und von  $\gamma = 400$  bis  $\gamma = 7400$  (DESY) durchgeführt.

Die Untersuchungen bei sehr hohen  $\gamma$  waren auch im Hinblick auf die Energiebestimmung von hochenergetischen Teilchen, wie sie mit Beschleunigern in der 100 GeV-Region produziert werden, von Interesse.

## 2. Experiment

### 2.1. Blaskammer

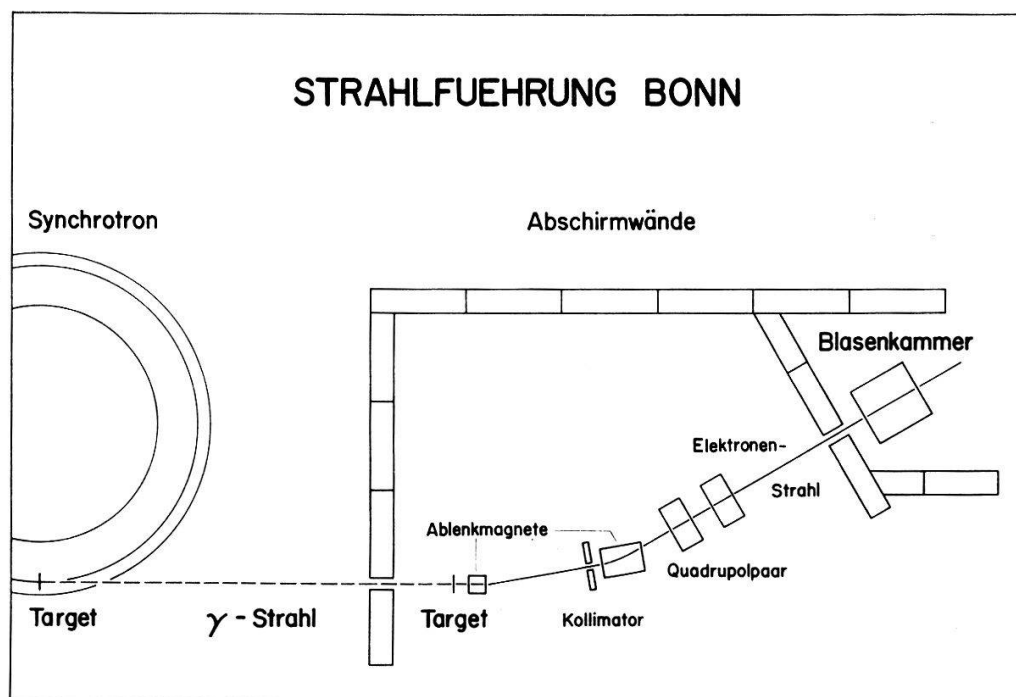
Bei der von uns verwendeten 2-Liter-Blaskammer<sup>5)</sup> können Temperatur und Druck stabilisiert werden. Der einstellbare Enddruck gestattet es, die Empfindlichkeit der Kammer reproduzierbar zu verändern. Die für unsere Zwecke verlangte Konstanz der Kammerempfindlichkeit – und damit der Blasendichte – auf  $\pm 2\%$  innerhalb eines Zeitintervalles von 15 Min. konnte erreicht werden. Langzeitige Temperaturschwankungen bis zu  $\pm 0,2^\circ\text{C}$  im Verlaufe einiger Stunden und eine damit verbundene Schwankung in der Blasendichte von  $\pm 10\%$  konnten nicht vermieden werden. Es war darum erforderlich, periodisch (das heisst alle 15 Minuten) Blasendichtemessungen an Referenzspuren auszuführen.

Als Strahleinschussfenster wurde ein 3 mm dickes Aluminiumfenster mit einem Durchmesser von 2,5 cm gewählt (über Energieverluste im Einschussfenster siehe 2.2). Als Kammerflüssigkeiten wurden  $\text{CBrF}_3$  (Freon 13-B1) und  $\text{C}_3\text{F}_8$  verwendet.

### 2.2. Synchrotronstrahl

Um einerseits die Blasendichtemessungen an sauber getrennten Spuren durchführen zu können und andererseits in möglichst kurzer Zeit eine gute Statistik zu erreichen, war eine mittlere Teilchenzahl von etwa 5–10 Elektronen pro Synchrotronpuls zu verlangen. Es wurden deshalb umfangreiche Berechnungen über den Strahl-  
aufbau durchgeführt, die hier kurz skizziert seien.

Als Strahlführungselemente standen in Bonn zwei Ablenkmagnete und ein Quadrupolpaar zur Verfügung. Figur 1 zeigt die prinzipielle Anordnung der Strahlführungselemente. Die im Synchrotron beschleunigten Elektronen wurde in einer



Figur 1  
Versuchsaufbau in Bonn

internen Target in  $\gamma$ -Quanten konvertiert. Die  $\gamma$ -Quanten erzeugten anschliessend in einer externen Target ( $\varnothing$  1 cm) durch Paarerzeugung wieder Elektronen, die schliesslich in die Kammer gelenkt wurden.

$N(E, \vartheta) dE d\vartheta$  bezeichne die Anzahl der Elektronen, die aus der Target mit einer Energie zwischen  $E$  und  $E + dE$  in den Winkel  $\vartheta, \vartheta + d\vartheta$  emittiert werden. Mit  $\vartheta$  werde der Winkel zwischen der Richtung der  $\gamma$ -Quanten und der Richtung der Elektronen bezeichnet. Bei einer Targetdicke  $x_1 \ll x_0$  ( $x_0$  = Strahlungslänge) können Absorption und Energieänderung der erzeugten Elektronen vernachlässigt werden. Wenn wir für den Koeffizienten für die Paarerzeugung die empirische Form

$$\mu_p = \frac{1}{x_k} \cdot \frac{1}{1 + 34/K} [\text{cm}^{-1}] \quad (1)$$

annehmen [ $x_k$  = Konversionslänge und  $K$  = Energie der erzeugenden  $\gamma$ -Quanten (in MeV)], finden wir

$$N(E, \vartheta) dE d\vartheta = C \cdot \log \frac{E_{\max}(E + 34)}{E(E_{\max} + 34)} \int_0^{x_1} P(\vartheta, x) dx dE d\vartheta. \quad (2)$$

Es ist:  $E_{\max}$  = maximale  $\gamma$  Energie

$x_1$  = Targetdicke gemessen in  $x_0$

$C$  = Material- und Geometriekonstante

$P(\vartheta, x) d\vartheta$  ist die Winkelverteilung der aus der Target emittierten Elektronen. Es ist

$$P(\vartheta, x) d\vartheta = \frac{2\vartheta}{\vartheta_{\text{eff}}^2} e^{-\vartheta^2/\vartheta_{\text{eff}}^2} d\vartheta \quad (3)$$

mit

$$\vartheta_{\text{eff}}^2 = \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 = \frac{450}{E^2} x + \frac{0,475}{E^{1,67}}, \quad (3a)$$

$\vartheta_1$  rührt von der Vielfachstreuung und  $\vartheta_2$  von der Paarerzeugung her.  $x$  ist die Schichtdicke, die die Elektronen nach ihrer Entstehung in der Target noch zu durchdringen haben. Die Integration über  $x$  ergibt die bekannten Integral-Sinus und -Cosinus<sup>16)</sup>. Die Rechnung wurde numerisch durchgeführt. Tabelle 1 gibt die Ergebnisse für einen typischen Fall wieder.

Tabelle 1  
Anzahl  $N(E, \theta)$  der Elektronen mit  $\vartheta \leq \theta$  ( $x_1 = 0,106 x_0$ )

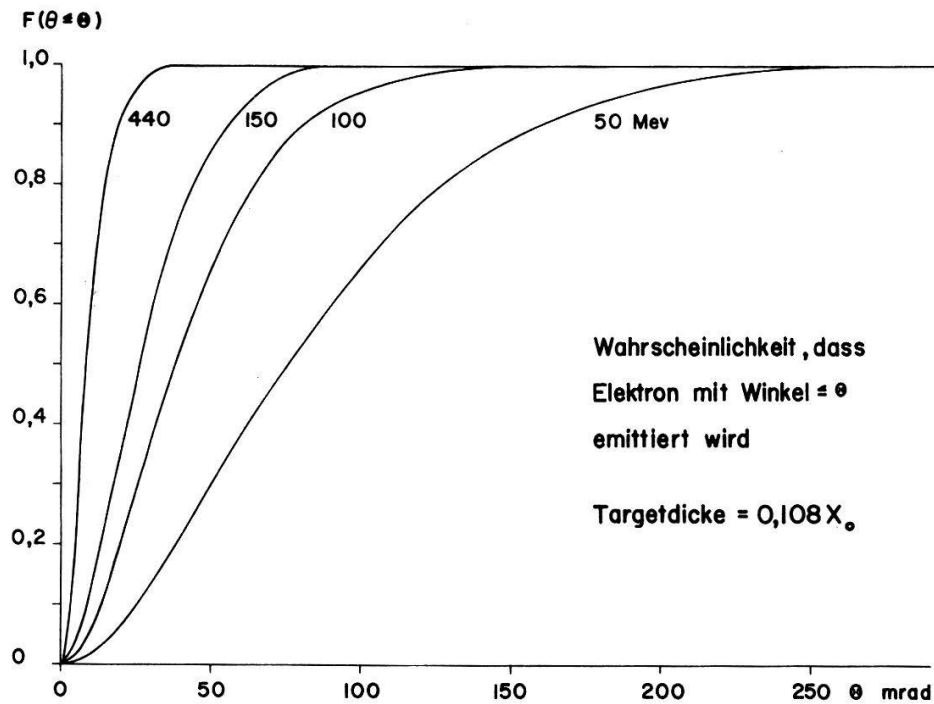
$\theta$ (mrad) $E$ (MeV)	2	4	8	16	32	64	128	256
50	7,6	30	120	464	1620	4490	8690	10800
200	19,8	77	279	813	1620	2030	2050	2050
400	7,5	27	82	167	211	213	213	213

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron in den Winkel  $\vartheta \leq \theta$  emittiert wird, kann definiert werden durch

$$F(\vartheta \leq \theta) = \frac{N(E, \theta)}{N(E, \theta_{\max})} \quad (4)$$



wobei  $\theta_{max}$  so zu wählen ist, dass  $N(E, \theta > \theta_{max}) = N(E, \theta_{max})$ . Figur 2 zeigt den Verlauf dieser Funktion, die für die Strahlberechnung wichtig ist.



Figur 2

Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron in einen Winkel  $\vartheta \leq \theta$  emittiert wird

Zur Berechnung der in der Kammer zu erwartenden Elektronen wurde die Monte-Carlo-Methode angewendet (Einzelheiten siehe Anhang I).

Die Berechnungen zeigten folgendes Ergebnis:

Tabelle 2

Vergleich der berechneten und der experimentellen Anzahl Elektronen in der Kammer

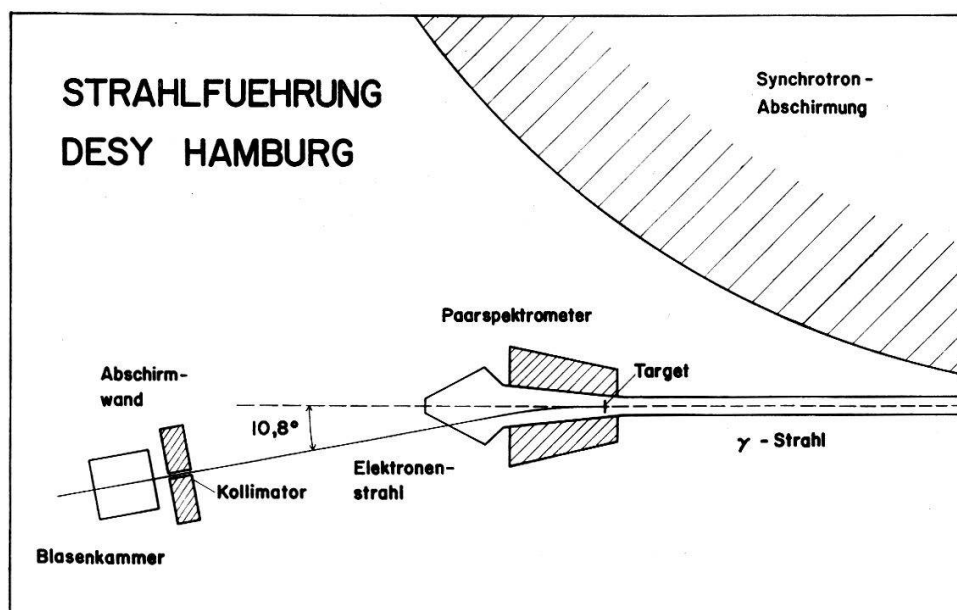
Energie (MeV)	Berechnete Anzahl Elektronen	Exp. Anzahl pro Bild mit Cu-Target ( $x_1 = 0,1 x_0$ )
50	0,5	0,3
100	2,7	2,8
150	4,5	1,1
400	1,3	2,1

Aus dem Vergleich der berechneten Anzahl Elektronen pro Bild und den tatsächlich registrierten ergibt sich, dass mit diesem Verfahren die Strahlintensität befriedigend genau berechnet werden kann, obwohl die Vielfachstreuung in der Luft bei der Berechnung nicht berücksichtigt wurde. Zieht man noch die Schwankungen der Synchrotronintensität in Betracht, so ist die Übereinstimmung als gut zu bezeichnen.

Die Energieauflösung des Elektronenstrahls wurde mit Hilfe des sogenannten «floating-wire» Verfahrens bestimmt<sup>7)</sup>. Es wurde eine Energieauflösung  $\Delta E/E = 5\%$  gefunden. Zusätzliche Messungen der Zählrate als Funktion der Magnetströme mit in

Koinzidenz geschalteten Szintillationszählern vor und hinter dem letzten Kollimator zeigten, dass auch die Vielfachstreuung in der Luft und allfällige Streuung an Kollimatoren oder Magneten das Ergebnis der «floating-wire»-Messung nicht wesentlich beeinflussen.

Bei den Messungen am DESY war der Strahlaufbau viel einfacher. Der  $\gamma$ -Strahl wurde in einer externen Target konvertiert und die dabei entstehenden Elektronen in einem Paarspektrometer analysiert. Die Energieauflösung  $\Delta E/E$  war 2% (siehe Figur 3).



Figur 3

Versuchsaufbau in Hamburg

Hochenergetische Elektronen verlieren mit grosser Wahrscheinlichkeit Energie durch Bremsstrahlung. Wir haben die Wahrscheinlichkeit solcher Energieverluste in Luft und im Aluminium des Einschussfensters untersucht.

Nach HEITLER<sup>10)</sup> ist die Wahrscheinlichkeit  $W(\alpha_0, x)$ , dass ein Elektron nach Durchdringung von  $x \log 2$  Strahlungslängen Materie noch eine Energie grösser als  $e^{-\alpha_0}$  mal die ursprüngliche Energie hat, gegeben durch:

$$W(\alpha_0, x) = \int_0^{\alpha_0} \frac{e^{-\alpha} \cdot \alpha^{x-1}}{\Gamma(x)} d\alpha. \quad (5)$$

Das Integral wurde numerisch ausgewertet. Tabelle 3 enthält einige Resultate.

Tabelle 3  
Strahlungsverluste

	Weg in $x_0$	Mittlerer Strahlungsverlust	Wahrsch., dass Verlust < 5%	Wahrsch., dass Verlust > 25%
Bonn	0,057	5,5%	82%	7%
Hamburg	0,050	4,9%	84%	6%

Da die sogenannte kritische Energie, das heisst diejenige Energie, bei der Ionisations- und Strahlungsverluste gleich sind, in Aluminium 47 MeV und in Luft 83 MeV beträgt, sind bei Energien dieser Grössenordnung auch die Ionisationsverluste in Rechnung zu stellen. Im Mittel verlieren die Elektronen auf ihrem Weg in die Kammer 3,8 MeV durch ionisierende Stösse. Die Energiewerte wurden um diese Strahlungs- und Ionisationsverluste korrigiert.

### 2.3. Auswertung

Bei der Auswertung wurde nicht die Anzahl Blasen pro Längeneinheit ausgezählt, sondern die Verteilung der Intervalle zwischen den einzelnen Blasen gemessen. Sobald nämlich die Blasendichte so gross wird, dass zwei oder mehrere Blasen zusammenwachsen können, liefert die erste Methode ein falsches Resultat.

Die Blasen entlang einer Spur treten gemäss der Intervallverteilung auf (näheres siehe Anhang II). Die Blasendichte wird aus der Formel

$$e^{g\eta} = \frac{\sum_{i=1}^{K-1} N_i}{\sum_{i=2}^K N_i} \quad (6)$$

berechnet.

Es bedeutet:

$g$  = Blasendichte

$\eta$  = Klassenbreite

$N_i$  = Anzahl Intervalle grösser als  $l_i$

Die  $N_i$  sind die Messwerte.

Die Streuung ist bei geeigneter Wahl der Klassenbreite in guter Näherung gegeben durch:

$$\frac{\sigma_g}{g} \approx \frac{1}{\sqrt{N_1}}. \quad (7)$$

Mit Hilfe des  $\chi^2$ -Testes<sup>11)</sup> wurde geprüft, ob die gemessene Verteilung tatsächlich einer Intervallverteilung entsprach, und mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% alle zweifelhaften Fälle verworfen. Vor einer Mittelbildung über sämtliche Spuren einer Energie wurde mit dem  $T$ -Test untersucht, ob gewisse Extremwerte auszuschliessen seien, und ebenfalls mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% die zweifelhaften Fälle ausgeschlossen.

Gemessen wurde die Intervallverteilung direkt auf dem Film mittels eines Mikroskops. Es wurden nur Spuren ausgewertet, die senkrecht zur Ebene des Einschussfensters in die Kammer führten. Die Strahlungslänge im  $\text{CBrF}_3$  ist 16,6 g/cm<sup>2</sup>, im  $\text{C}_3\text{F}_8$  35,5 g/cm<sup>2</sup>. Um allzu grosse Strahlungsverluste zu vermeiden, wurden die Spuren auf dem Film nur in den ersten 5 bzw. 10 mm ausgewertet. Das entspricht bei den gewählten Betriebsbedingungen 0,106 bzw. 0,084 Strahlungslängen. Im Mittel verlieren die Elektronen dabei 10% bzw. 8% ihrer Energie. Obwohl nur Spuren ausgewertet wurden, die auf der Aufnahme horizontal die Kammer durchquerten, konnten auf diese Weise Spuren, die allenfalls in der Horizontalebene unter einem

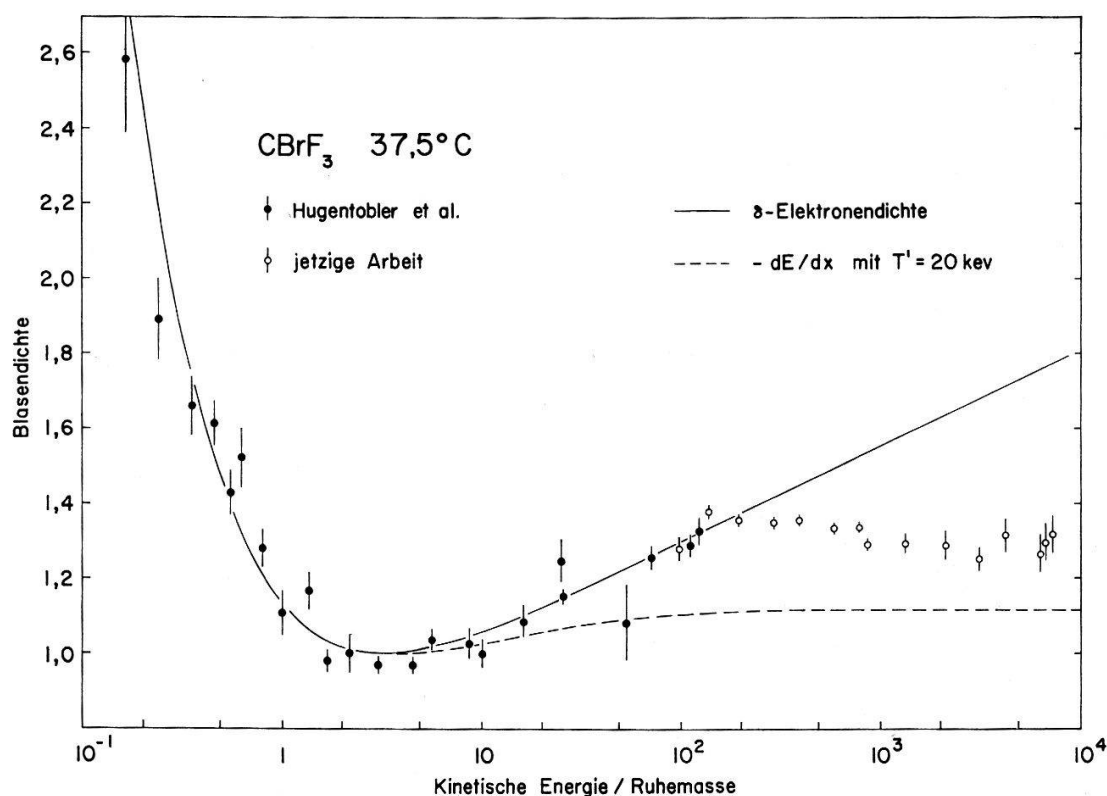
Winkel in die Kammer eintraten, nicht ausgeschlossen werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass solche Ereignisse mitgenommen wurden, ist aber nur etwa 1 bis 2%. Ein Teil der ausgewerteten Spuren wurde räumlich rekonstruiert und das Verhältnis wahre Länge zu projizierter Länge bestimmt. Es zeigte sich, dass tatsächlich 1% Spuren darunter waren, deren Verhältnis wesentlich von 1 verschieden war (Verhältnis  $< 0,9$ ).

### 3. Resultate

In Tabelle 4 sind einige der wichtigsten Daten über die Messungen zusammengestellt.

Tabelle 4  
Zusammenstellung der wichtigsten Daten

Flüssigkeit	$\text{CBrF}_3$	$\text{C}_3\text{F}_8$
Betriebstemperatur $T$ in $^{\circ}\text{C}$	37,7	41,8
Stabilisierungsdruck $p_s$ in $\text{kg}^*/\text{cm}^2$	13,0	8,4
Druckunterschied Dampfdruck – Enddruck $\Delta p$ in $\text{kg}^*/\text{cm}^2$	9,1	4,8
Flüssigkeitsdichte $\rho$ in $\text{g}/\text{cm}^3$	1,43	1,21
Strahlungslänge $X_0$ in $\text{g}/\text{cm}^2$	16,6	35,5
Energiebereich in MeV	50–3800	50–440
Anzahl Aufnahmen	8000	1500

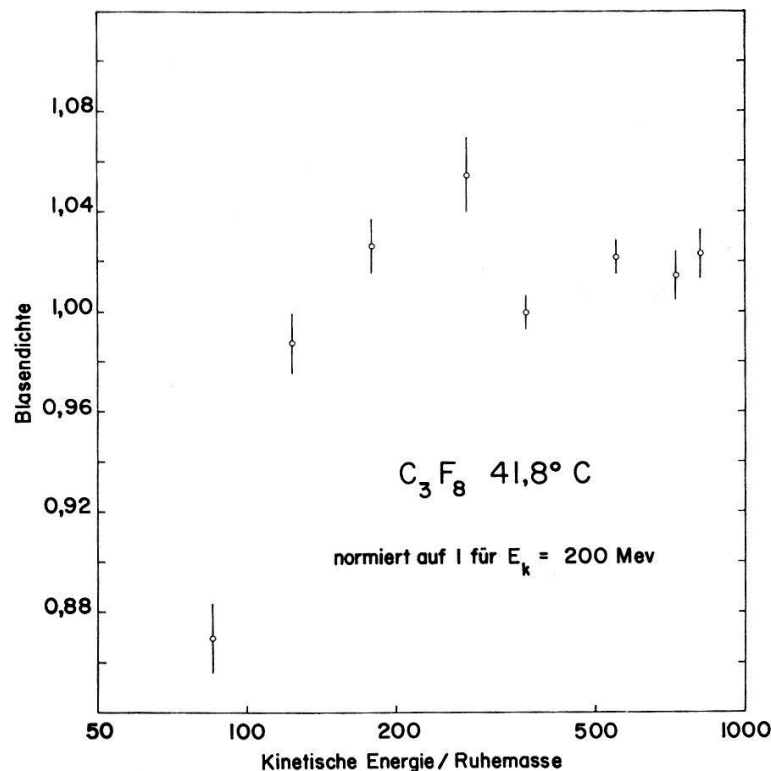


Figur 4

Relative Blasendichte in  $\text{CBrF}_3$  in Funktion von  $\gamma - 1$ . Für die eingezeichneten Kurven siehe 4.3.

In Figur 4 sind die Ergebnisse für  $\text{CBrF}_3$  eingetragen. Um einen besseren Überblick zu gewinnen, wurden die neuen Resultate zusammen mit den Messungen von HUGENTOBLE et al.<sup>1)</sup> aufgezeichnet. Dabei ist allerdings zu bemerken, dass es sich dort um Blasendichtemessungen an Protonen- und  $\pi$ -Mesonenspuren handelte. Bei den eingezeichneten Fehlern in der Blasendichte handelte es sich um statistische und Normierungsfehler. Die Energiewerte sind auf mittlere Ionisierungs- und Strahlungsverluste korrigiert.

In Figur 5 sind die Resultate für  $\text{C}_3\text{F}_8$  dargestellt. Es standen hier keine früheren Resultate zur Verfügung.



Figur 5

Relative Blasendichte in  $\text{C}_3\text{F}_8$  in Funktion von  $\gamma - 1$

Wie man aus Figur 4 und 5 sieht, ist der Verlauf der Blasendichte für hohe Energien bei beiden verwendeten Flüssigkeiten weitgehend gleich. Bei  $\gamma \sim 200$  wird ein Maximum erreicht und bei höheren Energien wird ein annähernd konstanter Wert beibehalten.

#### 4. Theorie

##### 4.1. Minimal erforderliche Energie zur Bildung einer kritischen Blase

Entsteht in einer überhitzten Flüssigkeit aus irgendeinem Grunde eine mikroskopische Dampfblase, so hängt deren weiteres Schicksal weitgehend von ihrem Durchmesser ab. Auf eine kugelförmige Blase vom Radius  $r$  wirkt infolge der Oberflächenspannung ein nach innen gerichteter Druck  $p_{ob}$  vom Betrag

$$p_{ob} = \frac{2\sigma}{r}. \quad (8)$$

$\sigma$  ist die Oberflächenspannung, die als unabhängig vom Radius der Dampfblase betrachtet wird, was bei den Radien, die hier betrachtet werden ( $\sim 100 \text{ \AA}$ ), noch gerechtfertigt erscheint<sup>13)</sup>. Auf die Dampfblase wirken ferner der ebenfalls nach innen gerichtete hydrostatische Druck  $p_s$  der Flüssigkeit und der nach aussen gerichtete Dampfdruck  $p_D$ . Damit die Blase im Gleichgewicht ist, muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$p_D - p_s = \frac{2 \sigma}{r}. \quad (9)$$

Eine Blase vom Radius  $r > r_c$  mit

$$r_c = \frac{2 \sigma}{p_D - p_s} = \frac{2 \sigma}{\Delta p} \quad (10)$$

wird bis zu makroskopischer Grösse weiter anwachsen, während eine kleinere Blase wieder in sich zusammenfällt. Der Radius  $r_c$  wird als der kritische Radius bezeichnet.

Beim Durchgang eines ionisierenden Teilchen muss also auf einer Strecke in der Grössenordnung von  $r_c$  mindestens eine Energie aufgebracht werden, die zur Bildung sogenannter kritischer Blasen ausreicht, damit eine makroskopisch sichtbare Spur des Teilchenweges entsteht.

Unter der Annahme, dass diese Energie in Form von Wärme<sup>14)</sup> so schnell zugeführt wird, dass kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet, kann die minimale Energie auf Grund eines adiabatischen Prozesses berechnet werden. Es wird also angenommen, dass die subkritische Blase so schnell anwächst, dass die Wachstumszeit auf kritische Grösse kleiner  $\tau_w$  ist.  $\tau_w$  ist die Zeit, in der die im kritischen Volumen gespeicherte Energie durch Wärmeleitung auf  $1/e$  abfällt.

Die minimale Energie ist dann durch folgende Formel gegeben<sup>1)15)16)</sup>:

$$W'_m = 4 \pi r_c^2 \left( \sigma - T \frac{d\sigma}{dT} \right) + \frac{4 \pi}{3} r_c^3 (H \varrho' + p_s). \quad (11)$$

$H$  = Verdampfungswärme pro Gramm

$\varrho'$  = Dichte des Dampfes

$p_s$  = Stabilisierungsdruck

$T$  = Temperatur der Flüssigkeit

Tabelle 5

Verdampfungswärme, Temperatur, Oberflächenspannung und kritischer Radius bei unseren Betriebsbedingungen zusammen mit  $\tau_w$ ,  $W'_m$  nach (11) und  $W_m$

	$H$ cal/g	$T$ °C	$\sigma$ dyn/cm	$r_c$ Å	$\tau_w$ sec	$W'_m$ eV	$W_m$ eV
CBrF <sub>3</sub>	15,2	37,7	2,6	57	$2 \cdot 10^{-10}$	171	210
C <sub>3</sub> F <sub>8</sub>	15,4	41,8	2,1	88	$5 \cdot 10^{-9}$	360	365

SEITZ<sup>14)</sup> und RIEPE und HAHN<sup>15)</sup> führten bei der Energieabschätzung noch dynamische Terme auf. Die nach Addition dieser Terme resultierende minimale Energie  $W_m$  ist zusammen mit anderen Grössen in Tabelle 5 aufgeführt. Man sieht daraus, dass  $W'_m$  und  $W_m$  in der Grössenordnung übereinstimmen,



Bis jetzt war stillschweigend angenommen worden, dass es sich bei der Bildung einer kritischen Blase um einen rein thermischen Prozess handelt, das heisst man nimmt an, dass Ionen und Elektronen in einer Zeit  $\tau_R < \tau_w$  rekombinieren und damit die Rekombinationsenergie als Wärme zur Verfügung steht. Sollte aber die Rekombinationszeit  $\tau_R \gg \tau_w$  sein, so kann man nach GLASER die elektrostatische Abstossung für die Bildung einer kritischen Blase verantwortlich machen.

JOHANSSON<sup>16)</sup>, einer Arbeit von GLASER<sup>20)</sup> folgend, nimmt an, dass das Primärteilchen in begrenzten Volumina ganze Ansammlungen eng beieinanderliegender Ionen gleichen Vorzeichens bildet. Die elektrostatische Abstossung zwischen den Ladungen soll dann für die Bildung kritischer Blasen verantwortlich sein, worauf bei entsprechenden Bedingungen (Überhitzung) makroskopische Blasen entstehen können.

Betrachtet man eine Blase mit  $n$  Ladungen auf ihrer Oberfläche, so kann man der Einfachheit halber annehmen, dass die Ladung kontinuierlich über die Oberfläche verteilt ist. Daraus resultiert dann ein sogenannter «elektrostatischer Druck»  $p_n$ , wobei

$$p_n = \frac{n^2 \cdot e^2}{8 \pi \epsilon r^4}, \quad (12)$$

$e$  = Elementarladung in elektrostatischen Einheiten,

$\epsilon$  = Dielektrizitätskonstante der Flüssigkeit.

Man kann die minimale Anzahl Ladungen berechnen, die notwendig ist, um eine Blase zu kritischer Grösse anwachsen zu lassen. Es wird

$$n_{min} = \left( \frac{27 \pi \epsilon \sigma^4}{2 e^2 \Delta p^3} \right)^{1/2}. \quad (13)$$

Für unsere Betriebsbedingungen finden wir für  $\text{CBrF}_3$   $n_{min} \simeq 5$  und für  $\text{C}_3\text{F}_8$   $n_{min} \simeq 8$ , beides Werte, die auch mit dem  $n_{min} = 6$ , das GLASER<sup>18)</sup> angibt, ungefähr übereinstimmen. RIEPE und HAHN<sup>15)</sup> hatten bei der Schwellwertempfindlichkeit zum Nachweis von  $\alpha$ -Rückstössen ein  $n_{min} \simeq 500$  erhalten. Der Mechanismus einer solchen Ladungstrennung scheint aber sehr schwierig erklärbar zu sein.

JOHANSSON<sup>16)</sup> untersuchte die Blasendichte von 18 MeV Elektronen in Propan in Abhängigkeit von  $T$  und  $\Delta p$ . Die experimentell gefundene Abhängigkeit wird von der Wärmetheorie besser erklärt.

Wir werden später sehen, dass es letzten Endes nicht so wichtig ist, ob die elektrostatische Theorie richtig ist oder nicht, denn für uns ist es nur wesentlich zu wissen, welche  $\delta$ -Elektronen noch zur Blasenbildung beitragen können.

#### 4.2. Energieabgabe

Es erhebt sich nun die wichtige Frage, wie ein Primärteilchen die zur Blasenbildung notwendige Energie abgibt. Aus den bekannten Energieverlustformeln folgt, dass sowohl schwere Teilchen (Protonen und  $\pi$ -Mesonen) als auch Elektronen bei einem  $\gamma = \gamma_{min}$  in  $\text{CBrF}_3$  durchschnittlich 2 MeV Energie pro cm verlieren. Nach der Wärmetheorie muss man verlangen, dass die zur Bildung einer Blase nötige Energie innerhalb der Strecke  $2 r_c$  (100–200 Å) abgegeben wird. Das Primärteilchen verliert

jedoch auf dieser Strecke im Mittel nur 1–2 eV. Nach der adiabatischen Wärmetheorie sind aber im Minimum  $\simeq 200$  eV nötig, um die Bildung einer kritischen Blase zu ermöglichen. Es scheint also ganz unwahrscheinlich, dass das Primärteilchen direkt für die Blasenbildung verantwortlich gemacht werden kann.

Im folgenden soll diskutiert werden, ob  $\delta$ -Elektronen imstande sind, ihre Energie in einem kritischen Volumen abzugeben.

Nach GLOCKER<sup>28)</sup> beträgt die Reichweite von Elektronen im Energiebereich 0,001 bis 0,3 MeV

$$R = 0,71 E^{1,72} \quad (14)$$

wenn  $R$  in g/cm<sup>2</sup> und  $E$  in MeV genommen werden. Für Elektronen einer Energie von 1 keV ergibt Gleichung (14) eine Reichweite von 340 Å in CBrF<sub>3</sub> und 400 Å in C<sub>3</sub>F<sub>8</sub>. Diese Reichweiten sind von der gleichen Größenordnung wie die kritischen Durchmesser. Ein Elektron in diesem Energiebereich besitzt also durchaus die Möglichkeit, die zur Blasenbildung notwendige Energie im kritischen Volumen abzugeben. Betrachtet man die Atomelektronen als frei, so erhält man für die Anzahl  $N$  der  $\delta$ -Elektronen, die beim Durchgang eines ionisierenden Teilchens durch Materie mit einer bestimmten Minimalenergie  $E_{min}$  gebildet werden,

$$N = 2,5 \cdot 10^{-19} \frac{n}{\beta^2 E_{min}} \quad (15)$$

wenn  $n$  die Anzahl Elektronen pro cm<sup>3</sup> bedeutet und  $E_{min}$  in eV angegeben wird. Nehmen wir  $\beta^2 = 1$  und aus Tabelle 5  $E_{min} = W'_m$ , so erhalten wir  $N = 590$  cm<sup>-1</sup> in CBrF<sub>3</sub> und  $N = 240$  cm<sup>-1</sup> in C<sub>3</sub>F<sub>8</sub>. Die Anzahl beobachteter Blasen pro Zentimeter ist nun allerdings um rund einen Faktor 50 kleiner. Geht man umgekehrt vor, bestimmt man also aus Gleichung (15) das  $E_{min}$  aus der beobachteten Blasendichte, so bekommt man  $E_{min} \simeq 5000$  eV für CBrF<sub>3</sub> und  $E_{min} \simeq 4400$  eV für C<sub>3</sub>F<sub>8</sub>. Trotzdem haben schon verschiedene Autoren<sup>1)14)16)</sup> die  $\delta$ -Elektronentheorie für die richtige angesehen.

Um noch die Möglichkeit zu prüfen, ob eventuell zwei oder mehrere  $\delta$ -Elektronen auf einer Strecke, die kleiner oder gleich dem kritischen Durchmesser ist, entstehen könnten und so zusammen den minimalen Energiebetrag aufbrächten, haben wir eine Monte-Carlo-Rechnung durchgeführt. Die Energieverteilung der  $\delta$ -Elektronen wurde aus den Resultaten von HUGENTOBLE<sup>1)</sup> hergeleitet. Für die Entstehungswahrscheinlichkeit eines  $\delta$ -Elektrons entlang der Primärspur nahmen wir eine Gleichver-

Tabelle 6

Vergleich der Anzahl der  $\delta$ -Elektronen nach HUGENTOBLE<sup>1)</sup> et al. und der Anzahl Intervalle mit  $E \geq E_k$  nach Monte-Carlo-Rechnung

Energieintervall (eV)	Anzahl Elektronen pro cm mit Energie $E$ (HUGENTOBLE <sup>1)</sup> et al.)	Anzahl Intervalle pro cm mit Energie $E$ (Monte-Carlo)
$25 < E < 323$	9791	9898
$75 < E < 323$	2154	2068
$125 < E < 323$	966	945
$175 < E < 323$	477	503



teilung an. 1 cm Primärspur wurde in 100 Å grosse Intervalle eingeteilt und festgestellt, wie viele Intervalle eine Energie  $E > E_k$  enthalten. Findet keine Summation statt, so muss als Ergebnis im wesentlichen die in die Rechnung gesteckte Energieverteilung herauskommen. In Tabelle 6 sind die Resultate zusammengestellt:

Man sieht, dass keinerlei Anzeichen vorhanden sind, dass tatsächlich eine nennenswerte Summation stattfindet. Die Festsetzung der unteren Grenze mit  $E_{min} = W'_m \simeq 170$  eV geschah also zu Recht auf diese Weise.

Um auf die elektrostatische Theorie zurückzukommen, so ist festzustellen, dass sie keineswegs im Widerspruch zur  $\delta$ -Elektronentheorie steht. Nimmt man nämlich an, dass sowohl in Gasen als auch in Flüssigkeiten etwa 30 eV zur Bildung eines Ionenpaares benötigt werden, so lässt sich folgende Überlegung machen: Für  $\text{CBrF}_3$  hatten wir die minimale Anzahl Ionen mit 5 berechnet. Das würde einer aufzuwendenden Energie von 150 eV entsprechen. Wie wir gesehen haben, ist ein  $\delta$ -Elektron durchaus fähig, diesen Energiebetrag innerhalb  $2r_c$  abzugeben, aber nicht ein Primärteilchen. Es kommt also sowohl in der Wärmetheorie als auch in der elektrostatischen Theorie darauf an, dass man die  $\delta$ -Elektronen für die Blasenbildung verantwortlich macht. Für  $\text{C}_3\text{F}_8$  sind die entsprechenden Zahlen:  $n_{min} = 8$  und daraus erhält man eine Energie von  $\simeq 240$  eV. GLASER<sup>18)</sup> selbst hat übrigens in seiner Arbeit angenommen, dass  $\delta$ -Elektronen für die Ionenbildung verantwortlich seien. Ob nun die kritische Blase durch eine lokale Wärmekonzentration oder eine Ansammlung von Ionen gleichen Vorzeichens gebildet wird, bleibe dahingestellt, denn die Grösse der Rekombinationszeit der Ionen in einer Flüssigkeit scheint unsicher zu sein: JOHANSSON<sup>16)</sup> gibt  $10^{-7}$  bis  $10^{-15}$  sec an! Die Vermutung, dass eventuell beide Prozesse beitragen, lässt sich ebenfalls nicht von der Hand weisen.

#### 4.3. Relativistischer Anstieg der Blasendichte

Der  $\delta$ -Elektronentheorie scheint zunächst die Tatsache des relativistischen Anstieges entgegenzustehen. Aus Formel (15) sieht man ohne weiteres, dass die Anzahl der  $\delta$ -Elektronen mit  $\beta^2 \rightarrow 1$  einem Minimum zustrebt und von einem relativistischen Anstieg keine Rede ist. Das kann aber nicht verwundern, wenn man bedenkt, dass bei der Herleitung von (15) die Atomelektronen als ungebunden betrachtet wurden. HUGENTOBLE et al.<sup>1)</sup> hatten deshalb die Anzahl der  $\delta$ -Elektronen unter Berücksichtigung der Bindungen der Atomelektronen berechnet. Das Resultat der umfangreichen, auf einer Arbeit von MÖLLER<sup>32)</sup> basierenden Berechnungen lässt sich folgendermassen schreiben:

$$N = \frac{A(E_{min})}{\beta^2} (\log(\gamma^2 - 1) - \beta^2) + \frac{B(E_{min})}{\beta^2}. \quad (16)$$

Wie man sieht, erhält man auf diese Weise eine ganz andere Geschwindigkeitsabhängigkeit, insbesondere tritt mit zunehmenden  $\gamma$  ein logarithmischer Anstieg auf. In Figur 4 ist deshalb die den Anstieg am besten wiedergebende, nach (16) berechnete Kurve eingetragen. Die Kurve entspricht einem  $E_{min} = 90$  eV. Bis zu einem  $\gamma \simeq 150$  werden die Messergebnisse sehr gut dargestellt. Jetzt sieht man auch, dass  $\delta$ -Elektronen mit einer Energie von ungefähr 100 eV mit im Spiele sein müssen, denn wählt man  $E_{min} \simeq 5$  keV, wofür die Anzahl der beobachteten Blasen übereinstimmen würde, so

wird jeglicher Anstieg ausgeschlossen, und bei einem  $E_{min} \ll 100$  eV erhielte man einen viel zu grossen Anstieg ( $\sim 50\%$ ). Bei den Berechnungen von HUGENTOBLE<sup>1)</sup> ist die Anzahl der  $\delta$ -Elektronen gegenüber der gemessenen Blasendichte um einen Faktor 100 zu gross. Es scheint also, dass von den  $\delta$ -Elektronen, die an und für sich imstande wären, eine kritische Blase zu bilden, nur etwa 1% wirksam werden. Auf diese Weise konnte der Verlauf der Blasendichte bis zu einem  $\gamma = 150$  beschrieben werden. Es scheint vernünftig anzunehmen, dass der Wirkungsquerschnitt für die Bildung von  $\delta$ -Elektronen nicht ins Unendliche ansteigt, so dass an Gleichung (16) für höhere Energien noch Korrekturen anzubringen wären. Dass Formel (16) tatsächlich nicht für alle Energien den experimentellen Verlauf wiedergibt, kann eigentlich nicht erstaunen, wenn man bedenkt, unter welchen Voraussetzungen Formel (16) abgeleitet wurde: Das  $\text{CBrF}_3$ -Molekül wurde in seine Atome zerlegt und für jedes Atom die Wellenfunktion als Produkt von Wasserstoffeigenfunktionen mit geeigneten Abschirmzahlen berechnet<sup>1)</sup>. Auf diese Art und Weise wird jedes Atom isoliert betrachtet, insbesondere werden dabei jegliche Polarisierungseffekte vernachlässigt.

Um die Polarisierung des Mediums bei der Berechnung der Anzahl  $\delta$ -Elektronen zu berücksichtigen, hatten HUGENTOBLE<sup>1)</sup> die Anzahl der  $\delta$ -Elektronen mit einer Energie grösser als  $E_{min}$  nach einer Arbeit von BUDINI und TAFFARA<sup>29)</sup> berechnet. BUDINI und TAFFARA unterteilen den Energieverlust in zwei Teile: Einen ersten Teil, herrührend von Stössen mit grossem Stossparameter  $b$ , behandeln sie nach einer elektromagnetischen Theorie, bei der das homogen gedachte Medium durch seine Dielektrizitätskonstante dargestellt wird. Stösse mit kleinen Stossparametern werden nach einer atomaren Theorie behandelt, wobei die Grenze sinnvollerweise bei  $b = r_0$  mit  $r_0 = \text{Atomradius}$  genommen werden muss. BUDINI und TAFFARA<sup>29)</sup> geben unter anderem einen Wirkungsquerschnitt für Bildung von  $\delta$ -Elektronen mit einer bestimmten Energie an, also genau das, was wir suchen. Die Rechnungen von HUGENTOBLE<sup>1)</sup> zeigten dann aber, dass bei dieser Berechnungsweise praktisch kein relativistischer Anstieg auftritt, was sehr wahrscheinlich daher rührt, dass für Stösse mit  $b < r_0$  die Bindung der Atomelektronen vernachlässigt wurde. Die Atomelektronen können jedoch nur als frei betrachtet werden, wenn die Energie der  $\delta$ -Elektronen viel grösser als die Ionisationsenergie ist. Das mittlere Ionisationspotential für  $\text{CBrF}_3$  beträgt aber etwa 230 eV, sodass gerade die für uns in Betracht fallenden  $\delta$ -Elektronen in dieses Gebiet fallen. Berechnet man nach BUDINI und TAFFARA den zu einem Energieübertrag von 200 eV gehörenden Stossparameter  $b$ , so erhält man  $b \simeq 1,3 \cdot 10^{-9}$  cm, also viel weniger als der mittlere Atomradius  $r_0$  ( $r_0 \simeq 10^{-8}$  cm). Die uns interessierenden Stösse fallen also in das Gebiet der atomaren Theorie, so dass aus oben genannten Gründen ein Fehlen des relativistischen Anstiegs bei der Anwendung der Formeln Budinis auf unser Problem nicht verwundern kann.

In diesem Zusammenhang ist eine Bemerkung von BUDINI<sup>32)</sup> interessant. Er sagt, dass die Ionisationsverteilung auch bei kleinen Stossparametern von den dielektrischen Eigenschaften des Materials abhängt und es deshalb nicht zulässig sei, bei der Untersuchung der von dem relativistischen Teilchen erzeugten Ionisation bei  $b < r_0$  a priori  $\epsilon = 1$  zu setzen. Die Polarisierbarkeit sei massgebend für die Verteilung der Energie auf Anregung, Emission und eventuell auch Ionisation, während die vom Atom absorbierte Energie (Energieverlust des Primärteilchens) unabhängig vom Medium sei. Dies mache es wahrscheinlich, dass man auch bei der quantenmechani-

schen Behandlung der Ionisation in subatomaren Abständen die Polarisierbarkeit des Mediums in Rechnung ziehen müsse.

In Figur 4 wurde zum Vergleich der theoretisch erwartete Verlauf der Blasendichte für den Fall, dass diese proportional zum totalen Energieverlust  $dE/dx$  wäre, angegeben. Als maximaler Energieübertrag wurde  $T' = 20$  keV gewählt. Ein wesentlich höherer Energieübertrag müsste zu  $\delta$ -Elektronen Anlass geben, die ihrerseits kleine, von der Primärspur abzweigende, Spuren bilden müssten, die bei der Blasendichtemessung nicht mitgezählt werden. Man sieht ohne weiteres aus Figur 4, dass zwar ein Plateau vorhanden ist, hingegen wird der experimentell beobachtete Anstieg nicht richtig wiedergegeben. Nach dem oben gesagten erscheint überdies ein solcher Mechanismus als sehr unwahrscheinlich.

Auch die von TSYTOVICH<sup>33)</sup> an der Berechnung von  $dE/dx$  angebrachten Strahlungskorrekturen helfen uns nicht weiter, da, wie wir schon gesehen haben, eine Proportionalität zwischen dem mittleren Energieverlust  $dE/dx$  und der Blasendichte gar nicht zu erwarten ist.

#### 4.4. Schlussfolgerungen

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass der Verlauf der Blasendichte als Funktion der Geschwindigkeit des Primärteilchens nicht im ganzen experimentell untersuchten Bereich mit den bestehenden Theorien befriedigend erklärt werden kann. Der experimentelle Verlauf oberhalb  $\gamma = 150$  bereitet Schwierigkeiten. Ein Erfolg ist wahrscheinlich erst einer quantenmechanischen, die Polarisierungseffekte und die Bindungsenergien der Atomelektronen einschliessenden, Berechnungsweise des Wirkungsquerschnittes für die Erzeugung von  $\delta$ -Elektronen mit einer bestimmten Minimalenergie beschieden.

Aus der Tatsache des relativistischen Anstieges der Blasendichte kann geschlossen werden, dass  $\delta$ -Elektronen mit einer Minimalenergie von etwa 200 eV bei der Blasenbildung massgeblich beteiligt sind, wobei allerdings die Tatsache, dass offenbar nur etwa 1% der in Frage kommenden  $\delta$ -Elektronen eine Blase bilden, noch ungeklärt bleibt.

BERTOLOTTI und SETTE<sup>31)</sup> versuchen zwar, mit einer statistischen Methode die Wahrscheinlichkeit, dass ein  $\delta$ -Elektron eine kritische Blase bildet, zu berechnen. Da bei unseren Bedingungen jedoch die Voraussetzungen zur statistischen Behandlung des Problems gar nicht erfüllt sind, können wir diese Theorie nicht zur Erklärung heranziehen.

Herrn Prof. Dr. B. HAHN, auf dessen Anregung hin diese Arbeit entstanden ist, danken wir für seine vielen wertvollen Ratschläge.

Herrn Prof. Dr. O. HUBER möchten wir für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit bestens danken, ebenso Herrn Dr. W. LINDT für seine Diskussionsbeiträge.

Herrn Prof. Dr. W. PAUL danken wir für die Erlaubnis, dass wir Messungen am Elektronen-Synchrotron der Universität Bonn durchführen konnten. Ferner danken wir den Herren WUCHERER, BROCKMANN und KEIL von der Blaskammergruppe in Bonn für ihre Unterstützung bei der Ausführung des Experimentes.

Herrn Prof. Dr. W. JENSCHKE und Herrn Prof. Dr. P. STÄHELIN sprechen wir unseren Dank dafür aus, uns die Möglichkeit für Messungen am DESY gegeben zu haben. Herrn D. H. SCHULTZ danken wir für seine Mithilfe bei den Arbeiten am DESY.

Den Auswerterinnen, Frau METTRAUX, Frä. JUNGO und Frä. RAEMY, danken wir für ihre Arbeit.

Diese Arbeit wurde nur durch die Bereitstellung der finanziellen Mittel durch den Schweizerischen Nationalfonds ermöglicht.

### Anhang I

Die erste Aufgabe in einem Monte-Carlo-Programm ist die Erzeugung sogenannter Zufallszahlen. Sind eine Anzahl solcher Zahlen, die zum Beispiel im Intervall (0,1) gleich verteilt sind, einmal generiert, so lässt sich daraus relativ einfach jede beliebige Verteilung ableiten.

Die Zufallszahlen wurden ähnlich wie in einem von BERGER<sup>8)</sup> angegebenen Verfahren hergestellt.

$$j_0 = c$$

$$j_{n+1} = b j_n \bmod 10^{10}$$

$$\text{Zufallszahl: } r_n = 10^{-10} j_n \quad n = 1, 2 \dots$$

Es waren  $c = 4658193327$  und  $b = 100003$ .

Um jetzt Zahlen gemäss einer beliebigen Verteilung auszulesen, geht man wie folgt vor:

Man wähle eine grösste Zahl  $M$  und bilde die Werte

$$P(x_m) = (m - 1/2)/M \quad m = 1, \dots, M$$

Es sei

$$P(x_n) = \int_0^{x_n} f(x) dx \mid \int_0^{x_M} f(x) dx$$

wobei  $f(x)$  die in Frage kommende Wahrscheinlichkeit ist. Die  $x_n$  sind so zu wählen, dass zwischen zwei aufeinanderfolgenden  $x_n$  linear interpoliert werden darf.

Es ist dann

$$x_m = x_n + \frac{P(x_m) - P(x_n)}{P(x_{n+1}) - P(x_n)} (x_{n+1} - x_n)$$

Diese  $x_m$  werden in der Rechenmaschine gespeichert. Bildet man nun eine Zufallszahl  $r_n$ , so hat man mit

$$m = \text{Int}(r_n \cdot M)$$

gerade den Index des entsprechenden  $x$  ( $\text{Int}(r_n M)$  bedeutet der ganzzahlige Teil von  $r_n M$ ). Dieses Verfahren arbeitet sehr rasch, da das Aussuchen einer Grösse  $x$ , die nach einer bestimmten Verteilung vorkommen soll, nur noch einige Multiplikationen erfordert. In unserem speziellen Fall wurde der Entstehungsort der Elektronen nach einer Gleichverteilung auf der Target ausgesucht. Nach der in Gleichung (4) angegebenen Verteilung wurde dann der Abgangswinkel bestimmt. Das nun «auf die Reise» ge-

schickte Elektron konnte auf seinem Weg durch die Ablenkmagnete und Kollimatoren verfolgt werden, und an kritischen Stellen wurde geprüft, ob das Elektron noch innerhalb der tolerierten Grenzen war. Die Berechnung des Strahlverlaufes geschah auf die übliche Weise<sup>9)</sup>.

## Anhang II

Aus der Poissonverteilung

$$P_x(t) = \frac{(g t)^x \cdot e^{-g t}}{x!} \quad (1)$$

mit  $g$  = Blasendichte lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass ein Intervall zwischen zwei Blasen zwischen  $t$  und  $t + dt$  liegt, ableiten. Es ist

$$dP_t = g e^{-g t} dt = P_0(t) P_1(dt) . \quad (2)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Intervall  $\geq l_1$ , aber  $< l_2$  ist, beträgt

$$\int_{l_1}^{l_2} g e^{-g t} dt = e^{-g l_1} - e^{-g l_2} . \quad (3)$$

Bezeichnet man mit  $N_i$  die Anzahl der Intervalle  $> l_i$ , so ist

$$N_i = N_0 e^{-g l_i} \quad i = 1 \dots k . \quad (4)$$

wobei  $N_0$  die Anzahl aller auf der Spur vorhandenen Intervalle ist ( $N_0$  kann nicht gemessen werden). Die Anzahl der Intervalle zwischen  $l_i$  und  $l_{i+1}$  ist

$$n_i = N_i - N_{i+1} \quad i = 1 \dots k - 1 \quad (5)$$

$$n_k = N_k . \quad (5a)$$

Zweckmässig ist es, die Intervalle folgendermassen zu wählen<sup>12)</sup>:

$$l_i = l_1 + (i - 1) \eta \quad i = 1 \dots k . \quad (6)$$

Es ist dann

$$n_i = N_0 e^{-g l_i} (1 - e^{-g \eta}) = N_1 e^{-(i-1)g \eta} (1 - e^{-g \eta}) \quad i = 1 \dots k - 1 \quad (7)$$

$$n_k = N_0 e^{-g l_k} = N_1 e^{-(k-1)g \eta} . \quad (7a)$$

Die Wahrscheinlichkeit für  $n_i$  ( $i = 1 \dots k$ ) ist gegeben durch

$$P_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^k n_i} . \quad (8)$$

Die Likelihood-Funktion ist

$$L(g) = \frac{\left( \sum_{i=1}^k n_i \right)!}{\prod_{i=1}^k (n_i!)} \prod_{i=1}^k P_i^{n_i} . \quad (9)$$



Um den gemessenen Werten die grösste Wahrscheinlichkeit zu geben, muss

$$\frac{\partial L(g)}{\partial g} = 0 \quad (10)$$

sein. Wenn man Gleichung (5) beachtet, resultiert die Gleichung (6) im Text:

$$e^{g\eta} = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} N_i}{\sum_{i=2}^k N_i} \quad (11)$$

Die Varianz von  $g$  ist gegeben durch

$$\sigma_g^2 = - \frac{\partial^2 L(g)}{\partial g^2} \quad (12)$$

Es ist also

$$\frac{\sigma_g}{g} = \frac{1}{\sqrt{N_1}} \frac{e g \eta - 1}{g \eta \sqrt{e g \eta (1 - e^{-(k-1)g\eta})}} = \frac{1}{\sqrt{N_1}} f_k(g \eta) \quad (13)$$

Die Funktion  $f_k(g \eta)$  hat für  $k = 10$  ein breites Minimum um  $g \eta = 0,6$  herum. Für eine mittlere Blasendichte  $g = 45 \text{ cm}^{-1}$  und eine Klassenbreite  $\eta = 4,93 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$  ist  $f_{10}(g \eta) = 1,08$ , so dass die Streuung  $\sigma_g$  weitgehend durch  $N_1$  bestimmt ist.  $l_1$  in Gleichung (6) ist so gross zu wählen, dass  $l_1 > 1,5 d$ , wenn  $d$  den Blasendurchmesser bedeutet<sup>1)</sup>. Man vermeidet so Zählverluste wegen der endlichen Blasengrösse.

Für den  $\chi^2$ -Test ist zu beachten, dass die unabhängigen Grössen nicht die Summenhäufigkeiten  $N_i$ , sondern deren Differenzen  $n_i = N_i - N_{i+1}$  sind. Mit der aus (11) berechneten Blasendichte  $g$  wurden mit (4) und (5) (oder mit (7)) die theoretischen Häufigkeiten  $n_i^*$  berechnet und dann das

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*} \quad (14)$$

gebildet. Bei einem Freiheitsgrad von 8 ist die 5% Schranke bei  $\chi^2 = 15,5$ .

Students Test oder der sogenannte  $t$ -Test wurde angewendet, um zu entscheiden, ob ein Einzelwert, der vom Mittel der übrigen Beobachtungen stark abweicht, auszuscheiden war, oder ob die Abweichung innerhalb der Zufallsgrenzen war. Es ist

$$|t| = \frac{|D|}{S} \quad (15)$$

mit  $|D| = |\bar{x} - y|$  der Differenz des Mittels  $\bar{x}$  und des Einzelwertes  $y$ , und

$$S^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) s^2 \quad (16)$$

$n$  ist die Anzahl Einzelwerte, aus denen  $\bar{x}$  gebildet ist, und  $s^2$  ist die zugehörige Varianz.

### Literaturverzeichnis

- 1) E. HUGENTOBLE, B. HAHN und F. STEINRISSER, *Helv. Phys. Acta* **36**, 601 (1963).
- 2) G. A. BLINOV, I. U. S. KRESTNIKOV und M. F. LOMANOV, *Soviet. Phys. JETP* **4**, 661 (1957).
- 3) P. E. ARGAN, A. GIGLI, E. PICASSO und C. TOMASINI, *Nuovo Cimento* **10**, 177 (1958).
- 4) C. PEYROU, *Conf. on instr. for high-energy phys.*, Berkeley 1960.

- 5) B. HAHN, A. W. KNUDSEN und E. HUGENTOBLE, *Nuovo Cimento* 15, Suppl. 2, 236 (1960).
- 6) E. JAHNKE und F. EMDE, *Funktionstabellen mit Formeln und Kurven* (Verlag Teubner, Leipzig und Berlin 1933).
- 7) A. CITRON, F. J. M. FARLEY, E. G. MICHAELIS und H. ØVERAS, *Floating Wire Measurements on the SC Magnet*, CERN Report 59-8.
- 8) M. J. BERGER, *Monte Carlo Calculation of the Penetration and Diffusion of Fast Charged Particles*, in *Methods in Computational Physics* I.
- 9) B. DE RAAD, *Methods to calculate Beam Transport Systems*, CERN Report 63-3.
- 10) W. HEITLER, *The Quantum Theory of Radiation* (Oxford 1954).
- 11) B. L. VAN DER WAERDEN, *Mathematische Statistik* (Springer Verlag 1957).
- 12) A. AHMADZADEH, *Emulsion and Bubble-Chamber Statistics for the Determination of Track Density*, *Nuovo Cimento* 24, 1 (1962).
- 13) S. ONO und S. KONDO, *Handbuch der Physik* X, 134 (1960).
- 14) F. SEITZ, *Phys. Fluids* 1, 2 (1958).
- 15) G. RIEPE und B. HAHN, *Helv. Phys. Acta* 34, 865 (1961).
- 16) T. JOHANSSON, *Arkiv for Fysik* 19, 397 (1961).
- 17) R. BECKER, *Theorie der Wärme* (Springer Verlag 1964).
- 18) D. A. GLASER, *Handbuch der Physik* XLV, 314 (1958).
- 19) D. A. GLASER, J. L. BROWN und M. L. PERL, *Phys. Rev.* 102, 586 (1956).
- 20) D. A. GLASER, *Nuovo Cimento Suppl.* 9, 361 (1954).
- 21) CH. PEYROU, *Proceed. Inter. Conf. on Instr. High Energy Physics*.
- 22) V. P. KENNEY, *Phys. Rev.* 119, 432 (1960).
- 23) A. AHMADZADEH und N. N. BISWAS, *Nuovo Cimento* 19, 958 (1962).
- 24) R. M. LEA und C. N. WITTITOE, *Rev. Sci. Instr.* 33, 243 (1962).
- 25) B. SECHI-ZORN und G. T. ZORN, *Nuovo Cimento Suppl.* 26, 197 (1962).
- 26) B. N. FABIAN, N. L. PLACE, W. A. RILEY, W. H. SIMS und V. P. VENNEY, *Rev. Sci. Instr.* 34, 484 (1963).
- 27) C. DILWORTH, D. R. O. MORRISON und G. MENBRIANI, *Nuovo Cimento* 32, 1432 (1964).
- 28) R. GLOCKER, *Z. Naturforsch.* 3a, 147 (1948).
- 29) P. BUDINI und L. TAFFARA, *Nuovo Cimento* 4, 23 (1956).
- 30) CHR. MOELLER, *Ann. d. Phys.* 14, 531 (1932).
- 31) M. BERTOLOTI und D. SETTE, *Nuovo Cimento* 32, 1182 (1964).
- 32) P. BUDINI, *Z. Naturforsch.* 7a, 722 (1952).
- 33) V. N. TSYTOVICH, *Soviet. Phys. Doklady* 7, 411 (1962).