

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 36 (1963)  
**Heft:** VI

**Artikel:** Mécanique quantique quaternionienne et relativité restreinte. II  
**Autor:** Emch, Gérard  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-113399>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Mécanique quantique quaternionienne et Relativité restreinte II

par Gérard Emch

(Institut de Physique Théorique de l'Université, Genève)

(15. VI. 63)

*Abstract.* This paper is a continuation of a previous paper which has recently appeared in this journal, on the implications of group theory for the foundations of Quaternionic Quantum Mechanics. It is first proved that even in this case a relativistic description is possible. It is then shown that the elementary systems for the Poincaré group, as they appear in this realization, are in one-to-one correspondance with those of the usual complex quantum mechanics. The occurrence of charge conjugation related to space reflexion is discussed and some consequences on a TCP-relativistic theory are explored. The framework of a general relativistic Quaternionic Quantum Mechanics is then developped and the particular ties that exist between this theory and its complex analog are emphasized. The possible adequacy of a mixed complex-quaternionic description for isospin is briefly investigated at the end.

## Introduction

On se propose ici d'appliquer au groupe de la relativité restreinte les résultats obtenus par l'auteur dans «Mécanique quantique quaternionienne et Relativité restreinte I», article auquel on se référera dans la suite par I.

Lorsqu'on examine le processus de classification des représentations *complexes* irréductibles du groupe de la relativité restreinte (voir déjà WIGNER, puis surtout la manière dont MACKEY démontre le théorème de FROBENIUS), on s'aperçoit que celles-ci sont construites pour ainsi dire autour du fait que ce groupe contient comme sous-groupe invariant le groupe des translations dans l'espace-temps. Or ce groupe satisfait aux hypothèses du SNAG (réf. I, Section 4c) et ses représentations *quaternioniennes* font donc apparaître un opérateur  $J$  unitaire et antihermitien; l'importance de ce type d'opérateurs dans l'établissement de liens entre le réalisations complexe et quaternionienne a été déjà remarqué dans I; on se pose alors naturellement la question de savoir quelles sont les propriétés de ce  $J$  dans le cadre plus large de la théorie des représentations du groupe de POINCARÉ. Aussi le premier but de cet article sera-t-il de voir s'il existe des raisons physiques de croire que les représentations de ce groupe satisfont aux hypothèses du théorème I. 4.2.  $J$  apparaissant dans les représentations du groupe des translations, le physicien ne s'étonnera pas que ces postulats doivent être cherchés dans l'interprétation de l'énergie-impulsion. C'est ainsi, qu'après avoir formulé les postulats 1 et 2, on arrivera au théorème 1 qui permet d'obtenir la réponse finale au problème posé en montrant l'existence d'une correspondance biunivoque entre les systèmes élémentaires qui apparaissent dans la réalisation quaternionienne et ceux de la réalisation complexe; une alternative de la théorie des types habituelle, où l'on introduit explicitement une opération de conjugaison de charge qui change de sous-espace cohérent, est proposée.

### 1. Le groupe de POINCARÉ

Le groupe de POINCARÉ est constitué par l'ensemble  $G$  de toutes les transformations de la relativité restreinte, c'est-à-dire, par les transformations réelles linéaires qui laissent invariante la distance dans l'espace-temps de MINKOWSKI; on choisira pour cet espace la métrique donnée par le tenseur  $g_{\mu\nu}$  où  $g_{00} = +1$ ,  $g_{ii} = -1$  pour  $i = 1, 2, 3$ , et enfin  $g_{\mu\nu} = 0$  pour  $\mu$  différent de  $\nu$ . L'espace pseudo-euclidien ainsi défini induit sur  $G$  une structure de groupe topologique. Ce groupe est aussi connu sous le nom de groupe inhomogène étendu de LORENTZ.

On appelle *groupe propre de POINCARÉ* la composante connexe à l'identité dans  $G$ ; on désignera ce groupe par  $G_e$ . Toute transformation appartenant à  $G_e$  est le produit d'une translation par un vecteur réel  $b$  ( $x' = x + b$ ) et d'une transformation réelle homogène ( $x' = \Lambda x$ ) ne contenant pas de réflexion (la translation est effectuée *après* la transformation homogène). Tout élément de  $G_e$  peut donc s'écrire comme un couple  $(b, \Lambda)$ , la loi de composition étant:

$$(b, \Lambda) (b', \Lambda') = (b'', \Lambda'') \text{ ou: } b'' = b + \Lambda b' \text{ et } \Lambda'' = \Lambda \Lambda',$$

$\Lambda' b$  étant la translation par le vecteur  $b'$  transformé au préalable par  $\Lambda$ .

Ce groupe est muni d'une structure qui peut être présentée de la manière suivante: le groupe  $T^4$  des translations et le groupe homogène  $H^4$  étant localement compacts,  $T^4$  étant de plus abélien, on fait correspondre à chaque élément  $\Lambda$  de  $H^4$  un automorphisme de  $T^4$ , de telle sorte que cette correspondance soit un homomorphisme (au sens des groupes topologiques) de  $H^4$  dans le groupe des automorphismes de  $T^4$ . Désignons par  $\Lambda [...]$  l'automorphisme correspondant ainsi à  $\Lambda$  et considérons l'ensemble de tous les couples  $(b, \Lambda)$  obtenus lorsque  $b$  et  $\Lambda$  décrivent respectivement  $T^4$  et  $H^4$ ; sur celui-ci, on définit une loi de composition interne par:

$$(b, \Lambda) (b', \Lambda') = (b + \Lambda[b'], \Lambda \Lambda').$$

Muni de plus de la topologie du produit direct des espaces topologiques de  $T^4$  et de  $H^4$ , cet ensemble  $(G_e)$  devient un groupe topologique, localement compact;  $T^4$  est isomorphe au sous-groupe invariant et fermé, constitué par l'ensemble des éléments de  $G_e$  de la forme  $(b, 1)$ , alors que  $H^4$  est isomorphe au sous-groupe fermé, constitué par l'ensemble des éléments de  $G_e$  de la forme  $(0, \Lambda)$ , l'identité dans  $G_e$  étant  $(0, 1)$ . Cette situation est caractérisée en disant que  $G_e$  est *produit semi-direct* de  $T^4$  par  $H^4$ ; le fait que  $G_e$  possède cette structure est essentiel pour la théorie des représentations.

Enfin, on note que  $T^4$  est connexe et simplement connexe alors que  $H^4$  est connexe et doublement connexe, son groupe de revêtement universel étant le groupe des matrices complexes, unimodulaires, de rang 2, noté  $SL(2, C)$ .

### 2. Classification des systèmes élémentaires par rapport au groupe propre de POINCARÉ

$G_e$  étant connexe, le système de propositions  $L$  de tout système élémentaire  $(L, U)$  par rapport à  $G_e$  est cohérent (voir théorème I. 1.3).  $U$  sera donc, dans le cadre des réalisations qui sont envisagées ici, une représentation projective de  $G_e$ , agissant sur les rayons d'un (et d'un seulement) espace de HILBERT quaternionien  $\mathfrak{H}$ . Considérons d'abord la restriction  $V$  de  $U$  au sous-groupe  $T^4$  des translations. On a vu (I, Section

4c) qu'on peut toujours extraire de  $V$  une représentation unitaire et continue  $v$  de  $T^4$  dans  $\mathfrak{H}$ , ayant la forme:

$$v_b = \int_{\Gamma} e^{J p^\mu b_\mu} da(S)$$

où:  $b = (b^0, b^1, b^2, b^3)$  parcourt  $T^4$ ,

$\Gamma$  est le groupe des caractères de  $T^4$ ; ses éléments sont des quadrivecteurs désignés par  $p = (p^0, p^1, p^2, p^3)$ ;

$J$  est un opérateur unitaire et antihermitien qui commute avec chacun des  $v_b$ ;  $a(S)$  est une famille spectrale étalée sur  $\Gamma$  et déterminée de manière unique par  $J$ .

Par les méthodes habituelles de l'analyse fonctionnelle, on peut alors définir les opérateurs hermitiens  $P^\mu$  tels que:

$$v_b = e^{J P^\mu b_\mu};$$

$a(S)$  n'étant définie de manière unique qu'à  $J$  fixe, il en est de même des  $P^\mu$ .

Ainsi qu'on l'a déjà noté (ref. I, section 4c) le lemme I.4.2 affirme seulement l'existence d'un  $J$  qui satisfasse aux conditions ci-dessus, mais il peut en exister d'autres, qui y satisfassent encore. Soit  $J'$  un opérateur unitaire et antihermitien qui commute avec chacun des  $v_b$ ; celui-ci permet d'écrire  $v_b$  sous la forme:

$$v_b = \int e^{J' p^\mu b_\mu} da'(S)$$

et on obtient par le même procédé que ci-dessus les opérateurs  $P'^\mu$  tels que:

$$v_b = e^{J' P'^\mu b_\mu}.$$

En comparant les deux expressions ainsi obtenues pour  $v_b$ , on déduit que  $(J' P'^\mu)$  doit être égal à  $(J P^\mu)$ , ou encore que:

$$P'^\mu = -J' J P^\mu.$$

$J$  étant l'opérateur obtenu par la construction effectuée au lemme I.4.2, il commute avec tout opérateur qui lui-même commute avec chacun des  $v_b$  (ceci dans le sous-espace  $M$ ; dans  $N$ , on supposera sans rien perdre que  $J' = J$ ); par conséquent,  $J$  et  $J'$  commutent et satisfont donc à l'hypothèse du lemme I.4.1. Il existe donc une partition de  $\mathfrak{H}$  en deux sous-espaces orthogonaux tels que  $J$  et  $J'$  sont égaux dans le premier et opposés par le signe dans le second; cette partition réduit aussi  $v$ , ainsi que les  $P^\mu$  et  $P'^\mu$ ; il en résulte que les  $P^\mu$  et  $P'^\mu$  sont respectivement égaux dans le premier sous-espace et de signes opposés dans le second. Ainsi, lorsque  $J'$  parcourt tous les  $J$  possibles, il apparaît une partition de  $\mathfrak{H}$  en sous-espaces orthogonaux réduisant les  $P^\mu$ , et telle que  $P^\mu$  n'est déterminé qu'au signe près dans chacun de ceux-ci. Cette situation résulte de la non-unicité du SNAG dans un espace de HILBERT quaternionien (réf. I, section 4c).

On se propose de lever cette ambiguïté sur la base de raisons physiques: la forme

$$v_b = e^{J P^\mu b_\mu}$$

conduit à interpréter  $P^\mu$  comme les composantes de l'énergie-impulsion. Imposons alors le postulat:

**Postulat 1:** *L'énergie doit être positive définie.*

Ce postulat oblige à éliminer les représentations qui ne sont pas susceptibles de fournir un  $P^0$  positif défini. Pour celles qui restent, et qui ont donc seules une interprétation compatible avec le postulat ci-dessus, celui-ci fixe de manière unique le  $J$  et par conséquent la famille spectrale  $a(S)$ ; avec cette interprétation, les ensembles de BOREL  $S$  de  $\Gamma$  sont des domaines dans l'espace des valeurs possibles de l'énergie impulsion; le projecteur  $a(S)$  est alors la réalisation de la proposition: «l'énergie-impulsion a une valeur contenue dans  $S$ ».

Revenons maintenant à la représentation projective  $U$  de  $G_e$  d'où a été extraite la représentation  $v$  de  $T^4$  étudiée jusqu'ici;  $G_e$  étant doublement connexe, on peut, en vertu du théorème I.3.4, extraire de  $U$  une représentation  $u$  de  $G_e$ , unitaire, fortement continue, bivaluée ou non, qui, restreinte à  $T^4$ , n'est autre que  $v$ . Pour alléger l'écriture, identifions respectivement les éléments  $(0, \Lambda)$  et  $(b, 1)$  de  $G_e$  à  $\Lambda$ , élément de  $H^4$ , et  $b$ , élément de  $T^4$ . On a alors (même si  $u$  est bivaluée):

$$u_\Lambda u_b u_\Lambda^{-1} = u_{\Lambda[b]}$$

*Dans le cas complexe*, cette relation est aussi vraie (voir par exemple WIGNER<sup>1)</sup>) et si  $a(S)$  est la famille spectrale attachée à  $v$  par le SNAG complexe, on a nécessairement:

$$u_\Lambda a(S) u_\Lambda^{-1} = a([S] \Lambda^{-1})$$

où l'action de  $\Lambda$  dans le groupe  $\Gamma$  des caractères de  $T^4$  est définie par  $([\theta] \Lambda)(x) = \theta(\Lambda[x])$ . On exprime l'égalité ci-dessus en disant que  $a(S)$  est un *système d'imprimitivité* pour la restriction de  $u$  à  $H^4$  (voir MACKEY<sup>2</sup>); cette circonstance a une signification physique évidente lorsqu'on interprète  $\Gamma$  comme on l'a fait plus haut: elle exprime que l'énergie-impulsion se transforme correctement sous l'action des transformations homogènes du groupe propre de POINCARÉ.

Dans le cas quaternionien, où on ne sait pas déduire cette relation d'imprimitivité, on l'imposera par un postulat:

**Postulat 2:** *L'énergie-impulsion doit se transformer correctement sous l'action du groupe homogène propre de POINCARÉ.*

Ceci signifie que, parmi les systèmes élémentaires  $(L, U)$  par rapport à  $G_e$ , on ne retient comme physiquement raisonnables que ceux pour lesquels la restriction à  $T^4$  de  $u$  (représentation extraite de  $U$ ) conduit à une énergie positive définie (postulat 1) et est telle que sa famille spectrale  $a(S)$ , définie alors de manière unique, constitue un système d'imprimitivité pour la restriction de  $u$  à  $H^4$ .

En renversant la démonstration que l'on fait dans le cas complexe pour montrer que le postulat 2 est satisfait, on démontre, dans le cas quaternionien, que si ce postulat est satisfait, alors on doit avoir que  $u_\Lambda$  commute avec  $J$  pour tout  $\Lambda$  dans  $H^4$ . Tout  $x$  de  $G_e$  peut s'écrire comme produit d'un élément  $b$  de  $T^4$  par un élément  $\Lambda$  de  $H^4$ :

$$x = (b, 1) (0, \Lambda) = (b, \Lambda);$$

par conséquent,  $J$  commutant avec chacun des  $u_b$  et chacun des  $u_\Lambda$ , il commute avec tous les opérateurs de la représentation  $u$ , qui satisfait ainsi à l'hypothèse du théorème I.4.2.

Résumons la situation telle qu'elle se présente maintenant : si  $(L, U)$  est un système élémentaire par rapport au groupe propre  $G_e$  de POINCARÉ, alors  $L$  est nécessairement un système de propositions cohérent ; dans sa réalisation quaternionienne,  $U$  est une représentation projective de  $G_e$ , agissant sur les rayons d'un (et d'un seul) espace de HILBERT quaternionien  $\mathfrak{H}$ ; on a montré qu'on peut toujours extraire de  $U$  une représentation  $u$ , unitaire, fortement continue, au plus bivaluée, de  $G_e$  dans  $\mathfrak{H}$ . L'interprétation physique des générateurs des translations dans l'espace-temps de MINKOWSKI conduit à distinguer dans  $\mathfrak{H}$  un opérateur  $J$  unitaire et antihermitien, essentiellement unique. Cet opérateur commute avec tous les opérateurs de la représentation considérée ; il peut donc servir à écrire, sous la forme du SNAG quaternionien, les sous-groupes à un paramètre de  $G_e$ , permettant ainsi de définir les dix observables  $P^\mu$  et  $M^{\mu\nu}$ , avec lesquelles il commute de plus nécessairement ; celles-ci ont le sens habituel des composantes de l'énergie-impulsion, du moment cinétique, et du moment centroïdal.  $J$  détermine dans  $\mathfrak{H}$  une famille d'espaces de HILBERT complexes  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ , complets dans  $\mathfrak{H}$  et tous invariants sous l'action de chacun des opérateurs de la représentation considérée, ainsi que sous l'action des opérateurs  $P^\mu$  et  $M^{\mu\nu}$ . On peut donc considérer la restriction de tous ces opérateurs à l'un quelconque des  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ .

Le problème de la détermination de tous les systèmes quaternioniens élémentaires par rapport à  $G_e$  peut donc être ramené à celui (résolu par WIGNER<sup>1)</sup>) de la détermination de toutes les représentations du groupe propre de POINCARÉ dans un espace de HILBERT *complexe*. Ainsi que les critères d'équivalence de l'appendice le montrent immédiatement, toutes les représentations complexes irréductibles de  $G_e$  qui ont un sens physique sont de classe 0 ; le théorème I.4.2 permet alors d'affirmer que, pour tous les cas susceptibles d'intéresser la physique, à toute représentation quaternionienne irréductible de  $G_e$  correspond une représentation complexe irréductible de  $G_e$  de même dimension, et réciproquement.

### 3. Classification des systèmes élémentaires par rapport au groupe (complet) de POINCARÉ

Ce groupe comprend 4 composantes connexes contenant respectivement l'identité (c'est cette composante qui a été étudiée jusqu'ici sous le nom de groupe propre de POINCARÉ), la réflexion d'espace  $s$  qui à tout quadrivecteur  $x = (x^0, \underline{x})$  fait correspondre  $s x = (x^0, -\underline{x})$ , la réflexion de temps qui, à  $x$ , fait correspondre  $t x = (-x^0, \underline{x})$ , et enfin la réflexion d'espace-temps  $s t$ , produit de  $s$  et de  $t$  ; dans  $G$ , ces réflexions ne sont pas reliées continuellement à  $e$ . Soit alors  $L$  un système général de propositions qui admette des symétries  $\Sigma$ ,  $T$ , et  $\Theta$  qui puissent être respectivement interprétées comme l'effet de  $s$ ,  $t$  et  $s t$  sur le système physique considéré. Ces systèmes ne satisfont pas à l'hypothèse du théorème I.1.2, mais, en vertu de la cinquième propriété des symétries, elles appliquent chaque sous-système cohérent sur un sous-système cohérent ; ces symétries étant de plus involutives, le système de propositions attaché à une quelconque description  $(L, U)$ , irréductible par rapport au groupe (complet) de POINCARÉ, comprendra au plus quatre sous-systèmes cohérents distincts (ceci se démontre de la même manière que le théorème I.1.2). La théorie habituelle des types (voir par exemple WIGHTMAN<sup>3)</sup> Nuovo Cimento, suppl. 14, p. 92) suppose que  $L$  ne comporte qu'un seul sous-système cohérent ; c'est là un postulat supplémentaire qui

interdit, en particulier, d'interpréter  $\Sigma$  comme l'opérateur que les physiciens désignent habituellement par  $C P$ , car cette opération contient la conjugaison de charge qui intervertit les sous-systèmes cohérents de charge opposée; une théorie des types ne faisant pas ce postulat sera envisagée à la fin de cette étude; pour le moment, contentons-nous de transcrire dans la réalisation quaternionienne une théorie qui postule explicitement cette restriction. L'auteur s'est senti encouragé dans cette voie par les remarques suivantes:

«We find it somewhat disappointing that the consideration of the type does not lead to a more potent distinction between particles. It is not impossible that the paucity of distinguishing marks between types is characteristic only of the complex number system, used for the component of vectors in HILBERT space.» (BARGMANN, WIGHTMAN et WIGNER<sup>3</sup>). Et «... the interpretation of reflection operators ... has raised a number of difficult questions ... I should like to mention the possibility of using a number system for the HILBERT space which is different from the ordinary complex numbers.» (WIGNER<sup>3</sup>).

Envisageons maintenant une représentation projective continue  $U$  du groupe  $G$  (complet) de POINCARÉ, agissant sur les rayons d'un seul espace de HILBERT quaternionien  $\mathfrak{H}$  (on se place donc ici dans le cadre restreint d'une théorie sans règles de supersélection); désignons par  $\Sigma$ ,  $T$  et  $\Theta$  les éléments de  $U$  qui correspondent respectivement à  $s$ ,  $t$  et  $s t$ . On a vu qu'il est toujours possible d'extraire de  $U$  une représentation  $u$  unitaire, continue, au plus bivaluée, du groupe propre  $G_e$ ;  $\Sigma$ ,  $T$  et  $\Theta$  étant par définition des symétries, on peut *toujours* les représenter par des opérateurs *unitaires* de  $\mathfrak{H}$ :  $\sigma$ ,  $\tau$  et  $\vartheta$  respectivement; on remarquera que cette situation est différente de celle qu'on rencontre dans le cas complexe où l'on doit *choisir* entre les cas unitaire et anti-unitaire, une symétrie ne pouvant pas être représentée simultanément par un opérateur unitaire et un opérateur anti-unitaire. Désignons par  $R$  un quelconque des  $\Sigma$ ,  $T$  ou  $\Theta$ , et par  $\varrho$  un représentatif unitaire de  $R$ , par  $r$  la réflexion de l'espace de MINKOWSKI représentée par  $R$ , et par  $r[x]$  la transformation  $r x r^{-1}$  de  $G_e$ ;  $\varrho u_x \varrho^{-1}$  et  $u_{r[x]}$  représentent la même symétrie physique et ne diffèrent donc que par un facteur scalaire  $\varepsilon(x)$  de norme 1; comme ces deux expressions sont linéaires, celui-ci ne peut être que +1 ou -1; de plus  $\varrho u_x \varrho^{-1}$  et  $u_{r[x]}$  sont continues en  $x$ ; il en est donc de même de  $\varepsilon(x)$ ; or  $\varepsilon(e) = 1$  car  $u_e = I$ ; par conséquent  $\varepsilon(x) = +1$  pour tout  $x$  de  $G_e$ .

On a vu que, réduite à  $T^4$ ,  $u$  prend la forme:

$$u_b = \int_{\Gamma} e^{J p^\mu b_\mu} da(S) = e^{J P^\mu b_\mu}$$

où  $J$ , unitaire antihermitien est fixé de manière essentiellement unique par l'interprétation des  $P^\mu$  comme les composantes de l'énergie-impulsion; les projecteurs  $a(S)$  ont été alors interprétés comme les propositions: «l'énergie-impulsion a une valeur comprise dans le domaine  $S$ ». Complétons maintenant le postulat 2 par:

**Postulat 2 «renforcé»:** *L'énergie-impulsion doit se transformer correctement sous l'action du groupe homogène de POINCARÉ.*

Ce postulat consiste effectivement à choisir une interprétation de  $\Sigma$ ,  $T$  et  $\Theta$  en précisant ce qu'est la transformation «correcte» de l'énergie-impulsion sous ces

symétries:  $\Sigma$ , qui représente la réflexion d'espace  $s$ , doit changer le signe de l'impulsion, mais laisser fixe l'énergie:

$$\sigma a(S) \sigma^{-1} = \Sigma a(S) = a([S] s);$$

$t$  étant la réflexion de temps, elle doit renverser la direction du mouvement:

$$\tau a(S) \tau^{-1} = T a(S) = a([S] s);$$

$s t$  étant le produit de  $s$  par  $t$ , on doit avoir:

$$\vartheta a(S) \vartheta^{-1} = \Theta a(S) = a(S).$$

En faisant alors du postulat 2 renforcé le même usage que celui a été fait du postulat 2 initial, on obtient que  $\sigma$  commute avec  $J$ , alors que  $\tau$  et  $\vartheta$  anticommutent avec cet opérateur.

$J$ ,  $a(S)$ ,  $u_x$  étant tous des opérateurs linéaires, ce qui a été démontré ci-dessus pour  $\sigma$ ,  $\tau$  et  $\vartheta$  reste vrai pour n'importe quel autre des représentatifs de  $\Sigma$ ,  $T$  ou  $\Theta$ .

Le théorème I.4.1 affirme que  $J$ , qui est unitaire et antihermitien, permet d'extraire de  $\mathfrak{H}$  une famille d'espaces de HILBERT complexes  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ ; dans la discussion qui suit ce théorème, il a été remarqué que tout opérateur linéaire de  $\mathfrak{H}$ , qui commute avec  $J$ , applique linéairement chacun des  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  sur lui-même; c'est le cas de chacun des  $u_x$  et de  $\sigma$ ; pour  $\tau$  et  $\vartheta$  qui anticommutent avec  $J$  cela n'est plus vrai: ils appliquent linéairement chacun des  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  sur l'espace  $\mathfrak{H}_C^{(-i)}$  correspondant. On aura alors recours à l'artifice suivant: désignons par  $A$  indifféremment  $T$  ou  $\Theta$ ; on vient de montrer que tout opérateur qui représente  $A$  dans  $\mathfrak{H}$  anticomme avec  $J$ ; choisissons alors parmi tous les représentatifs possibles de  $A$  un opérateur co-linéaire qui diffère des représentatifs linéaires de  $A$  par un quaternion  $k$ , purement imaginaire (et naturellement de norme 1); soient  $i$  un quaternion imaginaire, de norme 1, qui anticomme avec  $k$ , et  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  l'espace de HILBERT complexe correspondant. Désignons par  $\alpha$  l'opérateur co-linéaire ainsi choisi; alors  $\alpha$  applique *antilinéairement*  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  sur lui-même; en effet, soient  $f$  et  $f'$  des vecteurs de  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ , et  $c^{(i)} = x + i y$  (ou  $x$  et  $y$  sont réels) un nombre quelconque du corps de base  $C^{(i)}$  de  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ ; on a:

$$J \alpha f = -\alpha J f = -\alpha i f = -k i k^{-1} \alpha f = i \alpha f, \quad \alpha (f + f') = \alpha f + \alpha f'$$

car  $\alpha$  est co-linéaire

$$\alpha c^{(i)} f = (x + k i k^{-1} y) \alpha f = (x - i y) \alpha f,$$

ce qui prouve notre assertion.

Résumons ce qui a été démontré jusqu'ici:

**Théorème 1:** *Etant donné une représentation projective continue  $U$  du groupe de POINCARÉ  $G$ , agissant sur les rayons d'un espace de HILBERT quaternionien, et satisfaisant aux postulats 1 et 2 renforcé, il est toujours possible d'extraire*

- de  $\mathfrak{H}$ , un espace de HILBERT complexe  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  complet dans  $\mathfrak{H}$ ,*
- de  $U$ , une représentation  $u$  continue de  $G$  dans  $\mathfrak{H}$ , de sorte que  $u$  applique  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  sur lui-même. Soit alors  $u^{(i)}$  la restriction de  $u$  à  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ ; celle-ci jouit des propriétés suivantes:*

- (i)  $u^{(i)}$  est une représentation continue de  $G$  dans  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ ;
- (ii) restreinte au groupe orthochrome,  $u^{(i)}$  est unitaire;
- (iii)  $\tau^{(i)}$  et  $\vartheta^{(i)}$  sont anti-unitaires,  $\tau$  et  $\vartheta$  représentant respectivement dans  $\mathfrak{H}$  la réflexion de temps et la réflexion d'espace-temps.

Arrivé à ce point, on a besoin d'une généralisation du théorème I.4.2 au cas des co-représentations; analysons pour cela la situation suivante:

Soient  $\mathfrak{H}$  un espace de HILBERT quaternionien,  $J$  un opérateur unitaire antihermitien de  $\mathfrak{H}$ ,  $G$  un groupe,  $r$  un automorphisme extérieur involutif de  $G$ ,  $u$  une représentation unitaire de  $G$  dans  $\mathfrak{H}$ , telle que  $u_x$  commute avec  $J$  pour tout  $x$  de  $G$ , et enfin  $\varrho$  une transformation de  $\mathfrak{H}$  satisfaisant aux conditions suivantes:

- (i)  $\varrho J = -J \varrho$
- (ii)  $\varrho(qf) = k q k^{-1} \varrho f$  où  $k$  est un quaternion imaginaire de norme 1,
- (iii)  $\varrho u_x \varrho^{-1} = u_{r[x]}$  pour tout  $x$  de  $G$ ;

la démonstration du théorème 1 permet déjà d'affirmer que, si  $i$  est un quaternion imaginaire de norme 1, qui de plus anticommuter avec  $k$  et si  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  est l'espace de HILBERT complexe associé à  $i$  par  $J$ , alors la restriction  $u^{(i)}$  de  $u$  à  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  est une représentation unitaire de  $G$ , et  $\varrho$  applique antilinéairement  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  sur lui-même; désignons par  $\varrho^{(i)}$  cette transformation de  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ .

Si  $(u^{(i)}, \varrho^{(i)})$  est une co-représentation de type I, irréductible de  $(G, r)$ , avec  $u^{(i)}$  de classe +1 ou 0, le théorème I.4.2 suffit pour établir l'irréductibilité de  $(u, \varrho)$ . Bornons donc l'analyse qui suit au cas des co-représentations de type II ou III; (pour une classification des co-représentations voir l'exposé fait en appendice); une légère modification de la démonstration du théorème I.4.2 permettra cette analyse: supposons qu'il existe un projecteur  $a$  de  $\mathfrak{H}$  qui commute avec  $(u, \varrho)$ ; à partir du commutateur  $[a, J]$  formons l'opérateur:

$$B = k^{-1} \varrho[a, J]$$

qui est linéaire; il commute de plus avec  $J$  et applique donc linéairement  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  sur lui-même; il jouit enfin des propriétés suivantes:

- (i)  $B u_x = u_{r[x]} B$ ,
- (ii)  $B \varrho = -\varrho B$ ;

tous les opérateurs qui interviennent ici appliquent  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  sur lui-même; on a donc:

- (i)  $B^{(i)} u_x^{(i)} = u_{r[x]}^{(i)} B^{(i)}$ ,
- (ii)  $B^{(i)} \varrho^{(i)} = -\varrho^{(i)} B^{(i)}$ .

Il a été démontré, dans l'appendice, que les co-représentations irréductibles de type II ou III sont de la forme:

$$u_x^{(i)} = \begin{pmatrix} v_x & \\ & \bar{v}_x \end{pmatrix}; \quad \varrho^{(i)} = K \begin{pmatrix} & 1 \\ \varepsilon & \end{pmatrix}$$

où  $v$  est une représentation irréductible de  $G$ ; en remplaçant  $(u^{(i)}, \varrho^{(i)})$  par cette forme dans les relations (i) et (ii), on trouve que si  $v$  n'est équivalente ni à  $\tilde{v}$ , ni à  $v_r$  (définie par  $(v_r)_x = v_{r[x]}$ ) alors  $B$  est nécessairement nul. Par le même raisonnement que celui

qui a été utilisé pour établir le théorème I.4.2, on déduit que  $(u, \varrho)$  est irréductible si ces deux conditions sont satisfaites. Le premier des critères d'équivalence du théorème de MACKEY-FROBENIUS (voir appendice) indique immédiatement que ces deux conditions sont effectivement satisfaites pour toutes les co-représentations du groupe de POINCARÉ étudiées en appendice; il en est de même pour les co-représentations du groupe propre étendu par la réflexion d'espace-temps  $s t$  seulement.

Ainsi pour tous les cas susceptibles d'intéresser la physique, à toute représentation quaternionienne irréductible du groupe propre de POINCARÉ, étendu par  $s t$  seulement, ou par  $s$  et  $t$  séparément, correspond une co-représentation complexe irréductible de même dimension; réciproquement, toute co-représentation complexe irréductible d'un de ces groupes étendus peut être plongée dans une représentation quaternionienne irréductible.

Pour clore il peut être intéressant de discuter brièvement une théorie où le postulat de cohérence maximum de la théorie des types habituelle est omis; seuls les cas où l'introduction d'un automorphisme involutif anti-unitaire  $\varrho$  «double» la dimension des représentations entrent en ligne de compte ici. Les co-représentations correspondantes sont alors de type II ou III et peuvent toujours s'écrire, ainsi qu'on l'a remarqué déjà, sous la forme suivante:

$$u_x = \begin{pmatrix} v_x & \\ & \bar{v}_x \end{pmatrix}; \quad \varrho = K \begin{pmatrix} & 1 \\ \varepsilon & \end{pmatrix}$$

(en raison ce ce qui précède, on ne considère que le cas complexe).

Supposons maintenant qu'on a une règle de supersélection entre les sous-espaces des représentations  $v$  et  $\bar{v}$ ; alors  $\varrho$  et  $\varrho' = \varrho \Omega$  où

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & I \\ \omega_2 & I \end{pmatrix},$$

( $\omega_1$  et  $\omega_2$  étant des nombres complexes arbitraires de module 1) représentent la même opération projective puisqu'on ne peut distinguer les phases relatives entre ces deux sous-espaces; posons alors  $\omega_2 = 1$  et  $\omega_1 = \varepsilon$ ;  $\varrho'$  prend alors la forme:

$$\varrho' = K \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

(dans la suite, pour alléger l'écriture, on omettra le prime); on remarque que  $\varrho^2$  est normalisé à  $+ I$ .

Supposons maintenant que  $v$  soit une représentation (irréductible) du groupe propre, et que  $\varrho$  soit  $\vartheta$  qui représente la réflexion d'espace-temps;  $\vartheta$  change donc de sous-espace cohérent; interprétons cette opération en disant que  $\vartheta$  contient la «conjugaison de charge», c'est-à-dire que  $\vartheta$  est l'opération que les physiciens désignent habituellement par *CPT*. La question qui se pose alors est de savoir si une telle représentation contient *P*, *T* ou *CP*; voyons d'abord le problème de l'inversion de l'espace représentée a priori par l'opérateur:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix};$$

comme  $\sigma$  est une symétrie, elle applique chaque sous-espace cohérent ou bien sur lui-même ou bien sur un autre sous-espace cohérent, de sorte qu'on a:

- ou bien:  $\beta = \gamma = 0$ ,
- ou bien:  $\alpha = \delta = 0$ ;

dans le premier cas, on interprétera  $\sigma$  comme  $P$ , et dans le second comme  $CP$ ; de plus  $\sigma$  doit satisfaire à la condition:

$$\sigma u_x \sigma^{-1} = u_{s[x]},$$

de sorte que:

- ou bien:  $\alpha v_x \alpha^{-1} = v_{s[x]}$  et  $\bar{\delta} \bar{v}_x \delta^{-1} = \bar{v}_{s[x]}$ ,
- ou bien:  $\beta \bar{v}_x \beta^{-1} = v_{s[x]}$  et  $\gamma v_x \gamma^{-1} = \bar{v}_{s[x]}$ .

Ces quatre conditions peuvent respectivement s'écrire:

$$\alpha v_x \alpha^{-1} = v_{s[x]}, \quad \bar{\delta} v_x \delta^{-1} = v_{s[x]}, \quad \beta^{-1} v_{t[x]} \beta = \tilde{v}_x, \quad \gamma^{-1} v_{t[x]} \gamma = \tilde{v}_x.$$

Trois cas peuvent alors se présenter:

- (i)  $v$  n'est pas équivalente à  $v_s$ , et  $v_t$  n'est pas équivalente à  $\tilde{v}$ ; la théorie ne possède alors pas de symétrie pouvant représenter la réflexion d'espace  $s$ ;
- (ii)  $v$  est équivalente à  $v_s$ ; la théorie possède un opérateur  $\sigma$  qui peut s'interpréter comme le  $P$  des physiciens;
- (iii)  $v_t$  est équivalente à  $\tilde{v}$ ; la théorie possède un opérateur  $\sigma$  qui peut s'interpréter comme le  $CP$  des physiciens.

On remarque que les cas (ii) et (iii) ne sont pas incompatibles. Un calcul analogue montre que la condition pour que la théorie possède un opérateur qui représente la réflexion de temps sans changer de sous-espace cohérent est:  $v_t$  est équivalente à  $\tilde{v}$ ; cette condition est la même que celle de l'existence d'une symétrie  $CP$ , ce qui n'est effectivement pas étonnant puisqu'on a imposé  $CPT$ .

En utilisant les critères du théorème de MACKEY-FROBENIUS, on obtient:

1. Les systèmes de masse non-nulle possèdent la symétrie  $P$ , ce qui n'est pas le cas pour les systèmes de masse nulle, à moins que le spin soit aussi nul.

2.  $CP$  et  $T$  sont des symétries pour les systèmes de masse non-nulle et nulle, et on a alors respectivement  $T^2 = (-I)^{2s}$  et  $T^2 = +I$ .

Ces remarques sont valables seulement si  $C$  change effectivement de sous-espace cohérent (ce qui n'est pas le cas pour les systèmes où toutes les charges sont nulles et on doit alors prendre les résultats de la théorie des types ordinaires).

#### 4. Conclusion

Sous l'hypothèse d'une interprétation cohérente de l'opérateur d'énergie-impulsion, on a classifié toutes les réalisations quaternioniennes (et complexes, voir appendice) des systèmes élémentaires par rapport à divers sous-groupes du groupe de POINCARÉ: le groupe complet, le groupe propre, le groupe orthochrone, ainsi que le groupe propre étendu seulement par la réflexion d'espace temps. Il est apparu que les systèmes

élémentaires ainsi obtenus dans les réalisations complexe et quaternionienne peuvent être mis en correspondance biunivoque. Ceci a été mis en évidence au moyen d'un opérateur  $J$  unitaire et antihermitien qui commute avec chacun des opérateurs représentant les transformations du groupe orthochrone, et qui anticommuter avec les opérateurs représentant la réflexion de temps et la réflexion d'espace-temps. Cet opérateur  $J$  joue donc un rôle comparable à l'unité imaginaire de la réalisation complexe, ainsi qu'à l'opérateur  $J$  introduit par STUECKELBERG et collaborateurs dans la réalisation réelle<sup>5)</sup>. Ce germe d'analogie suggère de pousser plus loin la comparaison ; appelons *charges*, des observables (opérateurs linéaires et hermitiens) qui restent invariantes sous toutes les transformations du groupe propre de POINCARÉ et qui commutent avec chacune des composantes de l'énergie-impulsion ; en refaisant ici le raisonnement effectué à propos du postulat 2, on montre que toutes les charges commutent avec  $J$  et peuvent donc être entièrement déterminées par leur restriction à un espace de HILBERT complexe choisi arbitrairement dans une famille elle-même déterminée de manière unique par  $J$ . Phénoménologiquement, il semble que toutes les observables de la physique peuvent être obtenues à partir de ces charges et d'opérateurs liés au groupe de POINCARÉ ; s'il en est effectivement ainsi, toutes les observables commutent avec  $J$  et sont donc, à leur tour, complètement déterminées par leur restriction à l'espace de HILBERT complexe dont il est question ci-dessus.

Ainsi, dans le cadre de cette étude, il n'apparaît aucune raison physique portant à utiliser la réalisation quaternionienne plutôt que la réalisation complexe de la mécanique quantique. La situation pourrait évidemment devenir très différente si l'on changeait un des postulats, ce qui semble toutefois difficile dans l'état actuel de nos connaissances ; en particulier, il est important de remarquer que le groupe de la relativité restreinte jouit d'une propriété très particulière : le problème de la réduction de phase admet la même solution dans les réalisations quaternionienne et complexe, ce qui n'est pas le cas en général ainsi qu'on l'a remarqué dans la troisième section de la réf. I.

Lors d'une discussion, C. N. YANG<sup>4)</sup> avait suggéré d'utiliser les quaternions pour rendre compte des symétries du groupe de l'isospin. Bien que cette question sorte du cadre du problème qu'on s'est proposé de résoudre ici, il peut être intéressant de mentionner les faits suivants qui conduisent naturellement à une idée semblant être contenue, du moins implicitement et peut-être sous une forme un peu différente dans les travaux de FINKELSTEIN, JAUCH, SCHIMINOVICH et SPEISER<sup>6)</sup>. Tout d'abord, il faut noter que la troisième composante de l'isospin étant liée aux charges, les espaces propres de cette observable sont nécessairement séparés par une règle de supersélection ; or les autres composantes de l'isospin échangent ces espaces, ce qui n'est pas possible dans une théorie où on ne considère qu'une suite *discrète* de sous-espaces cohérents, car le groupe de l'isospin est connexe (voir théorème I 1.2) ; ainsi, une théorie qui admet pour groupe de symétrie le groupe de l'isospin doit contenir une suite continue de sous-systèmes cohérents ; on est donc placé en présence d'un système admettant une *règle de supersélection continue*. Le théorème I.4.1 et les remarques qui précèdent le théorème I.4.2 suggèrent un formalisme où une telle situation pourrait être traitée d'une manière simple et naturelle ; cette voie est d'autant plus tentante que la famille d'espaces de HILBERT complexes, associée à un opérateur  $J$  unitaire et antihermitien, dépend de trois paramètres ; cependant en

essayant de développer plus avant cette spéculation, on s'est heurté à des difficultés qui ont donné naissance à un sentiment de frustration analogue à celui dont parle C. N. YANG dans sa remarque.

En bref, si on a quelque peine à tirer des faits nouveaux en faisant jouer au corps des quaternions le rôle que remplissent habituellement les nombres complexes, on a néanmoins montré que rien ne s'oppose en principe à une mécanique quantique relativiste quaternionienne. La voie reste donc ouverte à une réalisation quaternionienne des théories quantiques relativistes.

### Remerciements

L'expression de ma plus sincère gratitude s'adresse en premier lieu à M. le Professeur J. M. JAUCH, mon Directeur de thèse, pour le bienveillant intérêt avec lequel il a voulu me prodiguer ses précieux conseils tout au long de ce travail; je tiens aussi à remercier MM. les Professeurs E. C. G. STUECKELBERG, G. W. MACKEY et A. HAEFLIGER pour les critiques qu'ils ont pris le temps de formuler à l'égard de mon travail; enfin mes collègues de l'Institut de Physique théorique de Genève, et spécialement MM. B. MISRA, C. PIRON et D. SPEISER, doivent être mentionnés pour la part qu'ils ont prise à de nombreuses discussions.

Ce travail a été réalisé avec l'appui financier de la Fondation Holderbank à qui je manifeste ma reconnaissance.

### Appendice

#### Classification des représentations complexes irréductibles du groupe de POINCARÉ

On se propose ici de rappeler les faits essentiels de la théorie de la classification des représentations irréductibles du groupe de POINCARÉ dans un espace de HILBERT complexe; ce problème a été complètement résolu par WIGNER et collaborateurs<sup>1)3)</sup>; la plupart des raisonnements présentés dans ces articles originaux sont effectivement des expressions particulières de théorèmes plus généraux, énoncés par MACKEY<sup>2)</sup>; ces théorèmes se rapportent essentiellement à la détermination des *classes d'équivalence* des représentations irréductibles (ce qui est précisément le problème que doit résoudre le physicien); il a paru judicieux de présenter ici la théorie sous cette forme concise.

Introduisons au préalable la notion de «représentation induite» qui jouera un rôle fondamental dans la discussion qui va suivre: Soient  $G$  un groupe séparable, localement compact,  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$ ,  $L$  une représentation (unitaire, fortement continue) de  $H$  dans un espace de HILBERT complexe  $\mathfrak{H}(L)$ ,  $\mu$  une mesure de BOREL quasi-invariante sur  $G/H$ , et enfin  $\mathfrak{H}$  l'ensemble des applications  $f$  de  $G$  dans  $\mathfrak{H}(L)$  qui satisfont aux conditions suivantes:

- (i)  $(f(x), \phi)$  est une fonction de BOREL en  $x$  pour tout  $\phi$  de  $\mathfrak{H}(L)$ ;
- (ii) pour tout  $x$  de  $G$ , tout  $h$  de  $H$ , on doit avoir:

$$f(hx) = L_h f(x),$$

$$(iii) \int_{G/H} \|f(x)\|^2 d\mu(s) < \infty.$$

On remarque que l'expression (iii) n'a de sens que si la condition (ii) est postulée au préalable; cette condition implique en effet que  $\|f(x)\|^2$  est constante sur chaque complexe associé à  $H$ ; il en est de même de la fonction  $(f(x), g(x))$ ; celle-ci permet de définir un produit scalaire dans  $\mathfrak{H}$ , de telle sorte que celui-ci devienne un espace de HILBERT complexe:

$$(f, g) = \int_{G/H} (f(x), g(x)) d\mu(s).$$

Pour tout  $f$  dans  $\mathfrak{H}$ , tout couple d'éléments  $x$  et  $y$  appartenant tous deux à  $G$ , considérons l'expression:

$$({}^\mu U_x^L f)(y) = f(yx) \sqrt{\varrho_x(y)}$$

$\varrho_x$  étant la dérivée de RADON-NIKODYM  $d\mu_x/d\mu$ , dont la définition précise se trouve dans les articles de MACKEY; il nous suffira de savoir ici que  $\varrho_x(s)$  est une fonction de BOREL sur  $G \times G/H$  qui peut être définie de telle sorte que:

$$\varrho_{xy}(s) = \varrho_x(s) \varrho_y(sx)$$

quels que soient  $x$  et  $y$  dans  $G$ , et  $s$  dans  $G/H$ .  ${}^\mu U^L$  constitue alors une représentation unitaire continue de  $G$  dans  $\mathfrak{H}$ , dite *représentation de G, induite par L*. La notion de représentation induite (introduite d'ailleurs dans ce contexte par FROBENIUS) prend une forme évidemment plus simple dans le cas des groupes discrets, car il n'est pas nécessaire de faire intervenir les raffinements de la théorie de la mesure; pour les groupes topologiques, satisfaisant aux conditions de la définition ci-dessus, MACKEY a montré que l'indice  $\mu$  dans  ${}^\mu U^L$  peut être omis; en effet, la condition de quasi-invariance imposée à  $\mu$  détermine cette mesure à une équivalence près, et il apparaît que deux représentations  ${}^\mu U^L$  et  ${}^\nu U^L$ , où les mesures  $\mu$  et  $\nu$  sont équivalentes, sont unitairement équivalentes.

Définissons encore rapidement quelques termes afin de pouvoir énoncer intelligiblement ce qui sera, pour le but poursuivi ici, le théorème central de MACKEY-FROBENIUS.

Soit  $G$  un produit semi-direct de groupes topologiques  $T$  et  $H$ ,  $T$  étant supposé abélien (pour la définition du produit semi-direct, voir section 1). Dans le cas complexe, il est commode de remplacer le caractère  $\theta$  sur un groupe abélien par l'expression  $\chi = e^{i\theta}$ , que par abus de langage on désignera systématiquement dans cet appendice sous le même nom de *caractère*. On dit que deux caractères  $\chi$  et  $\chi'$  sur  $T$  sont *équivalents* (par rapport à  $H$ ) s'il existe un élément  $\Lambda$  de  $H$  tel que pour tout  $b$  de  $T$  on ait:

$$\chi'(b) = \chi(\Lambda[b]);$$

on écrira alors  $\chi' = [\chi] \Lambda$ . On appelle *orbite* (sous l'action de  $H$ ) une classe d'équivalence de caractères au sens de la définition ci-dessus. Le terme de *petit groupe  $H\chi$* , associé à un caractère  $\chi$ , désigne l'ensemble des éléments  $\Lambda$  de  $H$  qui laissent  $\chi$  invariant, c'est-à-dire pour lesquels  $\chi = [\chi] \Lambda$ . Notons enfin que si  $\chi$  est un caractère sur  $T$  et si  $M$  est une représentation unitaire, fortement continue et irréductible du petit groupe  $H\chi$  associé à  $\chi$ , alors l'ensemble des opérateurs  $L_{b,\Lambda}^{\chi,M}$ , définis par  $\chi(b) M_\Lambda$  lorsque  $b$  et  $\Lambda$  parcourent respectivement  $T$  et  $H\chi$ , forme une représentation unitaire, fortement continue et irréductible du sous-groupe de  $G$  constitué par le produit semi-direct de  $T$  par  $H\chi$ .

Le théorème suivant est alors valable pour autant qu'une certaine condition de *régularité* du produit semi-direct soit satisfaite, ce qui est le cas pour le groupe de POINCARÉ. (Dans l'énoncé de ce théorème, on sous-entendra les adjectifs «unitaire» et «fortement continue» pour les représentations dont il est question.)

**Théorème de Mackey-Frobenius:** Soit  $G$  un groupe obtenu comme produit semi-direct de groupes séparables, localement compacts  $T$  et  $H$ ,  $T$  étant de plus abélien. Si  $\chi$  est un caractère sur  $T$  et si  $M$  est une représentation irréductible du petit groupe  $H\chi$  associé à  $\chi$ , alors la représentation  $U^L$  de  $G$ , induite par la représentation  $L^{\chi, M}$  du produit semi-direct de  $T$  par  $H\chi$ , est irréductible. De plus, toute représentation irréductible de  $G$  peut être obtenue ainsi. Enfin, deux représentations irréductibles de  $G$ , induites respectivement par  $L^{\chi, M}$  et  $L^{\chi', M'}$  sont équivalentes si et seulement si  $\chi$  et  $\chi'$  sont dans la même orbite et si  $M$  et  $M'$  peuvent être amenées à être équivalentes.

Ainsi, la classification des représentations des groupes qui satisfont à l'hypothèse de ce théorème peut être obtenue au moyen du programme en cinq points suivant<sup>7)</sup>:

- (i) Déterminer les caractères sur  $T$ .
- (ii) Déterminer les orbites sur  $T$  sous l'action de  $H$ .
- (iii) Choisir arbitrairement un caractère dans chaque orbite.
- (iv) Déterminer les petits groupes associés à chacun des caractères ainsi choisis.
- (v) Déterminer les classes d'équivalence des représentations irréductibles de chacun de ces petits groupes.

En vertu du théorème de Mackey-Frobenius, chaque couple formé par une orbite et une classe d'équivalence de représentations irréductibles du petit groupe associé à un caractère choisi arbitrairement dans cette orbite, détermine une classe d'équivalence de représentations irréductibles de  $G$ , et, en effectuant le programme décrit ci-dessus, on parcourt toutes les classes d'équivalence.

Mettons alors à profit le fait que le groupe propre de POINCARÉ  $G_e$  satisfait aux hypothèses du théorème de Mackey-Frobenius, le groupe abélien étant le groupe  $T^4$  des translations dans l'espace-temps, le second terme du produit semi-direct étant le groupe des transformations homogènes propres  $H^4$  (voir section 1). Notre but n'est pas ici de recenser *toutes* les classes d'équivalence de représentations irréductibles de  $G_e$ , mais seulement de rappeler les faits essentiels concernant celles qui conduisent à une masse réelle, à une énergie positive et à un spin discret; les représentations appartenant aux autres classes semblent en effet ne pas avoir de rapport avec le contexte physique dans lequel on s'est placé. Ceci sera suffisant pour permettre de traiter le problème de la classification des représentations irréductibles du groupe (complet) de POINCARÉ, car le théorème de Mackey-Frobenius donne les critères d'équivalence de manière suffisamment précise pour qu'il ne soit pas nécessaire de recourir à la forme explicite des représentations. Appliquons alors le programme proposé ci-dessus:

- (i) les caractères sur  $T^4$  sont de la forme

$$\chi(b) = e^{i p^\mu b_\mu}$$

où  $b$  est le quadrivecteur de la translation considérée,  $p$  un quadrivecteur caractéristique du caractère  $\chi$ , et  $p^\mu x_\mu$  le produit scalaire dans l'espace-temps de MINKOWSKI;

- (ii) appartiennent à la même orbite tous les caractères tels que le  $\dot{p}$  correspondant puisse être obtenu à partir d'un  $\dot{p}$  fixe, au moyen d'une transformation homogène propre; aussi, une orbite sera-t-elle déterminée par la valeur de  $m^2$ , définie comme  $\dot{p}^\mu \dot{p}_\mu$ , et, pour les orbites où  $m^2 \geq 0$ , par le signe de la composante  $\dot{p}^0$  de  $\dot{p}$ ;
- (iii) pour  $m^2 > 0$ , les seules orbites qui conduisent à une valeur positive de l'énergie sont celles qui contiennent un multiple réel positif de  $\dot{p} = (1, 0, 0, 0)$ ; pour  $m = 0$ , si on excepte l'orbite constituée du point  $\dot{p} = (0, 0, 0, 0)$ , la condition de positivité de l'énergie conduit à ne conserver que les orbites qui contiennent un multiple réel positif de  $\dot{p} = (1, 0, 0, 1)$ ;
- (iv) en raison de la réponse (dans le cas complexe!) au problème de la réduction de phase pour le groupe propre de POINCARÉ, on doit chercher les représentations de  $G_e$ , ainsi que ses représentations bivaluées; on sait que ce programme peut être résolu en cherchant toutes les représentations du revêtement universel de  $G_e$  (voir BARGMANN<sup>8</sup>), WIGNER<sup>1</sup>) et aussi MACKEY<sup>2</sup>)); on remplacera alors  $H^4$  par son revêtement universel  $S L(2, C)$ . Le petit groupe associé à  $(1, 0, 0, 0)$  est alors  $S U(2, C)$ , revêtement universel du groupe des rotations (propres!) dans l'espace euclidien à 3 dimensions; un calcul élémentaire montre que le petit groupe associé à  $(1, 0, 0, 1)$  est isomorphe au groupe des transformations propres inhomogènes dans l'espace euclidien à 2 dimensions; ce groupe est dit groupe euclidien à 2 dimensions et est noté  $E_2$ ;
- (v) les représentations de  $S U(2, C)$  sont bien connues: elles sont caractérisées par un paramètre réel  $s = n/2$  où  $n$  parcourt les nombres entiers positifs;  $s$  est appelé spin de la représentation considérée. Quant à  $E_2$ , il satisfait lui-même aux hypothèses du théorème de MACKEY-FROBENIUS et on peut lui appliquer à son tour le programme en cinq points énoncés ci-dessus (voir par exemple l'article de l'auteur<sup>7</sup>); deux types de représentations apparaissent alors, conduisant respectivement à des représentations de  $G_e$  à spin discret et à des représentations à spin continu; celles-ci n'ayant pas trouvé d'interprétation physique, on ne retiendra ici que les premières, auxquelles correspondent des représentations de  $E_2$  de la forme  $e^{is\beta}$  où  $\beta$  est l'angle de rotation dans  $R^2$ , et  $s = n/2$  avec  $n$  parcourant les nombres entiers.

La classification des représentations de  $G_e$  qui admettent une interprétation physique est ainsi achevée.

En raison de la présence du caractère  $\chi(b)$ , aucune de ces représentations n'est équivalente à sa conjuguée complexe, car  $\dot{p}$  et  $-\dot{p}$  n'appartiennent jamais à la même orbite dans ces cas; on obtient que ainsi toutes les représentations du groupe propre de POINCARÉ qui ont un sens physique sont de classe 0 de FROBENIUS et SCHUR; ce résultat est d'une grande importance dans la détermination des représentations quaternioniennes (voir théorème I.4.2).

Les renseignements obtenus jusqu'ici suffisent pour qu'on puisse entreprendre la classification des représentations du groupe *complet* de POINCARÉ.

Considérons d'abord le groupe *orthochrone*  $G^\uparrow$ , c'est-à-dire le groupe  $G_e$  auquel on a ajouté la réflexion  $s$  de l'espace euclidien à 3 dimensions.

Soit  $u$  une représentation irréductible de  $G^\uparrow$ ; on montre immédiatement (voir par exemple WIGNER<sup>1</sup>)) que  $u_s u_x u_{s^{-1}} = u_{s x s^{-1}}$  (sans phase arbitraire; l'argument est

fondé sur le fait qu'il n'existe pas de représentation non triviale du groupe propre de POINCARÉ, de dimension 1); en faisant usage du postulat de positivité de l'énergie, on montre alors que  $u_s$  doit être unitaire. En vertu du théorème de CLIFFORD (voir par exemple BOERNER<sup>9</sup>), l'alternative suivante se présente:

- ou bien:  $u$  restreinte à  $G_e$  est encore irréductible et alors les représentations  $u$  et  $u'$ , restreintes à  $G_e$ , sont équivalentes (où  $u'$  est définie à partir de  $u$  par la relation  $u'_x = u_{sx^{-1}}$  pour tout  $x$  de  $G_e$ ; on dit que  $u'$  est l'associée de  $u$ );
- ou bien:  $u$  restreinte à  $G_e$  est somme directe de deux représentations irréductibles associées inéquivalentes.

Ainsi, pour construire toutes les représentations irréductibles de  $G^\dagger$  à partir de celles de  $G_e$ , il suffit de rechercher quelles sont les représentations irréductibles de  $G_e$  équivalentes à leur associée. La réponse à cette question est encore fournie par le théorème de MACKEY-FROBENIUS. La réflexion  $s$  ne changeant ni la longueur d'un quadrivecteur, ni sa composante temporelle, les caractères  $\chi$  et  $\chi'$  de deux représentations associées appartiennent toujours à la même orbite, de sorte que la première condition d'équivalence est satisfaite. Pour les représentations de masse non-nulle,  $\chi$  et  $\chi'$  sont même identiques; leurs petits groupes sont donc les mêmes; comme la réflexion  $s$  commute avec toutes les rotations, les représentations  $M$  et  $M'$  sont elles aussi identiques, et la seconde condition d'équivalence est satisfaite. Pour les représentations de masse nulle, la situation est à peine moins simple:  $\phi$  et  $\phi' = s\phi$  sont différents; toutefois ils appartiennent à la même orbite; il existe donc une transformation  $\Lambda$ , appartenant au groupe propre, telle que  $\Lambda s \phi = \phi$  (ici  $\Lambda$  est une rotation d'un angle  $\pi$ ); considérons alors la représentation  $u''$  définie par  $u''_x = u'_{\Lambda x \Lambda^{-1}}$  qui est évidemment équivalente à  $u'$ ;  $u''$  et  $u$  ont même caractère; donc même petit groupe; les représentations correspondantes  $M''$  et  $M$  sont cependant  $e^{-is\beta}$  et  $e^{is\beta}$  qui sont inéquivalentes, à moins que  $s$  ne soit nul.

Pour le groupe orthochrone  $G^\dagger$ , la classification des représentations irréductibles ayant un sens physique est ainsi terminée: pour les représentations de masse non-nulle,  $u$ , restreinte à  $G_e$ , est irréductible; la situation est la même pour les représentations de masse nulle et de spin nul; pour les représentations de masse nulle et de spin non-nul,  $u$ , restreinte à  $G_e$ , se décompose en deux représentations irréductibles, associées et inéquivalentes; on dit couramment dans ce cas que l'introduction de la réflexion d'espace «double» la dimension de la représentation considérée.

Dans le groupe de POINCARÉ complet apparaît la réflexion de temps  $t$ ; les mêmes arguments que ceux qui conduisent à montrer que la réflexion d'espace doit être représentée par un opérateur unitaire imposent que l'opérateur qui représente la réflexion de temps doit être anti-unitaire. On ne peut plus appliquer le théorème de CLIFFORD, car il faut une théorie où puissent trouver place des opérateurs anti-unitaires; une telle théorie a été créée par WIGNER<sup>10</sup>) sous le nom de *théorie des co-représentations*; celle-ci peut se résumer de la manière suivante:

Soient  $G$  un groupe,  $r$  un automorphisme extérieur involutif de  $G$ ,  $u$  une représentation unitaire de  $G$  dans un espace de HILBERT complexe  $\mathfrak{H}$ , et enfin  $\varrho$  une transformation anti-unitaire de  $\mathfrak{H}$  telle que:

$$\varrho u_x \varrho^{-1} = u_{r[x]}$$

pour tout  $x$  de  $G$ ; on suppose de plus que la collection d'opérateurs  $(u, \varrho)$  est irréductible. Il résulte de toutes ces conditions que  $\varrho^2 = \varepsilon I$  où  $\varepsilon = \pm 1$ . Construisons alors l'opérateur  $\eta = K\varrho$  où  $K$  est un opérateur anti-unitaire involutif de  $\mathfrak{H}$  (on dit que  $K$  est une conjugaison de  $\mathfrak{H}$ );  $\varrho$  étant anti-unitaire,  $\eta$  est unitaire et satisfait en outre à la condition:

$$\eta u_x \eta^{-1} = K u_{r[x]} K$$

pour tout  $x$  de  $G$ ; désignons par  $\bar{u}$  la représentation de  $G$  définie par:

$$\bar{u}_x = K u_{r[x]} K$$

pour tout  $x$  de  $G$ ; à cause de sa construction-même,  $\bar{u}$  est équivalente à  $u$ .  $(u, \varrho)$  étant irréductible, deux possibilités seulement peuvent se présenter: ou bien  $u$  elle-même est irréductible, ou bien  $u$  est somme directe de deux représentations irréductibles de  $G$ ; ce résultat est établi dans un cadre plus général dans la section I. Examinons séparément ces deux cas:

(i)  $u$  est irréductible;  $u$  est équivalente à  $\bar{u}$ , c'est-à-dire qu'il existe un opérateur  $\eta$  unitaire tel que  $\eta u_x \eta^{-1} = \bar{u}_x$  pour tout  $x$  de  $G$ ; si on désigne par  $\tilde{\eta}$ , l'opérateur  $K \eta K$ , on a  $\tilde{\eta} \eta = \varrho^2$ . On dit alors que  $(u, \varrho)$  forme une *co-représentation de type I* de  $(G, r)$ .

(ii)  $u$  n'est pas irréductible; il existe alors un projecteur  $a$  de  $\mathfrak{H}$  qui commute avec chacun des  $u_x$  et tel que  $\varrho a \varrho^{-1} = (I - a)$ ; désignons respectivement par  $v$  et  $w$  les restrictions de  $u$  aux buts de  $a$  et de  $(I - a)$ . En utilisant les conditions sur  $\varrho$ , on montre que  $(u, \varrho)$  est unitairement équivalente à  $(u', \varrho')$ , où:

$$u'_x = \begin{pmatrix} v_x & \\ & \bar{v}_x \end{pmatrix}, \quad \varrho' = K \begin{pmatrix} & 1 \\ \varepsilon & \end{pmatrix}.$$

Deux circonstances peuvent alors se présenter:

a)  $v$  et  $\bar{v}$  sont inéquivalentes et on dit alors que  $(u', \varrho')$  est une *co-représentation de type III* de  $(G, r)$ ;

b)  $v$  et  $\bar{v}$  sont équivalentes. Il existe alors un opérateur unitaire  $\eta$  tel que  $\bar{v}_x = \eta v_x \eta^{-1}$  pour tout  $x$  de  $G$ .  $(u', \varrho')$  est alors unitairement équivalente à  $(u'', \varrho'')$ , où:

$$u''_x = \begin{pmatrix} v_x & \\ & v_x \end{pmatrix}, \quad \varrho'' = \begin{pmatrix} & K \eta \\ K \varepsilon \tilde{\eta}^{-1} & \end{pmatrix}$$

Or, en raison du caractère involutif de l'automorphisme  $r$ , l'opérateur  $\eta^{-1} K \eta^{-1} K$  commute avec chacun des opérateurs de la représentation  $v$  qui est irréductible par hypothèse; en appliquant le lemme de SCHUR et en faisant usage de l'unitarité de  $\eta$ , on obtient que  $K \eta^{-1} K = \pm \eta$ .

Ainsi deux cas peuvent se présenter:

- ou bien:  $K \eta^{-1} K = \varepsilon \eta$  et alors  $\varrho'' = K \eta \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ ,
- ou bien:  $K \eta^{-1} K = -\varepsilon \eta$ , et alors  $\varrho'' = K \eta \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$ .

Cependant, dans le premier cas, l'opérateur d'équivalence:

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}$$

amène  $(u'', \varrho'')$  sur la représentation  $(u''', \varrho''')$  définie par:

$$u'''_x = v_x \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \varrho''' = K \eta \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

qui est réductible, contrairement à l'hypothèse. En revanche, dans le deuxième cas, il est impossible de réduire  $(u'', \varrho'')$ ; aussi seul persiste le cas où  $(u, \varrho)$  est équivalente à:

$$u''_x = v_x \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \varrho'' = K \eta \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$$

où  $\eta$  satisfait aux deux relations caractéristiques:

$$\eta v_x \eta^{-1} = \bar{v}_x \text{ et } \tilde{\eta} \eta = -\varrho^2$$

$(u, \varrho)$  est alors dite *co-représentation de type II* de  $(G, r)$ . Ceci achève la classification des co-représentations de  $(G, r)$ . Ainsi, pour classifier toutes les co-représentations de  $(G, r)$  à partir des représentations unitaires de  $G$ , il suffit de savoir répondre aux deux questions suivantes:

- quelles sont les représentations  $v$  de  $G$  qui sont équivalentes à leur co-associée  $\bar{v}$ ?
- pour celles qui le sont, l'opérateur d'équivalence  $\eta$  satisfait-il à  $\tilde{\eta} \eta = +\varrho^2$  ou à  $\tilde{\eta} \eta = -\varrho^2$ ?

Les représentations équivalentes à leur co-associée fournissent les co-représentations de type I ou II selon que  $\tilde{\eta} \eta$  est égal ou opposé à  $\varrho^2$ ; les représentations inéquivalentes à leur co-associée fournissent les co-représentations de type III. Si  $G$  satisfait aux conditions du théorème de MACKEY-FROBENIUS, le formalisme décrit ici donne une réponse satisfaisante à ces deux conditions. Il faut seulement savoir, en plus de ce qui a été dit ci-dessus, les deux lemmes suivants:

- 1) Si  $U^L$  est une représentation induite, alors sa conjuguée complexe  $\tilde{U}^L = K U^L K$  est induite à partir de la conjuguée  $\tilde{L} = K L K$  de  $L$ ;
- 2) Si  $U^L$  et  $U^M$  sont des représentations équivalentes, induites à partir de représentations  $L$  et  $M$  du même sous-groupe, et si l'opérateur d'équivalence  $U$  défini par  $U U^L U^{-1} = U^M$  est tel que  $\tilde{U} U$  est un multiple scalaire de l'identité dans l'espace des représentations induites, alors l'opérateur d'équivalence  $u$  entre  $L$  et  $M$  est tel que  $\tilde{u} u$  est égal au même multiple de l'identité dans l'espace des représentations induisantes.

Ce n'est alors plus qu'un jeu que d'appliquer ces critères au groupe de POINCARÉ.

Si on étend le groupe propre de POINCARÉ par la réflexion d'espace-temps et si on désigne par  $\epsilon' I$  le carré de l'opérateur anti-unitaire représentant cette réflexion, on obtient:

- pour les représentations de masse non-nulle, des co-représentations de type I ou II selon que  $\varepsilon'$  est égal à  $(-1)^{2s}$  ou à  $(-1)^{2s+1}$ ; la situation est la même pour les représentations de masse nulle et de spin nul;
- pour les représentations de masse nulle et de spin non-nul, des co-représentations de type III.

Le groupe complet de POINCARÉ entre aussi dans le formalisme de la théorie des co-représentations, car c'est l'extension par l'inversion de temps (représentée par un opérateur anti-unitaire) du groupe orthochrone (dont tous les éléments peuvent être représentés par des opérateurs unitaires). Désignons par  $\varepsilon$   $I$  et  $\varepsilon' I$  les carrés respectifs des opérateurs représentant la réflexion de temps  $t$  et la réflexion d'espace-temps  $s t$ .

- pour les représentations de masse non-nulle (ainsi que pour les représentations de masse et de spin nuls), on obtient des co-représentations de type I, II ou III selon que

$$\varepsilon = \varepsilon' = (-1)^{2s}, \quad \varepsilon = \varepsilon' = (-1)^{2s+1}, \quad \varepsilon = -\varepsilon',$$

- pour les représentations de masse nulle et de spin différent de zéro, on obtient des co-représentations de type I ou II selon que  $\varepsilon$  est égal à  $(-1)^{2s}$  ou à  $(-1)^{2s+1}$ ; on rappelle que la dimension de ces représentations a déjà été doublée lors du passage du groupe propre au groupe orthochrone.

On remarquera que les résultats ainsi obtenus recouvrent ceux de la référence <sup>3)</sup>, et qu'on y est parvenu sans passer par la forme explicite des représentations, mais en faisant en revanche un usage systématique des critères qui déterminent les classes d'équivalence des représentations.

### Bibliographie

- I) G. EMCH, Helv. Phys. Acta 36, 739 (1963).
- <sup>1)</sup> E. P. WIGNER, Ann. of Math. 40, 149 (1939).
- <sup>2)</sup> G. W. MACKEY, Proc. N. A. S. 35, 537 (1949); Ann. of Math. 55, 101 (1952); Chicago Lecture Notes, Summer 1955. Voir aussi: Acta Mathematica 99, 265 (1958).
- <sup>3)</sup> Pamphlet anonyme généralement attribué à V. BARGMANN, A. S. WIGHTMAN et E. P. WIGNER; voir aussi A. S. WIGHTMAN, Ecole des Houches, Session de 1960, p. 181 à 194 et Nuovo Cim. Suppl. XIV, 81 (1959); E. P. WIGNER, Proceedings of the Istanbul Summer School (1962), à paraître; L. MICHEL and A. S. WIGHTMAN, Princeton University Lecture Notes, non publiées.
- <sup>4)</sup> C. N. YANG, Proc. of the 7th. Rochester Conference 1957, IX-25.
- <sup>5)</sup> E. C. G. STUECKELBERG et collaborateurs, Helv. Phys. Acta 33, 727 (1960); 34, 621 (1961); 34, 675 (1961); 35, 673 (1962).
- <sup>6)</sup> D. FINKELSTEIN, J. M. JAUCH, S. SCHIMINOVICH and D. SPEISER, CERN 59-7, 59-9, 59-17; Journ. of Math. Phys. 3, 207 (1962).
- <sup>7)</sup> J. M. JAUCH, CERN Seminar 5425/TH. 06 (1959), part IV; G. EMCH, Séminaire de l'Institut de Physique Théorique, Genève 1961.
- <sup>8)</sup> V. BARGMANN, Ann. of Math. 59, 1 (1954).
- <sup>9)</sup> H. BOERNER, Darstellungen von Gruppen, Springer-Verlag, 1955.
- <sup>10)</sup> E. P. WIGNER, Group Theory, New York 1959.