

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 37 (1964)

Heft: IV-V

Artikel: Darstellung der Gravitationsenergie

Autor: Scherrer, Willy

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-113487>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Darstellung der Gravitationsenergie

von **Willy Scherrer**

(18. II. 63)

Zusammenfassung: Diese Arbeit enthält eine Begründung und Erläuterung für die 5. Behauptung in meinem «Bericht über eine einheitliche Feldtheorie»¹⁾: Die totale Energie des von einer ruhenden Masse m erzeugten Gravitationsfeldes wird gegeben durch die Einsteinsche Formel

$$E = m c^2.$$

Das ausschlaggebende Argument für die Begründung liefert der absolut invariante und lokal exakte Erhaltungssatz der linearen Feldtheorie in Verbindung mit einer absolut invarianten Definition des «Führungsfeldes» (Vakuums).

§ 1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit bildet eine Ergänzung meiner in den Jahren 1954 bis 1958 publizierten einheitlichen Feldtheorie²⁾. Ich habe dieser Theorie den Namen «lineare Feldtheorie» gegeben, weil sie sich primär auf lineare Differentialformen gründet. Die Ausgestaltung der Theorie führte zwangsläufig zum Ergebnis, dass neben der Gruppe aller Koordinatentransformationen (die Koordinatengruppe) die Gruppe aller linearen Transformationen der linearen Differentialformen (die Formengruppe) gestellt werden muss. Um insbesondere einen Krümmungsbegriff zu gewinnen, der simultan gegenüber beiden Gruppen invariant ist, erwies es sich als notwendig, einen konstanten asymmetrischen Formentensor zweiter Stufe einzuführen. Identifiziert man dessen symmetrischen Bestandteil $a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$ mit der Lorentz-Matrix, so wird dadurch eine Riemann-Einstein-Metrik induziert. Der zugehörige antisymmetrische Bestandteil $\overline{a_{\lambda\mu}} = -\overline{a_{\mu\lambda}}$ induziert eine antisymmetrische bilineare Differentialform und ist wohl zum mindesten notwendig, um eine natürliche Bestimmung der 16gliedrigen Linearformenbasis zu gewährleisten.

Die einfachsten Totalinvarianten, das heisst also Funktionen, die simultan gegenüber beiden Gruppen invariant sind, erhält man nun, wenn man die ersten Ableitungen der 16 Elemente der eben erwähnten Linearformenbasis mit den

¹⁾ Zeitschrift für Physik 174, 351/352 (1963).

²⁾ Zeitschrift für Physik 138, 16 (1954); 139, 44 (1954); 140, 160 (1955); 140, 164 (1955); 141, 374 (1955); 144, 373 (1956); 152, 319 (1958).

16 Elementen des konstanten asymmetrischen Formentensors in geeigneter Weise verbindet. Es sind ihrer 6, und ich habe sie mit

$$\begin{matrix} W & , & W & , & W & ; & \overline{W} & , & \overline{W} & , & \overline{W} \end{matrix} \quad (1.1)$$

bezeichnet. Die drei ersten nenne ich «symmetrische Invarianten», weil bei ihrem Aufbau nur die symmetrischen Komponenten $a_{\lambda\mu}$ des Formentensors beteiligt sind. Die drei restlichen (überstrichenen) nenne ich «antisymmetrische Invarianten», weil bei ihrem Aufbau auch die antisymmetrischen Komponenten $\overline{a_{\lambda\mu}}$ des Formentensors wesentlich beteiligt sind.

Ein natürlicher Ansatz, um eine geeignete Wirkungsfunktion zu finden, ist nun offenbar gegeben durch

$$W \equiv \Lambda_0 + \sum_{i=1}^3 \Lambda_i W_i + \sum_{i=1}^3 \overline{\Lambda}_i \overline{W}_i, \quad (1.2)$$

wobei die 7 Kombinationszahlen Λ Konstanten darstellen. Insbesondere spielt Λ_0 die Rolle der kosmologischen Konstanten. Für deren Einführung sprechen zwei Gründe:

1. Sie ist entsprechend den ursprünglichen Einsteinschen Überlegungen physikalisch erwünscht, weil durch sie das prekäre Problem der Grenzbedingungen im Unendlichen gegenstandslos wird.

2. Sie ist auch begrifflich erwünscht, weil W für $\Lambda_0 = 0$ eine homogene Funktion der Feldgrößen vom Grade -2 darstellt und daher $\int \mathfrak{M} dx$ kein sinnvolles Extremum liefert, obschon die resultierenden Feldgleichungen brauchbar sind und zum Beispiel die Schwarzschild'sche Lösung ergeben.

Ein unzweifelhafter Entscheid zugunsten der kosmologischen Konstanten käme natürlich erst dann zustande, falls ein Prozess berechnet werden könnte, bei dem ihr Einfluss experimentell verifizierbar wäre.

Das wichtigste Ergebnis meiner letzten Arbeit ist enthalten in folgendem Satz:

Setzt man $\overline{\Lambda}_1 = \overline{\Lambda}_2 = \overline{\Lambda}_3 = 0$, so ergeben sich die Einsteinschen Gravitationsgleichungen für das Vakuum genau dann und nur dann, wenn man die Λ_i entsprechend dem Verhältnis

$$\Lambda_1 : \Lambda_2 : \Lambda_3 = 1 : 2 : -4$$

wählt.

Macht man also für den symmetrischen Anteil der Wirkungsfunktion den Ansatz

$$W \equiv \Lambda_0 + W_0 + 2 W_1 - 4 W_3, \quad (1.3)$$

so erhält damit die Frage nach der Gravitationsenergie im Rahmen unserer Theorie einen eindeutig bestimmten Sinn.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist nun der Nachweis, dass die totale Energie des von einer ruhenden Masse m erzeugten Gravitationsfeldes im Grenzfall $\Lambda_0 = 0$ den Wert $E = m c^2$ besitzt.

§ 2 Das Führungsfeld

Der suggestive Begriff des «Führungsfeldes» ist von H. WEYL geprägt worden. Es ist aber nicht möglich, denselben im Rahmen der Einsteinschen Gravitationstheorie in einer den Bedürfnissen wirklich angemessenen Weise zu fassen. Grund: Die Aussage, die Komponenten Γ_{ml}^i des Führungsfeldes seien in einem Punkte Null, hat keinen invarianten Charakter. Im Rahmen der linearen Feldtheorie dagegen ist es möglich, ein Führungsfeld invariant zu definieren. Jedoch bevor ich diese Definition angebe, will ich noch eine leichte Modifikation der bis anhin gebrachten Bezeichnungen vornehmen, die den Zweck hat, die Koordinaten- und Formenzeiger besser aufeinander abzustimmen. Sie besteht in folgenden Festsetzungen:

1. Unsere primären Linearformen schreibe ich von jetzt an in der Gestalt

$$g^\lambda \equiv g^\lambda_{,\mu} \dot{x}^\mu \quad (2.1)$$

und das zugeordnete metrische Feld muss daher lauten

$$G_{\rho\sigma} = a_{\lambda\mu} g^\lambda_{,\rho} g^\mu_{,\sigma} \quad (2.2)$$

oder – entsprechend der früher erläuterten Normierung –

$$G^{\rho\sigma} = a_\lambda g^\lambda_{,\rho} g^\lambda_{,\sigma} \quad (2.3)$$

In Worten: In den bis anhin gebrauchten Formentensoren vertausche ich die Rollen der ko- und kontravarianten Zeiger, und für die kontravarianten Koordinatenzeiger übernehme ich die traditionelle Hochstellung.

Konsequenterweise bezeichnen wir nun mit

$$\| g_{\lambda}^{\mu} \| \quad (2.4)$$

die transponierte der Inversen der primären Basismatrix

$$\| g_{,\mu}^{\lambda} \|, \quad (2.5)$$

und es gelten die *Zeilenrelationen*

$$g_{,\nu}^{\lambda} g_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\lambda}, \quad (2.6)$$

respektive die *Spaltenrelationen*

$$g_{,\lambda}^{\nu} g_{\nu}^{\mu} = \delta_{\lambda}^{\mu}. \quad (2.7)$$

2. Für die Feldstärken benutze ich von jetzt an die Definition

$$f_{,\mu\nu}^{\lambda} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{,\nu}^{\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{,\mu}^{\lambda}}{\partial x^\nu} \right). \quad (2.8)$$

Anders ausgedrückt: Von den alten zu den neuen Feldstärken findet folgender Übergang statt:

$$t_{\lambda,\mu\nu} \rightarrow - f_{,\mu\nu}^{\lambda}. \quad (2.9)$$

Gestützt auf diese Festsetzungen ist es nun leicht, alle bis anhin gefundenen Relationen in die neue Bezeichnung überzuführen.

Damit komme ich zu der in Aussicht gestellten

Definition: Ein »Führungsfeld« ist ein Feld mit verschwindenden Feldstärken

$$t^{\lambda}_{,\mu\nu} = 0. \quad (2.10)$$

Diese Definition ist invariant, weil (2.8) einen Tensor darstellt. Aus (2.10) folgt in bekannter Weise, dass die $g^{\lambda}_{,\mu}$ Gradienten sind,

$$g^{\lambda}_{,\mu} = \frac{\partial p^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \quad (2.11)$$

und (2.1) geht über in

$$g^{\lambda} \equiv \dot{p}^{\lambda}. \quad (2.12)$$

Führen wir also neue Koordinaten ein gemäss

$$\bar{x}^{\lambda} = p^{\lambda}(x^0, x^1, x^2, x^3),$$

so geht (2.12) über in

$$g^{\lambda} = \dot{x}^{\lambda} = \bar{g}^{\lambda}_{,\mu} \dot{x}_{\mu}$$

mit

$$\bar{g}^{\lambda}_{,\mu} = \delta^{\lambda}_{,\mu}.$$

An Stelle von (2.2) hat daher die Relation

$$G_{\varrho\sigma} = a_{\varrho\sigma} \quad (2.13)$$

zu treten, und wir gelangen zu der

Folgerung: Ein Führungsfeld bestimmt eindeutig eine Lorentz-Welt (2.14)

Nun zur Nutzanwendung. Während der ganzen Entwicklung der Theorie hat mich die Frage beunruhigt, wie die für die nullte Näherung geeigneten Basismatrizen zu wählen seien. Bei der Energieberechnung hat sich nun gezeigt, dass diejenigen Matrizen den Vorzug verdienen, die wir jetzt gemäss Definition (2.10) als Basismatrizen von Führungsfeldern bezeichnen können. Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise treffe ich daher folgende

Definition: Eine »Trägheitsmatrix« $\| t^{\lambda}_{,\mu} \|$ ist die Basismatrix eines Führungsfeldes. (2.15)

Sie ist daher charakterisiert durch die Relationen

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial t^{\lambda}_{,\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial t^{\lambda}_{,\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) \equiv 0 \quad (2.16)$$

und es empfiehlt sich, die zu ihr gehörigen Dreindizessymbole zu notieren:

$$\tau^{\lambda}_{,\mu\nu} \equiv \frac{\partial t^{\lambda}_{,\nu}}{\partial x^{\mu}} \equiv \frac{\partial t^{\lambda}_{,\mu}}{\partial x^{\nu}}. \quad (2.17)$$

Eine beliebige Basismatrix $g^{\lambda}_{,\mu}$ kann nun immer auf zwei verschiedene Arten auf eine vorgegebene Trägheitsmatrix zurückgeführt werden:

$$1. \quad g^{\lambda}_{,\mu} = h^{\nu}_{,\mu} t^{\lambda}_{,\nu}, \quad (2.18_1)$$

$$2. \quad g^{\lambda}_{,\mu} = h^{\lambda}_{\nu} t^{\nu}_{,\mu}. \quad (2.18_2)$$

Im ersten Falle wird also die Ergänzung durch den Koordinatentensor $h^{\nu}_{,\mu}$ geliefert, im zweiten Falle durch den Formentensor h^{λ}_{ν} .

Ein entscheidender technischer Vorteil des Verfahrens besteht darin, dass man die Trägheitsmatrix zum voraus entsprechend der gewünschten Symmetrie frei wählen kann.

§ 3 Statisch-kugelsymmetrischer Ansatz

Seien $y^{\lambda} (\lambda = 0, \dots, 3)$ cartesische Koordinaten in einer durch ein vorgegebenes Führungsfeld bestimmten Lorentz-Welt. Vermittels

$$\left. \begin{array}{l} y^0 = x^0, \\ y^1 = r \sin \vartheta \cos \psi, \\ y^2 = r \sin \vartheta \sin \psi, \\ y^3 = r \cos \vartheta \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

führen wir Polarkoordinaten ein und benutzen für dieselben je nach Bedarf auch die Zeichen

$$x^1 \equiv r, \quad x^2 \equiv \vartheta, \quad x^3 \equiv \psi. \quad (3.2)$$

Aus den Differentialen

$$dy^{\lambda} = t^{\lambda}_{,\mu} dx^{\mu} \quad (3.3)$$

entnehmen wir dann die zugehörige Trägheitsmatrix $\| t^{\lambda}_{,\mu} \|$. Dieselbe zerfällt offenbar in die eingliedrige Matrix

$$\| t^0_{,0} \| \equiv \| 1 \| \quad (3.4_1)$$

und die dreigliedrige Matrix

$$\| t^i_{,\mu} \| \equiv \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \psi, & r \cos \vartheta \cos \psi, & -r \sin \vartheta \sin \psi \\ \sin \vartheta \sin \psi, & r \cos \vartheta \sin \psi, & r \sin \vartheta \cos \psi \\ \cos \vartheta, & -r \sin \vartheta, & 0 \end{vmatrix} \quad (3.4_2)$$

Für die Transponierte der Inversen $\| t_{\lambda}^{\mu} \|$ findet man entsprechend

$$\| t_0^{\mu} \| \equiv \| 1 \|, \quad (3.5_1)$$

und

$$\| t_i^{\mu} \| \equiv \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \psi, & r^{-1} \cos \vartheta \cos \psi, & -(r \sin \vartheta)^{-1} \sin \psi \\ \sin \vartheta \sin \psi, & r^{-1} \cos \vartheta \sin \psi, & (r \sin \vartheta)^{-1} \cos \psi \\ \cos \vartheta, & -r^{-1} \sin \vartheta, & 0 \end{vmatrix} \quad (3.5_2)$$

Für die zu (3.4) gehörigen von Null verschiedenen Dreizeigersymbole ergeben sich die Werte

$$\left. \begin{aligned} \tau_{,22}^{i,} &= -r t_{,1}^{i,}, \\ \tau_{,33}^{i,} &= -\sin \vartheta (r \sin \vartheta t_{,1}^{i,} + \cos \vartheta t_{,2}^{i,}), \end{aligned} \right\} \quad (3.6_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{,1l}^{i,} &= r^{-1} t_{,l}^{i,} \quad (l > 1), \\ \tau_{,2l}^{i,} &= \cot \vartheta t_{,l}^{i,} \quad (l > 2). \end{aligned} \right\} \quad (3.6_2)$$

Die zur Schwarzschildischen Lösung führende Basismatrix erhält man nun mittels

$$g_{,\mu}^{\lambda} = h_{,\mu}^{\nu} t_{,\nu}^{\lambda}, \quad (2.18_1)$$

wenn man die Ergänzungsmatrix $h_{,r}^{\lambda}$ diagonal wählt,

$$h_{,\mu}^{\lambda} = 0 \quad (\lambda \neq \mu), \quad (3.7_1)$$

und überdies über deren Diagonalglieder in folgender Weise verfügt:

$$h_{,0}^0 = f(r), \quad h_{,1}^1 = h(r), \quad h_{,2}^2 = h_{,3}^3 = 1. \quad (3.7_2)$$

Für die Determinante der Basismatrix ergibt sich daher der Wert

$$g = f h r^2 \sin \vartheta. \quad (3.8)$$

Für die Elemente g_{λ}^{μ} der Transponierten der Inversen erhält man die Werte

$$g_{0,}^0 = f^{-1}; \quad g_{i,}^1 = h^{-1} t_{i,}^1; \quad g_{i,}^2 = t_{i,}^2; \quad g_{i,}^3 = t_{i,}^3. \quad (3.9)$$

Für die nichtverschwindenden Feldstärken schliesslich ergeben sich die Werte

$$\left. \begin{aligned} f_{,01}^{0,} &= -\frac{1}{2} f', \\ f_{,1l}^{i,} &= -\frac{1-h}{2r} t_{,l}^{i,} \quad (l > 1), \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

wobei der Strich die Ableitung nach r bedeutet.

Da reine Formentensoren invariant sind gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen, empfiehlt es sich, die obigen Feldstärken mittels

$$f_{\mu\nu}^{\lambda} = g_{\mu}^{\sigma} g_{\nu}^{\rho} f_{,\rho\sigma}^{\lambda} \quad (3.11)$$

in solche Tensoren überzuführen. Die Ergebnisse lauten:

$$\left. \begin{aligned} f_{i0}^0 &= \frac{f'}{2h} t_{i,}^1, \\ f_{ik}^k &= \frac{1-h}{2r} t_{i,}^1 \quad (k \text{ fest}), \\ f_i &= \left(\frac{f'}{2h} + \frac{1-h}{r} \right) t_{i,}^1. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

§ 4 Die Feldgleichungen

Da nach (3.12) keine der von Null verschiedenen Feldstärken drei verschiedene Zeiger aufweist, haben die invariant geschriebenen Feldgleichungen genau dieselbe Gestalt, wie im Falle diagonaler Basismatrizen. Wir können sie daher – nach Vornahme des oben beschriebenen Bezeichnungswechsels – aus der vorausgehenden Arbeit übernehmen³⁾.

Es empfiehlt sich, ihnen unter Verwendung der Hilfsgrössen

$$H \equiv 4 \underset{0}{\alpha} \partial_{\alpha} f_{\alpha} + A + 4 \alpha^{\alpha} (f_{\alpha} f_{\alpha} + f_{\alpha\beta}^{\beta} f_{\alpha\beta}^{\beta}) \quad (4.1)$$

folgende Gestalt zu geben:

$$W_{\lambda}^{\lambda} \equiv 4 \underset{0}{\alpha} \partial_{\lambda} f_{\lambda} + 8 \alpha^{\lambda} f_{\lambda\alpha}^{\alpha} + 4 \alpha^{\alpha} \partial_{\alpha} f_{\alpha\lambda}^{\lambda} + 8 \alpha^{\alpha} f_{\alpha} f_{\alpha\lambda}^{\lambda} - H = 0, \quad (\lambda \text{ fest}) \quad (4.2_1)$$

$$W_{\lambda}^{\mu} \equiv 4 \underset{0}{\alpha} \partial_{\lambda} (f^{\mu} - f_{\mu\lambda}^{\lambda}) - 8 \alpha^{\mu} f_{\mu\lambda}^{\lambda} (f_{\lambda} - f_{\lambda\mu}^{\mu}) + 8 \alpha_{\mu} f_{\lambda\alpha}^{\alpha} f_{\mu\alpha}^{\alpha}. \quad (\lambda \neq \mu) \quad (4.2_2)$$

Führen wir nun die Abkürzungen

$$P \equiv \frac{f'}{h f}; \quad Q \equiv \frac{1-h}{r h} \quad (4.3)$$

ein, so gehen die Gleichungen (3.12) über in

$$f_{i0}^0 = \frac{1}{2} P t_{i,1}^1; \quad f_{i0}^{\alpha} = \frac{1}{2} Q t_{i,1}^1, \quad f_i = \frac{1}{2} (P + 2Q) t_{i,1}^1. \quad (4.4)$$

Zur endgültigen Auswertung der Feldgleichungen bedürfen wir noch der Operatoren

$$\partial_{\lambda} \equiv g_{\lambda,\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}. \quad (4.5)$$

Für unser spezielles Problem benötigen wir jedoch nur die ∂_i für $i = 1, 2, 3$ angewendet auf Funktionen $\phi(r)$ und auf die $t_{k,1}^1$ für $k = 1, 2, 3$. Die dies leistenden Formeln lauten

$$\partial_i \Phi(r) = h^{-1} \Phi' t_{i,1}^1, \quad \partial_i t_{k,1}^1 = r^{-1} (\delta_{ik} - t_{i,1}^1 t_{k,1}^1). \quad (4.6)$$

Die Auswertung liefert vorerst

$$H_0 \equiv -2[h^{-1}(P+2Q)' + 2r^{-1}(P+2Q)] - 2[P(P+2Q) + 3Q^2] + A, \quad (4.7)$$

und hierauf die Feldgleichungen in folgender Gestalt:

$$W_0^0 \equiv 4 h^{-1} Q' + 8 r^{-1} Q + 6 Q^2 - A = 0, \quad (4.8_1)$$

$$\left. \begin{aligned} W_k^k \equiv 2[h^{-1}(P+Q)' + r^{-1}(P+Q) + P^2 + PQ + Q^2] - A \\ - 2[h^{-1}(P+Q)' - r^{-1}(P+Q) + P(P-Q)] t_{k,1}^1 t_{k,1}^1 = 0 \quad (\kappa \text{ fest}) \end{aligned} \right\} \quad (4.8_2)$$

³⁾ A. a. O.²⁾ (1958), § 5, Gleichungen (6), (6₁) und (6₂).

und

$$\underset{0}{W_i^k} \equiv -2[h^{-1}(P+Q)' - r^{-1}(P+Q) + P(P-Q)] t_i^{,1} t^k_{,1} = 0 \quad (i \neq k). \quad (4.8_3)$$

Da (8₃) gleichwertig ist mit der zweiten Komponente von (8₂), liegen 3 Gleichungen zur Bestimmung der 2 Funktionen $f(r)$ und $h(r)$ vor. Eliminiert man aus der ersten Komponente von (8₂) den Term $h^{-1}(P+Q)^1$ mittels (8₃), so erhält man die Gleichung

$$4(Q + r^{-1})P + 2(Q + 2r^{-1})Q - A = 0, \quad (4.8'_2)$$

und man kann sich auf die Betrachtung der Gleichungen (8₁), (8₂) und (8₃) beschränken. Weiter zeigt dann die Analyse, dass (8₃) eine Folge von (8₁) und (8₂) ist. Die Gleichungen (8₁) und (8₂) sind also notwendig und hinreichend zur Bestimmung der Lösung. Setzt man

$$A = -2\lambda, \quad (4.9)$$

so erhält man aus (8₁)

$$h^{-1} = \sqrt{1 - \frac{2a}{r} - \frac{\lambda}{3}r^2}. \quad (4.10)$$

Aus (8₂) ergibt sich dann

$$f = C h^{-1}.$$

Mit der Normierung $C = 1$ folgt also schliesslich

$$f = \sqrt{1 - \frac{2a}{r} - \frac{\lambda}{3}r^2}. \quad (4.11)$$

Es liegt also genau die mit den Namen SCHWARZSCHILD, WEYL und TREFFTZ verknüpfte Lösung vor, und $\lambda > 0$ bedeutet die zugehörige kosmologische Konstante.

Es ist wohl bemerkenswert, dass sich, ausgehend vom Führungsfeld, die kosmologische Ergänzung zwanglos ergibt.

§ 5 Die Gravitationsenergie

Die Energietensordichte können wir wieder aus der vorausgehenden Arbeit entnehmen⁴⁾. Ist

$$\mathfrak{W} \equiv W g \quad (5.1)$$

die einschlägige Wirkungsdichte, so erhalten wir im Sinne unserer neuen Bezeichnung

$$\mathfrak{T}_{\lambda}^{\mu} \equiv \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial g^{\lambda}_{\mu}} = g \left(\frac{\partial W}{\partial g^{\lambda}_{\mu}} + g_{\lambda}^{\mu} W \right). \quad (5.2)$$

Der gemischte Energietensor lautet daher

$$T_{\lambda}^{\mu} = \frac{\partial W}{\partial g^{\lambda}_{\mu}} + g_{\lambda}^{\mu} W. \quad (5.3)$$

⁴⁾ A. a. O. ²⁾ (1958), § 4.

Am bequemsten zu handhaben ist natürlich wiederum der koordinateninvariante «Formenenergietensor»

$$T_{\lambda}^{\mu} = T_{\lambda}^{\nu} g_{\nu}^{\mu}. \quad (5.4)$$

Lassen wir bei Formentensoren immer dann, wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind, das Komma rechts von jedem Formenzeiger weg, so geht (4) wegen (3) über in

$$T_{\lambda}^{\mu} = g_{\nu}^{\mu} \frac{\partial W}{\partial g_{\lambda}^{\nu}} + \delta_{\lambda}^{\mu} W. \quad (5.5)$$

Jetzt führen wir für W die Wirkungsfunktion (1.3) ein, deren einzelne Komponenten in neuer Bezeichnung explizite gegeben sind durch

$$W_1 \equiv a_{\alpha} a^{\beta} a^{\gamma} f_{\beta\gamma}^{\alpha} f_{\beta\gamma}^{\alpha}, \quad (5.6_1)$$

$$W_2 \equiv a^{\alpha} f_{\alpha\gamma}^{\beta} f_{\alpha\beta}^{\gamma}, \quad (5.6_2)$$

$$W_3 \equiv a^{\alpha} f_{\alpha} f_{\alpha}. \quad (5.6_3)$$

Setzt man nach vollzogener Rechnung alle Feldstärken mit drei verschiedenen Zeigern gleich Null, so erhält man schliesslich folgende Ausdrücke:

$$T_{\lambda}^{\lambda} = 8 a^{\lambda} (f_{\lambda} f_{\lambda} - f_{\lambda\alpha}^{\alpha} f_{\lambda\alpha}^{\alpha}) + 8 a^{\alpha} (f_{\alpha} - f_{\alpha\lambda}^{\lambda}) f_{\alpha\lambda}^{\lambda} + W_0, \quad (\lambda \text{ fest}) \quad (5.7_1)$$

$$T_{\lambda}^{\mu} = 8 a^{\mu} f_{\mu} (f_{\lambda} - f_{\lambda\mu}^{\mu}) - 8 a^{\mu} f_{\mu\alpha}^{\alpha} f_{\lambda\alpha}^{\lambda} \quad (\lambda \neq \mu) \quad (5.7_2)$$

$$\text{mit} \quad W_0 = -4 a^{\alpha} f_{\alpha} f_{\alpha} + 4 a^{\alpha} f_{\alpha\beta}^{\beta} f_{\alpha\beta}^{\beta} + \Lambda. \quad (5.7_3)$$

Für die uns interessierenden Energie-Impulsdichten erhalten wir nun mit Rücksicht auf unsere spezielle Basis

$$\mathfrak{T}_{\lambda}^{\mu} = g T_{\lambda}^{\mu} = g T_{\lambda}^{\nu} g_{\nu}^{\mu} = g T_{\lambda}^0 g_0^{\mu}$$

$$\text{oder} \quad \mathfrak{T}_{\lambda}^{\mu} = g T_{\lambda}^0 f^{-1}. \quad (5.8)$$

Wir haben jetzt also nur noch die Terme T_{λ}^0 zu berechnen, indem wir die Feldstärken (4.4) in die Formeln (5.7) einsetzen. Man erhält

$$\left. \begin{aligned} T_0^0 &= -4 P Q + W_0, \\ T_i^0 &= 0 \quad (i = 1, 2, 3), \\ W &= 4 P Q + 2 Q^2 + \Lambda. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Für die Energiedichte ergibt sich daher unter Beachtung von (4.9) die Darstellung

$$\mathfrak{T}_{0,}^{,0} = 2 (Q^2 - \lambda) f^{-1} g . \quad (5.10)$$

Aus dem Umstande, dass hier zum Unterschied gegenüber den klassischen Gravitationsgleichungen die kosmologische Konstante den Faktor 2 aufweist, ergibt sich als absolutes Mass der Energiedichte der Ausdruck

$$\mathfrak{T}_{0,}^{*,0} = \kappa^{-1} (Q^2 - \lambda) f^{-1} g ,$$

wobei κ die Einsteinsche Gravitationskonstante bedeutet. Mit Rücksicht auf (3.8), (4.3), (4.10) und (4.11) erhalten wir daher folgende Darstellung für die Energiedichte des von einer ruhenden Masse erzeugten Gravitationsfeldes:

$$\mathfrak{T}_{0,}^{*,0} = \kappa^{-1} [(f - 1)^2 - \lambda r^2] f^{-1} \sin \vartheta . \quad (5.11)$$

Im Grenzfall $\lambda = 0$ ergibt sich daraus explizit

$$\mathfrak{T}_{0,}^{*,0} = \frac{2}{\kappa} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2a}{r}}} + \sqrt{1 - \frac{2a}{r}} \right) - 1 \right] \sin \vartheta . \quad (5.12)$$

Für die Totalenergie

$$E = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{2a}^{\infty} \mathfrak{T}_{0,}^{*,0} dr d\vartheta d\psi$$

erhält man hierauf den Wert

$$E = \frac{8\pi a}{\kappa} . \quad (5.13)$$

Gestützt auf die klassischen Einsteinschen Formeln

$$a = \frac{k m}{c^2} ; \quad \kappa = \frac{8\pi k}{c^4} \quad (5.14)$$

folgt nun unmittelbar das Einsteinsche Äquivalenzgesetz

$$E = m c^2 . \quad (5.15)$$

Die Verdichtung der Energie um das Zentrum erweist sich übrigens als ausserordentlich intensiv. Für die in der Kugelschale zwischen dem Gravitationsradius $2a$ und dem Radius r enthaltene Energie gilt nämlich in ausreichender Näherung für $r/2a \gg 1$ die Formel

$$E_{2a}^r \sim m c^2 \left(1 - \frac{a}{2r} \right) . \quad (5.16)$$

Da für Nukleonen $a \sim 10^{-52}$ cm ausmacht, erhält man zum Beispiel für $r \sim 10^{-16}$ cm den Wert $\sim m c^2 (1 - 10^{-36})$.

Korrekt erweise sollte man statt r den invarianten Radius

$$s = \int_{2a}^r \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \frac{2a}{\varrho}}}$$

verwenden. Die Rechnung zeigt aber, dass die Näherung dadurch keine wesentliche Änderung erfährt, das heisst dass im Rahmen dieser Näherung gilt

$$s \sim r.$$

§ 6 Schlussfolgerungen

1. Was wir vorhin für ein Ruhsystem in der Lorentz-Welt gefunden haben, muss natürlich in folgender Weise auf ein bewegtes System übertragen werden: Die vier nach den Erhaltungssätzen

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_{\lambda}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad (6.1)$$

zeitunabhängigen, also konstanten Integrale

$$C_{\lambda} = \iiint_{x^0 = \text{const}} \mathfrak{T}_{\lambda}^0 \, dx^1 \, dx^2 \, dx^3 \quad (6.2)$$

bilden einen konstanten kovarianten Formenvektor.

Wegen der festgestellten enormen räumlichen Konzentration der Energie ergibt sich nun die phänomenologische Auffassung ganz ungezwungen: Sofern man neben dem Feld eine Masse einführen will, muss der Vektor (2) in jedem Schnitt $x^0 = \text{const}$ einem Punkt zugeordnet werden.

2. Es eröffnet sich jetzt vielleicht eine Möglichkeit, ein elektromagnetisches Viererpotential zu konstruieren, ohne den Rahmen der linearen Feldtheorie erweitern zu müssen. Erfahrungsgemäss ist nämlich jede Ladung an Masse gebunden und muss daher fürs erste phänomenologisch dargestellt werden. Die formal naheliegendste Bildung dieser Art ist offenbar gegeben durch den kovarianten Koordinatenvektor

$$\phi_{,\lambda} \equiv C_{\mu} g^{\mu}_{,\lambda}. \quad (6.3)$$

Bei einem Versuch, diese Möglichkeit zu realisieren, wird man die Aufmerksamkeit wohl in erster Linie auf eine passende antisymmetrische Erweiterung

$$\overline{W} \equiv \overline{A}_0 \overline{W}_1 + \overline{A}_1 \overline{W}_2 + \overline{A}_2 \overline{W}_3 \quad (6.4)$$

von (1.3) zu einer Wirkungsfunktion

$$W \equiv W_0 + \overline{W}_0 \quad (6.5)$$

richten müssen.

3. In einer früheren Arbeit⁵⁾ habe ich gezeigt, dass man die Schwarzschildsche Lösung auch erhält, wenn man eine diagonale Basismatrix zugrunde legt. In neuer Bezeichnung lautet diese Basis

$$\| g^{\lambda, c} \| \equiv \begin{vmatrix} f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin \vartheta \end{vmatrix} \quad (6.6)$$

Als zugehörige Energiedichte ergibt sich an Stelle von (5.11)

$$\mathfrak{T}_{0,}^* = \kappa^{-1} (f^2 - \lambda r^2) f^{-1} \sin \vartheta . \quad (6.7)$$

Im Grenzfall $\lambda = 0$ folgt daraus explizit

$$\mathfrak{T}_{0,}^* = \kappa^{-1} \sqrt{1 - \frac{2a}{r}} \sin \vartheta , \quad (6.8)$$

und für die zugehörige Totalenergie erhält man $E = +\infty$. Da es sich dabei um eine im Sinne der Invarianz zulässige Lösung handelt, erscheint durch sie der Außenraum des Teilchens zu sehr mit Energie belastet. Diese Lösung kann also nur dadurch ausgeschieden werden, dass man das Führungsfeld als physikalische Definition des Vakuums akzeptiert.

Nun aber stimmen beide Lösungen im Linienelement überein, und es ergibt sich der Schluss, dass man die Gravitationsenergie nicht aus dem Linienelement allein bestimmen kann. Die lineare Feldtheorie scheint also nicht nur eine zulässige, sondern auch eine notwendige Ergänzung der Gravitationsenergie zu sein.

⁵⁾ Zeitschrift für Physik 141 (1955), § 6.