Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 37 (1964)
Heft: IV-V

Artikel: Le système de diffusion simple avec des états se désintégrant
Autor: Marchand, J.-P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-113496

Le système de diffusion simple avec des états se désintégrant

par **J.-P. Marchand**

Institut de Physique théorique, Université de Genève

(23 III 64)

1. Introduction

Nous nous proposons ici d'étudier le phénomène de la désintégration dans le cadre d'une théorie de la diffusion. On part d'un système de diffusion simple (JAUCH[2])) et on suppose que dans le spectre continu de l'Hamiltonien libre H_0 sont situées n valeurs propres E_ν qui disparaissent sous l'action du potentiel $V = H - H_0$. Le rôle des états se désintégrant est alors assumé par les vecteurs propres φ_ν associés aux énergies E_ν.

Pour simplifier les calculs nous considérons des particules sans spin. Les moments cinétiques l et m forment alors avec les énergies H_0 et H des systèmes complets d'observables commutant et on peut se placer dans les sous-espaces propres de l et m qui réduisent H_0 et H en rendant leurs spectres simples.

K. O. FRIEDRICHS[3]) a traité en 1948 le modèle d'un potentiel qui a la propriété de rendre les noyaux intégraux de $V\Omega_\pm$ et $V\Omega^*_\pm$ séparables, permettant ainsi l'élimination des opérateurs d'onde Ω des expressions qui relient les représentations spectrales par rapport à H_0 et H. C'est ce modèle de FRIEDRICHS que nous allons réinvestir ici.

Le § 2 donne les représentations spectrales d'un système de diffusion simple sans états liés. On y applique des résultats plus généraux obtenus par B. MISRA[4]) à notre cas particulier.

Dans le § 3 seront dérivées les représentations spectrales du modèle de FRIEDRICHS.

Le § 4 contient le calcul explicite des quantités mesurables du système qui sont la section efficace totale $\sigma(E)$ (= courbe de résonances) et les lois de la désintégration des états φ_ν: $P_\nu(t) \equiv (\varphi_\nu, e^{-iHt}\varphi_\nu)$. Une signification physique sera donnée aux pôles du prolongement analytique de la fonction de diffusion $s(z)$ à l'aide d'un procédé établi par G. HÖHLER[5]).

Au § 5 se trouve la discussion de ces fonctions d'abord globale (théorème de LEVINSON; nombre de résonances; nombre de pôles de $s(z)$) puis à la limite où l'interaction est faible (paramètres de BREIT-WIGNER; lois exponentielles; leur interdépendence dans le cas de plusieurs états φ_ν).

Au § 6 on traitera le problème inverse consistant à attribuer un modèle de FRIEDRICHS à des courbes $\sigma(E)$ respectivement $P_\nu(t)$ données. Une solution simple existe seulement à la limite où l'interaction est faible, à savoir où les fonctions $\sigma(E)$ et $P_\nu(t)$ peuvent être caractérisées par $2\,n$ paramètres respectivement. Un critère d'unicité est donné.

Dans le § 7 enfin nous ferons quelques remarques concernant la généralité du modèle de FRIEDRICHS d'un point de vue mathématique.

2. Le système de diffusion simple et sa représentation spectrale

Définition 1: Le *système de diffusion simple* est défini (JAUCH[2]) par deux opérateurs d'énergie H_0 (= particule libre) et H (= énergie totale) plus un certain nombre d'autres observables formant avec H_0 ou H un système complet. H_0 et H satisfont aux conditions

a) $\exists\, \Omega_\pm \equiv s\text{-}\lim\limits_{t \to \mp\infty} V_t^* U_t\,; \qquad U_t \equiv e^{-iH_0 t}, \qquad V_t \equiv e^{-iHt},$

b) $\exists\, S \equiv \Omega_-^* \Omega_+\,.$

Si H_0 et H ont des spectres continus les opérateurs d'onde sont des isométries entrelaçantes: $\Omega_\pm\, \Omega_\pm^* = \Omega_\pm^*\, \Omega_\pm = I, H = \Omega_\pm\, H_0\, \Omega_\pm^*$, tandis que l'opérateur de diffusion S est unitaire et commute avec H_0. Si les spectres de H_0 et H ont des parties discrètes les isométries ne seront que partielles: $\Omega_\pm\, \Omega_\pm^* = P$, $\Omega_\pm^*\, \Omega_\pm = P_0$ (P_0, P étant les projections sur les parties continues de l'espace Hilbertien $\mathcal{H}$ par rapport aux spectres de H_0 et H) et S sera unitaire seulement sur $P_0\, \mathcal{H}$. Les formules que nous allons dériver dans § 2 ne seront alors applicables qu'aux parties continues $P_0\, H_0\, P_0$ et $P\, H\, P$ de H_0 et H.

Par la suite nous utiliserons les représentations intégrales suivantes des opérateurs d'onde[2]):

$$\Omega_\pm = s\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int_{-\infty}^{0} e^{\varepsilon t}\, V_{\pm t}^*\, U_{\pm t}\, dt\,; \qquad \Omega_\pm^* = s\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int_{-\infty}^{0} e^{\varepsilon t}\, U_{\pm t}^*\, V_{\pm t}\, dt\,.$$

La théorie générale des représentations spectrales d'un système de diffusion a été développée ailleurs[4]). Dans ce travail nous poserons les

Restrictions supplémentaires

c) Les spectres des opérateurs H_0 et H sont simples dans les sous-espaces propres des opérateurs l et m (= moments cinétiques).

d) Les spectres continus de H_0 et H sont absolument continus.

La condition c) implique physiquement qu'on se restreint à des *particules sans spin.* Mathématiquement elle signifie qu'on peut considérer les représentations spectrales d'un élément $x \in \mathcal{H}$ par rapport à H_0 et H séparément dans chaque sous-espace propre de l et m (parce qu'ils réduisent H_0 et H) et que les fonctions spectrales correspondantes $f_0^{lm}(E, x)$ et $f^{lm}(E, x)$ ne dépendent que de la seule variable spectrale E (= énergie), l, m étant fixe (nous omettrons ces indices par la suite).

La condition d) implique que ces fonctions sont au carré sommables, i.e. $f_0(E, x)$, $f(E, x) \in L^2(\Lambda)$.

Lemme 1: Pour toute isométrie (partielle) Ω et tout $x \in H$ on a

$$f(E, \Omega\, x) = f_0(E, x)\,; \qquad f(E, x) = f_0(E, \Omega^* x)\,. \tag{1}$$

Démonstration: Soient $E_0(E')$ et $E(E')$ les familles spectrales des opérateurs H_0 et H, et g_0 un générateur par rapport à H_0 (toujours dans un sous-espace avec (l, m) fixe, bien entendu). Alors $g \equiv \Omega\, g_0$ est un générateur par rapport à H, car:

$$\frac{d}{dE'} \|E(E')\, \Omega\, g_0\|^2 \neq 0 \rhd\lhd \frac{d}{dE'} \|E_0(E')\, g_0\|^2 \neq 0 \,.$$

Tout $x \in \mathcal{H}$ par conséquent s'écrit

$$x = \int \tilde{f}_0(E', x)\, dE_0(E')\, g_0 = \int \tilde{f}(E', x)\, dE(E')\, \Omega\, g_0$$

et on obtient les représentations f_0 et f en multipliant $\tilde{f}_0$ et $\tilde{f}$ par les dérivées de Radon-Nikodym:

$$f_0(E', x) \equiv \tilde{f}_0(E', x) \sqrt{\frac{d}{dE'} \|E_0\,(E')\, g_0\|^2}\,, \qquad f(E', x) \equiv \tilde{f}(E', x) \sqrt{\frac{d}{dE'} \|E\,(E')\, \Omega\, g_0\|^2}.$$

La démonstration de la première équation (1) s'achève alors en calculant $H\, \Omega\, x = \Omega\, H_0\, x$ dans la représentation spectrale H (qui est unique!):

$$\begin{aligned} H\, \Omega\, x &= \int E'\, \tilde{f}(E', \Omega\, x)\, d(E(E')\, \Omega\, g_0) \leftrightarrow E'\, f(E', \Omega\, x) \equiv E'\, \tilde{f}(E', \Omega\, x) \\ &\quad \times \sqrt{\frac{d}{dE'} \|E(E')\, \Omega\, g_0\|^2}\,, \\ \Omega\, H_0\, x &= \Omega \int E'\, \tilde{f}_0(E', x)\, d(E(E')\, g_0) = \int E'\, \tilde{f}_0(E', x)\, d(\Omega\, E(E')\, g_0) \\ &= \int E'\, \tilde{f}_0(E', x)\, d\big(E(E')\, \Omega\, g_0\big) \leftrightarrow E'\, f(E', x) \equiv E' \tilde{f}_0\,(E', x) \\ &\quad \times \sqrt{\frac{d}{dE'} \|E(E')\, \Omega\, g_0\|^2} = E'\, \tilde{f}_0(E', x) \sqrt{\frac{d}{dE'} \|E_0(E')\, g_0\|^2} = E'\, f_0(E', x)\,. \end{aligned}$$

La deuxième équation (1) est obtenne en substiuant x $\rightarrow \Omega^* x$

Théorème 1):* Supposons que H_0 et H aient des spectres absolument continus et forment un système de diffusion simple. Soit V borné. Soient enfin $V\, \Omega_\pm$ resp. $V\, \Omega_\pm^*$ des opérateurs intégraux dans les représentations spectrales par rapport à H_0 resp. H avec les noyaux $\langle E\, | V\, \Omega_\pm |\, E' \rangle_0$ resp. $\langle E\, | V\, \Omega_\pm^* |\, E' \rangle$. Les représentations spectrales des opérateurs d'onde sont alors données par les relations:

$$f_0(E, \Omega_\pm\, x) = f_0(E, x) + \int \frac{\langle E\, | V\, \Omega_\pm |\, E' \rangle_0}{E' - E \pm i\, o}\, f_0(E', x)\, dE'\,, \tag{2a}$$

$$f_0(E, \Omega_\pm^*\, x) = f_0(E, x) - \int \frac{\langle E\, | V\, \Omega_\pm^* |\, E' \rangle}{E' - E \pm i\, o}\, f_0(E', x)\, dE'\,, \tag{2b}$$

$$f(E, \Omega_\pm\, x) = f(E, x) + \int \frac{\langle E\, | V\, \Omega_\pm |\, E' \rangle_0}{E' - E \pm i\, o}\, f(E', x)\, dE'\,, \tag{2c}$$

$$f(E, \Omega_\pm^*\, x) = f(E, x) - \int \frac{\langle E\, | V\, \Omega_\pm^* |\, E' \rangle}{E' - E \pm i\, o}\, f(E', x)\, dE'\,. \tag{2d}$$

Démonstration: Commençons par (2a). Nous utiliserons le fait que, pour les valeurs complexes de z, les résolvantes $R_0(z) \equiv (H_0 - z)^{-1}$ et $R(z) \equiv (H - z)^{-1}$ sont des

*) Les théorèmes 1 et 2 ont été prouvés par B. Misra dans un contexte plus général[4]). Pour être complet je répéterai ici les démonstrations adaptées à notre cas particulier.

fonctions bornées de H_0 et H, reliées par $R(z) = R_0(z)\,(I - V\,R(z))$, V étant borné. Montrons d'abord

$$f_0(E, \Omega_{\pm}^* x) = f_0(E, x) - f_0\Big(E, \lim_{\varepsilon \to 0} V\,R\,(E \mp i\,\varepsilon)\,x\Big) \tag{3}$$

En effet:

$$\begin{aligned}
f_0(E, \Omega_{\pm}^* x) &= f_0\left(E, \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int_{-\infty}^{0} e^{\varepsilon t} f_0\,(E, U_{\pm t}^*\, V_{\pm t}\, dt\, x)\right) \\
&= f_0\left(E, \lim \varepsilon \int_{-\infty}^{0} e^{(\varepsilon \pm i E) t}\, V_{\pm t}\, dt\, x\right) \\
&= f_0\left(E, \lim \varepsilon \int_{-\infty}^{0} e^{(\varepsilon \pm i E) t} \int_{\Lambda} e^{\mp i E' t}\, dE(E')\, dt\, x\right) \\
&= f_0\left(E, \lim \varepsilon \int_{\Lambda} dE\,(E')\, \frac{1}{\varepsilon \pm i\,(E - E')}\, x\right) \\
&= f_0(E, \pm \lim \varepsilon\, i\, R_0\,(E \mp i\,\varepsilon)\,(I - V\,R\,(E \mp i\,\varepsilon))\,x) \\
&= \pm \lim \frac{\varepsilon\, i}{E - (E \mp i\,\varepsilon)}\,\big(f_0\,(E, x) - f_0\,(E, V\,R\,(E \mp i\,\varepsilon)\,x)\big) \\
&= f_0(E, x) - f_0\Big(E, \lim_{\varepsilon \to 0} V\,R\,(E \mp i\,\varepsilon)\,x\Big).
\end{aligned}$$

Substituons maintenant $x \to \Omega_{\pm}\, x$:

$$\begin{aligned}
f_0(E, x) &= f_0(E, \Omega_{\pm}\, x) - f_0(E, \lim V\,R\,(E \mp i\,\varepsilon)\,\Omega_{\pm}\, x) \\
&= f_0(E, \Omega_{\pm}\, x) - f_0(E, \lim V\,\Omega_{\pm}\, R_0\,(E \mp i\,\varepsilon)\,x) \\
&= f_0(E, \Omega_{\pm}\, x) - \lim \int \langle E\,|V\,\Omega_{\pm}|\,E'\rangle_0\, f_0(E', R_0\,(E \mp i\,\varepsilon))\, dE' \\
&= f_0(E, \Omega_{\pm}\, x) - \int \frac{\langle E\,|V\,\Omega_{\pm}|\,E'\rangle_0}{E' - E \pm i\,o}\, f_0(E', x)\, dE'\,.
\end{aligned}$$

Ensuite on démontre (2d). On déduit d'abord d'une manière analogue à (3):

$$f(E, \Omega_{\pm}\, x) = f(E, x) + f(E, \lim V\,R_0\,(E \mp i\,\varepsilon)\,x)\,,$$

puis, en substituant $x \to \Omega_{\pm}^*\, x$

$$f(E, x) = f(E, \Omega_{\pm}^*\, x) + \int \frac{\langle E\,|V\,\Omega_{\pm}^*|\,E'\rangle}{E' - E \pm i\,o}\, f(E', x)\, dE'\,.$$

(2c) découle alors de (2a) par la substitution $x \to \Omega_{\pm}^*\, x$ et (2b) de (2d) par $x \to \Omega_{\pm}\, x$ en utilisant (1).

On notera que (2a) et (2d) ainsi que (2b) et (2c) s'obtiennent réciproquement par la substitution simultanée $H_0 \leftrightarrow H$ (ou $V \leftrightarrow - V$), $f_0 \leftrightarrow f$, ($P_0 \leftrightarrow P$) et $\Omega \leftrightarrow \Omega^*$, comme cela est à prévoir.

En combinant (2b) et (2c) avec (1b) on obtient un

Corollaire:

$$f(E, x) = f_0(E, x) - \int \frac{\langle E \,|V\, \Omega_\pm^*|\, E'\rangle}{E' - E \pm i\, o}\, f_0(E', x)\, dE' \,, \tag{4a}$$

$$f_0(E, x) = f(E, x) + \int \frac{\langle E \,|V\, \Omega_\pm|\, E'\rangle_0}{E' - E \pm i\, o}\, f(E', x)\, dE' \,, \tag{4b}$$

qui permet le passage d'une représentation spectrale à l'autre si non seulement V, mais aussi Ω et Ω^* sont connus. (Pour éliminer les Ω quelque chose comme une séparabilité des noyaux intégraux paraît indispensable; voir § 3).

Théorème 2)*: Supposons que H_0 et H aient des spectres absolument continus et forment un système de diffusion simple. Soit V borné. Soit enfin $V\Omega_\pm$ un opérateur intégral dans la représentation H_0 avec le noyau $\langle E \,|V\, \Omega_\pm|\, E'\rangle_0$. L'opérateur S s'exprime alors, dans cette représentation, par:

$$f_0(E, S\, x) = s(E)\, f_0(E, x)\,; \qquad s(E) = 1 + 2\pi i \langle E \,|V\, \Omega_+|\, E\rangle_0 \,. \tag{5}$$

Démonstration: Substituons $x \to \Omega_+ x$ dans (3):

$$\begin{aligned} f_0(E, S\, x) &= f_0(E, \Omega_-^* \,\Omega_+\, x) = f_0(E, \Omega_+\, x) - f_0(E, V\, R\, (E + i\, o)\, \Omega_+\, x) \\ &= f_0(E, \Omega_+\, x) - f_0(E, V\, \Omega_+\, R_0\, (E + i\, o)\, x) \\ &\overset{(2a)}{=} f_0(E, x) + \int \frac{\langle E \,|V\, \Omega_+|\, E'\rangle_0}{E' - E + i\, o}\, f_0(E', x)\, dE' - \int \frac{\langle E \,|V\, \Omega_+|\, E'\rangle_0}{E' - E - i\, o}\, f_0(E', x)\, dE' \\ &= f_0(E, x) + \lim_{\varepsilon \to 0} \int \langle E \,|V\, \Omega_+\,|\, E'\rangle_0 \frac{-2\, i\, \varepsilon}{(E' - E)^2 + \varepsilon^2}\, f_0(E', x)\, dE' \\ &= f_0(E, x) + \int \langle E \,|V\, \Omega_+\,|\, E'\rangle_0\, 2\pi i\, \delta\, (E' - E)\, f_0(E', x)\, dE' \\ &= (1 + 2\pi i \langle E \,|V\, \Omega_+\,|\, E\rangle_0)\, f(E, x)\,. \end{aligned}$$

3. Le modèle de Friedrichs et ses représentations spectrales

Définition 2: Le *modèle de* FRIEDRICHS est défini par deux opérateurs d'énergie H_0 et H tels que

a) le spectre (simple) de H_0 se compose d'une partie absolument continue Λ plus n valeurs propres E_ν plongées dans Λ.

b) $V \equiv H - H_0$ satisfait aux conditions**)

$$(P_0\, \mathcal{H}, V\, P_0\, \mathcal{H}) = 0\,, \qquad (\varphi_\mu, V\, \varphi_\nu) = 0 \quad [\text{tous } \mu, \nu] \tag{6}$$

où P_0 représente la projection sur la partie continue de l'espace Hilbertien $\mathcal{H}$ par rapport à H_0 et φ_ν sont les vecteurs propres de H_0 associés à E_ν.

c) Le spectre de H est absolument continu***).

---

*) Voir remarque *), p. 477

**) La signification physique de (6) est grossièrement la suivante:
$(P_0\, \mathcal{H}, V\, P_0\, \mathcal{H}) = 0$: pas d'interaction entre particules incidentes et diffusées,
$(\varphi_\mu, V\, \varphi_\nu) = 0$: pas de désintégration d'un état φ dans un autre.

***) On peut transformer cette condition en conditions explicites sur le potential V (voir Appendice 1).

Théorème 3: Le modèle de FRIEDRICHS est un système de diffusion simple.

Démonstration: Nous partons du théorème suivant de T. KATO[6]: Si les domaines de définition de H_0 et H coïncident et si le but de V est de dimension finie, il existe alors des opérateurs d'onde $\Omega_\pm$, $\Omega^*_\pm$ avec domaines $P_0\,\mathcal{H}$, $P\,\mathcal{H}$ (= projections sur les parties absolument continues de $\mathcal{H}$ par rapport à H_0, H) ainsi que l'opérateur de diffusion $S = \Omega^*_-\,\Omega_+$. Or, (6) implique que V est partout défini et par conséquent que domaine H_0 = domaine H.

Il suffit donc de prouver que le but de V est de dimension finie. Mais ceci découle immédiatement de (6). En effet, les vecteurs $V\varphi_\nu$ sous-tendent un espace à n dimensions tout au plus et $V\,P_0\,\mathcal{H}$ est contenu dans le sous-espace $(I - P_0)\,\mathcal{H}$ sous-tendu par les n vecteurs φ_ν. Il en résulte que le but de V est de dimension $2\,n$ au plus.

Théorème 4: $V\,\Omega_\pm$ resp. $V\,\Omega^*_\pm$ sont des opérateurs intégraux dans les représentations spectrales par rapport aux opérateurs $P_0\,H_0\,P_0$ resp. H avec les noyaux

$$\langle E\,|V\,\Omega_\pm|\,E'\rangle_0 = \sum_\nu f_0(E, V\varphi_\nu)\,\overline{f(E', \varphi_\nu)}\,, \tag{7a}$$

$$\langle E\,|V\,\Omega^*_\pm|\,E'\rangle = \sum_\nu f(E, \varphi_\nu)\,\overline{f_0(E', V\varphi_\nu)} \tag{7b}$$

respectivement. Ces noyaux sont du type Carlemann. (Ici $f_0(E, x)$ et $f(E, x)$ désignent les représentations spectrales de $x \in \mathcal{H}$ par rapport aux opérateurs $P_0\,H_0\,P_0$ et H.)

Démonstration: Nous procédons par construction directe des noyaux. On conclut de (6) que

$$f_0(E, V\,P_0\,x) = 0 \quad \text{d'où} \quad f_0(E, V\,x) = f_0(E, V\,(I - P_0)\,x)\,.$$

Or on a

$$V\,(I - P_0)\,x = V\sum_\nu (\varphi_\nu, x)\,\varphi_\nu = \sum_\nu (\Omega^*_\pm\,\varphi_\nu, \Omega^*_\pm\,x)\,V\varphi_\nu$$

et, en substituant $x \to \Omega_\pm\,x$:

$$V\,(I - P_0)\,\Omega_\pm\,x = \sum_\nu (\Omega^*_\pm\,\varphi_\nu, P_0\,x)\,V\varphi_\nu$$

(car $\Omega^*_\pm\,\Omega_\pm = P_0$) puis, enfin:

$$\begin{aligned} f_0(E, V\,\Omega_\pm\,x) &= f_0(E, V\,(I - P_0)\,\Omega_\pm\,x) \\ &= \sum_\nu \int \overline{f_0(E', \Omega^*_\pm\,\varphi_\nu)}\,f_0(E', x)\,dE'\,f_0(E, V\varphi_\nu) \end{aligned}$$

et, en appliquant (1)

$$f_0(E, V\,\Omega_\pm\,x) = \int \sum_\nu f_0(E, V\varphi_\nu)\,\overline{f(E', \varphi_\nu)}\,f_0(E', x)\,dE'\,.$$

Les noyaux $\langle E\,|V\,\Omega_\pm|\,E'\rangle_0$ sont du type Carleman chaque fois que V est défini sur $\mathcal{H}$ entier, car on a alors:

$$\begin{aligned} \int |\langle E\,|V\,\Omega_\pm|\,E'\rangle_0|^2\,dE &\le \int \sum_\nu |f_0(E, V\varphi_\nu)\,\overline{f(E', \varphi_\nu)}|^2\,dE \\ &\le \sum_\nu ||V\varphi_\nu||^2\,|f_\nu(E')|^2 < \infty \end{aligned}$$

pour presque tous les $E' \in \Lambda$, et

$$\int |\langle E\,|V\,\Omega_{\pm}|\,E'\rangle_0|^2\,dE' \le \int \sum_{\nu} |f_0(E, V\,\varphi_\nu)\,\overline{f(E', \varphi_\nu)}|^2\,dE'$$
$$\le \sum_{\nu} |f_0\,(E, V\,\varphi_\nu)|^2\,||\varphi||^2 < \infty$$

pour presque tous les $E \in \Lambda$.

Pour construire les noyaux Carleman des opérateurs $V\,\Omega^*_{\pm}$ dans la représentation H, notons tout d'abord que selon (6):

$$V\,\Omega^*_{\pm}\,x \in (I - P_0)\,\mathcal{H}\,.$$

On a donc

$$V\,\Omega^*_{\pm}\,x = \sum_{\nu} (\varphi_\nu, V\,\Omega^*_{\pm}\,x)\,\varphi_\nu \quad \text{et} \quad f(E, V\,\Omega^*_{\pm}\,x) = \sum_{\nu} (\varphi_\nu, V\,\Omega^*_{\pm}\,x)\,f(E, \varphi_\nu)\,.$$

Mais

$$(\varphi_\nu, V\,\Omega^*_{\pm}\,x) = (V\,\varphi_\nu, \Omega^*_{\pm}\,x) = (\Omega_{\pm}\,V\,\varphi_\nu, x) = \int \overline{f(E', \Omega_{\pm}\,V\,\varphi_\nu)}\,f(E', x)\,dE'$$
$$= \int \overline{f_0(E', V\,\varphi_\nu)}\,f(E', x)\,dE'\,,$$

d'où

$$f(E', V\,\Omega^*_{\pm}\,x) = \int \sum_{\nu} f(E, \varphi_\nu)\,\overline{f_0(E', V\,\varphi_\nu)}\,f(E', x)\,dE'\,,$$

les noyaux

$$\langle E\,|V\,\Omega^*_{\pm}|\,E'\rangle = \sum_{\nu} f(E, \varphi_\nu)\,\overline{f_0^{\pm}(E', V\,\varphi_\nu)}$$

étant Carleman.

Théorème 5: Dans le modèle de FRIEDRICHS la relation entre les représentations spectrales par rapport à H_0 (notation: $x \leftrightarrow \{f_0(E, x), \xi_\nu(x)\}$, $\xi_\nu(x) \equiv (\varphi_\nu, x)$) et H (notation: $x \leftrightarrow f(E, x)$) est la suivante:

$$f(E, x) = f_0(E, x) - \int \frac{\sum_{\nu} f(E, \varphi_\nu)\,\overline{v_\nu\,(E')}}{E' - E \pm i\,o}\,f_0(E', x)\,dE' + \sum_{\nu} \xi_\nu(x)\,f(E, \varphi_\nu) \qquad \text{(8a)}$$

avec

$$f(E, \varphi_\nu) = \frac{\sum_{\varrho} (-1)^{\varrho+\nu}\,v_\varrho\,(E)\,\mathrm{Min}_{\varrho\nu}\,|h^{\mp}_{\sigma\tau}\,(E)|}{\mathrm{Det}\,|h^{\mp}_{\sigma\tau}\,(E)|} \qquad \text{(8b)}$$

et les notations

$$\left.\begin{aligned} v_\nu(E) &\equiv f_0(E, V\,\varphi_\nu), \qquad X_{\sigma\tau}(E) \equiv \overline{v_\sigma(E)}\,v_\tau(E) \\ h^{\pm}_{\sigma\tau}(E) &\equiv h_{\sigma\tau}(E \pm i\,o) \equiv (E - E_\sigma)\,\delta_{\sigma\tau} + \int \frac{X_{\sigma\tau}\,(E')}{E' - E \mp i\,o}\,dE'\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(8c)}$$

La relation inverse est:

$$\left.\begin{aligned} \{f_0(E, x), \xi_\nu(x)\} = \Big\{ & f(E, P_0\,x) + \int \frac{\sum_{\nu} \overline{v_\nu\,(E)}\,f(E', \varphi_\nu)}{E' - E \pm i\,o}\,f(E', P_0\,x)\,dE'\,, \\ & \int \overline{f(E', \varphi_\nu)}\,f(E', x)\,dE' \Big\}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(8d)}$$

Démonstration: (8a) s'obtient par la décomposition

$$f(E, x) = f(E, P_0\, x) + \sum_\nu \xi_\nu(x)\, \varphi_\nu$$

et en appliquant (4a) avec les noyaux (7b) à $P_0\, x$. (8b) est obtenu en identifiant les seconds membres de

$$f(E, V\, \varphi_\nu) = f\big(E, (H - H_0)\, \varphi_\nu\big) = (E - E_\nu)\, f(E, \varphi_\nu)$$

et

$$f(E, V\, \varphi_\nu) \overset{(6)}{=} f(E, P_0\, V\, \varphi_\nu) \overset{(4a)}{=} v_\nu(E) - \sum_\varrho f(E, \varphi_\varrho) \int \frac{\overline{v_\varrho\,(E')}\, v_\nu\,(E)}{E' - E \pm i\, o}\, dE'$$

et en résolvant par rapport à $f(E, \varphi_\nu)$. La relation inverse est évidente.

Théorème 6: Dans le modèle de FRIEDRICHS la représentation spectrale de l'opérateur de diffusion S par rapport à H_0 est la suivante:

$$\left.\begin{aligned} &\{f_0(E, S\, x)\, \xi_\nu(S\, x)\} = \{s(E)\, f_0(E, x), 0\}\,; \\ &\qquad s(E) = 1 + 2\,\pi\, i \sum_{\varrho, \nu} (-1)^{\varrho+\nu}\, X_{\varrho\nu}(E)\, \frac{(\mathrm{Min}_{\varrho\nu}\, h^-)\,(E)}{(\mathrm{Det}\, h^-)\,(E)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Démonstration: De $\Omega^+\, \varphi_\nu = 0$ s'en suit $\xi_\nu(S\, x) = 0$. Pour $P_0\, S\, x$ on applique (5) avec le noyau (7a).

4. Courbe de résonance et lois de la désintégration

Définition 3: Nous appellerons *courbe de résonance* la fonction

$$\sigma(E) \equiv |s(E) - 1|^2 \tag{10a}$$

et *loi de la désintégration de l'état* φ_ν la fonction

$$P_\nu(t) \equiv (\varphi_\nu, e^{-iHt}\, \varphi_\nu)\,. \tag{10b}$$

La signification physique de $\sigma(E)$ est la section d'efficacité totale (à un facteur près), cette dernière étant définie essentiellement comme le carré absolu de la représentation H_0 de l'opérateur $S - I$ après sommation sur toutes les autres variables sur la surface de l'énergie[2]). $P_\nu(t)$ est la probabilité selon laquelle l'état φ_ν au temps $t = 0$ ne s'est pas encore désintégré au temps t.

Théorème 7: Dans le modèle de FRIEDRICHS

$$\sigma(E) = 2\left(n - \mathrm{Re}\left(\frac{\sum_{\mu,\nu} (-1)^{\mu+\nu}\, h^+_{\mu\nu}\, \mathrm{Min}\, h^-}{\mathrm{Det}\, h^-}\right)(E)\right), \tag{11a}$$

$$P_\nu(t) = \frac{1}{2\,\pi\, i} \int_\Lambda \left(\frac{\mathrm{Min}_{\nu\nu}\, h^-}{\mathrm{Det}\, h^-} - \frac{\mathrm{Min}_{\nu\nu}\, h^+}{\mathrm{Det}\, h^+}\right)(E)\, e^{-iEt}\, dE\,. \tag{11b}$$

Démonstration: Entre les fonctions $h^{\pm}_{\sigma\tau}(E)$ et $v_\nu(E)$ (définition voir (8c)) on a les relations suivantes (nous omettrons l'argument E):

$$h^+_{\sigma\tau} - h^-_{\sigma\tau} = 2\pi i\, \overline{v_\sigma}\, v_\tau \; (= 2\pi i\, X_{\sigma\tau})\,; \qquad \overline{h^+_{\sigma\tau}} = h^-_{\tau\sigma}\,,$$

$$\overline{\operatorname{Det} h^+} = \operatorname{Det} h^-\,; \qquad \overline{\operatorname{Min}_{\sigma\tau} h^+} = \operatorname{Min}_{\tau\sigma} h^-\,,$$

$$\operatorname{Det} h = \sum_\sigma (-1)^{\mu+\sigma}\, h_{\mu\sigma} \operatorname{Min}_{\mu\sigma} h \qquad (\mu \text{ fixe})$$

$$= \sum_\mu (-1)^{\mu+\sigma}\, h_{\mu\sigma} \operatorname{Min}_{\mu\sigma} h \qquad (\sigma \text{ fixe})\,,$$

$$\sum_\varrho (-1)^{\sigma+\mu}\, h_{\mu\sigma} \operatorname{Min}_{\nu\sigma} h = \delta_{\mu\nu} \operatorname{Det} h\,.$$

On obtient alors de (9) et (10a):

$$\sigma(E) = \frac{-1}{|\operatorname{Det} h^-|^2} \sum_{\mu,\nu,\sigma,\tau} (-1)^{\mu+\nu+\sigma+\tau} (h^+_{\nu\mu} - h^-_{\nu\mu})(h^+_{\sigma\tau} - h^-_{\sigma\tau}) \operatorname{Min}_{\sigma\mu} h^+ \operatorname{Min}_{\nu\tau} h^-$$

$$= \frac{-1}{|\operatorname{Det} h|^2} \Bigg(\sum_{\nu,\sigma,\tau} (-1)^{\nu+\tau} \underbrace{\sum_\mu (-1)^{\mu+\sigma} h^+_{\nu\mu} \operatorname{Min}_{\sigma\mu} h^+}_{\delta_{\nu\sigma} \operatorname{Det} h^+} h^+_{\sigma\tau} \operatorname{Min}_{\nu\tau} h^-$$

$$- \sum_{\nu,\sigma} \underbrace{\sum_\mu (-1)^{\mu+\nu} h^+_{\nu\mu} \operatorname{Min}_{\sigma\mu} h^+}_{\delta_{\nu\sigma} \operatorname{Det} h^+} \underbrace{\sum_\tau (-1)^{\tau+\sigma} h^-_{\sigma\tau} \operatorname{Min}_{\nu\tau} h^-}_{\delta_{\nu\sigma} \operatorname{Det} h^-}$$

$$- \sum_{\mu,\tau} \underbrace{\sum_\nu (-1)^{\nu+\mu} h^-_{\nu\mu} \operatorname{Min}_{\nu\tau} h^-}_{\delta_{\mu\tau} \operatorname{Det} h^-} \underbrace{\sum_\sigma (-1)^{\sigma+\tau} h^+_{\sigma\tau} \operatorname{Min}_{\sigma\mu} h^+}_{\delta_{\mu\tau} \operatorname{Det} h^+}$$

$$+ \sum_{\mu,\nu,\sigma} (-1)^{\mu+\sigma} h^-_{\nu\mu} \operatorname{Min}_{\sigma\mu} h^+ \underbrace{\sum_\tau (-1)^{\tau+\nu} h^-_{\sigma\tau} \operatorname{Min}_{\nu\tau} h^-}_{\delta_{\nu\sigma} \operatorname{Det} h^-} \Bigg)$$

$$= \frac{-1}{|\operatorname{Det} h|^2} \Big(\sum_{\nu,\tau} (-1)^{\nu+\tau} \operatorname{Det} h^+\, h^+_{\nu\tau} \operatorname{Min}_{\nu\tau} h^- - 2n\, |\operatorname{Det} h|^2$$

$$+ \sum_{\mu,\sigma} (-1)^{\mu+\sigma} h^-_{\sigma\mu} \operatorname{Min}_{\sigma\mu} h^+ \operatorname{Det} h^- \Big)$$

$$= 2 \left(n - \operatorname{Re} \frac{\sum_{\mu,\nu} (-1)^{\mu+\nu} h^+_{\mu\nu} \operatorname{Min}_{\mu\nu} h^-}{\operatorname{Det} h^-} \right).$$

$$P_\nu(t) = (\varphi_\nu, e^{-iHt} \varphi_\nu) = \int_\Delta |f(E, \varphi_\nu)|^2\, e^{-iEt}\, dE\,.$$

$$|f(E,\varphi_\nu)|^2 = \frac{\sum_\sigma (-1)^{\sigma+\nu}\, v_\sigma \,\mathrm{Min}_{\nu\sigma}\, h^+}{\mathrm{Det}\, h^+} \; \frac{\sum_\tau (-1)^{\tau+\nu}\, \overline{v_\tau}\, \overline{\mathrm{Min}_{\nu\tau}\, h^+}}{\overline{\mathrm{Det}\, h^+}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i\,|\mathrm{Det}\, h|^2} \sum_{\sigma,\tau} (-1)^{\sigma+\tau}\, (h^+_{\tau\sigma} - h^-_{\tau\sigma})\, \mathrm{Min}_{\nu\sigma}\, h^+\, \mathrm{Min}_{\tau\nu}\, \overline{h}^-$$

$$= \frac{1}{2\pi i\,|\mathrm{Det}\, h|^2} \Big(\sum_\tau \delta_{\tau\nu}\, \mathrm{Det}\, h^+\, \mathrm{Min}_{\tau\nu}\, h^- - \sum_\sigma \delta_{\sigma\nu}\, \mathrm{Det}\, h^-\, \mathrm{Min}_{\nu\sigma}\, h^+$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\mathrm{Min}_{\nu\nu}\, h^-}{\mathrm{Det}\, h^-} - \frac{\mathrm{Min}_{\nu\nu}\, h^+}{\mathrm{Det}\, h^+}\right)\Big).$$

Selon G. Höhler[5]) on peut écrire l'expression (11b) pour $P_\nu(t)$ différemment si on fait le postulat d'analyticité suivant:

Postulat: Les fonctions d'interaction $X_{\sigma\tau}(E)$ sont analytiquement prolongeables dans des fonctions holomorphes $X_{\sigma\tau}(z)$.

Les fonctions $h_{\sigma\tau}(E)$ et $s(E)$ sont alors prolongeables elles aussi et on a le résultat suivant:

Théorème 8: Si les fonctions $X_{\sigma\tau}(E)$ satisfont au postulat d'analyticité on a

$$P_\nu(t) = \sum_\mu \frac{e^{-i z^{\mathrm{II}}_\mu t}}{H'_\nu\,(z^{\mathrm{II}}_\mu)} + O\,(\|V\,\varphi_\nu\|^2) \tag{11c}$$

avec

$$H_\nu(z) \equiv \frac{(\mathrm{Det}\, h)\,(z)}{(\mathrm{Min}_{\nu\nu}\, h)\,(z)}$$

et z^{II}_μ = zéros de la fonction $H_\nu(z)$ situés dans le 4ème quadrant du IIème feuillet de Riemann qu'on obtient en traversant la coupure Λ depuis en haut = pôles de la fonction de diffusion $s(z)$ dans la même portion du plan complexe.

Démonstration (esquisse): a) Les fonctions

$$h_{\sigma\tau}(z) = (z - E_\sigma)\,\delta_{\sigma\tau} + \int \frac{X_{\sigma\tau}(E')}{E'-z}\, dE'$$

sont régulières dans tous les feuillets avec coupure Λ. Il suffit de remarquer que

$$\int X_{\sigma\tau}(E')\, dE' = (V\,\varphi_\sigma, V\,\varphi_\tau) < \infty\,.$$

b) $H_\nu(z)$ ne s'annulle pas dans le feuillet principal (ni sur Λ). Démontrons-le pour $n = 1$ (c'est probablement juste pour n arbitraire): On a alors $H_1(z) = h(z)$. Pour trouver les zéros, posons d'abord

$$\mathrm{Im}\, h(z) = z\left(1 + \int \frac{X(E')}{|E'-z|^2}\, dE'\right) = 0\,,$$

d'où $\mathrm{Im}\, z = 0$ et $z = E$. Il faut donc que

$$\mathrm{Re}\, h(z) = (E - E_1) + \int \frac{X(E')}{|E-E'|^2}\,(E' - E)\, dE' = 0\,.$$

Mais les deux contributions du second membre ont le même signe si E n'appartient pas au spectre, car $E_1 \in \Lambda$. Re $h(E)$ ne s'annule donc pas en dehors du spectre. $h(z)$ ne s'annule pas non plus si $z \in \Lambda$, car on a Im $h(E) = \pm \pi X(E) \neq 0$.

c) On écrit maintenant (11b):

$$P_\nu(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-izt}}{H_\nu(z)}\, dz\,,$$

le chemin d'intégration Figure (a) enveloppant le spectre dans le feuillet principal. Selon b) on le déforme d'abord en Figure (b); puis en tenant compte des pôles z_μ^{II} de l'intégrand situés dans le deuxième feuillet, en Figure (c). (Nous verrons à l'appendice 2 que pour une large classe d'interactions, de tels pôles z_μ^{II} existent effectivement.)

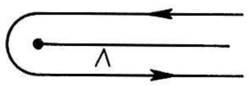


Fig. (a)

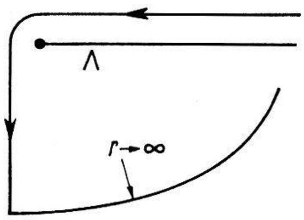


Fig. (b)

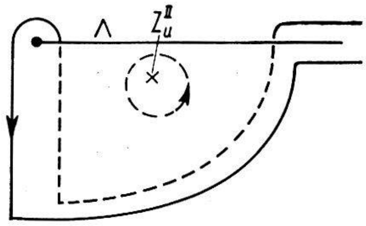


Fig. (c)
(II$^{\text{ème}}$ feuillet en pointillé)

d) Calculons les contributions des pôles:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-izt}}{H_\nu(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \lim_{r\to 0} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i(z_\mu^{\mathrm{II}} + r e^{i\theta})t}\, i\, r\, e^{i\theta}}{H_\nu(z_\mu^{\mathrm{II}}) + r\, e^{i\theta} H'_\nu(z_\mu^{\mathrm{II}}) + O(r^2)}\, d\theta = \frac{e^{-iz_\mu^{\mathrm{II}} t}}{H'_\nu(z_\mu^{\mathrm{II}})}\,.$$

e) Les autres contributions sont (pour $n = 1$, où $H_1(z) = h(z)$ et $h(z^{\mathrm{II}}) = h(z^{\mathrm{I}}) + 2\pi i X(z)$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint = -i \int_0^\infty \frac{X(-iw)\, e^{-wt}\, dw}{h(-iw^{\mathrm{II}})\, h(-iw^{\mathrm{I}})}\,, \qquad \frac{1}{2\pi i} \oint = -\lim_{r\to\infty} \int_0^{\pi/4} \frac{X(r e^{i\theta})\, e^{-ire^{i\theta}t}}{h(r e^{i\theta^{\mathrm{II}}})\, h(r e^{i\theta^{\mathrm{I}}})}\, d\theta\,.$$

Ces expressions sont essentiellement linéaires en $X(z)$ (et l'extension de cette affirmation au cas de $n > 1$ est très probablement possible).

f) Les zéros de $H_\nu(z)$ sont des pôles de $s(z)$ et vice versa. Ceci découle de (9) et la définition de $H_\nu(z)$ si on sait que les minorants (ainsi que les fonctions $X_{\varrho\nu}$) sont réguliers dans tous les plans complexes avec coupure Λ.

5. Discussion des fonctions $\sigma(E)$ et $P(t)$

D'une façon générale, on constate que selon (11a) et (11c) $\sigma(E)$ a le comportement d'une courbe de résonance et $P_\nu(t)$ celui de lois exponentielles et il est naturel d'introduire les paramètres suivants:

Définition 4:

Energies de résonance E''_ν: $\sigma(E''_\nu) \equiv 4n$ (= maximum absolu de $\sigma(E)$)
Largeurs de raie Δ_ν: $\sigma(E''_\nu + \Delta_\nu) \equiv 1/2\, \sigma(E''_\nu) = 2n$
Energies de désintégration E'_ν: $E'_\nu \equiv \mathrm{Re}\, z_\nu^{\mathrm{II}}$
Durées de vie réciproques $1/\tau_\nu$: $1/\tau_\nu \equiv -\mathrm{Im}\, z_\nu^{\mathrm{II}}$.

A l'aide de ces définitions, nous allons maintenant discuter les fonctions $\sigma(E)$ et $P_\nu(t)$. Si l'on ne fait aucune restriction supplémentaire quant à l'interaction V, on est amené à des complications. Pour les voir clairement, il suffit de considérer le cas $n = 1$. En écrivant v, X, h, φ, $P(t)$ pour v_1, X_{11}, h_{11}, φ_1, $P_1(t)$ les formules (11) se réduisent à:

$$\left.\begin{aligned} \sigma(E) &= 2\left(1 - \mathrm{Re}\left(\frac{h^+}{h^-}\right)\right) = 2\left(1 - \frac{\mathrm{Re}\,(h^+)^2}{|h^+|^2}\right) = 4\,\frac{(\mathrm{Im}\,h^+)^2}{(\mathrm{Re}\,h^+)^2 + (\mathrm{Im}\,h^+)^2}\,, \\ P(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda \left(\frac{1}{h^-} - \frac{1}{h^+}\right) e^{-iEt}\,dE = \sum_\mu \frac{e^{-iz_\mu^{\mathrm{II}}t}}{h'\,(z_\mu^{\mathrm{II}})} + O\left(\|V\varphi\|^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

La difficulté réside dans le fait qu'on ne peut rien affirmer quant au nombre de résonances E''_μ et au nombre de lois exponentielles dans l'expression de $P(t)$. On peut en effet construire des interactions pathologiques pour lesquelles les équations $\sigma(E) = 4$ (ou $\mathrm{Re}\,h^+(E) = 0$) possèdent $m'' > 1$ solutions E''_μ et pour lesquelles $s(z)$ possède $m' > 1$ ou $m' = 0$ pôles z_μ^{II} situés dans le 4ème quadrant du deuxième feuillet de RIEMANN (voir appendice 3) et il est difficile de formuler des *conditions de régularité sur V* pour exclure ces cas.

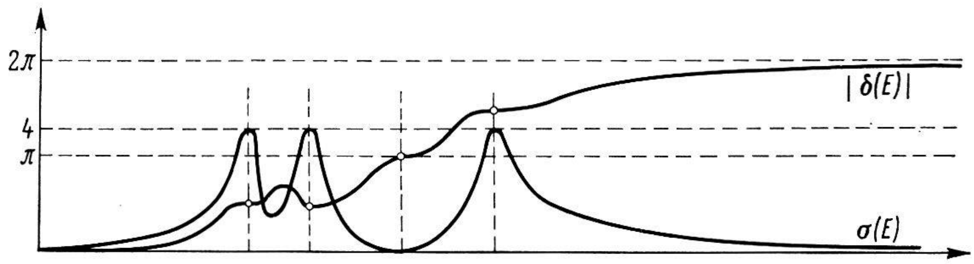
On peut aussi illustrer la même difficulté à l'aide du théorème de LEVINSON sous sa forme généralisée (JAUCH[7])). Ce théorème relie le déphasage $\delta(E)$ au nombre n d'états liés de H_0:

$$|\delta(\infty) - \delta(0)| = n\,\pi\,. \tag{13}$$

Ici $\delta(E)$ est défini par $s(E) = e^{2i\delta(E)}$ ou, en se rappelant que $|s(E)| = 1$ ($P_0\,S\,P_0$ étant unitaire), par

$$\sigma(E) = |e^{2i\delta(E)} - 1| = |e^{i\delta(E)}\,2\,i\,\sin\delta(E)|^2 = 4\,\sin^2\delta(E)\,.$$

(Le déphasage étant une fonction à valeurs multiples, il faut encore préciser la branche qu'on a choisie: nous posons $\delta(0) = 0$ et nous postulons que $\delta(E)$ ainsi que sa première dérivée sont continues en E*)). La figure montre alors le cas $n = 2$ avec $m'' = 3$ résonances:



Dans une deuxième étape de la discussion on peut postuler les conditions de régularité

$$\text{nombre } m'' \text{ de résonances} = \text{nombre } m' \text{ de pôles de } s(z) = n.$$

A ce sujet on trouve une discussion intéressante des termes non exponentiels de $P(t)$ dans l'article de HÖHLER[5]). Nous n'y revenons pas et passons directement à la limite où l'interaction est faible.

*) Pour une preuve directe de (13) voir appendice 2.

Théorème 9: Dans la limite de l'interaction faible ($||V||^2 = o(1)$) les fonctions $\sigma(E)$ et $P(t)$ peuvent être représentées approximativement par les fonctions

$$\sigma^{BW}(E) \equiv 4 \frac{\pi^2 (X(E_1''))^2}{(E-E_1'')^2+\pi^2 (X(E_1''))^2} \quad \text{et } P^{exp.}(t) \equiv e^{-iz_1^{II}t}$$

dans le sens

$$\sigma(E) - \sigma^{BW}(E) = o(1) \qquad \text{et} \qquad P(t) - P^{exp.}(t) = o(1) . \tag{14}$$

Entre les 4 paramètres de la définition 3, on a les relations d'ordre de grandeur suivantes:

$$E_1'' - E_1' = o^2(1) , \qquad \Delta_1 - 1/\tau_1 = o^2(1) . \tag{15}$$

Démonstration: Introduisons la fonction

$$V(E) \equiv \oint \frac{X(E')}{E'-E} \, dE' .$$

On a par hypothèse

$$X(E) = o(1) \qquad \text{et} \qquad V(E) = o(1) .$$

$$\sigma(E) - \sigma^{BW}(E) = 4 \frac{\pi^2 (X(E))^2 (E-E_1'')^2 - (E-E_1+V(E))^2 \pi^2 (X(E_1''))^2}{((E-E_1+V(E))^2+\pi^2(X(E))^2) ((E-E_1'')^2+\pi^2(X(E_1''))^2)}$$

$$= \begin{cases} E - E_1'' = o(1): \\ 4 \dfrac{\pi^2 (X(E_1'')+(E_1''-E) X'(E_1'')+\ldots)^2 (E-E_1'')^2 - \pi^2 (X(E_1''))^2 (E-E_1''+(E-E_1'') V(E_1'')+\ldots)^2}{o^4(1)} \\ = \dfrac{o^5(1)}{o^4(1)} = o(1) \\ E - E_1'' = O(1): \dfrac{o^2(1)}{O(1)} = o^2(1) . \end{cases}$$

La deuxième relation (14) découle de e), p. 485. Il ressort de l'exemple de l'appendice 3 que le pôle z_1^{II} de $s(z)$ tend vers E_1 pour $||V||^2 \to 0$ et il est intuitivement clair que $||V||^2 = o(1)$ implique $|\text{Im } z_1^{II}| = 1/\tau = o(1)$ et $\text{Re } z_1^{II} - E_1 = E_1' - E_1 = o(1)$; (la démonstration formelle pourrait être fastidieuse). Les relations (15) dérivent alors d'une application directe des définitions 4:

Pour E_1'' on a la définition $\sigma(E_1'') = \max \sigma(E) = 4$ ou

$$\text{Re } h^+(E_1'') = E_1'' - E_1 + V(E_1'') = 0 \;\triangleright\; E_1'' = E_1 - V(E_1) + o^2(1) .$$

Δ_1 est défini par $\text{Re } h^+ (E_1'' + \Delta_1) = \text{Im } h^+ (E_1'' + \Delta_1)$. Or:

$$\text{Re } h^+ (E_1'' + \Delta_1) = E_1'' + \Delta_1 - E_1 + V(E_1'') + o^2(1) = \Delta_1 + o^2(1) ,$$

$$\text{Im } h^+ (E_1'' + \Delta_1) = \pi X (E_1'' + \Delta_1) = \pi X (E_1) + o^2(1) ,$$

$$\triangleright \Delta_1 = \pi X(E_1) + o^2(1) .$$

E_1' et $1/\tau_1$ sont définis par $h^{\mathrm{II}}\,(E_1' - i/\tau_1) = 0$. On a donc

$$O = E_1' - \frac{i}{\tau_1} - E_1 + V\Big(E_1' - \frac{i}{\tau_1}\Big) - i\,\pi\,X\,\Big(E_1' - \frac{i}{\tau_1}\Big)$$

$$= E_1' - \frac{i}{\tau_1} - E_1 + V(E_1) - i\,\pi\,X(E_1) + o^2(1)$$

et en prenant les parties réelle et imaginaire séparément:

$$E_1' = E_1 - V(E_1) + o^2(1)\ ; \qquad -\frac{1}{\tau_1} = \pi\,X(E_1) + o^2(1)\ .$$

Remarque: Il ressort de cette démonstration que les paramètres Δ_1 et $1/\tau_1$ ne dépendent de la fonction d'interaction $X(E)$ qu'au voisinage de l'énergie liée E_1, tandis que les paramètres de l'énergie dépendent des fonctions $V(E)$, c'est-à-dire du comportement intégral des fonctions $X(E)$.

Nous voyons dans le théorème 9 que $P(t)$ tend vers une fonction exponentielle pour $||V||^2 \to 0$. Il est à prévoir pour n arbitraire que $P_\nu(t)$ tend vers «sa» loi exponentielle $e^{-i z_\nu^{\mathrm{II}} t}$ dans (11c). Il faut donc montrer que $||V||^2 \to 0$ implique $H_\nu'\ (z_\mu^{\mathrm{II}}) \to \infty$ pour tous les $\mu \neq \nu$.

On conclut tout d'abord de la définition (11c) de $H_\nu(z)$ que les zéros de cette fonction sont les zéros de (Det h) (z) tandis que les pôles s'identifient aux zéros de ($\mathrm{Min}_{\nu\nu}\, h$) (z). Mais à la limite $||V||^2 \to 0$ on a (Det h) $(z) \to \prod_{\mu=1}^{n} (z - E_\mu)$ et ($\mathrm{Min}_{\nu\nu}\, h$) (z) $\to \prod_{\mu \neq \nu} (z - E_\mu)$. Et les zéros z_μ^{II} et les pôles de $H_\nu(z)$ s'approchent donc des mêmes points E_μ sauf pour $\mu = \nu$, et les dérivées $H_\nu'(z)$ tendent vers l'infini dans tous les points z_μ^{II} avec $\mu \neq \nu$.

6. Le Problème inverse

Nous nous posons ici le problème de l'existence et de l'unicité d'un modèle de Friedrichs tel que sa courbe de résonance $\sigma(E)$ (ou le déphasage $\delta(E)$) ou sa loi de désintégration $P(t)$ sont des approximations de fonctions $\sigma(E)$ et $P(t)$ données d'avance. Si ces fonctions sont arbitraires, le problème est difficile. Ceci découle dèjà du fait que le nombre n d'états liés de H_0 ne correspond pas nécessairement au nombre de raies en $\sigma(E)$. Mais, même en excluant cette éventualité, le problème reste compliqué si les fonctions $\sigma(E)$ ou $P(t)$ données ne peuvent être caractérisées par un petit nombre de paramètres.

Limitons-nous ici au cas d'une interaction faible, avec $n = 1$. On peut alors ajuster les deux paramètres (E_1'', Δ_1) ou $(E_1', 1/\tau_1)$ de façon que (14) soit vrai. La solution est alors simple; mais pour la rendre unique, il faut imposer à V suffisamment de conditions supplémentaires pour ne lui laisser que deux dégrés de liberté.

Théorème 10: On donne une des fonctions $\sigma^{BW}(E)$ resp. $P^{exp.}(t)$ ainsi que l'opérateur $P_0\,H_0\,P_0$ à spectre absolument continu. Il existe alors un nombre E_1 et un opérateur H tels que $\{H_0, H\}$ forment un modèle de Friedrichs avec $H_0 \equiv P_0\,H_0\,P_0 + E_1\,P_1$ [$P_1 \equiv$ projection sur $\mathcal{H} \ominus P_0\,\mathcal{H}$]. On peut fixer arbitrairement le vecteur $V\,\varphi$ à sa norme $g = ||V\,\varphi||$ près (et à condition que V satisfasse aux conditions de l'appendice 1).

Démonstration: Soient d'abord E_1'' et Δ_1 donnés et posons $X(E) = |f_0(E, V\varphi)|^2 \equiv g^2 \tilde{X}(E)$, la fonction $\tilde{X}(E) > 0$ étant arbitraire sauf dans la mesure où elle satisfait aux conditions a) à c) de l'appendice 1. On détermine alors E_1 et g par les équations (voir la démonstration du th. 9):

$$E_1 = E_1'' - g^2 \oint \frac{\tilde{X}(E')}{E' - E_1''} dE' + o^2(1); \qquad \Delta_1 = \pi g^2 \tilde{X}(E_1'') + o^2(1)$$

complétant ainsi la définition de H_0. H est obtenu de H_0 à l'aide de (8) et $\{H_0, H\}$ est un modèle de FRIEDRICHS. En plus, $\Delta_1 = o(1)$ implique $g^2 = o(1)$ et on a (selon th. 9) $\sigma(E) = \sigma^{BW}(E) + o(1)$.

Soient maintenant E_1' et $1/\tau_1$ donnés. Dans ce cas on détermine E_1 et g par les équations

$$E_1 = E_1' + g^2 \oint \frac{\tilde{X}(E')}{E' - E_1'} dE' + o^2(1); \qquad 1/\tau_1 = -\pi g^2 \tilde{X}(E_1')$$

(selon la démonstration du th. 9), d'où la construction univoque du système $\{H_0, H\}$ comme ci-dessus.

7. Remarque sur la généralité du modèle de FRIEDRICHS

Les hypothèses (6) de FRIEDRICHS garantissent la présence d'un système de diffusion simple (théorème 3). La démonstration se basait sur le but finidimensionnel de V. Cette condition n'est pas nécessaire et T. KATO en a formulé de moins fortes[8]).

Pour dériver des expressions explicites pour $\sigma(E)$ et $P(t)$ il fallait d'autre part la séparabilité des noyaux intégraux. Pour ceci seule la première condition de (6) est nécessaire et on pourrait remplacer la seconde par une moins forte (pour garantir les conditions asymptotiques). Cette dernière serait toutefois compliquée.

Nous résumons donc cette situation en affirmant que les hypothèses de FRIEDRICHS sont «presque les plus générales» qui permettent encore de calculer explicitement, et cette remarque peut servir de justification au titre de cet article.

APPENDICE 1

Les conditions sur V garantissant la continuité absolue du spectre Λ de H.

Théorème 11: Soit $\Lambda_0 = (0, \infty)$ le spectre de $P_0 H_0 P_0$ et Λ celui de H. La condition c) de la définition 2 du modèle de FRIEDRICHS peut alors être remplacée par les conditions suivantes sur l'interaction (avec la notation (8c)):

a) $X_{\sigma\tau}(E) \neq 0$ $[E \in \Lambda]$ qui exclut l'existence d'une valeur propre $\tilde{E} \in \Lambda$,

b) $\sum_\sigma \operatorname{Re} h_{\sigma\tau}(0) < 0$ qui exclut l'existence d'une valeur propre $\tilde{E} \notin \Lambda$,

c) $X_{\sigma\tau}(0) = 0; \qquad |X_{\sigma\tau}(E') - X_{\sigma\tau}(E'')| \leqslant \varrho_{\sigma\tau} |E' - E''|^{\theta_{\sigma\tau}}$
(tous les $E', E'' \in \Lambda$; $0 < \varrho_{\sigma\tau} < \infty$; $0 < \theta_{\sigma\tau} < 1$) qui exclut des parties non absolument continues de Λ.

Démonstration

a) Ecrivons $H\,x$ dans la représentation H_0 en tenant compte des conditions (b) de Friedrichs:

$$\left.\begin{aligned} H\,x &= H_0\,x + V\,x = H_0\,x + V\,P_0\,x + \sum_\nu \xi_\nu\,(x)\,V\,\varphi_\nu \\ &\leftrightarrow \{E\,f_0\,(E,x),\,E_\nu\,\xi_\nu\,(x)\} + \left\{\sum_\nu \xi_\nu(x)\,f_0\,(E,V\,\varphi_\nu),\,(\varphi_\nu, V\,P_0\,x)\right\} \\ &= \left\{E\,f_0\,(E,x) + \sum_\nu \xi_\nu(x)\,v_\nu(E),\,E_\nu\,\xi_\nu(x) + (V\,\varphi_\nu, P_0\,x)\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Supposons maintenant qu'il existe une valeur propre $\tilde{E} \in \Lambda$ et soit ψ le vecteur propre correspondant:

$$\{f_0\,(E, H\,\psi),\,\xi_\nu\,(H\,\psi)\} = \tilde{E}\,\{f_0\,(E,\psi),\,\xi_\nu(\psi)\}\,.$$

On déduit alors de (16):

$$\left.\begin{aligned} E\,f_0\,(E,\psi) + \sum_\nu \xi_\nu\,(\psi)\,v_\nu(E) &= \tilde{E}\,f_0\,(E,\psi)\,, \\ E_\nu\,\xi_\nu\,(\psi) + (V\,\varphi_\nu, P_0\,\psi) &= \tilde{E}\,\xi_\nu\,(\psi) \end{aligned}\right\} \quad (17a)$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} f_0\,(E,\psi) &= \frac{\sum_\nu \xi_\nu(\psi)\,v_\nu(E)}{\tilde{E}-E}\,[E \neq \tilde{E}]\,, \\ \xi_\nu\,(\psi) &= \frac{(V\,\varphi_\nu\,,\,P_0\,\psi)}{\tilde{E}-E_\nu}\,. \end{aligned}\right\} \quad (17b)$$

Substituons la seconde relation (17b) dans la première:

$$f\,(E,\psi) = \sum_\nu \frac{(V\,\varphi_\nu, P_0\,\psi)}{\tilde{E}-E_\nu}\,\frac{v_\nu(E)}{\tilde{E}-E}\,[E \neq \tilde{E}]$$

et utilisons la normalisabilité de ψ:

$$||\psi||^2 = \int_\Lambda |f_0\,(E,\psi)|^2\,dE = \sum_{\nu,\varrho} \frac{\overline{(V\,\varphi_\nu, P_0\,\psi)}\,(V\,\varphi_\varrho, P_0\,\psi)}{(\tilde{E}-E_\nu)\,(\tilde{E}-E_\varrho)} \int_\Lambda \frac{\overline{v_\nu(E)}\,v_\varrho(E)}{(\tilde{E}-E)^2}\,dE = 1$$

Ici l'intégrale diverge pour tout $\tilde{E} \in \Lambda$ et tout ν, ϱ séparément. On a donc les équations:

$$\frac{\overline{(V\,\varphi_\nu, P_0\,\psi)}\,(V\,\varphi_\varrho, P_0\,\psi)}{(\tilde{E}-E_\nu)\,(\tilde{E}-E_\varrho)} = 0\,,$$

d'où $(V\,\varphi_\nu, P_0\,\psi) = 0$ pour tout ν.

La contradiction apparaît immédiatement: d'une part on a $P_0\,\psi = 0$ et de l'autre, utilisant la seconde équation (17b): $\xi_\nu(\psi) = 0$ [tout ν], d'où $\psi = 0$.

b) Admettons qu'il existe une valeur propre $\tilde{E} \notin \Lambda$. Soit ψ le vecteur associé. ψ possède une composante $\xi_\nu(\psi) \neq 0$, car, dans le cas contraire, on déduirait de la première équation (17a) que ψ est un état lié de H associé à un $\tilde{E} \in \Lambda$. Sans perte de généralité, on peut choisir $\xi_\nu(\psi) = 1$ pour tout ν. Substituant alors la première équation (17a) à la seconde, on obtient

$$1 = \xi_\nu(\psi) = \frac{1}{\tilde{E} - E_\nu} \int \overline{v_\nu(E)}\, f_0\,(E, \psi)\, dE$$

$$= \frac{1}{\tilde{E} - E_\nu} \sum_\varrho \xi_\varrho(\psi) \oint \frac{X_{\nu\varrho}(E)}{\tilde{E} - E_\nu}\, dE \leqslant \frac{1}{\tilde{E} - E_\nu} \sum_\varrho \oint \frac{X_{\nu\varrho}(E)}{\tilde{E} - E}\, dE\,,$$

Mais E étant en dehors du spectre $\Lambda = (0, \infty)$ cette expression est majorisée par

$$\frac{1}{-E_\nu} \sum_\varrho \oint \frac{X_{\nu\varrho}(E)}{-E}\, dE = \frac{1}{E_\nu} \sum_\varrho (\mathrm{Re}\, h_{\nu\varrho}(o) + E_\nu) \quad \text{d'où} \quad 0 \leqslant \sum_\varrho \mathrm{Re}\, h_{\nu\varrho}(o)$$

qui amène la contradiction.

c) Ce point est plus subtil. La démonstration utilise la condition de HÖLDER ((c) dans le théorème) pour prouver que les fonctions spectrales $f(E, x)$ par rapport à H sont de variation bornée, ce qui exclut des parties singulières de Λ (pour les détails voir [3])).

APPENDICE 2

Démonstration de théorème de LEVINSON pour $n = 1$

On se base sur le théorème 11. $X(0) = 0$ implique $\sigma(0) = 0$ et $X(\infty) = 0$ (puisque $||V\varphi||^2 = \int X(E)\, dE < \infty$) implique $\sigma(\infty) = 0$. Il s'ensuit de $\sigma(E) = 4 \sin^2 \delta(E)$ que $\delta(0)$ et $\delta(\infty)$ sont des multiples de π. Notons maintenant que $\delta(E) = \arcsin^2 (1/4\, \sigma(E))$ est une fonction à valeurs multiples dont nous prenons la branche définie par $\delta(0) = 0$ et le postulat que $\delta(E)$ et $\delta'(E)$ sont continus en E. Il suffit alors de démontrer que $1/4\, \sigma(E) = 1$ a au moins une solution dans Λ sans cependant s'annuler entre deux tels maxima. Or on a $1/4\, \sigma(E) = \left\{\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right.$ si et seulement si $\mathrm{Re}\, h(E) = \left\{\begin{smallmatrix}0\\\infty\end{smallmatrix}\right.$. Mais la condition de HÖLDER c) exclut $\mathrm{Re}\, h(E) = \infty$ pour E fini. Il reste donc à prouver qu'il existe au moins un zéro de $\mathrm{Re}\, h(E)$ pour $E \in \Lambda$. Ceci découle de b): $\mathrm{Re}\, h(0) < 0$ et de $\mathrm{Re}\, h(E) \to \infty$ $[E \to \infty]$ à l'aide de la continuité de la fonction $\mathrm{Re}\, h(E)$.

A première vue la démonstration de JAUCH[7]) paraît bien plus simple. Mais il est à noter que les hypothèses a) à c) du théorème 11 qui interviennent d'une façon essentielle dans notre démonstration sont implicitement utilisées chez JAUCH quand il suppose, en plus des conditions asymptotiques, que $\Omega\,\Omega^* = I$. Cette relation fait en effet défaut lorsque $\Lambda \neq \Lambda_0$, c'est-à-dire si Λ n'est pas absolument continu comme Λ_0.

APPENDICE 3

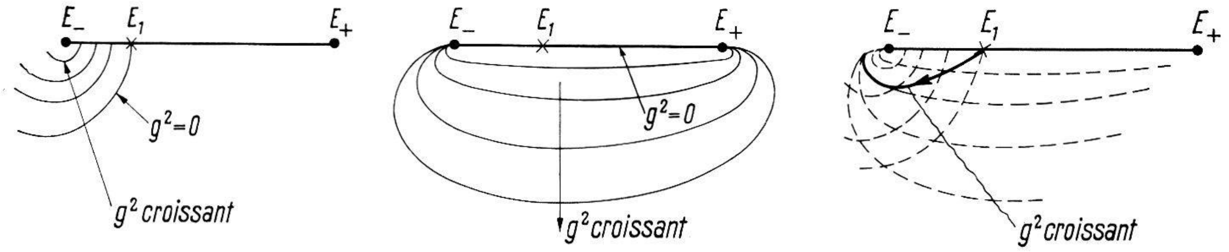
Mouvement du pôle de $s(z)$ en fonction de la c^{te} de couplage g^2

Exemple: $X(E) \equiv g^2 = \text{const.}\ [E \in \Lambda = (E_-, E_+)]$ *)

$$\triangleright\ h(z^{\mathrm{II}}) = z - E_1 + g^2 \left(\ln \left|\frac{z - E_+}{z - E_-}\right| + i \arg \frac{z - E_+}{z - E_-} + 2\pi i\right).$$

*) Comme on le voit ce choix comporte quelques inconvénients. Pour rendre $X(E)$ intégrable, il faut d'abord que le spectre soit fini: $E_1, E_2 < \infty$. Ensuite la condition c): $X(O) = 0$ est violée. Pour plus de détails voir l'exemple «correct» $X(E) = g^2 \sqrt{E}\, e^{-aE}$ (modèle de Lie) discuté dans HÖHLER[5]).

On trouve le zéro de $h(z^{\mathrm{II}})$ en fonction du couplage g^2 si on superpose les courbes $\mathrm{Re}\, h(z^{\mathrm{II}}) = 0$ et $\mathrm{Im}\, h(z^{\mathrm{II}}) = 0$:



$\mathrm{Re}\, h(z^{\mathrm{II}}) = 0$ $\mathrm{Im}\, h(z^{\mathrm{II}}) = 0$ $h(z^{\mathrm{II}}) = 0$

On déduit de ces figures qu'il existe exactement un zéro z_1^{II} de $h(z^{\mathrm{II}})$ dans le plan complexe inférieur et que z_1^{II} approche E_1 pour $g^2 \to 0$. Il est certain que ces deux propriétés sont valables pour une très large classe de fonctions $X(z)$ contenant ou non la classe définie par les conditions a) à c) du théorème 9. Mais, dans l'exemple simple ci-dessus (qui certes viole la condition c)), z_1^{II} quitte le 4$^{\text{ème}}$ quadrant à partir d'un couplage critique g_c^2.

Note ajoutée sur l'épreuve. Un article récent de R. T. PROSSER (J. math. phys. *5*, 708 (1964)) contient une formulation de la représentation spectrale des opérateurs Ω et S qui correspond essentiellement à celle donnée par B. MISRA en 1962[4]) (cf. théorèmes 1 et 2).

Remerciements

Je remercie Monsieur le Professeur J. M. JAUCH, mon directeur de thèse, de m'avoir suggéré le sujet de ce travail et de m'avoir constamment stimulé au cours de sa réalisation, ainsi que le Dr B. MISRA, pour son importante contribution concernant la représentation spectrale des systèmes de diffusion.

Bibliographie

[1]) V. WEISSKOPF et E. P. WIGNER, Zeits. Phys. *63*, 54 (1930) et *65*, 18 (1930).
[2]) J. M. JAUCH, Helv. Phys. Acta *31*, 136 (1958).
[3]) K. O. FRIEDRICHS, Comm. Pure Appl. Math. *1*, 378 (1948).
[4]) B. MISRA séminaire donné à Genève en 1962.
[5]) G. HÖHLER, Zeits. Phys. *152*, 546 (1958).
[6]) T. KATO, J. Math. Soc. of Japan *9*, 239 (1957).
[7]) J. M. JAUCH, Helv. Phys. Acta *30*, 143 (1957).
[8]) T. KATO, Proc. of the Japan Acad. *33*, 260 (1957).