Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 37 (1964)
Heft: VI

Artikel: Gruppenextensionen in der Quantentheorie
Autor: Kamber, F. / Straumann, N.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-113503

Gruppenextensionen in der Quantentheorie

von **F. Kamber** und **N. Straumann**

Institut für Theoretische Physik der Universität Zürich,

(2. IV. 64)

§ 1. Einleitung

In der Physik spielen verschiedene Invarianzgruppen eine grosse Rolle (Poincarégruppe, Eichgruppe, Isospingruppe, höhere Symmetriegruppen für starke Wechselwirkungen wie zum Beispiel $S\,U_3$). Die verschiedenen Symmetrien werden meistens ganz getrennt betrachtet, in der stillschweigenden Annahme, dass sie unabhängig voneinander sind, das heisst die umfassende Gruppe lediglich das direkte Produkt ist. Durch MICHEL[1]) ist nun aber darauf hingewiesen worden, dass diese Annahme im allgemeinen nicht zutrifft. So ist beispielsweise die Eichgruppe A (erzeugt durch Baryonladung, Leptonladung und elektrische Ladung) nicht unabhängig von P^0 (Zusammenhangskomponente der Eins der Poincarégruppe)[1]). Die umfassende Symmetriegruppe ist hier eine nichttriviale zentrale Extension von P^0 mit A. Mathematisch existieren in diesem Beispiel acht solche Extensionen. Jede führt auf eine Relation der Form:

$$(-1)^{2j} = (-1)^{\varepsilon_q q + \varepsilon_b b + \varepsilon_l l}\,. \tag{1.1}$$

Darin nehmen die ε die Werte 0 oder 1 an. j ist der Spin, q die elektrische Ladung, b die Baryonladung und l die Leptonladung. Die empirische Relation

$$(-1)^{2j} = (-1)^{b+l} \tag{1.2}$$

legt die physikalisch richtige Extension fest.

In dieser Arbeit diskutieren wir die Extensionen der vollen Poincarégruppe P mit zusätzlichen Symmetriegruppen, wie sie etwa im Gebiet der starken Wechselwirkungen auftreten. Auch in diesem Fall ist die physikalisch richtige Extension nicht das direkte Produkt. Dies zeigt schon die folgende einfache Überlegung. Wäre etwa die richtige Extension von P mit der Isospingruppe $S\,U\,(\boldsymbol{C}, 2)$ das direkte Produkt $S\,U\,(\boldsymbol{C}, 2) \times P$, so müsste die antiunitäre Darstellung U_t der Zeitumkehr vertauschen mit der Darstellung der Lie-Algebra von $S\,U\,(\boldsymbol{C}, 2)$, das heisst $[U_t\, I_k] = 0$. Nun sind aber $T_k = i\, I_k$ die Isospinoperatoren. Mit diesen würde also U_t antivertauschen. Insbesondere würde der Eigenwert eines Eigenzustandes von T_3 bei Zeitumkehr sein Vorzeichen wechseln. Da T_3 ein additiver Beitrag zur elektrischen Ladung ist, ist dies bestimmt unvernünftig. Man wird vielmehr verlangen, dass U_t mit T_3 vertauscht. Dies, zusammen mit den Vertauschungsrelationen für die T_k, legt die Operation von U_t in der Lie-Algebra von $S\,U\,(\boldsymbol{C}, 2)$ im wesentlichen fest. Wie aber schon jetzt ersichtlich ist, ist diese Operation nicht trivial. Damit operiert auch U_t auf die Darstellungen der Gruppe $S\,U\,(\boldsymbol{C}, 2)$ nicht trivial*).

In § 2 bestimmen wir die Wirkung von U_t in der Lie-Algebra einer Symmetriegruppe G für starke Wechselwirkungen. Dadurch bestimmt t einen involutorischen Automorphismus dieser Lie-Algebra. In § 3 wird gezeigt, dass sich diese Involution auf die Gruppe G immer fortsetzen lässt. Gleichzeitig wird die Wirkung der fortgesetzten Involution auf das Zentrum von G explizit bestimmt. In § 4 bestimmen wir die Extensionen der Gruppe $\pi = \{1, t\}$ mit G, in § 5 diejenigen der vollen Spiegelungsgruppe V mit G und in § 6 diejenigen von P mit G. Jede der mathematisch existierenden Extensionen führt auf eine Relation zwischen dem Typ der Zeitumkehr (Eigenwerte von $U_t^2\,U\,(0, -1)$; $U\,(0, -1)$: Drehung um $2\,\pi$), dem Spin, der Baryonzahl, der Hyperladung usw. Empirische Relationen zwischen diesen Grössen legen dann die physikalisch richtige Extension fest. Der § 7 fasst die Ergebnisse in übersichtlicher Form zusammen. Im Anhang geben wir einige mathematische Zusammenhänge, die im Text gebraucht werden.

§ 2. Operation der Zeitumkehr auf die Lie-Algebra einer zusätzlichen Symmetriegruppe

Wir beginnen mit der Diskussion eines Beispiels, an welches sich die nachfolgenden Überlegungen natürlich anschliessen. Wir betrachten eine Symmetriegruppe für starke Wechselwirkungen mit der folgenden Lie-Algebra:

$$\mathfrak{L} = \boldsymbol{R}^2 \oplus \mathfrak{L}' . \tag{2.1}$$

Dabei ist $\boldsymbol{R}^2$ die Lie-Algebra der Eichgruppe von Baryonladung B und Hyperladung Y. $\mathfrak{L}'$ ist die Lie-Algebra der Isospingruppe $S\,U\,(\boldsymbol{C}, 2)$.

Sei I_k $k = 1, 2, 3$ die übliche Basis von $\mathfrak{L}'$, dann ist $T_k = i\,I_k$ eine Basis in der komplexen Erweiterung $[\mathfrak{L}']$ von $\mathfrak{L}'$. Physikalisch wichtig ist die zugehörige Weylsche Basis.

$$H = -T_3\,, \quad E_{\pm} = -{}^1/_2\,(\pm T_1 + i\,T_2)\,.$$

Für eine Darstellung ϱ von $\mathfrak{L}$ durch lineare Operatoren eines Hilbertraumes verlangen wir folgende Vertauschungsrelationen mit U_t, der antiunitären Darstellung der Zeitumkehr:

$$\begin{aligned} &(1) \qquad [U_t, \varrho(H)] = 0\,,\\ &(2) \qquad [U_t, B] = [U_t, Y] = 0\,,\\ &(3) \qquad U_t\,\varrho(\mathfrak{L}')\,U_t^{-1} \subseteq \varrho(\mathfrak{L}')\,,\\ &(4) \qquad [U_t^2, \varrho(\mathfrak{L}')] = 0\,. \end{aligned}$$

(1) und (2) bedeuten, dass Q, B und Y erhalten bleiben bei Zeitumkehr. (Q ist die elektrische Ladung.) (3) besagt, dass $\varrho(\mathfrak{L}')$ bei Zeitumkehr in sich transformiert wird und (4), dass alle Elemente von $\varrho(\mathfrak{L}')$ bei doppelter Zeitumkehr invariant bleiben.

---

*) Diese Bemerkung verdanken wir L. O'Raifeartaigh. Sie gab den Anstoss zur vorliegenden Arbeit. Für wertvolle Diskussionen sind wir ihm zu grossem Dank verpflichtet.

Die V.-R. von H und $E^{\pm}$ zusammen mit (1) bis (4) verlangen (vergleiche allgemeinen Fall)

$$U_t\,\varrho(E_\pm)\,U_t^{-1} = \lambda_\pm\,\varrho(E_\pm)\ ,$$

$$\lambda_- = \overline{\lambda}_+\ , \quad |\lambda_+|^2 = 1\ .$$

Für die Basis:

$$I_3 = i\,H, \quad I_2 = E_+ + E_-, \quad I_3 = i\,(E_+ - E_-)$$

von $\mathfrak{L}'$ gilt dann

$$U_t\,\varrho(H)\,U_t^{-1} = \varrho(H)\ ,$$

$$U_t\,\varrho\,(E_+ + E_-)\,U_t^{-1} = \lambda_+\,\varrho(E_+) + \lambda - \varrho(E_-)\ ,$$

$$U_t\,\varrho\,\big(i\,(E_+ - E_-)\big)\,U_t^{-1} = -i\,\big(\lambda_+\,\varrho(E_+) - \lambda_-\,\varrho(E_-)\big)\ .$$

Dieses Beispiel zeigt, dass die Zeitumkehr U_t auf die Lie-Algebra $\mathfrak{L}'$ nicht trivial operiert.

Wir gehen nun zum allgemeinen Fall über. Dazu betrachten wir eine beliebige kompakte Lie-Algebra. Dadurch lassen sich alle physikalisch interessanten Fälle auf einmal erledigen.

Eine kompakte Lie-Algebra ist immer von der Form[2])

$$\mathfrak{L} = \boldsymbol{R}^m \oplus \mathfrak{L}'\ . \tag{2.2}$$

$\boldsymbol{R}^m$ ist das Zentrum von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ eine halbeinfache kompakte Lie-Algebra. $\mathfrak{L}'$ ist eindeutig bestimmt und gleich der derivierten Algebra $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$ von $\mathfrak{L}$. $\boldsymbol{R}^m$ interpretieren wir als Lie-Algebra einer Eichgruppe von Ladungszahlen (vergleiche (2.1)).

Sei ϱ eine Darstellung von $\mathfrak{L}$ und $\tilde{\varrho}$ ihre Ausdehnung auf die komplexe Erweiterung $[\mathfrak{L}]$ von $\mathfrak{L}$. $f_1 \ldots f_m$ bilde eine Basis von $\boldsymbol{R}^m$. Die Operatoren $\tilde{\varrho}\,(i\,f_k)$ $k = 1, \ldots m$ sind in allen physikalischen Beispielen Ladungsoperatoren. Wie früher verlangen wir deshalb

$$(1) \qquad [U_t, \tilde{\varrho}(i\,f_k)] = 0\ ,$$

$$(2) \qquad U_t\,\varrho(\mathfrak{L}')\,U_t^{-1} \subseteq \varrho(\mathfrak{L}')\ ,$$

$$(3) \qquad [U_t^2, \varrho(\mathfrak{L}')] = 0\ .$$

Nehmen wir ausserdem an, dass die Darstellung ϱ treu und antiselbstadjungiert ist, so wird durch

$$U_t\,\tilde{\varrho}(a)\,U_t^{-1} = \tilde{\varrho}\big(\sigma(a)\big)\ ; \quad a \in [\mathfrak{L}] \tag{2.3}$$

ein antilinearer involutorischer Automorphismus (Involution) σ von $[\mathfrak{L}]$ definiert. Wegen Eigenschaft (1) und (2) zerfällt σ nach den Unteralgebren $[\boldsymbol{R}^m]$ und $[\mathfrak{L}']$. (1) bedeutet

$$\sigma(f_k) = -f_k \quad k = 1, \ldots m\ .$$

Die Fixpunkte von σ in $[\mathfrak{L}']$ bilden, wie man leicht sieht, eine reelle Form von $[\mathfrak{L}']$, das heisst eine reelle Lie-Algebra $\mathfrak{L}''$, deren komplexe Erweiterung mit $[\mathfrak{L}']$ übereinstimmt. Die Elemente von $\tilde{\varrho}(\mathfrak{L}'')$ sind nach Konstruktion genau die Elemente von $\tilde{\varrho}([\mathfrak{L}'])$, die mit U_t vertauschen.

Sei τ die Involution τ: $x + i\,y \to x - i\,y$ ($x, y \in \mathfrak{L}'$) in $[\mathfrak{L}']$, welche zur reellen kompakten Form $\mathfrak{L}'$ gehört[3]), dann vertauschen auf Grund der Bedingung (2) σ und τ.

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma \,.$$

Sei

$$\mathfrak{L}'_{(\pm)} = \{\, x \in \mathfrak{L}' \mid \sigma(x) = \pm x \} \,,$$

dann zeigt man leicht die folgenden Beziehungen[3])

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}'_{(+)} \oplus \mathfrak{L}'_{(-)} \,,$$

$$\mathfrak{L}'' = \mathfrak{L}'_{(+)} \oplus i\, \mathfrak{L}'_{(-)} \,.$$

($\oplus$ ist dabei als direkte Summe von linearen Räumen zu verstehen.)
Diese Formeln geben einen Zusammenhang von $\mathfrak{L}'$ und $\mathfrak{L}''$.

In $[\mathfrak{L}']$ gibt es eine Weylsche Basis[3]) h_j, $j = 1, \ldots l$, $e_{\pm\alpha}$ derart, dass die Elemente $i\,h_j$, $e_\alpha + e_{-\alpha}$, $i\,(e_\alpha - e_{-\alpha})$ eine $\boldsymbol{R}$-Basis von $\mathfrak{L}'$ bilden. $\tilde{\varrho}(h_j)$ sind selbstadjungierte Operatoren, die in allen physikalischen Beispielen mit U_t vertauschen. (In unserem Beispiel war $\tilde{\varrho}(h)$ die 3. Komponente des Isospins; bei $S\,U_3$ kommt die Hyperladung Y dazu.)

Wir verlangen deshalb

$$U_t\, \tilde{\varrho}(h_j)\, U_t^{-1} = \tilde{\varrho}(h_j) \,, \quad j = 1 \,, \quad \ldots l \,, \tag{4}$$

das heisst

$$\sigma(h_j) = h_j \,.$$

Aus den Eigenschaften einer Weylschen Basis kann man nun folgendes zeigen[3]):

$$\sigma(e_{\pm\alpha}) = \lambda_{\pm\alpha}\, e_{\pm\alpha}$$

mit

$$|\lambda_{\pm\alpha}|^2 = 1 \qquad \lambda_{-\alpha} = \overline{\lambda}_\alpha \,.$$

Damit haben wir folgendes Resultat:

Theorem 1

In $[\mathfrak{L}']$ existiert eine Weylsche Basis h_j, $j = 1, \ldots l$, e_α, $e_{-\alpha}$, derart, dass

(a) $$h_j \,, \quad \lambda_\alpha^{1/2}\, e_\alpha \,, \quad \overline{\lambda_\alpha^{1/2}}\, e_{-\alpha}$$

eine $\boldsymbol{R}$-Basis von $\mathfrak{L}''$ bilden.

(b) $$i\,h_j \,, \quad e_\alpha + e_{-\alpha} \,, \quad i\,(e_\alpha - e_{-\alpha})$$

ist eine $\boldsymbol{R}$-Basis von $\mathfrak{L}'$, und die Involution σ in $\mathfrak{L}'$ ist gegeben durch

(c) $$\sigma\,(i\,h_j) = -i\,h_j \,,$$

$$\sigma\,(e_\alpha + e_{-\alpha}) = \lambda_\alpha\, e_\alpha + \overline{\lambda}_\alpha\, e_{-\alpha} \,,$$

$$\sigma\,\big(i\,(e_\alpha - e_{-\alpha})\big) = -i\,(\lambda_\alpha\, e_\alpha - \overline{\lambda}_\alpha\, e_{-\alpha}) \,.$$

Zusammen mit $\sigma(f_k) = -f_k$ ist damit die Operation der Zeitumkehr auf die Lie-Algebra $\mathfrak{L}$ explizite bestimmt.

§ 3. Fortsetzung von σ auf die Gruppe $G(\mathfrak{L})$

In § 2 haben wir die Involution bestimmt, die die Zeitumkehr in der Lie-Algebra einer kompakten Symmetriegruppe G induziert. In diesem Paragraphen setzen wir diese Involution auf die Gruppe G fort. Es stellt sich heraus, dass eine solche Fortsetzung immer existiert und eindeutig ist. Weiter bestimmen wir explizit die Wirkung der fortgesetzten Involution auf das Zentrum von G. Dies ist wichtig für das Extensionsproblem in § 4, 5 und § 6.

Die allgemeinste zusammenhängende kompakte Gruppe G, die zur Lie-Algebra (2.2) gehört, ist eine zentrale Extension einer halbeinfachen zusammenhängenden Lie-Gruppe G' mit Lie-Algebra $\mathfrak{L}'$ und einem m-dimensionalen Torus $\boldsymbol{T}^m = U_1 \times \ldots \times U_1$ (U_1: eindimensionale unitäre Gruppe):

$$0 \to \boldsymbol{T}^m \to G \to G' \to 0 .$$

Dies lässt sich wie folgt einsehen. Die Einskomponente des Zentrums von G ist eine zusammenhängende abgeschlossene abelsche Liesche Untergruppe von G der Dimension m, also ein m-dimensionaler Torus $\boldsymbol{T}^m$.

Sei
$$G' = G/\boldsymbol{T}^m$$

Dann ist nach (2.2) $\mathfrak{L}'$ die Lie-Algebra von G' und damit G' halbeinfach. Nach dem Korollar zu Theorem 2 im Anhang A ist G von der Gestalt

$$G \cong (\boldsymbol{T}^m \times \tilde{G}')/N_\varphi . \tag{3.1}$$

Darin ist $\tilde{G}'$ die universelle Überlegungsgruppe von G', die nach einem Satz von WEYL[4]) kompakt ist. N_φ ist ein diskreter zentraler Normalteiler von $\boldsymbol{T}^m \times \tilde{G}'$ von der Form

$$N_\varphi = \{(\varphi(n), n) \mid n \in N'\} ,$$

$$\varphi \in \mathrm{Hom}\,(N', \boldsymbol{T}^m) .$$

N' ist der diskrete Normalteiler von $\tilde{G}'$ mit

$$G' \cong \tilde{G}'/N' \tag{3.2}$$

Wir setzen nun σ auf die Gruppe G fort. Zunächst definieren wir auf $\boldsymbol{T}^m$

$$\tilde{\chi}\,(e^{\alpha_1 f_1 + \cdots \alpha_m f_m}) = e^{-\alpha_1 f_1 - \cdots - \alpha_m f_m}$$

(beachte $\sigma(f_k) = -f_k$, $k = 1, \ldots m$).
Die Involution σ in der Lie-Algebra $\mathfrak{L}'$ definiert einen lokalen Automorphismus von $\tilde{G}'$, und dieser lässt sich eindeutig auf die einfach zusammenhängende Gruppe $\tilde{G}'$ fortsetzen[5]). Dadurch ist σ auf $\boldsymbol{T}^m \times \tilde{G}'$ fortgesetzt. Diesen Automorphismus bezeichnen wir mit $\tilde{\chi}$.

Notwendig und hinreichend dafür, dass $\tilde{\chi}$ einen Automorphismus in G definiert, ist

$$\tilde{\chi}(N_\varphi) \subseteq N_\varphi . \tag{3.3}$$

Dies beutetet für $n \in N'$

$$\tilde{\chi}(\varphi(n), n) = (\varphi(n'), n') \quad \text{mit} \quad n' \in N'$$

oder

$$\tilde{\chi}(n) = n', \quad \tilde{\chi}(\varphi(n)) = \varphi\,\tilde{\chi}((n)) ,$$

das heisst

$$\tilde{\chi}(N') \subseteq N' ; \quad \tilde{\chi} \circ \varphi = \varphi \circ \tilde{\chi} \quad \text{auf} \quad N' . \tag{3.4}$$

Umgekehrt folgt aus (3.4) wieder (3.3).

Mit dem folgenden Lemma von H. Hopf[6]) lässt sich aber (3.4) als richtig nachweisen.

Lemma (Hopf)

Sei $\boldsymbol{T}$ ein Toroid (das heisst abelsche abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe) einer kompakten zusammenhängenden Gruppe G. Sei weiter a ein Element von G mit $a\,y = y\,a$ für alle $y \in \boldsymbol{T}$, dann existiert ein Toroid $\tilde{\boldsymbol{T}}$ mit $a \in \tilde{\boldsymbol{T}}$ und $\boldsymbol{T} \subseteq \tilde{\boldsymbol{T}}$.

Als einfache Folge ergibt sich das

Korollar

Das Zentrum von G liegt in jedem maximalen Toroid. Wenden wir dies auf die Gruppe $\tilde{G}'$ an, so folgt insbesondere, dass ihr Zentrum im maximalen Toroid liegt, das durch die Cartansche Unteralgebra (aufgespannt durch die $i\,h_j \in \mathfrak{L}'$, $j = 1, \ldots l$) erzeugt wird. Wegen $\sigma\,(i\,h_j) = -i\,h_j$ bedeutet aber dies, dass $\tilde{\chi}$ jedes Element aus dem Zentrum von $\tilde{G}'$ in sein Inverses überführt. Insbesondere ist dies für alle Elemente von N' der Fall. Daraus folgt aber (3.4) unmittelbar.

Damit ist das folgende Theorem bewiesen.

Theorem 2

Die Involution σ (von Theorem 1) in der Lie-Algebra $\mathfrak{L}$ definiert eindeutig einen involutorischen Automorphismus χ jeder kompakten Lie-Gruppe (mit $\mathfrak{L}$ als Lie-Algebra), der in $\mathfrak{L}$ die Involution σ induziert.

§ 4. Extensionen von π mit G

Sei π die zyklische Gruppe 2. Ordnung $\{1, t\}$ (t: Zeitumkehr). Da χ involutorisch ist, definiert es einen Homomorphismus (den wir wieder mit χ bezeichnen) von π in die Automorphismengruppe von G.

$$\chi\colon \quad \pi \to \operatorname{Aut} G .$$

Dieses χ induziert einen Homomorphismus $\hat{\chi}$ von π nach Aut G/Int G (Int G: Gruppe der inneren Automorphismen). Damit ist das Extensionsproblem der Gruppe π mit G wohl definiert[7]). (Eine physikalische Motivierung für das Auftreten von Extensionen wird in Anhang B gegeben). In Fig. 1 geben wir das zugehörige Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
 & \mathfrak{Z}(G) \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & \pi \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Int} G \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Aut} G \arrow[r] & \operatorname{Aut} G/\operatorname{Int} G \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Figur 1

Es handelt sich hier um Extensionen mit einer nichtabelschen Gruppe G. Solche brauchen zu gegebenem ψ im allgemeinen gar nicht zu existieren. Notwendig und hinreichend dafür ist, dass ein gewisser 3-Cozyklus schon ein Corand ist[8]). Da in unserem Fall aber der Homomorphismus von $\pi \to \operatorname{Aut} G/\operatorname{Int} G$ über $\operatorname{Aut} G$ gegeben ist, weist man leicht nach, dass das semidirekte Produkt $G \times \pi$ eine Extension ist*). Dieses ist wie folgt definiert. Die unterliegende Menge besteht aus allen geordneten Paaren (g, α) $g \in G$, $\alpha \in \pi$. Das Produkt ist definiert durch

$$(g, \alpha)\,(g', \alpha') = (g\,\alpha\cdot g', \alpha\,\alpha')\,,$$

wo

$$\alpha\cdot g \overset{\text{Def.}}{=} (\chi(\alpha))\,(g)\,.$$

Das Inverse ist

$$(g, \alpha)^{-1} = (\alpha\cdot g^{-1}, \alpha^{-1})\,.$$

Das Assoziativgesetz gilt, da χ ein Homomorphismus ist. Weiter prüft man leicht nach, dass das Diagramm von Figur 1 erfüllt ist, mit $\psi = \hat{\chi}$.

Die Gruppe der Extensionen von π mit G, die zu $\hat{\chi}$ gehören, ist dann [9])

$$\operatorname{Ext}_{\hat{\chi}}\,(\pi, G) = H^2_{g\circ\hat{\chi}}\,(\pi, \mathfrak{Z}\,(G))\,,\quad \mathfrak{Z}(G) = \text{Zentrum von } G,$$

g ist der natürliche Homomorphismus von $\operatorname{Aut} G/\operatorname{Int} G$ nach $\operatorname{Aut}\,(\mathfrak{Z}(G))$. Nach Theorem 2 führt $(g \circ \hat{\chi})\,(t)$ jedes Element von $\mathfrak{Z}(G)$ in sein Inverses über. In diesem Fall gilt (Anhang A 3, Theorem 4, Kor. 2):

$$H^2_{g\circ\hat{\chi}}\,(\pi, \mathfrak{Z}(G)) = {}_2\mathfrak{Z}(G)$$

(${}_2\mathfrak{Z}(G)$ besteht aus allen involutorischen Elementen von $\mathfrak{Z}(G)$).
Die Extensionen E kann man explizite angeben.

$$E = G \times \tilde{\pi}/Z_2\,. \tag{4.1}$$

$\tilde{\pi}$ ist die zyklische Gruppe 4. Ordnung $Z_4(x)$ mit dem erzeugenden Element x. Z_2 besteht aus den folgenden Elementen von $G \times \tilde{\pi}$:

$$Z_2 = \{(1,1), (g, x^2)\}\,;\qquad g \in {}_2\mathfrak{Z}(G)\,. \tag{4.2}$$

*) Für zwei Gruppen G und G' soll im folgenden unter $G \times G'$ immer das semidirekte Produkt verstanden sein. Das direkte Produkt ist der Spezialfall für $G' \to \operatorname{Aut} G$ trivial.

In (4.1) bedeutet $G \times \tilde{\pi}$ das semidirekte Produkt, wobei natürlich der Automorphismus in G, der zu x gehört, gleich $\chi(t)$ ist.

Setzen wir in (4.2) $g = 1$, so ist E isomorph zum semidirekten Produkt $G \times \pi$. Betrachten wir aber von dieser Gruppe Darstellungen durch unitäre bzw. antiunitäre Operatoren, so würde dies bedeuten, dass $U_t^2 = 1$ ist, was physikalisch im allgemeinen nicht zutrifft. g in Z_2 kann also nicht das Einselement sein.

Die Darstellungen für E bekommen wir aus genau denjenigen Darstellungen von $G \times \tilde{\pi}$ für die

$$U_g\, U_{x^2} = 1\,. \tag{4.3}$$

U_x ist natürlich mit U_t zu identifizieren.

Im folgenden nehmen wir an, dass der Normalteiler N' in (3.2) das ganze Zentrum von $\tilde{G}'$ ist. Dies ist in allen praktischen Beispielen der Fall. Dann ist $\mathfrak{Z}(G) = \boldsymbol{T}^m$ (vergleiche 3.1), und $g \in {}_2\mathfrak{Z}(G)$ ist von der Form

$$g = (-1)^{\sum\limits_l \varepsilon_l q_l}; \qquad q_l = \frac{1}{i\,\pi}\, f_l\,. \tag{4.4}$$

Die ε_l können unabhängig die Werte 0 oder 1 annehmen. (4.3) lautet damit

$$(-1)^{\sum\limits_l \varepsilon_l Q_l} = U_t^2 \tag{4.5}$$

(Die Q_l sind die zu den q_l gehörigen Operatoren).

Multiplizieren wir die Gleichung (4.5) noch mit $U(2\,\pi)$, der räumlichen Drehung um $2\,\pi$, so erhalten wir für die Eigenwerte in den kohärenten Unterräumen die Gleichung

$$(-1)^{\sum\limits_l \varepsilon_l q_l'}\,(-1)^{2j} = \text{Typ}\;(t)$$

(j: Spin; Typ (t) = Eigenwert von $U(2\,\pi) \circ U_t^2$).

Empirisch gibt es keinen Hinweis, dass Typ $(t) \neq 1$ ist. In diesem Fall haben wir die Relation

$$(-1)^{\sum\limits_l \varepsilon_l q_l'} = (-1)^{2j}. \tag{4.6}$$

In einem konkreten Fall für die Gruppe G legen empirische Relationen die ε_l in (4.6) und damit die Extension E fest.

Als Beispiel betrachten wir eine kompakte Gruppe G mit der Lie-Algebra (2.1). Wegen $y \equiv 2\,t_3 \pmod 2$ muss G wie folgt gewählt werden

$$G = U_1 \times (U_1 \times SU_2/Z_2) \tag{4.7}$$

wo

$$Z_2 = \{(1,1), (-1, -1)\}\,.$$

U_1 ist die eindimensionale unitäre Gruppe. Der 1. Faktor in (4.7) ist die Eichgruppe der Baryonzahl, während der 2. Faktor die Eichgruppe für die Hyperladung bedeutet. Aus (4.6) wird in diesem Fall

$$(-1)^{\varepsilon_b b + \varepsilon_y y} = (-1)^{2j}\,.$$

Aus der empirischen Relation (1.2) folgt $\varepsilon_b = 1$, $\varepsilon_y = 0$. Damit

$$E = \left[(U_1 \times (U_1 \times SU_2/Z_2)) \times \tilde{\pi}\right]/Z_2 \tag{4.8}$$

wo das Element g in (4.2) gleich $(-1)^B$ im 1. Faktor von (4.8) zu setzen ist. Damit ist die physikalische Extension eindeutig bestimmt.

Ähnlich bekommt man für das Sakata-Modell und das Oktett-Modell (vgl. Anhang C) die folgende Extension

$$E = [((U_1 \times SU_3)/Z_3) \times \tilde{\pi}]/Z_2$$

Das Element g ist dasselbe wie in (4.8).

§ 5. Extensionen der vollen Spiegelungsgruppe mit G

Sei V die volle Spiegelungsgruppe $V = (1, s, t, s\,t)$ (s: räumliche Spiegelung). s operiert natürlich trivial auf G, während t und $s\,t$ jedes Element des Zentrums von $\mathfrak{Z}(G)$ in das Inverse überführen. Aus demselben Grund wie in § 4 existieren Extensionen von V mit G. Diese sind gegeben durch

$$\text{Ext}\,(V, G) = H^2\,(V, \mathfrak{Z}(G))\,.$$

Diese Gruppe lässt sich berechnen. Man erhält, da $\mathfrak{Z}(G) = \boldsymbol{T}^m$ teilbar ist (vergleiche Korollar 2 zu Theorem 4 im Anhang A 3),

$$H^2\,(V, \mathfrak{Z}(G)) = {}_2\mathfrak{Z}(G) \oplus {}_2\mathfrak{Z}(G)\,,$$

das heisst

$$\text{Ext}\,(V, G) = {}_2\mathfrak{Z}(G) \oplus {}_2\mathfrak{Z}(G)\,. \tag{5.1}$$

Die Extensionen lassen sich explizite konstruieren. Man erhält in jeder Äquivalenzklasse von Extensionen einen Repräsentanten von der Form

$$E = G \times \tilde{V}/N \tag{5.2}$$

In (5.2) ist $\tilde{V}$ wie folgt definiert: $\tilde{V}$ ist die «grösste» Gruppe, die von drei Elementen x_i ($i = 1, 2, 3$) erzeugt wird und für die die folgenden Relationen (R) erfüllt sind.

$$(R) \qquad \begin{array}{ll} \text{(a)} & x_1^2 = 1,\ x_2^4 = x_3^4 = 1\,, \\[6pt] \text{(b)} & x_i^2\,x_j = x_j\,x_i^2\,, \\[6pt] \text{(c)} & x_1\,x_2 = x_3\,. \end{array}$$

Mit andern Worten: $\tilde{V}$ ist die freie Gruppe, erzeugt durch x_i ($i = 1, 2, 3$) modulo die definierenden Relationen (R):

$$\tilde{V} = F(x_i)/(R) \tag{5.3}$$

Der Normalteiler in (5.2) wird durch die folgenden Elemente erzeugt:

$$N = \{(1,1),\ (g, x_2^2),\ (g', x_3^2)\} \qquad g, g' \in {}_2\mathfrak{Z}(G)\,. \tag{5.4}$$

Man kann zeigen, dass $\tilde{V}$ eine zentrale Extension von V mit $Z_2 \times Z_2$ ist

$$0 \to Z_2(x_2^2) \times Z_2(x_3^2) \to \tilde{V} \to V \to 0\,. \tag{5.5}$$

Der Normalteiler in (5.2) ist deshalb von der Gestalt

$$N = (Z_2 \times Z_2)_\varphi \overset{\text{Def.}}{=\!=} \{(\varphi(n), n)\,|\,n \in Z_2(x_2^2) \times Z_2(x_3^2)\}\,, \quad \varphi \in \text{Hom}\,(Z_2 \times Z_2, \mathfrak{Z}(G))\,. \tag{5.6}$$

Betrachten wir wieder Darstellungen von E durch unitäre bzw. antiunitäre Operatoren (antiunitär für x_2 und x_3), dann sind die folgenden Identifikationen vorzunehmen

$$U_{x_1} = U_s, \quad U_{x_2} = U_t, \quad U_{x_3} = U_{s\,t},$$

und wir erhalten

$$U_s^2 = 1, \quad U_t^2 = U_g, \quad U_{s\,t}^2 = U_{g'}. \tag{5.7}$$

Für U_s, U_t und $U_{s\,t}$ sind weiter die Relationen (R) erfüllt. Diese drei Operatoren erfüllen damit die bekannten Darstellungen bis auf einen Faktor der Spiegelungsgruppe V*). Der Willkür für die Wahl der Phasenfaktoren, die man in der «Darstellungstheorie» der Spiegelungen hat, entspricht hier die Freiheit, aus einer Äquivalenzklasse von Extensionen geeignete Repräsentanten auszuwählen[10]).

Aus (5.7) erhalten wir wieder analoge Relationen wie früher

$$(-1)^{\Sigma \varepsilon_l q_l} (-1)^{2j} = \text{Typ}\,(t)\,,$$

$$(-1)^{\Sigma \varepsilon'_l q'_l} (-1)^{2j} = \text{Typ}\,(s\,t)\,.$$

Empirische Relationen bestimmen in einem konkreten Fall wieder die ε_l und ε'_l und damit die «physikalische» Extension. Wir schreiben die entsprechenden Ausdrücke nicht auf.

§ 6. Extensionen von *P* mit *G*

Wir betrachten jetzt die Extensionen der vollen Poincarégruppe P mit G. P ist ein semidirektes Produkt $P = P^0 \times V$ von P^0 (Einskomponente der Poincarégruppe) mit der Spiegelungsgruppe V. P^0 operiert trivial auf G (vgl. Anhang B), d. h. der Homomorphismus von P in die Automorphismen von G erfüllt das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P^0 \arrow[r] \arrow[dr, "0"'] & P = P^0 \times V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[dl, dashed] & 0\,. \\ & & \operatorname{Aut} G & & \end{tikzcd}$$

Die Extensionen (die wieder existieren) sind gegeben durch

$$\text{Ext}\,(P, G) = H^2(P, \mathfrak{Z}(G))\,.$$

Nach einem Satz von SERRE[11]) (vgl. auch Anhang A 2, Theorem 3, Kor. 3) gilt für diese Gruppe

$$H^2(P, \mathfrak{Z}(G)) = H^2(V, \mathfrak{Z}(G)) \oplus {}_2\mathfrak{Z}(G)^V. \tag{6.1}$$

${}_2\mathfrak{Z}(G)^V$ sind die V-invarianten Elemente von ${}_2\mathfrak{Z}(G)$.

Damit (vergleiche (5.1))

$$\text{Ext}\,(P, G) = {}_2\mathfrak{Z}(G) \oplus {}_2\mathfrak{Z}(G) \oplus {}_2\mathfrak{Z}(G)^V. \tag{6.2}$$

---

*) Um kein Missverständnis aufkommen zu lassen, möchten wir betonen, dass in (5.2) das semidirekte Produkt zu verstehen ist, wobei der Homomorphismus von V nach $\operatorname{Aut} G$ dadurch definiert ist, dass x_1, x_2, x_3 genauso operieren wie s, t und $s\,t$.

Explizit sind die Extensionen wie folgt gegeben

$$E = (G \times (\tilde{P}^0 \times \tilde{V}))/N \tag{6.3}$$

$\tilde{P}^0$ ist die universelle Überlagerungsgruppe von P^0. Der Normalteiler N wird durch die folgenden Elemente erzeugt.

$$N = \{(1, (0, 1), 1), (g, (0, -1), 1), (g_2, (0, 1), x_2^2), (g_3, (0, 1), x_3^2)\}\,, \tag{6.4}$$

wo

$$g \in {}_2\mathfrak{Z}(G)^V, \quad g_2, g_3 \in {}_2\mathfrak{Z}(G)\,.$$

Wählt man für G beispielsweise die Gruppe (4.7) und Typ (t) = Typ $(s\,t) = 1$, so erhalten wir mit den nun geläufigen Überlegungen die folgende physikalische Extension

$$E = [U_1 \times ((U_1 \times SU_2)/Z_2)] \times [\tilde{P}^0 \times \tilde{V}]/N$$

mit $g = g_2 = g_3 = (-1)^B$ (B: Baryonzahl).

Damit haben wir die Extensionen von P mit G bestimmt.

§ 7. Die Gruppe $\tilde{P} = \tilde{P}^0 \times \tilde{V}$

Die Gruppe $\tilde{P} = \tilde{P}^0 \times \tilde{V}$ in (6.3) ist eine zentrale Extension der vollen Poincarégruppe $P = P^0 \times V$ mit $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ (dabei entsprechen die erzeugenden Elemente in $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ respektive der Drehung um 2π, dem Quadrat der Zeitumkehr und dem Quadrat von Raumspiegelung mal Zeitumkehr).

$$0 \to Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \to \tilde{P} = \tilde{P}^0 \times \tilde{V} \to P = P^0 \times V \to 0\,. \tag{7.1}$$

Die beim Extensionsproblem auftretenden Erweiterungen von P^0, V und P lassen sich im folgenden Diagramm zusammenfassen

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Z_2 & \to & Z_2 \times Z_2 \times Z_2 & \to & Z_2 \times Z_2 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \tilde{P}^0 & \to & \tilde{P} = \tilde{P}^0 \times \tilde{V} & \to & \tilde{V} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & P^0 & \to & P = P^0 \times V & \to & V & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Für die drei senkrechten Extensionen in Figur 3 schreiben wir

$$E_i\colon \quad 0 \to K_i \to \tilde{P}_i \to P_i \to 0\,.$$

Die Extensionen von P_i mit einer Symmetriegruppe G sind bis auf Äquivalenz gegeben durch

$$G \times \tilde{P}_i/(K_i)_\varphi , \tag{7.2}$$

wo

$$(K_i)_\varphi = \{(\varphi(n), n) \mid n \in K_i\}; \quad \varphi \in \mathrm{Hom}\,(K_i, \mathfrak{Z}(G)). \tag{7.3}$$

Die Gruppe $\tilde{P}^0$ wurde von WIGNER[12]) als eigentliche quantenmechanische Poincarégruppe eingeführt. (Die relativistische Invarianz äussert sich bekanntlich darin, dass man eine gewöhnliche Darstellung von $\tilde{P}^0$ hat.)

Eine ganz analoge Situation tritt bei der Spiegelungsgruppe V auf: Die «Darstellungen bis auf einen Faktor» von V erhält man durch die gewöhnlichen Darstellungen der Gruppe $\tilde{V}$ (vergleiche § 5). Es liegt daher nahe, $\tilde{V}$ als quantenmechanische Spiegelungsgruppe und $\tilde{P} = \tilde{P}^0 \times \tilde{V}$ als volle quantenmechanische Poincarégruppe zu bezeichnen, letzteres in Abweichung zur Terminologie von WIGNER, der $\tilde{P}^0 \times V$ als volle quantenmechanische Poincarégruppe bezeichnet hat.

Schlussbemerkungen

Wir haben in dieser Arbeit gezeigt, dass wegen des antilinearen Charakters der Zeitumkehr die Poincarégruppe P nicht trivial auf eine zusätzliche Symmetriegruppe G operiert. Vereinigt man daher diese Gruppen zu einer einzigen Gruppe E, in der G ein Normalteiler ist und $E/G = P$, so wird man auf nichttriviale Extensionen geführt. In § 6 (vergleiche auch § 7) haben wir alle mathematisch existierenden Extensionen explizit bestimmt und gezeigt, wie man die «physikalische Extension» aus empirischen Relationen zwischen dem Spin, gewissen Ladungszahlen und den Typen von t und $s\,t$ bekommt. Die Bedeutung dieser Extension besteht darin, dass gleichzeitige Invarianz bezüglich P und G sich darin äussert, dass eine *gewöhnliche* Darstellung von E durch unitäre (bzw. antiunitäre) Operatoren im Hilbertraum existiert. E spielt die analoge Rolle wie $\tilde{P}^0$ für die relativistische Invarianz. Denn diese bedeutet, dass man zwar bloss eine Darstellung bis auf einen Faktor von P^0 hat, sich diese aber immer zu einer normalen Darstellung von $\tilde{P}^0$ heben lässt. Mit andern Worten: E ist das Analogon zur quantenmechanischen Poincarégruppe.

ANHANG A

Berechnung von $H^2(G, A)$ für spezielle Gruppen

A 1. Zentrale Extensionen halbeinfacher Lie-Gruppen durch kompakte abelsche Lie-Gruppen

Theorem 1

Sei $0 \to G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G'' \to 0$ eine beliebige Extension von G'' durch eine abelsche Gruppe G'. Ist A ein G''-Modul, so wird in natürlicher Weise $\mathrm{Hom}_Z(G', A)$ ein G''-Modul durch: $(g'' \cdot \varphi)\,(g') = g'' \cdot (\varphi\,(g''^{-1} \cdot g'),\ g'' \in G'',\ g' \in G',\ \varphi \in \mathrm{Hom}_Z(G', A)$.

Ist dann $H^i(G, A) = 0$ $(i = 1, 2)$, so gilt:

$$H^2(G'', A) \overset{h^*}{\cong} \mathrm{Hom}_Z\,(G', A)^{G''} = \mathrm{Hom}_{Z(G'')}\,(G', A).$$

(Dabei ist A ein G-Modul durch: $G \xrightarrow{p} G'' \to \mathrm{Aut}(A)$).

Beweis

a)
$$\begin{tikzcd}
B^2(G'', A) \arrow[d, phantom, "\cap"] & & & & & \\
Z^2(G'', A) \arrow[r, "p^*"] \arrow[d] \arrow[rr, dashed, "h"] & Z^2(G, A) = B^2(G, A) & & C^1(G, A) \arrow[ll, "\delta"'] \arrow[ll, dashed, "g"] \arrow[d, "i^*"] \arrow[r, phantom, "\supseteq"] & Z^1(G, A) = B^1(G, A) \arrow[dl, "0"] \\
H^2(G'', A) \arrow[rr, dashed, "h^*"'] \arrow[d] & & \mathrm{Hom}(G', A)^{G''} \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & C^1(G', A) & \\
0 & & & &
\end{tikzcd}$$

i^* verschwindet auf $Z^1(G, A) = B^1(G, A)$, da G' auf A trivial operiert. Damit existiert die Abbildung g, da $B^2(G, A) \overset{\delta}{\cong} C^1(G, A)/Z^1(G, A)$.

$\varphi = g \circ p^*(\omega)$, $\omega \in Z^2(G'', A)$ ist ein G''-invarianter Homomorphismus φ: $G' \to A$, das heisst h existiert.

Zunächst ist φ ein Homomorphismus: Denn sei $p^*(\omega) = \delta\psi$, $\psi \in C^1\,(G, A)$; dann ist $\varphi = g \circ p^*(\omega) = i^*(\psi)$ und $\delta(i^*\,\psi) = i^*(\delta\psi) = i^*(p^*\,\omega) = 0$, das heisst $\delta\,\varphi = 0$. Da G' auf A trivial operiert, ist φ ein Homomorphismus. Sei $g'' \in G''$ und $g \in G$ mit $p(g) = g''$ und $g' \in G'$. Dann ist

$$0 = p^*\,\omega(g, g') = \psi(g) + g \cdot \psi(g') - \psi(g\,g')$$

und

$$0 = p^*\,\omega(g'' \cdot g', g) = p^*\,\omega(g\,g'\,g^{-1}, g) = \psi\,(g'' \cdot g') + \psi(g) - \psi\,(g\,g')\,.$$

Daraus folgt:

$$g'' \cdot \psi(g') = \psi(g'' \cdot g')$$

und da $g' \in G'$:

$$g'' \cdot \varphi(g') = \varphi(g'' \cdot g') \qquad \text{für} \qquad g'' \in G''\,,$$

das heisst φ ist G''-invariant.

h verschwindet auf $B^2(G'', A)$, und damit existiert h^*.

Denn sei $\omega = \delta\psi$: $p^*\,\omega = p^*(\delta\psi) = \delta(p^*\,\psi)$ und damit $\varphi = g \circ p^*(\omega) = i^*(p^*\,\psi) = 0$.

Die Abbildung h^*: $H^2(G'', A) \to \mathrm{Hom}_{Z(G'')}(G', A)$ ist somit konstruiert und ist ein Homomorphismus.

b) Konstruktion einer inversen Abbildung k: $\mathrm{Hom}_{Z(G'')}(G', A) \to H^2(G'', A)$: Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{Z(G'')}(G', A)$.

Wir betrachten das folgende Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & G'_\varphi \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & G' \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & A \times G \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, "p"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j"'] \arrow[d] & E_\varphi = A \times G/G'_\varphi \arrow[r, "q"'] \arrow[d] & G'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

mit $G'_\varphi = \{(\varphi(g'), g')/g' \in G'$ und $A \times G$ semidirektes Produkt von G mit A.

φ Homomorphismus $\Longleftrightarrow$ G'_φ Untergruppe von $A \times G$.
φ G''-invariant $\Longleftrightarrow$ G'_φ Normalteiler in $A \times G$.
$\Rightarrow$ $\exists$ Extension $0 \to A \xrightarrow{j} E_\varphi \xrightarrow{q} G'' \to 0$, die in A die gegebene Operation von G'' induziert.

Damit ist eine Abbildung k: $\mathrm{Hom}_{Z(G'')}(G', A) \to H^2(G'', A) \approx \mathrm{Ext}(G'', A)$ konstruiert. Durch Wahl eines geeigneten Faktorsystems in $0 \to A \to E_\varphi \to G'' \to 0$ prüft man leicht nach, dass $k \circ h^* = id_{H^2}$ und $h^* \circ k = id_{\mathrm{Hom}_{Z(G'')}(G', A)}$, das heisst h^* ist ein Isomorphismus. ▮

Bemerkung

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes erhält man mit Hilfe der Spektralsequenz von Hochschild-Serre [13][14]), welche die Cohomologie einer Gruppe Π, eines Normalteilers $\Gamma \subset \Pi$ und des Quotienten Π/Γ miteinander verknüpft.

Der hier angegebene Beweis enthält dafür die explizite Konstruktion der zu $\varphi \in \mathrm{Hom}_{Z(G'')}(G', A)$ gehörigen Extension

$$0 \to A \to E_\varphi \to G'' \to 0 ,$$

die in unserem Zusammenhang wichtig ist.

Theorem 2

$0 \to N \to \tilde{G} \to G \to 0$ sei die universelle Überlagerung einer zusammenhängenden Lie-Gruppe G mit halbeinfacher Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. N ist ein diskreter (und damit zentraler) Normalteiler von $\tilde{G}$, und es gilt: $\pi_1(G) \cong N$.

Ist A eine kompakte zusammenhängende abelsche Lie-Gruppe, auf der G trivial operiert, so gilt:

$$H^2(G, A) \overset{h^*}{\cong} \mathrm{Hom}(N, A) = \mathrm{Hom}(\pi_1(G), A) .$$

Korollar

In jeder Äquivalenzklasse von Extensionen von G durch A existiert bis auf analytische Aequivalenz genau eine analytische Extension und diese ist von der Form:

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ & 0 \arrow[r] \arrow[d] & N_\varphi \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & A \times \tilde{G} \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{G} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & E_\varphi \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd} , \qquad N_\varphi = \{(\varphi(n), n)/n \in N\}, \quad \varphi \in \mathrm{Hom}(N, A)$$

Beweis

Der Beweis folgt aus Theorem 1, falls die Bedingungen $H^i(\tilde{G}, A) = 0$ $(i = 1, 2)$ erfüllt sind.

Diese Bedingungen werden durch die folgenden 3 Lemmata als richtig nachgewiesen.

Lemma 1

Sei G eine einfach-zusammenhängende Lie-Gruppe, $A = S^1 \times \underset{m\text{-mal}}{\cdots} \times S^1$ eine kompakte zusammenhängende abelsche Lie-Gruppe, auf die G trivial operiert.

Dann gilt:

$$H^2(G, A) \cong H^2(\mathfrak{g}, \boldsymbol{R}^m) .$$

Dabei ist $H^2(\mathfrak{g}, \boldsymbol{R}^m)$ die 2. Cohomologiegruppe der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G mit Werten in $\boldsymbol{R}^m$; die Elemente von $H^2(\mathfrak{g}, \boldsymbol{R}^m)$ entsprechen 1-1-deutig den Äquivalenzklassen von Extensionen von $\mathfrak{g}$ durch die abelsche Lie-Algebra $\boldsymbol{R}^m$.

Beweis

Nach [15]), Theorem 4.1 und 5.1 folgt*):

$$H^2(G, S^1) \cong H^2(\mathfrak{g}, \boldsymbol{R}) .$$

Aus der Additivität von $H^2(G, \circ)$ und $H^2(\mathfrak{g}, \circ)$ folgt:

$$H^2(G, A) \cong \bigoplus_{i=1}^{m} H^2(G, S^1) \cong \bigoplus_{i=1}^{m} H^2(\mathfrak{g}, \boldsymbol{R}) \cong H^2(\mathfrak{g}, \boldsymbol{R}^m) . \blacksquare$$

Lemma 2 (Whitehead)

Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra über einem Körper Φ der Charakteristik 0, $\mathfrak{M}$ sei ein endlich-dimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul.

Dann gilt:

$$H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{M}) = 0 \quad (i = 1, 2) .$$

Beweis: vgl. [16]).

*) Man muss zusätzlich zu Th. 4.1 und 5.1 in [15]) noch zeigen, dass jeder 2-Cozyklus, der lokal ein Corand ist, bereits ein Corand ist. Dies lässt sich aber unter Verwendung des einfachen Zusammenhanges von G leicht einsehen.

Lemma 3

Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit halbeinfacher Lie-Algebra, A eine beliebige abelsche Gruppe, auf die G trivial operiert.

Dann ist:

$$H^1(G, A) = \mathrm{Hom}(G, A) = 0.$$

Beweis

a) Sei K die Kommutatorgruppe von G (NT in G). Diese ist charakterisiert durch die folgende universelle Eigenschaft der natürlichen Abbildung $G \xrightarrow{\pi} G/K$ (abelsch):

$$\mathrm{Hom}(G, A) \underset{\circ\pi}{\cong} \mathrm{Hom}(G/K, A), \quad \text{natürlich in } A,$$

das heisst die Behauptung von Lemma 3 ist äquivalent zu $G/K = 0$ oder $K = G$.

b) Sei G zunächst eine einfach-zusammenhängende Lie-Gruppe. $\mathfrak{g}$ sei die Lie-Algebra und $\mathfrak{g}'$ die Kommutatoralgebra (Ideal in $\mathfrak{g}$). Betrachte $\mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}/\mathfrak{g}' = \mathfrak{a}$ (abelsche Lie-Algebra der Dimension $r \geqslant 0$).

Da G 1-zusammenhängend $\Rightarrow$ $\exists$ genau ein analytischer Homomorphismus.

$$G \xrightarrow{\Pi} \boldsymbol{R}^r$$

mit

$$d\Pi = \pi: \quad \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}\,.$$

$H = \ker \Pi$ ist eine abgeschlossene invariante Lie-Untergruppe von G.

Aus [17]), pag. 125ff., folgt für die Einskomponente $\overset{\circ}{H}$ von H: $\overset{\circ}{H} = G' = K$, G': zusammenhängende invariante Lie-Untergruppe, erzeugt vom Ideal $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ ([17]), pag. 109, Th. 1).

Damit: In einer einfach-zusammenhängenden Lie-Gruppe G ist K eine *abgeschlossene, zusammenhängende* Lie-Untergruppe von G.

c) Sei nun $\mathfrak{g}$ halbeinfach.

Dann folgt: π: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{g}' = \mathfrak{a} = 0$, da $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ für $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Der 1-deutig bestimmte analytische Homomorphismus Π ist dann ebenfalls der Nullhomomorphismus, das heisst $H = \ker \Pi = G$.

Da G zusammenhängend $\Rightarrow G = H = \overset{\circ}{H} = G' = K$.

d) Ist G eine beliebige zusammenhängende halbeinfache Lie-Gruppe, so sei $\tilde{G} \xrightarrow{p} G \to 0$ die universelle Überlagerung.

Wäre $K \subset G \Rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{p} G \to G/K = A \neq 0$ ist ein Homomorphismus φ: $\tilde{G} \to A$, $\varphi \neq 0$ entgegen a), c).

Also ist $K = G$ für zusammenhängende Lie-Gruppen G mit halbeinfacher Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. ▮

Beweis von Theorem 2:

Aus Lemma 1, 2 folgt $H^2(\tilde{G}, A) = 0$.

Aus Lemma 3 folgt $H^1(\tilde{G}, A) = 0$,

und damit nach Theorem 1 die Behauptung.

Das Korollar folgt aus dem Beweis von Theorem 1. ▮

A2. Extensionen semidirekter Produkte

Sei G eine Gruppe, auf welche eine Gruppe Π operiert. Sei $0 \to G \xrightarrow{i} G \times \Pi \underset{p}{\longrightarrow} \Pi \to 0$ das *semidirekte Produkt* bezüglich dieser Operation, das heisst $G \times \Pi$ sei die unwesentliche Extension von Π durch G bez. der gegebenen Operation.

Mit Hilfe der HOCHSCHILD-SERREschen Spektralsequenz für $0 \to G \to G \times \Pi \to \Pi \to 0$ folgt für einen Π-Modul A mit $H^1(G, A) = 0$[14][18]:

$$0 \to H^2(\Pi, A) \xrightarrow{p^*} H^2(G \times \Pi, A) \xrightarrow{i^*} H^2(G, A)^{\Pi} \to 0$$

ist exakt und zerfällt, das heisst $H^2(G \times \Pi, A) \cong H^2(\Pi, A) \oplus H^2(G, A)^{\Pi}$.

Das folgende Theorem 3 gibt eine solche Zerlegung von $H^2(G \times \Pi, A)$ für einen *beliebigen* Π-Modul A. Dabei wird $H^2(G, A)^{\Pi}$ durch eine andere Gruppe ersetzt, die sich ebenfalls durch Extensionen interpretieren lässt. Diese Gruppen sollen in einer besonderen Arbeit[19]) beschrieben werden, in der auch der Beweis für Theorem 3 angegeben wird.

Theorem 3

Sei G eine Gruppe auf welcher eine Gruppe Π operiert, $0 \to G \to G \times \Pi \to \Pi \to 0$ sei das zugehörige semidirekte Produkt, A ein Π-Modul.

(i) $$H^2(G \times \Pi, A) \cong H^2(\Pi, A) \oplus H^2_{\Pi}(G, A)$$

Dabei entsprechen die Elemente von $H^2_{\Pi}(G, A)$ 1-1-deutig den Äquivalenzklassen von Extensionen

$$0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 0\,,$$

wobei Π auf E operiert und i, p Π-invariante Homomorphismen sind; «Äquivalenz» ist zu verstehen bezüglich Π-invarianter Homomorphismen[19]).

(ii) $H^2_{\Pi}(G, A)$ ist in der folgenden exakten Sequenz enthalten:

$$0 \to H^1(\Pi, Z^1(G, A)) \underset{\alpha^*}{\to} H^2_{\Pi}(G, A) \underset{\beta^*}{\to} H^2(G, A)^{\Pi} \underset{\tau}{\to} H^2(\Pi, Z^1(G, A)) \to H^3_{\Pi}(G, A)$$

(da G trivial auf A operiert, ist $Z^1(G, A) = H^1(G, A) = \mathrm{Hom}(G, A)$).

Korollare

1. $H^2(G, A)^{\Pi} = 0 \Rightarrow H^1(\Pi, \mathrm{Hom}\,(G, A)) \overset{\alpha^*}{\cong} H^2_{\Pi}(G, A)$.

2. $\mathrm{Hom}\,(G, A) = 0 \Rightarrow H^2_{\Pi}(G, A) \overset{\beta^*}{\cong} H^2(G, A)^{\Pi}$

(in Übereinstimmung mit dem anfänglich zitierten Resultat).

3. Seien G, A wie in Theorem 2 gegeben; eine diskrete Gruppe Π operiere auf $\tilde{G}$, G und A, derart, dass $\tilde{G} \xrightarrow{p} G \to 0$ Π-invariant ist. Dann gilt für das semidirekte Produkt $G \times \Pi$ mit Operation $G \times \Pi \to \Pi \to \mathrm{Aut}(A)$:

$$H^2(G \times \Pi, A) \cong H^2(\Pi, A) \oplus H^2(G, A)^{\Pi} \cong H^2(\Pi, A) \oplus \mathrm{Hom}_{Z(\Pi)}(N, A)\,.$$

Korollar 1, 2 folgen direkt aus Theorem 3 (ii), Korollar 3 aus Korollar 2 und Theorem 2.

A3. Direkte Produkte zyklischer Gruppen

Sei $\Pi = \boldsymbol{Z}_h$ die zyklische Gruppe der Ordnung h mit erzeugendem Element x. Sei $N = \sum_{s \in \Pi} s \in \boldsymbol{Z}(\Pi)$ ($\boldsymbol{Z}(\Pi)$: Gruppenring von Π über $\boldsymbol{Z}$) und $T = x - 1 \in \boldsymbol{Z}(\Pi)$.

Für einen Π-Modul A betrachte die Modulhomomorphismen:

$$N: A \to A\,, \qquad T: A \to A$$

$$\alpha \to N\alpha \qquad \alpha \to T\alpha\,.$$

Dann gilt (vgl. [20]), pag. 250):

$$H^{2p}(\Pi, A) = \ker T/\operatorname{im} N\,, \qquad p > 0\,,$$

$$H^{2p+1}(\Pi, A) = \ker N/\operatorname{im} T\,, \qquad p \geqslant 0\,.$$

Ist speziell A ein trivialer Π-Modul, so ist $N\alpha = h\alpha$, $T\alpha = 0$, das heisst

$$H^{2p}(\Pi, A) = A/hA = A_h\,, \qquad p > 0\,,$$

$$H^{2p+1}(\Pi, A) = {}_hA = \{\alpha \in A / h\alpha = 0\}\,, \qquad p \geqslant 0\,.$$

Ist A eine injektive, das heisst teilbare Gruppe, so ist $hA = A$ und damit

$$H^{2p}(\Pi, A) = 0\,, \qquad p > 0\,.$$

Theorem 4

Sei $\Pi = \boldsymbol{Z}_l \times \boldsymbol{Z}_h$, A eine injektive abelsche Gruppe mit Operation $\Pi \to \boldsymbol{Z}_h \to \operatorname{Aut} A$. Dann ist:

$$H^2(\Pi, A) \cong H^2(\boldsymbol{Z}_h, A) \oplus H^1(\boldsymbol{Z}_h, \operatorname{Hom}(\boldsymbol{Z}_l, A))$$

$$\cong \ker T_{\boldsymbol{Z}_h}/\operatorname{im} N_{\boldsymbol{Z}_h} \oplus H^1(\boldsymbol{Z}_h, {}_lA)\,.$$

Beweis

Da A injektiv und ein trivialer $\boldsymbol{Z}_l$-Modul $\Rightarrow H^2(\boldsymbol{Z}_l, A) = 0$, und nach Kor. 1 von Theorem 3 folgt die Behauptung. ∎

Korollare

1. $\boldsymbol{Z}_h$ operiere trivial auf A, A injektive abelsche Gruppe:

$$H^2(\boldsymbol{Z}_h, A) = 0 \quad \text{und} \quad H^2(\boldsymbol{Z}_l \times \boldsymbol{Z}_h, A) = \operatorname{Hom}(\boldsymbol{Z}_h, {}_lA) = {}_h({}_lA) = {}_{(h,l)}A\,,$$

$$(l, h) = GGT \quad \text{von} \quad h, l > 0\,.$$

Durch ein Rekursionsverfahren lässt sich hieraus $H^2(\Pi, A)$ für endliche abelsche Gruppen Π und injektive abelsche Gruppen A mit trivialer Π-Operation bestimmen.

2. Sei $h = 2$; $\boldsymbol{Z}_2 \to \operatorname{Aut}(A)$ sei die Operation von $\boldsymbol{Z}_2$ auf A.

$$1 \to id_A$$

$$-1 \to -id_A\,.$$

Dann gilt: $\ker T = {}_2A$, $\operatorname{im} T = 2\,A$, ${}_2A = A^{\Pi}$, $\operatorname{im} N = 0$, $\ker N = A$ und damit:

$$H^{2p}(\mathbf{Z}_2, A) = {}_2A, \qquad p > 0\,,$$

$$H^{2p+1}(\mathbf{Z}_2, A) = A_2\,, \qquad p \geqslant 0\,,$$

und

$$H^2(\mathbf{Z}_l \times \mathbf{Z}_2, A) \cong {}_2A \oplus H^1(\mathbf{Z}_2, {}_lA)$$

$$\cong {}_2A \oplus ({}_lA)_2 \quad \text{für injektives } A.$$

Speziell für $l = h = 2$, $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 = V$ (Vierergruppe) gilt mit obiger Operation

$$H^2\,(V, A) = {}_2A \oplus {}_2A$$

für injektives A.

ANHANG B

Bezeichnen wir das allgemeine Element von $P = P^0 \times V$ (volle Poincarégruppe) durch $((a, \Lambda), \xi, \eta)$, $(a, \Lambda) \in P^0$; $\xi = 1, s$; $\eta = 1, t$. Die Elemente der Form $((a, \Lambda), \xi, t)$ sind darstellbar durch $((a, \Lambda), \xi, 1) \cdot ((0,1), 1, t)$.

Sei ein Quantensystem gegeben durch einen Hilbertraum $\mathfrak{H}$ und eine von Neumann-Algebra $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{H}$. Das System sei invariant bezüglich $P = P^0 \times V$, das heisst, die Elemente $((a, \Lambda), \xi, 1) \in P$ seien dargestellt durch Automorphismen von $\mathfrak{N}$, die auf dem Zentrum $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{N}$ die Identität induzieren; das Element $((0, 1), 1, t) = t \in P$ sei dargestellt durch einen Automorphismus Θ von N, der in $\mathfrak{Z}$ die Transformation $z \to z^*$ induziert; Θ sei weiter von der Form $\Theta A = U_t \circ A \circ U_t^{-1}$, $A \in \mathfrak{N}$, wobei U_t ein antiunitärer Operator von $\mathfrak{H}$ sei.

Wie in [1]) chap. III zeigt man nun, dass die Gruppe $\mathfrak{U}$ der (unitären oder antiunitären) Operatoren, die die Automorphismengruppe P von $\mathfrak{N}$ induzieren, eine Extension von P mit der Abel'schen Gruppe $\mathfrak{C}$ der unitären Operatoren in $\mathfrak{Z}$ ist:

$$0 \to \mathfrak{C} \to \mathfrak{U} \underset{p}{\overset{k}{\leftrightarrows}} P \to 0 \tag{B.1}$$

Diese Extension ist nicht zentral: für einen beliebigen Mengenschnitt k von p mit $k(1) = 1$, $k(t) = U_t$ erhält man für die Operation von P auf C:

$$\begin{array}{ccc} P = P^0 \times V & \xrightarrow{\Psi} & \operatorname{Aut} \mathfrak{C} \\ \downarrow & & \uparrow \varphi \\ V & \to & \pi = \{1, t\} \end{array}$$

wobei $\qquad \varphi(t)(c) = c^* = c^{-1};\ \Psi(x)(c) = k(x)\,c\,k(x)^{-1},\ x \in P,\ c \in C.$

Eine zusätzliche Symmetriegruppe der Theorie sei nun gegeben durch eine treue unitäre Darstellung ϱ einer kompakten zusammenhängenden Lie-Gruppe G. Diese soll relativ zu (B.1) die folgenden Eigenschaften besitzen:

1° $\qquad k(x)\,\varrho(g)\,k(x)^{-1} = \varrho(g),\quad g \in G,\quad x = \big((a, \Lambda), \xi, 1\big) \in P.$

Für den in §§ 2–3 konstruierten Automorphismus $\chi(t)$ von G haben wir nach (2.3):

$$k(t)\ \varrho(g)\ k(t)^{-1} = U_t\ \varrho(g)\ U_t^{-1} = \varrho(\chi(t)(g)),\ g \in G. \tag{B.2}$$

Mit dem Homomorphismus $\bar{\chi}$: $P \to V \to \pi = \{1, t\} \xrightarrow{\chi}$ Aut G lassen sich 1° und (B.2) zusammenfassen:

$$k(x)\ \varrho(g)\ k(x)^{-1} = \varrho(\bar{\chi}(x)\ (g)),\ x \in P,\ g \in G. \tag{B.3}$$

2° $$\mathfrak{C} \overset{j}{\subseteq} \varrho\ (G).$$

Bemerkung: Die Gleichung 1° bedeutet, dass sich jede Lorentztransformation der Form $x = ((a, \Lambda),\ \xi,\ 1) \in P$ durch einen unitären Operator realisieren lässt, der mit den Transformationen $\varrho(G)$ vertauscht. Physikalisch bedeutet dies, dass die Gruppe G Impuls, Energie, Drehimpuls und Parität des Systems invariant lässt.

Die Gleichung 2° bedeutet, dass $\varrho(G)$ alle Supersymmetrien des Systems enthält. Dies ist in allen praktischen Beispielen der Fall.

Man beweist nun leicht:

Lemma: Für $i = \varrho^{-1} \circ j$: $\mathfrak{C} \to G$ gilt:

$$i(\varphi(t)\ (c)) = \chi(t)\ (i(c)),\ c \in \mathfrak{C}.$$

Die Inklusion i ist mit den Operationen von t auf $\mathfrak{C}$ und G verträglich.

Theorem: Es existiert eine Extension

$$0 \to G \to \bar{E} \to P \to 0,$$

gegeben durch

$$\bar{E} = G \times P,\ (g, x) \cdot (h, y) = (g \cdot \bar{\chi}(x)(h) \cdot f(x, y),\ x \cdot y),\ f(x, y) = i(k(x)\ k(y)\ k(xy)^{-1}),$$

die zur gegebenen Operation $\bar{\chi}$: $P \to$ Aut G gehört, derart, dass

$$\bar{\varrho}: \bar{E} \to E \overset{Def.}{=} \varrho(G) \cdot \mathfrak{U},$$

definiert durch $\bar{\varrho}(g, x) = \varrho(g) \cdot k(x)$ eine Darstellung von $\bar{E}$ durch unitäre bzw. antiunitäre Operatoren von $\mathfrak{H}$ ist.

E ist damit eine Gruppe; sie ist isomorph zu $\bar{E}$ genau, wenn $\varrho(G) \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{C}$ gilt.

ANHANG C

Ausgehend von (3.1) diskutieren wir kurz die zur Lie-Algebra $\mathfrak{L} = \boldsymbol{R} \oplus A_l$ gehörenden kompakten Gruppen und ihre irreduziblen Darstellungen. Eine Gruppe dieser Art ist nach (3.1) immer von der Form: $U_1 \times SU_{l+1}/N_\varphi$. Beschränken wir uns auf den Fall wo $(l + 1)$ eine Primzahl ist, so ist N' in (3.2) entweder trivial oder das ganze Zentrum Z_{l+1} von SU_{l+1}. Es existieren also nur die folgenden Möglichkeiten:

$$(1) \qquad G = U_1 \times SU_{l+1} \tag{C, 1}$$

$$(2) \qquad G_s = U_1 \times SU_{l+1}/(Z_{l+1})_{\varphi_s}; \quad s = 0, 1, 2, \ldots l.$$

Der Homomorphismus φ_s ist dabei wie folgt definiert: Sei $z_0 = e^{2\pi i/l+1}$ das erzeugende Element von Z_{l+1}, dann setzen wir $\varphi_s(z_0) = e^{-2\pi i s/l+1}$; $s = 0, 1, 2, \ldots l$. Für $s = 1$ erhält man, wie leicht einzusehen ist, die Gruppe U_{l+1}.

Die irreduziblen Darstellungen von (2) bekommt man genau aus denjenigen von (1), für die $(\varphi(z_0), z_0)$ im Kern ist. Die irreduziblen Darstellungen von (1) anderseits sind charakterisiert durch $l+1$ nicht-negative ganze Zahlen $[n; m_1, m_2, \ldots m_l]$ (man bekommt diese Darstellungen alle aus den Tensorprodukten der irreduziblen Darstellungen von U_1 mit denjenigen von SU_{l+1}). Das Element z_0 liegt natürlich im maximalen Torus, der durch die Cartan-Algebra von A_l erzeugt wird. Explizit lässt es sich wie folgt darstellen:

$$z_0 = e^{2\pi i h_0/l+1} \quad \text{mit} \quad h_0 = \sum_{k=1}^{l} k\, h_k \tag{C.2}$$

Darin sind die h_k diejenigen Elemente in der Cartan-Algebra von A_l, die zu den kanonischen Erzeugenden gehören (vgl. [21]). Die Formel (*C.* 2) beweist man leicht mit einer geeigneten Matrixdarstellung von A_l (vgl. [22]). In einer Darstellung $[n; m_1, m_2, \ldots m_l]$ geht z_0 in $a \cdot \mathbf{1}$ über, mit *)

$$a = e^{2\pi i \Lambda(h_0)/l+1} = e^{2\pi i q/l+1} \qquad \text{wo} \qquad q = \sum_{k=1}^{l} k\, m_k\,.$$

Damit liefert die irreduzible Darstellung $[n; m_1, m_2 \ldots m_l]$ von $U_1 \times SU_{l+1}$ genau dann eine Darstellung von G_s, falls

$$q \equiv s \cdot n \pmod{l+1} \tag{C.3}$$

Dieses Resultat ist nicht neu, wie auch die folgenden Ergebnisse dieses Anhanges (vgl. [23]).

Die hier gegebenen Herleitungen scheinen uns aber wesentlich einfacher gegenüber denjenigen, die wir in der Literatur gefunden haben[23]).

Mit (C. 3) lässt sich jetzt sofort sehen, dass im Falle $l = 2$ das Oktett-Modell $(s = 0)$ und das Sakata-Modell $(s = 1)$ die einzigen kompakten Gruppen zu $\mathfrak{L} = \boldsymbol{R} \oplus A_2$ sind, für die sich eine Hyperladung Y und eine elektrische Ladung Q definieren lassen, die bei allen Darstellungen ganzzahlige Eigenwerte haben.

Seien nämlich α_1, α_2 die beiden einfachen Wurzeln in A_2 und $h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2}$ die zugehörigen Elemente in der Cartan-Algebra (für die Bezeichnungen vgl. [21]), dann wird die Lie-Algebra A_1 der Isospingruppe aufgespannt durch $h_{\alpha_1}, e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1}$. Damit Y mit A_1 kommutiert, muss es notwendig von folgender Form sein:

$$Y = a \cdot \frac{2}{3} (h_{\alpha_1} + 2\, h_{\alpha_2}) + c\, B;\; B \in \boldsymbol{R}\,.$$

B ist die Baryonladung. Man beachte dazu lediglich, dass für A_2 sich die α_i auf eins normieren lassen, und die Cartan-Matrix gegeben ist durch

$$A_{ij} \overset{\text{Def.}}{=} \left(\frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

*) $\Lambda = \Sigma m_i \lambda_i$ ist das höchste Gewicht in der Darstellung $[m_1, \ldots m_l]$ von A_l. Die λ_i sind dabei die fundamentalen dominanten Gewichte mit $\lambda_i(h_j) = \delta_{ij}$.

Wegen $h_{\alpha_j} = 1/2\ h_i$ ist der Eigenwert von Y $(E.W.Y)$ in einem Gewichtsraum zum Gewicht $M = \Lambda - k_1\,\alpha_1 - k_2\,\alpha_2$ (k_1, k_2 nicht-negativ ganz) in der Darstellung $[n;\Lambda]$, $\Lambda = m_1\,\lambda_1 + m_2\,\lambda_2$:

$$E.\,W.\,Y = a\left(\frac{m_1 + 2\,m_2}{3} - k_2\right) + c\,n\,.$$

Damit ΔY für verschiedene M ganzzahlig ist und $\Delta Y = \pm\,1$ nicht verboten wird, muss notwendig $a = 1$ sein. Der Fall (1) in (C.1) wird damit ausgeschlossen. Für die Gruppen G_s muss man wegen (C.3) für $s = 0,1,2$ respektive $c = 0,\ {}^2/_3,\ {}^1/_3$ setzen. Im Fall $s = 2$ sieht man aber leicht, dass $Q = T_3 + {}^1/_2\ Y$ nicht immer ganzzahlige Eigenwerte hat, während dies für $s = 0,1$ der Fall ist.

Wir danken Herrn Professor HEITLER herzlich für sein aufmunterndes Interesse an dieser Arbeit sowie für viele wertvolle Diskussionen. Die Verfasser danken ferner dem Schweizerischen Nationalfonds für finanzielle Unterstützung.

Literatur

1) MICHEL, L., *Invariance in Quantum Mechanics and Group Extensions*, Lecture Notes (Ecole Polytechnique, Paris 1962).
2) PONTRJAGIN, L. S., *Topologische Gruppen Π* (Teubner, Leipzig 1957), § 61, Sätze 100, 101, 103.
3) Séminaire «Sophus Lie», 1e année 1954/55, *Théorie des Algèbres de Lie*, Ecole Normale Supérieure, Paris; exposé 11.2.
4) Vgl. [2]), Satz 110.
5) Vgl. [2]), Sätze 80, 92.
6) HOPF, H., Comm. Math. Helv. *XIII*, 119–143 (1940/41); vgl. auch [3]), exposé 23–06, th. 3.
7) MAC LANE, S., *Homology* (Springer 1962), chap. IV, 8.
8) Vgl. [7]), chap. IV, Theorem 8.7.
9) Vgl. [7]), chap. IV, Theorem 8.8.
10) WIGHTMAN, A. S., *L'Invariance dans la Mécanique quantique relativiste* (Les Houches 1960), pag. 189ff.
11) Vgl. [1]), chap. VI, Theorem 1.
12) WIGNER, E., *On unitary Representations of the inhomogenous Lorentz-Group*, Ann. of Math. *40*, 149 (1939).
13) Vgl. [7]), chap. XI, 10, pag. 354.
14) HOCHSCHILD-SERRE, *Cohomology of Group Extensions*, Trans AMS *74*, 110–134 (1953).
15) BARGMANN, V., *On unitary Ray-Representations of continuous Groups*, Ann. of Math. *59*, 1 (1954).
16) Vgl. [3]), exposés 7–02; 5–03, cor. de th. 1; 4–10, th. 2.
17) CHEVALLEY, C., *Theory of Lie-Groups* (Princeton Univ. Press 1946).
18) Vgl. [7]), chap. XI, pag. 355, ex. 3.
19) KAMBER, F., *Extensions de Π-groupes I*. C. R. Acad. Sci., Paris, 1964 (à paraître).
20) CARTAN-EILENBERG, *Homological Algebra* (Princeton Univ. Press 1956).
21) JACOBSON, N., Lie Algebras (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics), p. 126.
22) Vgl. [21]), p. 226.
23) GOURDIN, M., Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, 36. Band, p. 9–14.