

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 38 (1965)  
**Heft:** I

**Artikel:** Sur la quantification du système de deux particules  
**Autor:** Piron, C.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-113578>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Sur la quantification du système de deux particules\*)

par **C. Piron\*\*)**

Institut de Physique, Université de Genève, Suisse

(25 IX 64)

### 1. Introduction

Considérons le système quantique composé de deux particules de masse  $m_1$  et  $m_2$  liées par un potentiel:

$$V(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) = \frac{k}{2} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)^2.$$

L'hamiltonien est donné par:

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + V(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2).$$

Un tel problème, résolu de la manière habituelle, ne comporte pas de solutions stationnaires ou s'y ramenant par une transformation de GALILÉE\*\*\*). C'est un résultat général qui découle directement du fait qu'on peut écrire cet hamiltonien sous la forme:

$$H = H_0 + H_i$$

avec

$$H_0 = \frac{\mathbf{P}^2}{2M}; \quad M = m_1 + m_2$$

et

$$H_i = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{k}{2} \mathbf{q}^2; \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

où

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2; \quad \mathbf{p} = \frac{m_1 \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{Q} = \frac{m_1 \mathbf{q}_1 + m_2 \mathbf{q}_2}{m_1 + m_2}; \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1,$$

car  $H_0$ , formellement identique à l'hamiltonien d'une particule libre, ne possède pas de vecteurs propres normalisables. Dans cet article nous proposons des règles de quantification différentes, qui conduisent pour le système précédent, à un modèle admettant des états stationnaires. Mais nous devons, pour traiter ce modèle, développer tout d'abord un formalisme valable dans le cas de règles de supersélection continues.

---

\*) Recherches financées par le Fonds National Suisse.

\*\*) A mon maître E. C. G. STUECKELBERG DE BREIDENBACH à l'occasion de son 60<sup>e</sup> anniversaire.

\*\*\*) C'est là un paradoxe. Le second principe de thermodynamique postule l'existence d'un état d'équilibre pour tout système isolé.

## 2. Un formalisme quantique avec règles de supersélection

Etant donné un système physique considérons parmi les observables possibles la classe de celles qui ne peuvent prendre que deux valeurs. Nous appellerons de telles observables propositions ou encore expériences du type oui-non. Comme le suggère un précédent travail<sup>1)</sup>, il est nécessaire pour décrire l'ensemble des propositions de considérer une famille d'espaces d'Hilbert  $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$ . Une proposition particulière est représentée par la donnée pour chaque  $\alpha$  d'un projecteur  $E_\alpha$  défini sur  $\mathfrak{H}_\alpha$ . Conformément à l'idée que la mesure d'une observable peut toujours se réduire à la mesure simultanée d'un certain nombre de propositions, une observable  $A$  est alors représentée par la donnée d'une famille d'opérateurs linéaires auto-adjoints  $\{A_\alpha\}$  et d'une application  $f$  (éventuellement une mesure) des  $\alpha$  dans la droite réelle. En général on peut se ramener, par un choix convenable des  $A_\alpha$ , au cas où l'application ne prend que la valeur 1. La structure vectorielle des  $\mathfrak{H}_\alpha$  engendre sur l'ensemble produit  $\mathfrak{H} = \prod_\alpha \mathfrak{H}_\alpha$  (ensemble des familles  $\{\varphi_\alpha\}$  de vecteurs  $\varphi_\alpha \in \mathfrak{H}_\alpha$ ) une structure vectorielle que nous appellerons la structure produit<sup>2)</sup>. L'application  $p r_\alpha$  de  $\mathfrak{H}$  sur  $\mathfrak{H}_\alpha$  est linéaire et il en est de même de l'opérateur  $A = \prod_\alpha A_\alpha$  qui par définition applique  $\varphi \in \mathfrak{H}$  sur  $\{A_\alpha(p r_\alpha \varphi)\} \in \mathfrak{H}$ . La structure algébrique des  $A_\alpha$  définit sur les  $\prod_\alpha A_\alpha$  une structure produit qui n'est autre que la structure d'algèbre des observables. On remarquera que  $\mathfrak{H} = \prod_\alpha \mathfrak{H}_\alpha$  ne peut être identifié, en tant qu'espace vectoriel, à la somme (ou l'intégrale) hilbertienne des  $\mathfrak{H}_\alpha$  que si l'ensemble des  $\alpha$  est fini. Enfin nous définirons l'état comme une généralisation de la notion habituelle (classique) de probabilité, c'est-à-dire comme une application  $w(E)$  de l'ensemble (éventuellement un sous-ensemble) des propositions dans l'intervalle réel  $[0, 1]$ , satisfaisant aux conditions suivantes<sup>3)</sup>:

1.  $0 \leq w(E) \leq 1$ ,  $w(I) = 1$ ,
2.  $w(E_1) = w(E_2) = 0 \Rightarrow w(E_1 \cup E_2) = 0$ .
3. Pour toute famille dénombrable de  $E_i$  telle que  $E_i E_j = 0$  pour  $i \neq j$ , on a:

$$w\left(\sum_i E_i\right) = \sum_i w(E_i).$$

Chaque proposition peut être définie par l'ensemble de ses vecteurs propres, ensemble qui forme un sous-espace fermé. Par définition,  $E_1 \cup E_2$  est la proposition correspondant au sous-espace fermé engendré par les vecteurs propres de  $E_1$  et de  $E_2$ . Si  $E_1 E_2 = E_2 E_1$ , c'est-à-dire si  $E_1, E_2$  sont compatibles (commutent), on remarquera que  $E_1 \cup E_2 = E_1 + E_2 - E_1 E_2$ . Un remarquable théorème mathématique du à A. M. GLEASON<sup>4)</sup> affirme dans le cas où la famille des  $\mathfrak{H}_\alpha$  se réduit à un seul espace d'Hilbert, que tout état peut être mis sous la forme:

$$w(E) = \text{tr}(\varrho E),$$

où  $\varrho$  est la matrice densité de VON NEUMANN, c'est-à-dire un opérateur linéaire satisfaisant aux conditions:

1.  $\varrho = \varrho^*$ ,
2.  $\varrho^2 \leq \varrho$ ,
3.  $\text{tr}(\varrho) = 1$ .

C'est pourquoi dans le cas général\*), nous représenterons un état  $w$  sous la forme :

$$w(E) = \int \text{tr} (\varrho_\alpha E_\alpha) \mu(\alpha) d\alpha ,$$

où  $\{\varrho_\alpha\}$  est une famille de matrices densités et  $\mu(\alpha)$  une mesure définie sur les  $\alpha$  avec la condition :

$$\int \text{tr}(\varrho_\alpha) \mu(\alpha) d\alpha = 1 .$$

Dans un tel formalisme la valeur moyenne  $\bar{A}$  d'une observable  $\{A_\alpha\}$ ,  $f$  dans l'état  $\{\varrho_\alpha\}$ ,  $\mu$  est donnée par la formule :

$$\bar{A} = \int \text{tr} (\varrho_\alpha A_\alpha) f(\alpha) \mu(\alpha) d\alpha .$$

### 3. Le modèle

Considérons le système de deux particules décrit dans l'introduction. Si ce système est isolé dans l'espace, les valeurs des coordonnées du centre de gravité  $Q$  sont arbitraires car aucun autre point de l'espace n'est privilégié. Pour être consistant avec ce point de vue, on est conduit à considérer  $Q$  comme faisant partie des règles de supersélection. C'est pourquoi nous proposons les règles de commutations suivantes :

$$[P, Q] = 0 ; \quad i [p, q] = \hbar I$$

$$[p, Q] = 0 ; \quad [P, q] = 0$$

$$[q, Q] = 0 ; \quad [P, p] = 0 .$$

En revenant, à l'aide des formules du premier paragraphe, aux coordonnées individuelles, nous trouvons :

$$i [p_1, q_1] = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \hbar I$$

$$i [p_2, q_2] = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \hbar I$$

$$i [p_1, q_2] = \frac{-m_1}{m_1 + m_2} \hbar I$$

$$i [p_2, q_1] = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \hbar I$$

$$[p_1, p_2] = [q_1, q_2] = 0 .$$

Ce passage, des coordonnées centrales aux coordonnées individuelles, n'est pas une transformation canonique, ce qui nous montre que certaines règles du principe de correspondance doivent être modifiées pour être applicables à ce modèle.

Pour chaque valeur possible du couple  $P, Q$  (pour simplifier nous supposons à partir de maintenant le problème unidimensionnel) donnons-nous un espace d'Hilbert

---

\*) Il ne peut être question de démontrer que tout état est de cette forme sans postuler quelque chose sur l'ensemble des  $\alpha$ . Mais on peut facilement montrer que tout état pur est de cette forme.

sous la forme de l'espace des fonctions complexes  $\varphi(q)$  de «carré» sommable. Dans ces conditions nous obtenons une représentation de nos règles de commutations en posant :

$$P = \{P, I\} \quad p = \left\{ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} \right\}$$

$$Q = \{Q, I\} \quad q = \{q\}.$$

Dans ces formules nous n'avons pas explicité l'indice  $P, Q$  correspondant à  $\alpha$ , en d'autres termes l'expression entre crochets définit un opérateur sur  $\mathfrak{H}_{P,Q}$  pour chaque valeur de  $P, Q$ . L'expression de l'hamiltonien est immédiate nous avons :

$$H = \left\{ \frac{P^2}{2M} I - \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial q} \right)^2 + \frac{k^2}{2} q^2 \right\}.$$

Si  $|n\rangle = \varphi_n(q) \in \mathfrak{H}_{P,Q}$  est un vecteur propre normalisé de l'hamiltonien interne  $H_i$ ; un état stationnaire, c'est-à-dire un état propre de  $H^*$ , est donné dans notre formalisme par une famille de matrices densités  $\{|n\rangle\langle n|\}$  et une mesure  $\mu(P, Q) = \delta(P - P_0) \mu_0(Q)$  où  $\mu_0(Q)$  est une mesure sur les  $Q$  satisfaisant à :

$$\int \mu_0(Q) dQ = 1.$$

Ces états sont en général des mélanges, les états purs étant de la forme  $\mu_0(Q) = \delta(Q - Q_0)$ . Le lecteur remarquera que le cas  $\mu_0(Q) = 1$  correspond à l'onde plane de la théorie habituelle et que c'est un état généralisé, en ce sens que seule la relation  $w(I) = 1$  est en défaut.

Pour terminer, discutons l'évolution d'un tel système. Nous résoudrons ce problème en imposant une représentation du groupe de symétrie des translations dans le temps<sup>5)</sup>. Dans notre formalisme toute symétrie est donnée par une famille  $\{U_{P,Q}\}$  de transformations unitaires (ou anti-unitaires) sur les  $\mathfrak{H}_{P,Q}$ , et une permutation de l'ensemble des  $P, Q$ <sup>6)</sup>. Dans le cas particulier considéré,  $U_{P,Q}$  doit être une représentation du groupe des translations dans le temps, ce qui nous conduit à poser :

$$U_{P,Q}(\tau) = e^{-iH\tau}.$$

De même la permutation cherchée doit, d'une part, être une représentation de ce même groupe, et d'autre part, satisfaire à l'invariance de GALILÉE. D'où la relation :

$$P(\tau) = P(0)$$

$$Q(\tau) = Q(0) + \frac{P(0)}{m} \tau.$$

#### 4. Conclusion

Ainsi nous avons prouvé l'existence d'états stationnaires pour notre modèle de système de deux particules. Nous pourrions maintenant discuter les équivalences possibles avec le modèle qu'on obtiendrait par la méthode habituelle. Nous nous limiterons au cas particulier où la masse d'une des particules est très grande par

\*) Un état propre d'une observable  $A$  est un état qui, restreint à la famille de propositions compatibles définissant  $A$ , est sans dispersion c'est-à-dire, ne prend que les valeurs 0 ou 1.

rapport à l'autre. Si dans les relations de commutations proposées nous faisons  $m_1 \rightarrow \infty$  tous les commutateurs sont nuls à l'exception de deux :

$$i [\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2] = \hbar I$$

$$i [\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2] = -\hbar I$$

Un tel système correspond au cas d'une seule particule de masse  $m = m_2$  soumise à un potentiel extérieur  $V(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1)$ . Nous retrouvons les règles de commutations habituelles :

$$i [\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2] = \hbar I$$

et pour l'évolution nous retrouvons l'équation de Schrödinger. La grande masse origine du potentiel a une position fixe qui peut être mesurée exactement. C'est sa quantité de mouvement  $\mathbf{p}_1$  qui est en général indéterminée et qui est perturbée lors d'une mesure de la position  $\mathbf{q}_2$  de la petite particule selon la relation :

$$i [\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2] = -\hbar I.$$

Mais il y a conservation stricte de la quantité de mouvement totale  $\mathbf{P}$ . Cette interprétation nous semble physiquement très satisfaisante et éclaire d'une manière nouvelle les pseudo-paradoxes qu'on peut formuler sur ces questions<sup>7)</sup>.

### Références

- <sup>1)</sup> C. PIRON, *Axiomatique quantique*, Helv. phys. Acta 37, 439 (1964).
- <sup>2)</sup> C'est la structure produit de  $C$ -modules. Pour cette définition et pour les affirmations qui suivent, le lecteur se rapportera à N. BOURBAKI, Livre II Algèbre, chap. 2, § 1, N° 5; A. S. I.
- <sup>3)</sup> Cette notion est due à G. MACKEY. Pour une justification de ces conditions et leur comparaison avec le cas classique, voir J. M. JAUCH and C. PIRON, *Can Hidden Variables be Excluded in Quantum Mechanics?* Helv. phys. Acta 36, 827 (1963).
- <sup>4)</sup> A. M. GLEASON, J. Math. and Mech. 6, 885 (1957).
- <sup>5)</sup> Pour une discussion de cette approche du problème, voir J. M. JAUCH, *The Existence of the Hamiltonien for Causal Systems*, dans Dispersion Relations, Scottish Universities Summer School 1960, p. 283. Le lecteur remarquera que la condition de continuité ( $i i i$ ), postulée par l'auteur cité, n'est pas vérifiée dans notre cas.
- <sup>6)</sup> G. EMCH and C. PIRON, J. math. Phys. 4, 469 (1963).
- <sup>7)</sup> Pour un exposé de ces problèmes, voir N. BOHR, *Discussion with EINSTEIN*, dans A. EINSTEIN, *Philosopher-Scientist*, The Library of Living Philosophers, p. 201 (1951), ainsi que J. M. JAUCH, *The Problem of Measurement in Quantum Mechanics*, Helv. phys. Acta 37, 293 (1964).