

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 36 (1963)  
**Heft:** VI

**Artikel:** Mécanique quantique quaternionienne et relativité restreinte. I  
**Autor:** Emch, Gérard  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-113398>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 31.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Mécanique quantique quaternionienne et Relativité restreinte I

par Gérard Emch

(Institut de Physique Théorique de l'Université, Genève)

(15 VI 63)

*Abstract.* The possibility of a new quantum mechanical description in which the observables are realized as self-adjoint operators in quaternionic HILBERT spaces is investigated from the point of view of relativistic invariance. The problem is first formulated in the natural language of quantum mechanics, i. e. the one of proposition systems. This is followed by the theory of projective group representation and their reduction to unitary group representations in quaternionic HILBERT spaces. The general theory is then applied to the group of special relativity which leads to the classification of elementary systems in this theory. This last step will be carried out in a further paper to appear in this journal.

## Introduction

Appliqué à la mécanique quantique, le groupe de la relativité restreinte a permis de comprendre dans une seule théorie les concepts de masse, de moment cinétique et de spin, d'hélicité, d'énergie-impulsion et d'équation de SCHROEDINGER, qui apparaissent de manière naturelle lors de la classification des représentations irréductibles de ce groupe dans un espace de HILBERT construit, *par habitude*, sur le corps des nombres complexes. Cette présomption en faveur des nombres complexes n'est pas justifiée a priori par la structure de la mécanique quantique, et celle-ci s'accorderait tout aussi bien d'une réalisation dans un espace de HILBERT réel ou quaternionien ainsi que le faisaient déjà remarquer BIRKHOFF et VON NEUMANN<sup>1)</sup>.

On peut dès lors se demander si une de ces réalisations hors de convention permettrait aussi de rendre compte des concepts essentiels mentionnés ci-dessus et surtout si elle n'en introduirait pas de nouveaux. C'est dans cet esprit qu'on a entrepris l'étude des représentations du groupe de POINCARÉ dans la réalisation quaternionienne. Cette voie a été ouverte par les travaux de FINKELSTEIN, JAUCH, SCHIMOVITCH et SPEISER<sup>2)3)4)</sup>; il convient aussi de rappeler que l'idée d'une théorie quantique fondée sur une réalisation par un espace de HILBERT réel a été exploitée par STUECKELBERG et ses collaborateurs<sup>5)</sup>, quoique selon une ligne passablement différente de celle qui est développée ici.

La première démarche consiste à définir ce qu'est un système physique élémentaire par rapport à un groupe de symétrie, ainsi que les notions qui y sont reliées, et cela sans recourir à une réalisation particulière de la théorie quantique dans un espace de HILBERT complexe, réel ou quaternionien; ceci fait l'objet de la première section.

La seconde section donne, des êtres ainsi définis, une réalisation particulière: celle où l'on décide (et on vérifie qu'on a le droit de le faire!) de représenter les observables

par des opérateurs hermitiens agissant dans une famille d'espaces hilbertiens construits sur le corps des quaternions, en opposition à la convention de la mécanique quantique habituelle qui envisage des espaces de HILBERT complexes; la description quaternionienne d'un système physique par rapport à un groupe de symétrie  $G$ , est alors déterminée par la donnée d'une famille d'espaces de HILBERT quaternioniens et d'une application de  $G$  dans l'ensemble de toutes les familles d'opérateurs co-unitaires, définis sur ces espaces; (par définition, un opérateur co-unitaire ne diffère d'un opérateur unitaire que par un facteur scalaire quaternionien de norme 1).

Dans la troisième section, on indique certaines conditions sur  $G$  pour que cette description puisse être faite en considérant non pas tout l'ensemble des opérateurs co-unitaires, mais seulement le sous-ensemble des opérateurs unitaires; on note en particulier que le groupe de POINCARÉ et ses sous-groupes principaux satisfont à ces conditions. Cette circonstance sera exploitée dans l'article qui fait suite à celui-ci (et auquel on se référera en le désignant par II). On arrive ainsi à réduire le problème posé à un problème de classification de représentations unitaires de groupes dans des espaces de HILBERT quaternioniens; dans cette réduction, les seules difficultés qui apparaissent sont d'ordre topologique: elles concernent en effet la continuité. Les faits généraux se rapportant à ces représentations sont exposés dans la quatrième section; le corollaire du lemme de SCHUR prend dans le cas quaternionien une forme apparemment très différente de celle à laquelle on est habitué dans le cas complexe; à cette occasion, le rôle des opérateurs unitaires antihermitiens dans un espace de HILBERT quaternionien est mis en évidence, et on indique l'usage qu'on peut espérer en faire, pour jeter un pont entre les réalisations quaternionienne et complexe de la mécanique quantique. Cette question sera examinée en détail dans II. Comme première application, on donnera ici une généralisation au cas quaternionien du célèbre théorème de STONE-NEUMARK-AMBROSE-GODEMENT.

## 1. Structure de la physique quantique

Chaque physicien sait intuitivement ce qu'il entend par «système physique élémentaire»; cependant, il a paru nécessaire de préciser cette notion en se dégageant en particulier d'une formulation restreinte à la mécanique quantique complexe. Pour cela, il a d'abord fallu exprimer les postulats essentiels d'une mécanique quantique et ceci dans un langage aussi proche que possible de la réalité expérimentale. Le but de cette section est donc de définir, dans ce langage naturel, qui se trouve être celui de la théorie des treillis, toutes les notions physiques dont on aura besoin ensuite. Une telle démarche préliminaire est indispensable si on veut pouvoir dépasser la réalisation complexe sans risquer d'utiliser une traduction liée à certains aspects particuliers de la réalisation complexe qui pourraient ne pas se retrouver dans la réalisation quaternionienne.

Le point de départ de cette section est constitué par deux articles<sup>6)</sup><sup>7)</sup> auxquels le lecteur pourra se référer pour plus de détails.

On constate qu'il existe en physique des expériences particulièrement simples auxquelles on peut attribuer un rôle fondamental puisque la mesure de n'importe quelle quantité physique peut être réduite à une suite de telles expériences: ce sont les *questions*, expériences dont le résultat s'exprime par «oui» ou «non» et qu'on peut donc

formuler sous forme d'alternatives; chacun des termes complémentaires d'une alternative sera appelé *proposition*, et on dira qu'une proposition est *vraie* si ce qu'elle affirme est une prédiction vérifiée à coup sûr lorsqu'on effectue l'expérience correspondante. Si deux propositions,  $a$  et  $b$ , sont telles que « $a$  vraie» implique « $b$  vraie», on notera cette circonstance par  $a \subseteq b$ ; cette relation satisfait à toutes les propriétés d'une relation d'ordre partiel sur l'ensemble  $L$  de toutes les propositions qu'on peut formuler sur le système physique considéré.

D'après ce qu'on sait de la physique, les quatre propriétés suivantes semblent devoir être satisfaites par cet ensemble  $L$ , muni de la structure d'ordre qu'on vient d'indiquer; on prendra donc ces propriétés comme axiomes pour définir une structure mathématique qu'on désignera par le terme de *système de propositions*:

*Axiome 1:*  $L$  est un treillis complet

*Axiome 2:*  $L$  est orthocomplémenté

*Axiome 3:*  $L$  est atomique

*Axiome 4:* Tout segment  $[a, b]$  de  $L$  hérite canoniquement des axiomes 1, 2 et 3.

Ces axiomes expriment qu'avec toutes propositions  $a$  et  $b$ ,  $L$  contient aussi les propositions « $a$  ou  $b$ » (notée  $a \cup b$ ), « $a$  et  $b$ » (notée  $a \cap b$ ), «non  $a$ » (négation forte de  $a$ ) et «non  $b$ »; que de plus, il existe des propositions minima, appelées *points* et notées ici  $F, G, \dots$ , c'est-à-dire des propositions telles qu'on ne peut, sans contradiction rien affirmer de plus sur le système; qu'enfin, sur tout sous-système on peut introduire canoniquement une structure de système de propositions.

On montre, également dans les références indiquées plus haut, comment apparaissent dans cette axiomatisation les notions, d'ailleurs liées entre elles, de *compatibilité*, de *système cohérent* et de *règles de supersélection*.

Dans l'esprit du travail faisant l'objet du présent rapport, ce formalisme présente en particulier l'avantage de conduire aux concepts de symétrie et de théories isomorphes, d'une manière qui satisfasse immédiatement l'intuition du physicien.

Soient  $L_1, L_2$ , deux systèmes de propositions; on appelle *morphisme* de  $L_1$  sur  $L_2$  une application *bijective*  $m$  de  $L_1$  sur  $L_2$  telle qu'on ait:

- (i) si dans  $L_1$  « $a$  vraie» entraîne « $b$  vraie», alors (dans  $L_2$ ) « $m(a)$  vraie» entraîne « $m(b)$  vraie» (ce qu'on note:  $a \subseteq b$  entraîne  $m a \subseteq m b$ ) et réciproquement.
- (ii) l'image par  $m$  de «non  $a$ » est égale à la négation de l'image par  $m$  de  $a$  (ce qu'on note:  $m O_1 a = O_2 m a$ , où  $O_1$  et  $O_2$  désignent respectivement les opérations d'orthocomplémentation dans  $L_1$  et  $L_2$ ).

Ces deux conditions, indépendantes, suffisent<sup>7)</sup> pour affirmer que tout morphisme  $m$  préserve toutes les relations logiques entre propositions; d'une manière plus précise, on a en particulier:

- (i) l'image par  $m$  de « $a$  ou  $b$ » est identique à la proposition «image de  $a$  ou image de  $b$ » (ce qu'on note:  $m(a \cup b) = m a \cup m b$  et qui peut être généralisée à un ensemble quelconque de propositions de  $L_1$ ); il en est de même pour « $a$  et  $b$ ».
- (ii) si  $a$  et  $b$  sont des propositions compatibles de  $L_1$ , il en est de même pour les propositions  $m(a)$  et  $m(b)$  de  $L_2$ , et réciproquement.
- (iii) si  $F$  est un point de  $L_1$ ,  $m(F)$  est un point de  $L_2$  et réciproquement.
- (iv) un morphisme est complètement déterminé par sa restriction aux points.
- (v) l'image par  $m$  d'un sous-système cohérent est un sous-système cohérent.

Une *symétrie* d'un système de propositions  $L$  peut alors être définie comme un morphisme de  $L$  sur lui-même. Nous avons vérifié<sup>7)</sup> que cette définition recouvre ce qu'on désigne habituellement par ce terme, voir par exemple WIGNER<sup>8)</sup> (Appendix to Chapter 20); en particulier, dans la réalisation d'un système de proposition par l'ensemble des projecteurs sur un espace de HILBERT construit sur le corps des nombres complexes, nous avons retrouvé le théorème de WIGNER affirmant que toute symétrie peut toujours être représentée par une transformation unitaire ou antiunitaire de l'espace de HILBERT considéré. Une extension de ce théorème sera utilisée par la suite.

On peut enfin introduire<sup>7)9)</sup> les notions d'état physique, d'état pur, de transformation des états sous l'effet d'une symétrie.

Un *état* sur un système de propositions  $L$  est défini comme une fonction ayant  $L$  pour source, l'intervalle réel fermé  $[0,1]$  pour but, et telle que:

- (i) les bornes 0 et 1 sont toujours atteintes pour tout état  $E$  en particulier par ses valeurs sur les propositions absurde et triviale respectivement.
- (ii)  $a$  et  $b$  étant compatibles, on a nécessairement:  $E(a) + E(b) = E(a \cup b) + E(a \cap b)$ .
- (iii) si  $E(a) = E(b) = 1$ , on a aussi  $E(a \cap b) = 1$
- (iv) si  $a$  n'est pas la proposition absurde, il existe au moins un état  $E$  tel que  $E(a)$  soit différent de zéro.

On remarque que l'état est ainsi une généralisation de la notion de probabilité.

On dira qu'un état  $E$  est *pur* s'il existe dans  $L$  un point  $F$  tel que  $E(F) = 1$ ; si  $G$  est un autre point de  $L$ ,  $E(G)$  sera dite *probabilité de transition* de  $F$  à  $G$ . Un état qui n'est pas pur sera appelé *mélange*.

Après avoir décidé de ce qu'on voulait entendre par symétrie sur un système de propositions  $L$ , on peut fixer l'action de chaque symétrie sur l'ensemble des états sur  $L$ :  $m$  étant une symétrie de  $L$ , on appellera «transformée par  $m$  de l'état  $E$ » la fonction  $E^m$  définie par  $E^m(a) = E(m^{-1}a)$ ; cette fonction satisfait à tous les axiomes sur les états de  $L$ , et on vérifie que  $E$  et  $E^m$  ne peuvent être des états purs que simultanément.

**Théorème 1.1:** *L'ensemble  $M$  des symétries sur un système quelconque de propositions  $L$  peut être muni d'une structure de groupe topologique.*

En effet,  $M$  possède manifestement une structure de groupe abstrait pour la loi de composition  $(m_1 m_2)a = m_1(m_2a)$ ; l'identité dans  $M$  est évidemment la symétrie  $e$  qui applique toute proposition  $a$  de  $L$  sur elle-même.

Pour tout  $\varepsilon$  positif et pour tout état  $E$  sur  $L$ , on définit un voisinage  $N(e)$  de l'identité dans  $M$  comme l'ensemble de tous les éléments  $m$  de  $M$  tels que  $|E^m(a) - E(a)| < \varepsilon$  pour tout  $a$  de  $L$ .

Ainsi, en ayant recours à la notion d'état, on a déterminé un système de voisinage  $D$  de l'identité dans  $M$ ; on vérifie que  $M$  et  $D$  satisfont aux conditions du théorème 10 de PONTRJAGIN<sup>10)</sup>, de sorte que  $M$  est maintenant muni d'une structure de groupe topologique. Ceci achève la démonstration du théorème.

C'est muni de cette structure, qu'on désignera  $M$  sous le nom de *groupe des symétries* de  $L$ . En termes physiques intuitifs, la condition par laquelle on a défini les voisinages dans  $M$  signifie que deux symétries sont voisines si les transformations qu'elles induisent sur les états du système sont voisines.

**Théorème 1.2:** Si  $L$  est union directe discrète de plusieurs sous-systèmes de propositions cohérents  $L_i$ , alors toute symétrie  $m$ , connexe à l'identité, applique chacun des  $L_i$  sur lui-même.

On sait déjà (cf. conséquence (v) de la définition d'une symétrie) que  $m$  étant une symétrie, l'image par  $m$  d'un sous-système cohérent  $L_i$  est un sous-système cohérent  $L_j$ ; on veut démontrer que  $i = j$ . Chaque  $L_i$  étant lui-même un système de propositions, il possède un élément maximum  $u_i$ ; alors  $m(u_i) = u_j$ . Choisissons un quelconque des  $L_i$  et désignons-le par  $L_1$ . Par définition de l'union directe de sous-systèmes cohérents, les  $u_i$  sont tous compatibles entre eux; par conséquent, pour tout état  $E$  sur  $L$ , on a:

$$E(u_1) + E(u_i) = E(u_1 \cup u_i) + E(u_1 \cap u_i).$$

Considérons alors un état particulier  $E_1$  tel que  $E_1(u_1) = 1$ . Il résulte de l'égalité ci-dessus que  $E_1(u_i) = 0$  pour  $i$  différent de 1. Pour  $\epsilon$  positif suffisamment petit, considérons alors le voisinage  $N_1(\epsilon)$ , défini comme l'ensemble des éléments  $m$  de  $M$  tels que  $|E_1^m(a) - E_1(a)| < \epsilon$  pour tout  $a$  de  $L$ . Appliquons cette inégalité à  $u_1$ ; alors:  $|E_1(m^{-1}u_1) - E_1(u_1)| < \epsilon$ . Or  $m^{-1}$  est une symétrie, donc  $m^{-1}u_1$  est égal à l'un des  $u_i$ ; mais on a vu que  $E_1(u_i) = 0$  à moins que  $i$  soit égal à 1. L'inégalité ci-dessus entraîne donc  $m^{-1}u_1 = u_1$ , c'est-à-dire  $m u_1 = u_1$  et par conséquent  $m L_1 = L_1$ .

Ainsi toute symétrie appartenant à  $N_1(\epsilon)$  applique  $L_1$  sur lui-même; en faisant usage du théorème 15 de PONTRJAGIN<sup>10)</sup>, on voit qu'il en est de même pour toute symétrie connexe à l'identité. L'indice 1 ayant été choisi arbitrairement, cette démonstration s'applique à tout sous-système cohérent. Le théorème 1.2 est donc démontré.

Une notion importante dans le contexte où ce travail est placé reste encore à définir: celle de représentation projective d'un groupe  $G$ . On dira que le système de propositions  $L$  admet, pour groupe de symétrie, un groupe topologique  $G$ , s'il existe un homomorphisme (au sens topologique aussi!)  $U$  de  $G$  dans  $M$ , groupe des symétries de  $L$ . Cet homomorphisme sera appelé *représentation projective (continue)* de  $G$  dans  $M$  de  $L$ .

Le théorème 1.2 admet alors le corollaire suivant:

**Corollaire:** Si un système de propositions  $L$ , union directe discrète de sous-systèmes cohérents, admet pour groupe de symétrie un groupe topologique  $G$  connexe, alors pour tout  $x$  de  $G$ ,  $U_x$ , image de  $x$  par  $U$ , applique chaque sous-système cohérent de  $L$  sur lui-même.

Pour démontrer cela, il suffit de voir que  $U$  applique  $G$  dans la composante connexe de l'identité dans  $M$ ; or ceci se montre de manière analogue à la remarque E du paragraphe 12 de PONTRJAGIN<sup>10)</sup>.

Avec le concept de groupe de symétrie, s'introduisent alors naturellement quelques notions complémentaires dont on aura besoin dans la suite.

Se donner une représentation projective  $U$  de  $G$  dans  $M$  de  $L$ , c'est spécifier la manière dont  $G$  agit sur  $L$ ; et c'est en partie la donnée de  $U$  qui permettra d'interpréter physiquement les éléments de  $L$ , considéré a priori comme structure abstraite; dans la mécanique quantique habituelle, cette manière de faire est bien connue: c'est ce chemin qu'on suit effectivement (quoique dans une réalisation particulière)

lorsqu'on interprète comme l'énergie le générateur de l'opérateur d'évolution au cours du temps, comme composantes du moment cinétique les générateurs des rotations, etc. La donnée de  $L$  et de  $U$  semble donc bien mériter le nom de *description* d'un système physique par rapport au groupe de symétrie  $G$ .

On dira que  $(L^{(1)}, U^{(1)})$  et  $(L^{(2)}, U^{(2)})$  forment deux *descriptions équivalentes* par rapport à un groupe de symétrie  $G$  si :

- (i)  $U^{(1)}$  et  $U^{(2)}$  sont des homomorphismes de  $G$  respectivement dans  $M^{(1)}$  et  $M^{(2)}$ , groupes de symétrie respectifs de  $L^{(1)}$  et  $L^{(2)}$ .
- (ii) il existe un morphisme  $m$  de  $L^{(1)}$  sur  $L^{(2)}$  qui satisfait à la relation  $m U_x^{(1)} m^{-1} = U_x^{(2)}$  pour tout  $x$  de  $G$ .

Cela revient à dire qu'il existe une correspondance bijective entre les propositions de  $L^{(1)}$  et de  $L^{(2)}$  et que, sous l'action de  $G$ , ces propositions se transforment conformément à cette correspondance.

On dira enfin que  $(L, U)$  est une *description irréductible* (ou un système élémentaire) par rapport au groupe  $G$ , si  $U$  ne laisse invariante aucune des propositions de  $L$  hormis les propositions absurde et triviale, ce qu'on peut noter « $U_x a = a$  pour tout  $x$  de  $G$ , entraîne  $a = 0$  ou  $I$ » ( $0$  et  $I$  sont ces deux propositions particulières).

**Théorème 1.3:** *Le système de propositions  $L$  d'un système élémentaire  $(L, U)$  par rapport à un groupe de symétrie  $G$  connexe est nécessairement cohérent.*

En effet, supposons que  $L$  soit union directe discrète de sous-systèmes cohérents  $L_i$ ; le corollaire du théorème 1.2 affirme alors que pour tout  $x$  de  $G$ , on a :  $U_x L_i = L_i$ ; par conséquent,  $U_x$  laisse invariant l'élément maximum de chacun des  $L_i$ ; ceci est contraire à l'hypothèse d'irréductibilité de  $(L, U)$ , à moins que tous les  $L_i$ , sauf un, se réduisent à zéro, ce qui signifie précisément que  $L$  est cohérent. Ceci achève la démonstration du théorème 1.3, où l'hypothèse de connexité de  $G$  est essentielle.

Envisageons maintenant la situation suivante, dont la solution pourra être considérée comme une généralisation du théorème de CLIFFORD (voir par exemple BOERNER<sup>11</sup>)). Soient  $G$  un groupe,  $r$  un automorphisme involutif de  $G$  et  $(U, R)$  une représentation projective irréductible de  $(G, r)$  dans le groupe  $M$  des symétries d'un système de propositions  $L$ .  $(U, R)$  étant irréductible, ce n'est pas nécessairement le cas pour  $U$ ; supposons qu'il existe un élément  $a$  de  $L$  (différent de la proposition absurde!) tel que  $U_x a = a$  pour tout élément  $x$  de  $G$ ; désignons par  $a'$  l'élément de  $L$  défini par  $a' = R^{-1} a$ ; on a :

$$U_x a' = U_x R^{-1} a = R^{-1} R U_x R^{-1} a = R^{-1} U_{r[x]} a = R^{-1} a = a' ;$$

ainsi pour tout  $x$  de  $G$ ,  $U_x a' = a'$ ;  $U_x$  et  $R$  étant des symétries de  $L$  et  $R$  étant de plus involutive, on a, pour tout  $x$  de  $G$  :

$$\begin{aligned} U_x (a \cup a') &= a \cup a' , & U_x (a \cap a') &= a \cap a' , \\ R (a \cup a') &= a \cup a' , & R (a \cap a') &= a \cap a' \end{aligned}$$

or  $(U, R)$  est supposée irréductible; par conséquent,  $a \cup a'$  est la proposition triviale de  $L$  et  $a \cap a'$  est, soit la proposition absurde, soit la proposition triviale de  $L$ ; dans le premier cas,  $a'$  est le complément de  $a$  dans  $L$ ; dans le second cas,  $a$  et  $a'$  sont toutes deux égales à la proposition triviale de  $L$ .

Montrons encore que s'il existe une proposition  $a$  (qui ne soit ni la proposition absurde ni la proposition triviale) telle que  $U_x a = a$  pour tout  $x$  de  $G$ , alors toute proposition qui satisfait aux mêmes conditions est identique à  $a$  ou à  $R a$ ; soit  $b$  une telle proposition; désignons par  $c$  la proposition  $a \cap b$  et supposons d'abord que  $c$  est différente de la proposition absurde;  $U_x$  étant une symétrie, il résulte des propriétés de  $a$  et  $b$  que  $U_x c = c$  pour tout  $x$  de  $G$ ; en appliquant alors à  $c$  la démonstration faite plus haut pour  $a$ , on obtient que  $c \cup R c = I$  et  $c \cap R c = 0$ ; or  $c$  est contenue dans  $a$  et est donc compatible avec elle; on vérifie aisément, en écrivant la relation de compatibilité de  $a$  et  $c$  et en utilisant ce qui a été démontré ci-dessus, que  $c$  ne peut alors être autre que  $a$ ; par conséquent,  $a$  est contenue dans  $b$ ; en refaisant ce raisonnement avec  $b$  au lieu de  $a$ , on trouve que  $b$  est contenue dans  $a$ ;  $a$  et  $b$  sont donc identiques. Si maintenant, contrairement à l'hypothèse auxiliaire introduite ci-dessus,  $a \cap b$  est la proposition absurde, il ne peut en être de même de  $a' \cap b$ , et la démonstration qui précède peut être refaite en remplaçant  $a$  par  $a'$ . On a donc effectivement démontré que  $b$  est nécessairement, ou bien égale à  $a$ , ou bien à  $a'$ . Cette circonstance a pour conséquence immédiate le théorème suivant.

**Théorème 1.4:** *Soit  $G$  un groupe, et soit  $r$  un automorphisme involutif de  $G$ . Si  $(U, R)$  est une représentation projective irréductible de  $(G, r)$  dans le groupe des symétries d'un système de propositions  $L$ , alors  $(L, U)$  contient au plus deux systèmes élémentaires par rapport à  $G$ .*

La classification de toutes les descriptions élémentaires par rapport à  $(G, r)$  peut donc être faite en effectuant le programme ci-dessous:

- (i) chercher toutes les descriptions élémentaires  $(L_G, V)$  par rapport à  $G$ .
- (ii) pour chacune de celles-ci, déterminer si le groupe  $M$  des symétries de  $L_G$  contient un élément  $R$  tel que  $R V_x R^{-1} = V_{r[x]}$  pour tout  $x$  de  $G$ .
- (iii) si c'est le cas,  $(L_G; V, R)$  est une description irréductible par rapport à  $(G, r)$ .
- (iv) si au contraire il n'existe pas dans  $M_G$  une symétrie  $R$  qui satisfasse à la condition (ii), former le système de propositions  $L = L_G \cup L'_G$  où  $L'_G$  est isomorphe à  $L_G$ ; dans  $L$ , former  $U_x = (V_x, V'_{r[x]})$  pour tout  $x$  de  $G$ ;  $L_G$  et  $L'_G$  étant isomorphes, il existe un morphisme  $A$  de  $L_G$  sur  $L'_G$ ;  $r$  peut alors être représenté par  $R = (A, A^{-1})$  qui interchange  $L_G$  et  $L'_G$ ;  $(L; U, R)$  forme alors une description irréductible par rapport à  $(G, r)$ .

On peut évidemment imposer des conditions supplémentaires à  $R$ ; il faudra évidemment modifier le programme en conséquence. A titre d'illustration, remarquons que si on étudie les réalisations complexes de  $L$ , et qu'on impose à  $u_x$  et à  $\varrho$ , représentatifs respectifs (voir section 3) de  $U_x$  et  $R$ , d'être unitaires, à  $u$  d'être une représentation ordinaire de  $G$ , alors le programme ci-dessus est exactement celui que fournit le théorème de CLIFFORD; en revanche, toujours dans cette réalisation, si l'on impose à  $\varrho$  d'être anti-unitaire, une légère modification de ce programme conduit à la théorie des coreprésentations de WIGNER (voir réf. 8, chap. 26).

## 2. Réalisation quaternionienne

En lisant la section précédente, le lecteur aura sans doute remarqué que les notions qui y sont exposées trouvent leur réalisation mathématique habituelle lorsqu'on

prend pour réalisation du système de propositions l'ensemble des sous-espaces fermés d'un espace de HILBERT complexe. Dans ce qui suit, on propose une autre réalisation, à savoir de remplacer les espaces de HILBERT complexes habituels par des espaces hilbertiens construits sur le corps des quaternions; ce corps se distingue de celui des nombres complexes par plusieurs traits essentiels: il contient trois unités imaginaires au lieu d'une seule, il n'est pas commutatif, la conjugaison complexe n'est pas un automorphisme de ce corps, et enfin l'ensemble des automorphismes de ce corps est identique à l'ensemble des automorphismes intérieurs et est isomorphe au groupe connexe des rotations dans un espace euclidien à trois dimensions; on rappelle que le groupe des automorphismes du corps des nombres complexes est beaucoup moins riche: il est constitué par deux éléments seulement, l'identité et la conjugaison complexe. Ces circonstances se reflètent évidemment sur les propriétés des espaces hilbertiens construits sur ces corps, et sur les opérateurs qui agissent dans ces espaces.

Le but de cette section est de préciser cette remarque et de montrer explicitement quelle est la réalisation quaternionienne des êtres physiques dont il a été question dans la section précédente.

### a) *Le corps Q des quaternions*

Considérons le groupe  $S U(2, C)$  des matrices (à coefficients complexes) unitaires, unimodulaires et de rang 2; toute matrice appartenant à ce groupe est de la forme:  $\omega = (c_{nm})$  où  $c_{22} = c_{11}^*$ ,  $c_{21} = -c_{12}^*$ ,  $c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} = 1$ , et peut donc s'écrire:  $\omega = a + b e_1 + c e_2 + d e_3$ , les  $e_i$  étant les matrices  $-i \sigma_i$  où  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont les trois matrices de PAULI; les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont des nombres réels et satisfont à la relation  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ ; de plus on a:  $e_i^2 = -1$  et  $e_i e_j = -e_j e_i = e_k$  où  $i, j, k$  sont une permutation circulaire des indices 1, 2, 3. Considérons alors l'ensemble  $Q$  de toutes les formes linéaires à coefficients réels des symboles 1,  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ ; on peut alors munir  $Q$  d'une structure de corps topologique, où les opérations suivantes sont définies par la correspondance  $1 \rightarrow I$ ,  $e_i \rightarrow -i \sigma_i$ :

- (i) une addition et une multiplication
- (ii) une conjugaison (notée \*) définie par la conjugaison hermitienne des matrices correspondantes
- (iii) une norme, notée  $|q|$  et définie par:  $+ (q q^*)^{1/2}$ ; on vérifie que  $|q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ .

Considéré comme être abstrait,  $Q$ , muni des structures algébrique et topologique ci-dessus, est désigné par le nom de *corps des quaternions* (et l'on précise parfois: à coefficients réels). Le sous-ensemble  $\Omega$  de  $Q$ , constitué par les quaternions de norme 1, est alors un groupe topologique, isomorphe à  $S U(2, C)$ ; on note que  $\Omega$  est stable par rapport à la multiplication et à la conjugaison, et que pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , on a:  $\omega^* = \omega^{-1}$ . Le centre de  $\Omega$  est  $Z_2$ , groupe cyclique d'ordre 2. On peut montrer que tout automorphisme  $A$  de  $Q$  est intérieur et peut donc être écrit sous la forme:  $A[q] = \omega q \omega^*$ , où  $q$  parcourt  $Q$  et  $\omega$  est un élément de  $\Omega$ , défini par  $A$  à un élément  $z$  de  $Z_2$  près. Enfin, si  $\{A_t\}$  est une famille continue d'automorphismes de  $Q$  (ou de  $\Omega$ ), on peut choisir une famille continue  $\{\omega_t\}$  d'éléments de  $\Omega$  de telle sorte qu'on ait:  $A_t[q] = \omega_t q \omega_t^*$ ; ainsi le groupe des automorphismes de  $Q$  (ou de  $\Omega$ ) est isomorphe au groupe  $O_3^+ = S U(2, C)/Z_2$ .

b) *L'espace de HILBERT quaternionien*

L'espace de HILBERT quaternionien est une généralisation au corps des quaternions de la notion d'espace de HILBERT abstrait définie pour les corps réel et complexe (Cf par exemple RIESZ et NAGY<sup>12)</sup>). Ainsi,  $\mathfrak{H}_Q$  est un espace vectoriel (de dimension finie ou dénombrablement infinie) à gauche sur le corps  $Q$  des quaternions. (On aurait tout aussi bien pu prendre un espace vectoriel à droite; toutefois, lorsqu'on travaille avec des opérateurs semi-linéaires, la notation d'espace vectoriel à gauche se révèle plus pratique; la convention opposée a été choisie par les membres du «Quaternion-Club»<sup>2)3</sup>.)  $\mathfrak{H}_Q$  est muni d'une norme (notée  $\| \dots \|$ ) dérivant d'un produit scalaire qui, à tout couple de vecteurs  $f$  et  $g$ , associe un élément  $(f, g)$  de  $Q$  de telle sorte que:

- (i)  $(q f, g) = q(f, g)$ ,
- (ii)  $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$ ,
- (iii)  $(f, g)^* = (g, f)$ ,
- (iv)  $\| f \|^2 = (f, f) > 0$  pour tout  $f \neq 0$  et  
 $\| f \|^2 = 0$  pour  $f = 0$ .

La complétude, les convergences faible et forte y sont définies comme dans le cas habituel<sup>12)</sup>. Les axiomes énoncés ci-dessus ont pour conséquences:

$$(q f, p g) = q(f, g) p^*, \quad |(f, g)| \leq \|f\| \|g\|, \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Les inégalités de SCHWARTZ et de MINKOWSKI se démontrent d'ailleurs de la même manière que dans le cas complexe.

La notion de transformation linéaire admet une généralisation: on appelle *transformation co-linéaire* une application  $t$  de  $\mathfrak{H}_Q$  (ou au moins d'une partie de  $\mathfrak{H}_Q$ ) dans lui-même satisfaisant aux conditions suivantes partout où elle est définie:

- (i)  $t(f + g) = tf + tg$ ,
- (ii)  $t(qf) = A^t[q] tf$  pour tout  $q$  de  $Q$ ,  $A^t$  étant un automorphisme de  $Q$ , attaché à la transformation  $t$ .

Une transformation co-linéaire  $u$  est dite *co-unitaire*, si elle est définie sur  $\mathfrak{H}_Q$  entier et satisfait à la condition supplémentaire:

$$(iii) (uf, ug) = A^u[(f, g)].$$

Une transformation co-linéaire  $t$ , pour laquelle l'automorphisme  $A^t$  est l'identité, est dite *linéaire*; si de plus elle satisfait à la condition (iii), elle est dite *unitaire*.

On appelle *rayon* attaché à un vecteur  $f$  de norme 1, la famille  $F$  des vecteurs obtenus à partir de  $f$  par la multiplication par des quaternions de norme 1:

$$F = \{\omega f \mid \omega \in \Omega\}.$$

On remarque que tous les vecteurs de  $F$  sont aussi de norme 1 et que  $F$  peut être obtenue à partir de chacun de ses membres en utilisant la définition ci-dessus.

Si  $t$  est une transformation co-linéaire, on désignera par  $T$  la famille de toutes les transformations co-linéaires qui ne diffèrent de  $t$  que par un multiple scalaire de norme 1:

$$T = \{\omega t \mid \omega \in \Omega\}.$$

Il existe toujours dans  $T$  deux (et seulement deux) transformations linéaires, qui d'ailleurs ne diffèrent entre elles que par  $(-1)$ . On dénotera par  $\text{II}$  la famille des transformations co-linéaires qui ne diffèrent de l'identité que par un quaternion de norme 1. Enfin si  $u$  est co-unitaire, il en est encore ainsi de tous les membres de la famille  $U$  à laquelle il appartient. Il est essentiel de remarquer que les  $U$  peuvent être considérés comme des opérateurs agissant dans l'espace des rayons.

Un *produit scalaire* peut être défini sur l'ensemble des rayons d'un espace de HILBERT quaternionien par  $F \cdot G = |(f, g)|$ , où  $f$  et  $g$  sont des vecteurs quelconques appartenant respectivement à  $F$  et à  $G$ ; la valeur de ce produit scalaire ne dépend effectivement pas d'un choix particulier de  $f$  et  $g$ . On appelle *distance* de deux rayons la distance minimum entre les vecteurs d'un rayon et ceux de l'autre:  $d(F, G)$  est ainsi le minimum de l'expression  $\|f - g\|$  lorsque  $f$  et  $g$  parcourrent respectivement  $F$  et  $G$ .

Fondés sur les propriétés qui précèdent, et en particulier sur les inégalités de SCHWARTZ et de MINKOWSKI, les quatre lemmes qui suivent sont d'une démonstration fastidieuse; ces lemmes étant aussi valables dans le cas complexe, leurs démonstrations ne diffèrent effectivement que par des détails de celles qu'a données BARGMANN<sup>13)</sup>, aussi ne seront-elles pas reproduites ici:

**Lemme 2.1:**  $d(F, G) = [2(1 - F \cdot G)]^{1/2}$ .

**Lemme 2.2:**  $d(F, G) = 0$  entraîne  $F = G$ .

**Lemme 2.3:** Le produit scalaire des rayons est continu en chacun de ses facteurs, dans la métrique induite par la distance des rayons.

Si  $t_0$  est une transformation linéaire de l'espace de HILBERT quaternionien, son *adjointe* est définie, comme dans le cas complexe, par:

$$(t_0 f, g) = (f, t_0^* g);$$

pour étendre la définition de l'adjointe au cas des transformations co-linéaires, on utilisera le fait que  $t$  peut s'écrire sous la forme  $\omega t_0$  où  $\omega$  est un quaternion de norme 1; on obtient ainsi:

$$(t f, g) = A^t [(f, t^* g)],$$

où  $A^t$  est l'automorphisme associé à  $t$ ; si  $t_1$  et  $t_2$  sont deux transformations co-linéaires, on a encore:  $(t_1 t_2)^* = t_2^* t_1^*$ ; de la définition de l'adjointe, on déduit immédiatement que toute transformation co-unitaire satisfait aux relations  $u u^* = u^* u = 1$ .

Comme dans un espace de HILBERT complexe, un *projecteur* est une transformation linéaire, hermitienne et égale à son carré. La transformée par un projecteur  $a$  d'un rayon  $F$  sera par définition la famille  $a F$  de vecteurs  $a f$  où  $f$  parcourt  $F$ ; ces vecteurs ne diffèrent donc entre eux que par un quaternion de norme 1 (en général  $a F$  n'est pas un rayon).

Soit  $u$  une transformation co-unitaire; considérons l'opération qui à tout projecteur  $a$  fait correspondre l'opérateur  $u a u^*$ ; cet opérateur ne dépendant pas du choix de  $u$  dans la famille  $U$  d'opérateurs co-unitaires à laquelle  $u$  appartient, on le notera  $U a$ . On remarque que  $U a$  est aussi un projecteur et que  $U(I - a) = I - U a$ ; que, de plus, si  $a$  et  $b$  sont deux projecteurs qui satisfont à la relation  $a b = b a = a$ , alors  $(U a)(U b) = (U b)(U a) = U a$ . Cette remarque jouera un rôle important pour la réalisation quater-

nionienne de la mécanique quantique; on verra dans le paragraphe suivant que sa réciproque est aussi vraie et constitue la transposition au cas quaternionien du célèbre théorème de WIGNER sur la représentation des symétries d'un système physique.

### c) Mécanique quantique quaternionienne

L'ensemble  $L$  des projecteurs dans un espace de HILBERT quaternionien peut être muni d'une structure de système cohérent de propositions, et en forme ainsi une réalisation. Les projecteurs étant en correspondance bijective avec les sous-espaces fermés sur lesquels ils projettent respectivement l'espace tout entier, la relation d'inclusion des ensembles, définie sur les sous-espaces fermés, induit naturellement sur  $L$  une relation d'ordre partiel; l'orthocomplément d'un projecteur quelconque sera par définition le projecteur  $(I - a)$  où  $I$  est l'application identique dans l'espace de HILBERT considéré; l'intersection est définie par  $a \cap b = \lim_{n \rightarrow \infty} (ab)^n$  et l'union par  $a \cup b = [I - (I - a) \cap (I - b)]$ . On vérifie que si deux projecteurs commutent, ils sont compatibles et réciproquement.

A tout rayon  $F$  de l'espace de HILBERT, on peut associer la fonction  $E_F$  définie par:

$$E_F(a) = F \cdot a \cdot F,$$

cette expression étant définie, par analogie au produit scalaire des rayons, comme  $(f, af)$  où  $f$  est un vecteur quelconque du rayon  $F$ . On vérifie immédiatement que  $E_F$  satisfait à tous les axiomes définissant un état sur  $L$ , et même que  $E_F$  est un état pur. Un état général quelconque sur  $L$  est alors réalisé par une combinaison linéaire convexe d'états purs:

$$E(a) = \sum_i x_i E_{F_i}(a) \text{ avec } x_i > 0 \text{ et } \sum_i x_i = 1.$$

La démonstration de cette affirmation devient très facile si l'on connaît le théorème de GLEASON<sup>14)</sup> sur la matrice de densité; toutefois, ce théorème n'est pas indispensable et la démonstration peut être donnée même dans le langage abstrait des systèmes de propositions<sup>15)</sup>.

Toutes ces notions peuvent être étendues au cas général d'une réalisation quaternionienne d'un système de propositions quelconques, en considérant non pas un, mais une famille d'espaces de HILBERT quaternioniens. On remarquera enfin que dans la réalisation habituelle de la mécanique quantique on fait tous les pas qui précédent, mais en partant d'un espace de HILBERT complexe.

Le concept de symétrie ayant été introduit plus haut à partir de sa formulation physique intuitive, il s'agit maintenant d'en trouver l'expression dans la réalisation de la mécanique quantique étudiée ici; la réponse à cette question peut être obtenue à partir du premier théorème fondamental de la géométrie projective et s'énonce ainsi: si l'espace de HILBERT quaternionien est de dimension au moins égale à 3, toute symétrie  $m$ , définie sur le système de propositions  $L$  constitué par l'ensemble des projecteurs de l'espace de HILBERT considéré, peut être représentée par une transformation *unitaire*  $u$  de cet espace; toute transformation co-unitaire, qui ne diffère de  $u$  que par un quaternion de norme 1 en facteur, représente la même symétrie; ce théorème est l'équivalent quaternionien du théorème bien connu que WIGNER<sup>8)</sup> a

découvert dans le cas complexe; une démonstration générale qui englobe en particulier les réalisations complexe et quaternionienne, fondée sur le formalisme développé plus haut ayant été donnée récemment par l'auteur et C. PIRON<sup>7)</sup>, celle-ci ne sera plus reprise ici. On obtient ainsi, de manière unique, une famille  $U$  de transformations co-unitaires qui induisent la même symétrie;  $U$  peut d'ailleurs être considérée comme une opération dans l'espace des rayons et satisfait alors à la relation:

$$U F \cdot U F' = F \cdot F'$$

quels que soient les rayons  $F$  et  $F'$  de l'espace considéré. Les sous-espaces étant transformés par  $u$ , la transformée par la symétrie  $m$  d'un projecteur  $a$  quelconque est donnée par  $u a u^*$ ;  $a$  étant linéaire, cet opérateur n'est pas changé si l'on remplace  $u$  par  $\omega u$  où  $\omega$  est un quaternion de norme 1. On peut donc écrire  $m a = U a$ . En vertu de sa définition,  $E^m(a)$  devient  $E^m(a) = E(U^{-1} a)$ ; en particulier, si  $E$  est un état pur et  $F$  le rayon correspondant:

$$E_F^m(a) = F \cdot (U^{-1} a) F = E_{UF}(a).$$

On a donc établi une correspondance bijective entre les symétries  $m$  de  $L$  et les opérateurs  $U$  (familles d'opérateurs co-unitaires agissant sur l'espace de HILBERT et ne différant entre eux que par un quaternion de norme 1) qui agissent sur les rayons de l'espace de HILBERT quaternionien envisagé. On peut donc considérer l'ensemble de ces opérateurs, muni de la structure de groupe topologique induite par  $M$ , comme la réalisation quaternionienne de  $M$ .

Précédemment (section 1), on a utilisé le symbole  $U$  pour désigner l'homomorphisme du groupe topologique  $G$  (groupe de symétrie de  $L$ ) dans  $M$  (groupe des symétries de  $L$ ).

Par l'abus de langage suivant, on confondra dorénavant les notions définies sur  $(L, M)$ , considérée comme structure abstraite, et celles qui sont définies sur sa réalisation:  $U_x$ , qui désignera la symétrie de  $L$  correspondant à l'élément  $x$  de  $G$ , sera un opérateur sur les rayons de l'espace de HILBERT; l'effet de cette symétrie s'écrira:

- pour les projecteurs:  $a \rightarrow U_x a$ ,
- pour les états:  $E(a) \rightarrow E^x(a) = E(U_x^{-1} a)$ .

En utilisant les lemmes énoncés plus haut, (section 2b), on vérifie que la condition pour que  $U$  soit un homomorphisme de  $G$  dans le groupe des symétries de  $L$  peut s'écrire de plusieurs manières:

- (i) pour tout  $\varepsilon$  positif, tout état  $E$  sur  $L$  et tout élément  $y$  de  $G$ , il existe dans  $G$  un voisinage  $N(y)$  de  $y$  tel que:

$$|E^x(a) - E^y(a)| < \varepsilon$$

quels que soient les projecteurs  $a$  de  $L$  et les éléments  $x$  de  $N(y)$ .

- (ii) pour tout  $\varepsilon$  positif et tout état  $E$  sur  $L$ , il existe un voisinage  $N(e)$  de l'identité dans  $G$ , tel que:

$$|E^x(a) - E(a)| < \varepsilon$$

quels que soient  $a$  dans  $L$  et  $x$  dans  $N(e)$ .

- (iii) pour tout  $\epsilon$  positif et tout rayon  $F$ , il existe un voisinage  $N(e)$  de l'identité dans  $G$ , tel que:

$$|F \cdot F' - F \cdot U_x F'| < \epsilon$$

quels que soient le rayon  $F'$  et l'élément  $x$  de  $N(e)$ .

- (iv) pour tout  $\epsilon$  positif et tout rayon  $F$  il existe un voisinage  $N(e)$  de l'identité dans  $G$ , tel que:

$$d(F, U_x F) < \epsilon$$

quel que soit l'élément  $x$  de  $N(e)$ .

- (v) pour tout  $\epsilon$  positif et tout rayon  $F$  il existe un voisinage  $N(e)$  de l'identité dans  $G$ , tel que:

$$F \cdot U_x F > 1 - \epsilon$$

quel que soit  $x$  dans  $N(e)$ .

Si  $U$  satisfait à l'une quelconque de ces conditions, elle sera dite *représentation projective* du groupe topologique  $G$ , agissant sur les rayons de l'espace de HILBERT considéré.

On peut alors se poser la question suivante: «Etant donné une représentation projective d'un groupe topologique  $G$  dans un espace de HILBERT quaternionien, est-il possible d'extraire de chaque famille  $U_x$  un opérateur unitaire  $u_x$  de telle sorte que  $u_x$  soit une représentation fortement continue de  $G$  dans l'espace considéré?»

On remarquera que les notions dont il est question ici apparaissent de la même manière dans le cas complexe. Le problème posé ci-dessus porte alors le nom de «réduction de phase». La solution de ce problème dans le cas quaternionien fait l'objet de la section suivante; les résultats obtenus dans les réalisations complexe et quaternionienne seront comparés.

### 3. Réduction de Phase

#### a) Relèvements locaux

Cette notion a été introduite par BARGMANN<sup>13)</sup> sous le nom de «choix de représentatifs locaux». Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème 3.2 qui est l'analogue du théorème 1.1 de BARGMANN, dans le cas où l'espace de HILBERT est construit sur le corps  $Q$  des quaternions; au départ la méthode est essentiellement la même que celle qu'a développée BARGMANN; toutefois, le fait que  $Q$  n'est pas commutatif nécessite quelques précautions, aussi la démonstration sera-t-elle transcrise dans sa totalité ci-dessous.

Par les hypothèses beaucoup faibles qu'il requiert, le théorème 3.2 diffère profondément de son analogue complexe; dans la démonstration qui en est donnée ici, on voit apparaître un raccourci inattendu, propre au cas quaternionien et impraticable dans le cas complexe. La raison de cette situation doit être cherchée dans une différence de structure essentielle des corps complexe et quaternionien. Celle-ci est mise en évidence lorsqu'on reprend la démonstration de BARGMANN en la généralisant un peu de manière à pouvoir traiter parallèlement les deux réalisations en question ici; à cette occasion, l'auteur s'est permis de présenter le remarquable travail de BARGMANN en insistant plus spécialement sur les propriétés fonctorielles des processus d'extension.

Soient  $U$  une représentation projective d'un groupe topologique  $G$  dans un espace de HILBERT quaternionien  $\mathfrak{H}$ ,  $N_0(e)$  un voisinage de l'identité dans  $G$ , et  $u_x$  le choix d'un membre de chaque famille  $U_x$  pour tout  $x$  dans  $N_0(e)$ . Si pour tout  $\varepsilon$  positif, tout vecteur  $f$  de  $\mathfrak{H}$  et tout  $x$  de  $N_0(e)$ , il existe un voisinage  $N(x)$  de  $x$ , contenu dans  $N_0(e)$  et tel que:

$$\|u_x f - u_y f\| < \varepsilon$$

quel que soit  $y$  dans  $N(x)$  (c'est-à-dire si  $u_x$  est fortement continue dans  $N_0(e)$ ), alors  $u_x$  est dit *relèvement local* de  $G$ . Notre premier but sera de montrer qu'il existe toujours un voisinage de l'identité dans  $G$  dans lequel on peut construire un relèvement local.

Soit  $F$  un rayon quelconque de  $\mathfrak{H}$ . En vertu de la continuité de  $U$ , il existe un voisinage  $N(e)$  de l'identité  $e$  dans  $G$ , tel que

$$F \cdot U_x F > 1 - \varepsilon$$

quel que soit  $x$  dans  $N(e)$ ; la fonction réelle  $R(x) = F \cdot U_x F$  est donc continue au voisinage de  $e$  et on a  $R(e) = 1$ , car  $U_e = \text{II}$  par définition; soit alors  $c$  un nombre contenu dans l'intervalle ouvert  $(0, 1)$ ; il est alors possible de trouver un voisinage  $N_0(e)$  tel que  $R(x)$  reste strictement supérieur à  $c$ . Choisissons alors un vecteur  $f$  quelconque appartenant au rayon  $F$  et  $u'_x$  un membre arbitraire de la famille  $U_x$ ; formons  $r(x) = (f, u'_x f)$ ;  $R(x)$  est la norme de  $r(x)$ , de sorte que  $u_x = R(x)^{-1} r(x) u'_x$  appartient encore à la famille  $U_x$ ; on vérifie que  $u_x$  satisfait à la condition  $(f, u_x f) = R(x)$ , car le produit scalaire est pris, par définition, antilinéaire dans son second terme. Cette condition détermine de manière unique le choix d'un membre  $u_x$  de chaque famille  $U_x$  pour tout  $x$  dans  $N_0(e)$ ,  $f$  étant arbitraire, mais fixe. Montrons que ce choix constitue un relèvement local de  $G$ . Soit  $H$  un rayon quelconque de  $\mathfrak{H}$  et formons les expressions suivantes définies seulement lorsque  $x$  et  $y$  appartiennent à  $N_0(e)$  ( $h$  est un vecteur qui parcourt  $H$ , et  $u_x$  est le choix effectué ci-dessus):

$$D_{x,y}(h) = d(U_x H, U_y H), \quad s_{x,y}(h) = (u_x h, u_y h), \quad z_{x,y}(h) = u_y h - s_{x,y}(h)^* u_x h.$$

On vérifie immédiatement que le vecteur  $z_{x,y}(h)$  est orthogonal à  $u_x h$ , et en utilisant le lemme 2.1, on obtient:

$$\|z_{x,y}(h)\|^2 = 1 - |s_{x,y}(h)|^2 \leq D_{x,y}(h)^2.$$

Montrons tout d'abord que  $u_x$  est continu sur le vecteur  $f$  utilisé pour le définir; construisons pour cela:

$$(f, z_{x,y}(f)) = R(y) - R(x) s_{x,y}(f)$$

qu'on peut récrire sous la forme:

$$1 - s_{x,y}(f) = \frac{1}{R(x)} (R(x) - R(y)) + \frac{1}{R(x)} (f, z_{x,y}(f))$$

d'où l'on tire, en utilisant pour le second terme l'inégalité de SCHWARTZ:

$$|1 - s_{x,y}(f)| \leq \frac{1}{R(x)} \{|R(x) - R(y)| + \|z_{x,y}(f)\|\}.$$

En remplaçant  $s_{x,y}(f)$  par sa définition, on vérifie que le premier membre de cette inégalité majore

$$\frac{1}{2} \|u_x f - u_y f\|;$$

d'autre part, si on remplace  $R(x)$  par sa définition et si on fait usage de la propriété que  $\|z_{x,y}(f)\|$  est majoré par  $D_{x,y}(f)$ , il apparaît que le second membre de l'inégalité ci-dessus est majoré par  $2 D_{x,y}(f)/R(x)$ . Ainsi obtient-on:

$$\|u_x f - u_y f\| \leq \frac{4}{R(x)} D_{x,y}(f).$$

Or  $R(x)$  est limité inférieurement par  $c$  fixe et strictement positif; par conséquent:

$$\|u_x f - u_y f\| \leq 4 D_{x,y}(f)/c.$$

En vertu de la continuité de la représentation projective  $U$ , pour tout  $\varepsilon$  positif, il existe un voisinage  $N(x)$  de  $x$  dans  $G$  tel que  $D_{x,y}(f)$  est inférieur à  $\varepsilon$  quel que soit  $y$  dans  $N(x)$ . On obtient ainsi:

$$\|u_x f - u_y f\| \leq \varepsilon' \equiv 4 \varepsilon/c.$$

Ainsi est démontrée la continuité de  $u_x$  sur  $f$ . On remarque que  $u_x$  étant a priori colinéaire, on ne sait encore rien sur la continuité de l'automorphisme de  $Q$  associé à  $u_x$ , et par conséquent de la continuité de  $u_x$  sur un membre  $f'$  appartenant à la famille  $F$  de  $f$ ; ceci viendra ensuite. Considérons d'abord un vecteur  $h$  normé et orthogonal à  $f$ ; on montre par un procédé analogue à celui qui vient d'être utilisé pour montrer la continuité de  $u_x$  sur  $f$  (usage de  $z_{x,y}(h)$  et des identités et inégalités qui y sont attachées) que  $u_x$  est continu sur le vecteur  $h' = 2^{-1/2} (f + h)$ ;  $h$  étant une combinaison linéaire à coefficients réels de  $f$  et de  $h'$ , on déduit la continuité de  $u_x$  sur  $h$  de celle sur  $f$  et sur  $h'$ . Or  $h$ , étant orthogonal à  $f$ , l'est aussi à tout autre membre  $f'$  du rayon  $F$  auquel appartient  $f$ ; partant alors de la continuité de  $u_x$  sur  $h$ , on peut montrer par le même artifice que ci-dessus la continuité de  $u_x$  sur  $f'$ ; tout vecteur de  $\mathfrak{H}$  pouvant être obtenu comme combinaison linéaire finie, à coefficients réels, de tels vecteurs, on en déduit immédiatement que  $u_x$  est continu sur tout vecteur de  $\mathfrak{H}$ ; ceci achève la démonstration du

**Lemme 3.1:** Soit  $U$  une représentation projective d'un groupe topologique  $G$  dans un espace de HILBERT quaternionien; il existe alors toujours un voisinage  $N_0(e)$  de l'identité dans  $G$  pour lequel on peut construire un relèvement local de  $G$  (au sens défini au début de cette section).

En vertu des propriétés de groupe, ce lemme peut être transporté de  $e$  sur un élément  $x$  quelconque de  $G$ .

On se propose maintenant d'exploiter la continuité forte de  $u_x$  pour montrer que l'automorphisme  $A_x$  de  $Q$ , attaché à  $u_x$ , est continu en  $x$ ; considérons pour cela un vecteur normé  $f$  quelconque dans  $\mathfrak{H}$  et un quaternion  $\omega$  de norme 1; formons  $f' = \omega f$  et calculons  $(u_x - u_y) f'$ ; cette expression est égale à:

$$(A_x[\omega] - A_y[\omega]) u_x f + A_y[\omega] (u_x - u_y) f;$$

par conséquent:

$$(A_x[\omega] - A_y[\omega]) u_x f = (u_x - u_y) f' - A_y[\omega] (u_x - u_y) f.$$

En prenant la norme des deux membres, en faisant usage de l'inégalité de MINKOWSKI et en remarquant que  $\|u_x f\| = 1$  et  $|A_y[\omega]| = 1$  on obtient:

$$|A_x[\omega] - A_y[\omega]| \leq \|(u_x - u_y) f'\| + \|(u_x - u_y) f\|.$$

Cette inégalité permet de déduire du lemme précédent le

**Lemme 3.2:** *Si  $u$  est un relèvement local de  $G$  pour un voisinage  $N_0(e)$  de l'identité dans  $G$ , alors l'automorphisme  $A_x$ , attaché à chaque  $u_x$  de ce relèvement, est continu en  $x$  partout où il est défini.*

Soient  $u$  un relèvement local de  $G$  pour un voisinage  $N_0(e)$  et  $\phi$  une fonction continue, définie sur  $N_0(e)$  et prenant ses valeurs dans l'ensemble  $\mathcal{Q}$  des quaternions de norme 1; alors  $u' = \phi \cdot u$  est encore un relèvement local de  $G$  pour  $N_0(e)$ ; en effet, pour tout vecteur normé  $f$  de  $\mathfrak{H}$ , on a:

$$\| (u'_x - u'_y) f \| = \| \{ \phi(x) u_x - \phi(y) u_x + \phi(y) u_x - \phi(y) u_y \} f \|$$

qui est majoré par:

$$| \phi(x) - \phi(y) | + \| (u_x - u_y) f \| .$$

Or on sait que tout opérateur co-unitaire  $u$  peut s'écrire:  $u = \omega u^0$ , où  $u^0$  est un opérateur unitaire et  $\omega$  un quaternion de norme 1;  $\omega$  engendre l'automorphisme de  $\mathcal{Q}$  attaché à  $u$ , c'est-à-dire que, pour tout quaternion  $q$ ,

$$u(qf) = A[q] u f \text{ avec } A[q] = \omega q \omega^{-1} .$$

Appliquons cela au relèvement local  $u_x$  du lemme 3.1;  $A_x$  étant continu dans  $N_0(e)$  en vertu du lemme 3.2, il est toujours possible de choisir  $\omega(x)$ , parmi les deux possibilités  $\pm \omega(x)$  de telle sorte que  $\omega(x)$  soit une fonction continue de  $x$  dans  $N_0(e)$ ; il en est alors de même de  $\omega(x)^{-1}$ . En utilisant alors la remarque précédente et après avoir posé  $\phi(x) = \omega(x)^{-1}$ , on obtient que  $u_x^0$  est fortement continue; par conséquent, le lemme 3.1 peut être renforcé et énoncé sous la forme suivante:

**Théorème 3.1:** *Soit  $U$  une représentation projective d'un groupe topologique  $G$  dans un espace de HILBERT quaternionien; il est alors toujours possible de trouver un voisinage  $N_0(e)$  de l'identité dans  $G$  pour lequel on peut construire un relèvement local linéaire de  $G$ .*

Lorsque  $N(e)$  est un voisinage de l'identité dans  $G$ , on notera par  $N(e)^2$  l'ensemble des éléments de  $G$  obtenus comme produits de deux éléments de  $N(e)$ . Soient alors  $u$  un relèvement local de  $G$  pour un voisinage  $N_0(e)$ ,  $U$  la représentation projective correspondante, et  $N(e)$  un voisinage de l'identité dans  $G$  tel que  $N(e)^2$  soit contenu dans  $N_0(e)$ ; alors, pour tout couple  $(x, y)$  d'éléments de  $N(e)$ ,  $u_x, u_y$  et  $u_{xy}$  sont définis;  $U$  étant une représentation projective, on a:  $U_x U_y = U_{xy}$ ; par conséquent, il existe nécessairement un quaternion de norme 1, noté  $\omega(x, y)$  tel que:

$$u_x u_y = \omega(x, y) u_{xy} ;$$

cette fonction  $\omega$  est dite *facteur local* du relèvement local considéré.

On vérifie aisément que tout facteur local jouit des propriétés suivantes, si on pose  $u_e = I$ , ce qui est toujours possible:

- (i)  $\omega(x, e) = \omega(e, x) = 1$  pour tout  $x$  dans  $N_0(e)$
- (ii) si  $x, y$  et  $z$  sont tels qu'avec eux  $xy, yz$  et  $xyz$  appartiennent encore à  $N_0(e)$ , alors:  
 $\omega(x, y) \omega(xy, z) = A_x[\omega(y, z)] \omega(x, yz)$
- (iii)  $\omega(x, y)$  est une fonction continue de chacun de ses arguments.

Si de plus  $u$  est le relèvement local linéaire dont l'existence est assurée par le théorème 3.1,  $u_x$ ,  $u_y$  et  $u_{xy}$  ne peuvent être simultanément linéaires que si  $\omega(x, y)$  commute avec tout quaternion  $q$  de  $Q$ ; ceci signifie que  $\omega(x, y)$  doit être réel. Par construction,  $\omega(x, y)$  doit être de norme 1, de sorte que  $\omega(x, y)$  ne peut être que  $\pm 1$ . Les propriétés (i) à (iii) ci-dessus devant enfin être satisfaites, le cas  $-1$  est éliminé et il reste  $u_x u_y = u_{xy}$ , ce qu'on exprime par le

**Théorème 3.2:** *De toute représentation projective  $U$  d'un groupe topologique  $G$  quelconque dans un espace de HILBERT quaternionien, on peut toujours extraire, pour un certain voisinage de l'identité dans  $G$ , une représentation unitaire fortement continue.*

Ce théorème est spécifique de la réalisation quaternionienne de la mécanique quantique; il est faux dans sa réalisation complexe et BARGMANN<sup>18)</sup> en exhibe des contre-exemples importants parmi lesquels le physicien ne manquera pas de remarquer le groupe de GALILIÉE (groupe des transformations non-relativistes dans l'espace-temps). On peut chercher une raison plus profonde à cette circonstance inattendue. A cet effet, il convient d'essayer de traiter parallèlement les deux réalisations en question et de voir en quoi elles diffèrent si essentiellement; reprenons pour cela la méthode de BARGMANN à l'endroit où nous l'avons laissée. On a vu que de toute représentation projective on peut toujours extraire un relèvement local et que ce relèvement n'est pas unique; en fait, toute représentation projective détermine une classe d'équivalence de relèvements locaux: deux relèvements locaux sont dits équivalents si, dans le voisinage commun où ils sont définis, ils ne diffèrent que par une fonction continue définie sur ce voisinage et prenant ses valeurs dans  $\Omega$ . On a déjà noté que tout relèvement local détermine un facteur local; deux facteurs locaux  $\omega$  et  $\omega'$  sont dits équivalents s'ils proviennent de relèvements locaux  $u$  et  $u'$  équivalents, ce qui a pour conséquence que, partout où chacun de ses termes est défini, la relation suivante est valable:

$$\omega'(x, y) = \rho(x) A_x^u[\rho(y)] \omega(x, y) \rho(x y)^*,$$

$\rho(x)$  étant la fonction liant  $u'_x$  à  $u_x$ . Ainsi, toute représentation projective détermine une classe d'équivalence de facteurs locaux. BARGMANN considère alors le groupe  $H^u$  (qu'il appelle *groupe local* attaché au relèvement local  $u$ ) constitué par l'ensemble des couples  $(\omega, x)$  d'éléments appartenant respectivement à  $\Omega$  et à  $N_0(e)$ , muni:

- d'une structure d'espace topologique: c'est le produit direct des espaces topologiques  $\Omega$  et  $N_0(e)$ , voisinage de l'identité dans  $G$  pour lequel est défini le relèvement local considéré;
- d'une structure de groupe (local) donnée par la loi de composition:

$$(\omega_1, x_1) (\omega_2, x_2) = (\omega_1 A_{x_1}^u[\omega_2] \omega(x_1, x_2), x_1 x_2)$$

issue de l'égalité:

$$\omega_1 u_{x_1} \omega_2 u_{x_2} = \omega_1 A_{x_1}^u[\omega_2] \omega(x_1, x_2) u_{x_1 x_2}.$$

Possédant simultanément ces deux structures,  $H^u$  est un groupe de LIE local si  $\Omega$  et  $G$  sont des groupes de LIE;  $\Omega$  est respectivement  $S U(2, C)$  et  $S^1$  dans les réalisations quaternionienne et complexe; pour cette dernière une formule analogue à celle que nous venons de donner peut être trouvée dans l'article de BARGMANN déjà cité; BARGMANN travaille avec des exposants locaux à la place de nos facteurs locaux, mais cela

est une différence sans importance; on remarquera enfin que le théorème 3.2 obtenu ci-dessus ne faisait pas usage de l'hypothèse que  $G$  soit un groupe de LIE. Le fait, affirmé plus haut, que  $H^u$  soit un groupe de LIE local découle directement de la solution du cinquième problème de HILBERT, qu'on trouve exposée par exemple p. 184 du livre de MONTGOMERY et ZIPPIN<sup>16)</sup>.  $H^u$  devient ainsi une *extension locale* de  $G$  par  $\Omega$  et deux groupes locaux  $H^u$  et  $H^{u'}$  attachés à des relèvements locaux équivalents constituent des extensions locales équivalentes de  $G$  par  $\Omega$ . (Pour les notions d'extension et d'extensions équivalentes, définies pour tout espèce d'objets et en particulier pour les groupes et algèbres de LIE, voir le livre de CARTAN et EILENBERG<sup>17)</sup>.) Ainsi, chaque représentation projective détermine une classe d'équivalence d'extensions locales de  $G$  par  $\Omega$ . La recherche de toutes les classes d'équivalences des extensions de l'algèbre de LIE  $g$  de  $G$  par l'algèbre de LIE  $s$  de  $\Omega$  permet de résoudre le problème consistant à trouver toutes les classes d'équivalence d'extensions locales de  $G$  par  $\Omega$ ; ce passage se fait aisément au moyen des théorèmes généraux sur les groupes de LIE locaux et leur algèbre de LIE (voir par exemple les chapitres VI et IX de PONTRJAGIN<sup>18)</sup>). A ce point intervient le fait suivant, qu'on obtient comme conséquence directe du corollaire 1 page 72 de BOURBAKI<sup>18)</sup>: toute extension d'une algèbre de LIE par une algèbre de LIE *semi-simple* est triviale. En remontant la chaîne des relations fonctorielles décrite ci-dessus, il résulte de ceci qu'il n'y a qu'une seule classe d'équivalence de facteurs locaux de  $G$  si l'algèbre de LIE  $s$  de  $\Omega$  est semi-simple; cette classe ne peut évidemment qu'être celle des facteurs locaux équivalents au facteur local trivial  $\omega(x, y) = 1$ . C'est cette circonstance qui permet de mettre en évidence la différence essentielle entre les réalisations quaternionienne et complexe: l'algèbre de LIE du groupe  $SU(2, C)$  des quaternions de norme 1 est simple, donc a fortiori semi-simple, ce qui n'est pas le cas de l'algèbre de LIE du groupe  $S^1$  des nombres complexes de module 1 (ce groupe est abélien!). L'exposé ci-dessus correspond à la méthode de BARGMANN (bien que dans un langage peut-être un peu différent) et on montre aisément, à partir du formalisme exposé ici, certains résultats de BARGMANN; par exemple, en faisant usage du corollaire 3 que BOURBAKI<sup>18)</sup> donne au théorème de LÉVI-MALCEV (à savoir: si  $g$  est une algèbre de LIE semi-simple, alors toute extension de  $g$  est inessentielle), on déduit immédiatement qu'il n'existe qu'une seule classe de facteurs locaux pour tout groupe de LIE  $G$  admettant une algèbre de LIE semi-simple; cette classe ne peut être que celle des facteurs locaux équivalents au facteur local trivial. C'est le théorème 7.1 de BARGMANN.

### b) Relèvements globaux

La question qui se pose maintenant de manière naturelle est de savoir dans quelle mesure il est possible d'étendre au groupe tout entier les résultats obtenus jusqu'ici. C'est ce problème qui sera traité dans ce paragraphe. La réponse pour les groupes simplement connexes est fournie par le théorème 3.3; le lemme 3.3 permet de passer de ce théorème au théorème 3.4 qui donne la solution pour les groupes doublement connexes.

Soit  $U$  une représentation projective d'un groupe topologique  $G$ ; on appelle *relèvement global* de  $G$  un relèvement (au sens du paragraphe précédent) défini dans  $G$  entier; un relèvement global qui satisfait à la relation  $u_x u_y = u_{xy}$  pour tout  $x$  et  $y$  de  $G$

est dit *représentation fortement continue* de  $G$  dans l'espace de HILBERT considéré. Le but à atteindre maintenant est de savoir quand et comment on peut extraire d'une représentation projective donnée un relèvement global. Le premier pas vers la solution est le théorème suivant:

**Théorème 3.3:** *Soit  $G$  un groupe topologique simplement connexe; alors de toute représentation projective  $U$  de  $G$  dans un espace de HILBERT quaternionien  $\mathfrak{H}$ , on peut extraire un relèvement global linéaire  $u$  de  $G$ ; de plus,  $u$  est une représentation unitaire fortement continue de  $G$  dans  $\mathfrak{H}$ .*

Ce théorème s'obtient comme conséquence du théorème 3.2 ci-dessus et du théorème 15 de PONTRJAGIN<sup>10</sup>):  $G$  étant connexe, tout élément  $x$  de  $G$  peut s'écrire comme produit d'un nombre fini d'éléments appartenant à un voisinage  $N(e)$  arbitraire de l'identité dans  $G$ . Prenons alors pour  $N(e)$  le voisinage  $N_0(e)$  dans lequel est définie la représentation locale, unitaire et fortement continue du théorème 3.2; formons alors pour tout  $x$  de  $G$ :

$$u_x = \prod_{i=1}^n u_{x_i}$$

où tous les  $x_i$  appartiennent à  $N_0(e)$  (de sorte que chacun des  $u_{x_i}$  soit défini) et sont tels qu'ils constituent une décomposition de  $x$ :

$$x = \prod_{i=1}^n x_i.$$

Les  $u_{x_i}$  appartenant à une représentation unitaire locale de  $G$ , et  $G$  étant simplement connexe, les  $u_x$  sont définis de manière unique et forment ainsi une représentation unitaire, fortement continue de  $G$  entier. Ceci achève l'esquisse de la démonstration du théorème 3.3; la démonstration peut être transposée sans difficultés au cas quaternionien à partir de celle que BARGMANN a donnée pour le cas complexe (13) section 3b); la seule différence significative est que BARGMANN doit considérer comme un cas particulier le résultat du théorème 3.2 qui n'est pas vrai en général dans les complexes, ainsi qu'on l'a vu au cours du paragraphe précédent.

Considérons maintenant le cas où  $G$  est un groupe topologique connexe; s'il satisfait de plus à certaines conditions (voir PONTRJAGIN<sup>10</sup>), paragraphe 47A) qui sont très généralement vérifiées pour les groupes de la physique, et en particulier pour tout groupe de LIE connexe, il existe un groupe topologique  $G^*$ , *simplement connexe*, localement isomorphe à  $G$ , et tel que  $G$  soit isomorphe au groupe quotient de  $G^*$  par un de ses sous-groupes invariants et discrets, noté  $D$ . On désignera par  $h$  l'homomorphisme naturel de  $G^*$  sur  $G$  qui, à tout élément  $x^*$  de  $G^*$ , fait correspondre l'élément  $x$  de  $G$ , défini comme le complexe associé de  $D$  contenant  $x^*$ . Montrons alors le lemme suivant:

**Lemme 3.3:** *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une représentation projective  $U^*$  de  $G^*$  soit aussi une représentation projective de  $G$  est que  $U_d^* = II$  pour tout élément  $d$  de  $D$ , où  $II$  est la transformation identique dans l'espace des rayons.*

Soit  $U$  une représentation projective de  $G$ ; désignons par  $x$  un élément qui parcourt  $G$ ; pour tout élément  $x^*$  de  $G^*$ , définissons  $U_{x^*}^* = U_{h(x^*)}$ ;  $h$  étant un homomorphisme,

$U^*$  est une représentation projective de  $G^*$ ; de plus, comme  $h(d) = e$ , identité de  $G$ , on a pour tout  $d$  dans  $D$ :  $U_d^* = U_e = \text{II}$ . Réciproquement, soit  $U^*$  une représentation projective de  $G^*$  telle que  $U_d^* = \text{II}$  pour tout  $d$  de  $D$ ; pour tout  $x$  de  $G$ , désignons par  $h^{-1}(x)$  l'ensemble des éléments  $x^*$  de  $G^*$  tels que  $h(x^*) = x$ ; si  $x^*$  et  $y^*$  sont deux éléments de  $G^*$  appartenant au même complexe associé de  $D$ , c'est-à-dire s'il existe un élément  $d$  de  $D$  tel que  $y^* = d x^*$ , alors:

$$U_{x^*}^* = U_{y^*}^*,$$

car  $U_d^* = \text{II}$  par hypothèse; pour tout  $x$  dans  $G$  définissons alors:

$$U_x = U_{h^{-1}(x)}^*$$

qui a un sens en vertu de la remarque précédente;  $U_x$  est une représentation projective de  $G$ , ce qui achève la démonstration du lemme.

Soient  $U^*$  une représentation projective de  $G^*$  et  $u^*$  la représentation unitaire fortement continue dont l'existence est affirmée par le théorème 3.3, puisque  $G^*$  est, par définition, simplement connexe; la condition  $U_d^* = \text{II}$  implique que  $u_d^* = \omega(d) \text{ I}$  où  $\omega(d)$  est un quaternion de norme 1 et où  $\text{I}$  est la transformation identique dans l'espace des vecteurs; or  $u_d^*$  est linéaire, donc  $\omega(d)$  ne peut être que +1 ou -1.

Considérons maintenant le cas particulier où  $G$  est doublement connexe; son groupe fondamental est alors  $Z_2$  et  $D$  est isomorphe à  $Z_2$ ; désignons par  $e$  et  $-e$  les éléments de  $Z_2$ ,  $e$  étant simultanément l'identité de  $G$ . On peut toujours choisir  $u$  de telle sorte que  $u_e = \text{I}$ ; il ne reste donc que deux possibilités:  $\omega(-e) = 1$  et  $\omega(-e) = -1$ . Dans le premier cas, si  $x^*$  et  $y^*$  sont tels que  $h(x^*) = h(y^*)$ , alors on a nécessairement:

$$u_{x^*}^* = u_{y^*}^*$$

car  $u_d^* = \text{I}$ ; on peut définir pour tout  $x$  de  $G$ :

$$u_x = u_{h^{-1}(x)}^*$$

qui est une représentation unitaire fortement continue de  $G$ . En revanche, dans le deuxième cas, à savoir  $\omega(-e) = -1$ , le procédé ci-dessus ne définit  $u_x$  qu'à un signe près; ainsi, à tout élément  $x$  de  $G$  correspondent deux opérateurs  $u_x$  et  $-u_x$ ; on dira dans ce cas que  $u$  est une représentation unitaire, fortement continue, *bivaluée* de  $G$ . On obtient ainsi le théorème:

**Théorème 3.4:** Soit  $G$  un groupe topologique doublement connexe; alors de toute représentation projective  $U$  de  $G$  dans un espace de HILBERT quaternionien  $\mathfrak{H}$ , on peut extraire un relèvement global  $u$  de  $G$  qui soit linéaire; deux cas distincts, et seulement deux, peuvent alors se présenter: ou bien  $u$  est une représentation unitaire, fortement continue de  $G$  dans  $\mathfrak{H}$ , ou bien  $u$  est une représentation unitaire, bivaluée, fortement continue de  $G$  dans  $\mathfrak{H}$ .

Les théorèmes 3.3 et 3.4, établis dans cette section, suffiront à la poursuite de l'étude entreprise ici; ils permettent de ramener le problème de la détermination de tous les systèmes élémentaires, par rapport aux groupes de symétrie envisagés (voir section suivante, ainsi que II), à celui de la détermination des représentations

unitaires, irréductibles fortement continues de ces groupes (ou, s'il y a lieu, de leur revêtement universel) dans l'espace de HILBERT quaternionien dont les projecteurs réalisent les propositions sur le système physique étudié.

#### 4. Théorie des Représentations

Les groupes étudiés dans cette section seront supposés connexes, simplement ou au plus doublement connexes; on pourra donc toujours extraire de chacune de leurs représentations projectives un relèvement global linéaire, ceci en vertu des théorèmes 3.3 et 3.4 de la section précédente. L'hypothèse de connexité aura de plus comme conséquence que les descriptions irréductibles se feront toujours dans des systèmes de propositions cohérents  $L$  (théorème 1.4); ainsi chaque  $L$  sera réalisé par les projecteurs d'un seul espace de HILBERT quaternionien (voir section 2c). La condition d'irréductibilité d'une description  $(L, U)$  s'exprimera alors comme la condition habituelle d'irréductibilité d'une représentation ordinaire: si  $u$  est le relèvement global linéaire extrait de  $U$ ,  $(L, U)$  sera irréductible si et seulement si:  $u_x a u_x^{-1} = a$  pour tout  $x$  de  $G$  entraîne  $a = 0$  ou  $I$ . Néanmoins, des différences apparaissent dès le début entre les réalisations quaternionienne et complexe; en particulier, le lemme de SCHUR et son corollaire doivent être reformulés séparément pour le cas quaternionien:

##### a) Lemme de SCHUR

**Enoncé:** Soient  $\mathfrak{H}^{(1)}$  et  $\mathfrak{H}^{(2)}$  des espaces de HILBERT quaternioniens de dimensions quelconques (voire infinies),  $G$  un groupe,  $u^{(1)}$  et  $u^{(2)}$  des représentations unitaires de  $G$  dans  $\mathfrak{H}^{(1)}$  et  $\mathfrak{H}^{(2)}$  respectivement, et enfin  $t$  une application co-linéaire et bornée de  $\mathfrak{H}^{(1)}$  dans  $\mathfrak{H}^{(2)}$  telle que  $t u_x^{(1)} = u_x^{(2)} t$  pour tout  $x$  de  $G$ . Alors si  $u^{(1)}$  et  $u^{(2)}$  sont irréductibles,  $t$  ne peut être que nulle ou bijective.

Sous les conditions énoncées ici, la démonstration du lemme de SCHUR peut être faite de manière analogue à celle qui est présentée habituellement dans le cas complexe, aussi ne sera-t-elle pas reproduite ici. On sait que la condition que  $u^{(1)}$  et  $u^{(2)}$  soient des représentations d'un groupe n'est pas essentielle et peut être considérablement affaiblie; la formulation ci-dessus a été choisie parce que c'est elle qui sera utilisée dans la suite.

**Corollaire au lemme de SCHUR:** Soit  $u$  une représentation unitaire irréductible d'un groupe  $G$  dans un espace de HILBERT quaternionien  $\mathfrak{H}$ ; alors tout opérateur  $t$ , linéaire et borné de  $\mathfrak{H}$  tel que  $u_x t = t u_x$  pour tout  $x$  de  $G$  est nécessairement de la forme:  $t = r I + s J$ , où  $r$  et  $s$  sont des nombres réels,  $I$  l'identité dans  $\mathfrak{H}$  et  $J$  un opérateur unitaire anti-hermitien de  $\mathfrak{H}$ .

Dans le cas où  $t$  est de plus hermitien, on sait<sup>2)3)</sup> qu'il existe une famille spectrale  $a_r$ , étalée sur la droite réelle, et dont tous les membres commutent avec chaque opérateur commutant avec  $t$ ; on a de plus:

$$t = \int r da_r.$$

Ainsi les  $a_r$ , qui sont des projecteurs, commutent avec chacun des  $u_x$ ; or  $u$  est irréductible par hypothèse; par conséquent, les  $a_r$  ne peuvent prendre que les valeurs 0

ou  $I$ ; comme ils forment une suite monotone croissante,  $t$  est un multiple réel de l'identité. Ramenons le cas général à ce cas particulier. Soit  $t^*$  l'adjoint de  $t$ ; construisons alors les deux opérateurs

$$h = \frac{(t+t^*)}{2} \text{ et } j = \frac{(t-t^*)}{2}.$$

Ces deux opérateurs sont linéaires et bornés, le premier étant hermitien, le second anti-hermitien; de plus, ils commutent tous deux avec chacun des  $u_x$ . En vertu de la remarque précédente,  $h = r I$ ; il reste donc à déterminer la forme de  $j$ . L'argumentation développée jusqu'ici ne diffère pas essentiellement de celle qu'on pratique habituellement dans le cas complexe. Toutefois, arrivé à ce point, on ne peut plus procéder parallèlement dans les réalisations complexe et quaternionienne. En effet, dans le cas complexe, il suffit de poser  $g = -i j$  où  $i$  est l'unité imaginaire des nombres complexes;  $g$  est alors hermitien et on peut lui appliquer le même raisonnement qu'à  $h$ ; on obtient ainsi directement  $j = s i I$  où  $s$  est un nombre réel, d'où  $t = c I$ ,  $c$  étant alors un nombre complexe quelconque; en revanche, ce procédé n'est pas applicable dans le cas quaternionien, car  $(-i j)$  n'est pas linéaire, mais co-linéaire; le problème est donc de voir si l'on peut construire un opérateur linéaire qui puisse, dans le cas quaternionien, jouer le rôle de l'opérateur  $(i I)$  qui apparaît dans le cas complexe. Cette construction va occuper la fin de ce paragraphe. On a remarqué que  $j$  est un opérateur linéaire borné qui commute avec chacun des  $u_x$ ; en vertu du lemme de SCHUR, ou bien  $j = 0$ , ou bien  $j^{-1}$  existe; la première possibilité ne nous intéresse pas: elle signifie en effet que  $t$  est hermitien et ce cas est déjà traité. On peut donc supposer, sans restreindre la généralité, que  $j^{-1}$  existe; par conséquent, si  $f$  est un vecteur quelconque de  $\mathfrak{H}$ :  $j f = 0$  entraîne  $f = 0$ , et de même:  $j^* f = 0$  entraîne  $f = 0$ ; d'où  $j^* j f = 0$  entraîne à son tour  $f = 0$ . Enfin  $j^* j$  est un opérateur positif; en effet, par définition de l'adjoint:  $(j^* j f, f) = (j f, j f)$  qui est positif; en vertu de ce qui précède  $(j f, j f) = 0$  ne peut être réalisé que pour  $f = 0$ . Récapitulons: on a construit un opérateur  $j^* j$  linéaire, borné, hermitien et strictement positif. On peut alors appliquer à cet opérateur le théorème suivant, dont on peut trouver la preuve p. 262–263 du livre de RIESZ et NAGY<sup>12</sup>), et dont la démonstration s'applique mot pour mot au cas où l'espace complexe de RIESZ et NAGY est remplacé par un espace quaternionien: «Chaque transformation  $A$ , linéaire, hermitienne, bornée et positive admet une racine carrée linéaire, hermitienne, bornée et positive, et une seule, qui sera désignée par  $B = A^{1/2}$ ; celle-ci peut être représentée comme limite au sens fort d'une suite de polynômes à coefficients réels, de  $A$  et est, par conséquent, commutable avec toutes les transformations qui commutent avec  $A$ ». Posons donc  $B = (j^* j)^{1/2}$ ;  $j^* j$  étant bijective, il en est de même de  $B$  qui admet donc une inverse. Posons donc  $J = j B^{-1}$ , c'est-à-dire  $j = J B$ . En vertu du théorème de RIESZ et NAGY cité ci-dessus,  $B$  commute avec toute transformation qui commute avec  $j^* j$ ; par conséquent  $B$  commute avec  $j^* j$  elle-même; comme  $j$  est anti-hermitienne,  $j$  commute avec  $j^* j$  et donc aussi avec  $B$ . En combinant toutes ces indications, on déduit aisément que  $J^2 = -I$  et  $J^* = -J$ , c'est-à-dire que  $J$  est une transformation unitaire et anti-hermitienne. Enfin,  $B$  est hermitienne et commute avec chacun des  $u_x$ ; par conséquent,  $B$  est un multiple réel de l'identité; il en résulte que  $j$  est un multiple réel de  $J$ , ce qui achève la démonstration du corollaire au lemme de SCHUR. On peut même ajouter que la décomposition  $t = r I + s J$  ainsi obtenue

est unique, en vertu de l'unicité de  $B$  affirmée par le théorème de RIESZ et NAGY cité ci-dessus.

La forme de ce corollaire semble très différente de celle qu'il prend dans le cas complexe. Toutefois, un opérateur tel que  $J$  jouit de propriétés tout à fait remarquables, aussi le paragraphe suivant sera-t-il consacré à cette classe d'opérateurs.

### c) *Les opérateurs unitaires et anti-hermitiens*

On désignera par  $J$  de tels opérateurs qui satisfont donc aux deux conditions suivantes :

$$J J^* = J^* J = I, \quad J^* = -J,$$

étant entendu que ces opérateurs sont linéaires; on a alors  $J^2 = -I$ .

Montrons tout d'abord que si  $J$  admet une valeur propre, celle-ci est nécessairement un quaternion imaginaire de norme 1. Considérons à cet effet l'équation aux valeurs propres  $Jf = qf$  où  $f$  est un vecteur non nul de l'espace de HILBERT quaternionien  $\mathfrak{H}$  considéré; on a alors d'une part :

$$q(f, f) = (q f, f) = (J f, f) = -(f, J f) = -(f, q f) = -(f, f) q^*$$

d'où  $q = -q^*$  car  $(f, f)$  est réel non nul; d'autre part

$$f = -J^2 f = -J q f = -q J f = -q^2 f$$

d'où  $q^2 = -1$ . Ainsi  $q^* = -q$  et  $q^2 = -1$ , ce qui prouve notre assertion.

Montrons ensuite que tout quaternion imaginaire  $i$ , de norme 1, est valeur propre de  $J$ ; formons l'opérateur  $K^{(i)}$  égal à  $(I - i J)/2$ ; soit  $f$  un vecteur non nul de  $\mathfrak{H}$  qui ne soit pas vecteur propre de  $J$  pour la valeur  $(-i)$ ; un tel vecteur existe toujours, sans quoi  $J$  serait égal à  $(-i I)$  ce qui est impossible car  $J$  est supposé linéaire. Appliquons alors l'opérateur  $K^{(i)}$  à un tel vecteur; on a :

$$J K^{(i)} f = \frac{1}{2} J (I - i J) f = \frac{1}{2} (J + i I) f = i K^{(i)} f,$$

donc  $K^{(i)} f$  est vecteur propre de  $J$  pour la valeur propre  $i$  choisie, ce qui prouve notre seconde assertion.

Désignons maintenant par  $C^{(i)}$  l'ensemble des quaternions qui commutent avec un quaternion imaginaire  $i$ , de norme 1, choisi arbitrairement, mais fixe :

$$C^{(i)} = \{q \in Q \mid q i = i q\}.$$

On notera par  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  l'ensemble des vecteurs propres de  $J$  pour cette valeur propre  $i$ :

$$\mathfrak{H}_C^{(i)} = \{f \in \mathfrak{H} \mid J f = i f\}.$$

On vérifie alors aisément que  $C^{(i)}$ , muni de la structure de corps induite naturellement par celle de  $Q$ , est isomorphe au corps des nombres complexes, le rôle de l'unité imaginaire de celui-ci étant joué par le quaternion  $i$  choisi; de même, il est immédiat que  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ , muni de la structure d'espace vectoriel induite naturellement par celle de  $\mathfrak{H}$ , est un espace vectoriel sur  $C^{(i)}$ . De plus, si  $f$  et  $g$  sont des éléments de  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ , alors  $(f, g)$ , produit scalaire dans  $\mathfrak{H}$  des vecteurs  $f$  et  $g$ , est un élément de  $C^{(i)}$ ; en effet, on a

$$i(f, g) = (i f, g) = (J f, g) = -(f, J g) = -(f, i g) = (f, g) i.$$

Enfin, si  $\{f_n\}$  est une suite d'éléments de  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  telle que  $\|f_n - f_m\|$  tende vers zéro lorsque  $n$  et  $m$  tendent vers l'infini, il existe un élément  $f^*$  de  $\mathfrak{H}$  tel que  $\|f_n - f^*\|$  tende vers zéro pour  $n$  tendant vers l'infini, car  $\mathfrak{H}$  est complet;  $f^*$  appartient encore à  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ ; en effet,

$$\|Jf^* - Jf_n\| = \|f^* - f_n\|$$

car  $J$  est unitaire; donc  $Jf^*$  est la limite de  $\{Jf_n\}$ , c'est-à-dire la limite de  $\{if_n\}$ ; par conséquent  $Jf^*$  est égal à  $if^*$ . Ainsi  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  est complet par rapport à sa norme.

Tous les éléments sont alors réunis pour qu'on puisse affirmer que la structure d'espace de HILBERT quaternionien de  $\mathfrak{H}$  induit naturellement sur  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  une *structure d'espace de HILBERT complexe* dont le corps de base est  $C^{(i)}$ .

On remarque enfin que les vecteurs de  $\mathfrak{H}_C^{(t)}$  forment un système complet dans  $\mathfrak{H}$ ; considérons un vecteur  $f$  de  $\mathfrak{H}$ , quelconque, et un quaternion imaginaire  $j$ , de norme 1, anticommutant avec  $i$ ; formons les vecteurs

$$f_{\pm} = \frac{1}{2} (I \mp i J) f \text{ et } f'_+ = -j f_-;$$

$f_+$  et  $f'_+$  appartiennent alors à  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  et on a

$$f = f_+ + j f'_+;$$

ainsi tout vecteur de  $\mathfrak{H}$  peut s'écrire comme combinaison linéaire, à coefficients dans  $Q$ , de deux vecteurs de  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ , ce qui suffit à prouver que  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  est complet dans  $\mathfrak{H}$ .

Résumons ces résultats sous forme d'un théorème:

**Théorème 4.1:** *Chaque opérateur  $J$ , unitaire et antihermitien, défini sur un espace de HILBERT quaternionien  $\mathfrak{H}$ , permet d'extraire de  $\mathfrak{H}$  une famille d'espaces de HILBERT complexes; chaque membre  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  de cette famille est constitué par l'ensemble des vecteurs propres de  $J$  correspondant à une même valeur propre  $i$ , les valeurs propres de  $J$  parcourant l'ensemble des quaternions imaginaires de norme 1.*

On remarquera que ce théorème indique un processus pour *extraire* un espace de HILBERT complexe de l'espace de HILBERT quaternionien; on verra dans la suite que ce processus suffit dans bien des cas (voir par exemple le théorème 4.2) pour obtenir des renseignements très complets sur ce qui se passe dans l'espace quaternionien tout entier; on notera aussi que cette manière de faire diffère de celle qui est suggérée par FINKELSTEIN *et al.*<sup>3)</sup> sous le nom de représentation symplectique; physiquement, il est particulièrement important que l'extraction dont il est question ici ne double pas le nombre de dimensions de l'espace dans lequel on travaille, ce qui est au contraire le cas pour la représentation symplectique.

Dans la suite de cette étude, on aura besoin du résultat suivant que nous allons rapidement établir:

**Lemme 4.1:** *Soient  $J$  et  $J'$  deux opérateurs unitaires et antihermitiens, définis dans le même espace de HILBERT quaternionien  $\mathfrak{H}$ . Si  $J$  et  $J'$  commutent, il existe une partition de  $\mathfrak{H}$  en deux sous-espaces orthogonaux tels que  $J$  et  $J'$  soient égaux dans le premier et opposés par le signe dans le second.*

Construisons les opérateurs:

$$K = J J' \text{ et } K_{\pm} = \frac{1}{2} (I \mp K);$$

ceux-ci jouissent des propriétés suivantes:

- (i)  $K$  est un opérateur unitaire, hermitien et donc involutif,
- (ii)  $K_{\pm}$  sont des projecteurs orthogonaux et supplémentaires,
- (iii)  $J' K_{\pm} = \pm J K_{\pm}$ .

On vérifie alors aisément que les sous-espaces dont parle le lemme sont obtenus comme les buts respectifs des projecteurs  $K_+$  et  $K_-$ . On notera enfin que, si  $f$  est vecteur propre de  $J$  (ou de  $J'$ ), il en est de même pour  $K_{\pm} f$ , et ceci avec la même valeur propre (à moins bien entendu que  $K_{\pm} f$  soit nul).

D'une manière générale, si  $t$  est une transformation linéaire qui commute avec  $J$ , alors  $t$  applique chaque  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  sur lui-même; on peut donc considérer la *restriction*  $t^{(i)}$  de  $t$  à  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ . Réciproquement, si  $t^{(i)}$  est une transformation linéaire de  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ , on peut définir un *prolongement linéaire* (unique)  $t$  de  $t^{(i)}$  dans  $\mathfrak{H}$  par les conditions:

- (i)  $t$  est linéaire,
- (ii)  $t f = t^{(i)} f$  pour tout  $f$  de  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ .

On remarque que  $t^{(i)}$  est la restriction à  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  de son prolongement  $t$  dans  $\mathfrak{H}$ . Par exemple,  $i I$  est la restriction à  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  de  $J$  et  $J$  est le prolongement linéaire dans  $\mathfrak{H}$  de la transformation  $i I$  définie dans  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ .

Les propriétés suivantes se déduisent alors sans peine des définitions ci-dessus:

- a) Soit  $t$  une transformation linéaire qui commute avec  $J$ ; si  $t$  est unitaire, ou hermitienne ou si c'est un projecteur, il en est de même de chacune de ses restrictions
- b) Si  $t$  et  $t'$  sont deux transformations linéaires qui commutent entre elles et avec le même  $J$ , alors leurs restrictions  $t^{(i)}$  et  $t'^{(i)}$  commutent dans l'espace  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  dans lequel elles sont toutes deux définies.
- c) Si  $\{t_n\}$  est une suite de transformations linéaires qui commutent avec  $J$  et tendent fortement vers une limite  $t$ , alors  $t^{(i)} = s \lim t_n^{(i)}$ .

Ces propriétés ont pour conséquence le

**Théorème: 4.2:** Soit  $u$  une représentation unitaire fortement continue d'un groupe topologique  $G$  dans un espace de HILBERT quaternionien  $\mathfrak{H}$ , telle que chacun des  $u_x$  commute avec un même  $J$ . Alors:

- (i) l'ensemble des  $u_x^{(i)}$  pour un même  $i$  forme une représentation unitaire fortement continue  $u^{(i)}$  de  $G$  dans l'espace de HILBERT complexe  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ ,
- (ii) si  $u$  est irréductible,  $u^{(i)}$  l'est aussi (quel que soit  $i$ ),
- (iii) si  $u^{(i)}$  est une représentation irréductible de classe +1 ou 0 selon FROBENIUS et SCHUR,  $u$  est aussi irréductible.

La première partie se déduit immédiatement des propriétés dont l'énoncé précède le théorème.

La seconde partie se démontre de la manière suivante: soit  $a^{(i)}$  un projecteur de  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  qui commute avec chacun des  $u_x^{(i)}$ ; le prolongement linéaire  $a$  de  $a^{(i)}$  est alors un projecteur de  $\mathfrak{H}$  qui commute avec chacun des  $u_x$ ; comme  $u$  est irréductible,  $a$  ne peut être que 0 ou  $I$  et il en est donc de même de sa restriction  $a^{(i)}$ . Par conséquent,  $u^{(i)}$  est irréductible.

La démonstration de la troisième partie est un peu plus délicate: Supposons qu'il existe un projecteur  $a$  de  $\mathfrak{H}$  qui commute avec chacun des  $u_x$ ; le commutateur  $[a, J]$ , de  $a$  et  $J$ , jouit des propriétés suivantes

- 1) il est hermitien, car  $a$  et  $J$  sont linéaires et respectivement hermitien et anti-hermitien;
- 2) il commute avec chacun des  $u_x$ , car il en est ainsi de  $a$  et  $J$  séparément;
- 3) il anticommuter avec  $J$ ;

Cette troisième propriété entraîne que  $[a, J]$  applique linéairement  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  sur  $\mathfrak{H}_C^{(-i)}$ ; considérons alors l'opérateur co-linéaire  $k I$  défini sur  $\mathfrak{H}$ , où  $k$  est un quaternion imaginaire, de norme 1, et qui anticommuter avec  $i$ ; cet opérateur applique antilinéairement  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  sur  $\mathfrak{H}_C^{(-i)}$ ; il permet de définir une transformation de  $\mathfrak{H}$ ,  $A = k[a, J]$ , qui applique antilinéairement  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  sur lui-même et qui commute avec chacun des  $u_x$ ; la restriction  $A^{(i)}$  de  $A$  à  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  commute alors évidemment avec chacun des  $u_x^{(i)}$ . Soit  $K$  une conjugaison de  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ , c'est-à-dire une transformation antiunitaire et involutive de  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ ; désignons par  $\tilde{u}^{(i)}$  la représentation conjuguée de  $u^{(i)}$ , définie par:

$$\tilde{u}_x^{(i)} = K u_x^{(i)} K$$

pour tout  $x$  de  $G$ ; considérons enfin l'opérateur

$$B^{(i)} = A^{(i)} K$$

qui est alors une transformation linéaire de  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  qui de plus satisfait à la condition:

$$4) \quad B^{(i)} \tilde{u}_x^{(i)} = u_x^{(i)} B^{(i)} \text{ pour tout } x \text{ de } G.$$

Trois cas, et ceux-là seulement, peuvent alors se présenter, correspondant à la classification de SCHUR et FROBENIUS (pour un exposé de cette classification, voir par exemple WIGNER<sup>8)</sup>, page 285):

ou bien:  $u^{(i)}$  est équivalente à  $\tilde{u}^{(i)}$  et  $u^{(i)}$  est dite de *classe + 1*, si la transformation unitaire d'équivalence  $C$ , définie par  $\tilde{u}_x^{(i)} = C^{-1} u_x^{(i)} C$  pour tout  $x$  de  $G$ , satisfait à la relation  $C K C K = + I$ ;

ou bien:  $u^{(i)}$  est équivalente à  $\tilde{u}^{(i)}$  et  $u^{(i)}$  est dite de *classe - 1*, si  $C K C K = - I$ ;

ou bien:  $u^{(i)}$  est inéquivalente à  $\tilde{u}^{(i)}$  et  $u^{(i)}$  est dite de *classe 0*.

Supposons tout d'abord que  $u^{(i)}$  soit de classe 0:  $\tilde{u}^{(i)}$  est inéquivalente à  $u^{(i)}$  et par conséquent  $B^{(i)}$  doit être nulle; comme  $K$  est antiunitaire,  $A^{(i)}$  doit aussi être nulle; enfin  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  étant complet dans  $\mathfrak{H}$   $A$  est aussi nulle; or  $A$  ne diffère de  $[a, J]$  que par l'opérateur  $k I$  où  $k$  est un quaternion non nul; par conséquent  $[a, J]$  est nul. La restriction  $a^{(i)}$  de  $a$  à  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  est alors un projecteur de  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ ;  $a$  commutant par hypothèse avec chacun des  $u_x$ ,  $a^{(i)}$  commute avec chacun des  $u_x^{(i)}$ ; or  $u_x^{(i)}$  est irréductible, d'où  $a^{(i)}$  ne peut être que  $O^{(i)}$  ou  $I^{(i)}$  dont les prolongements dans  $\mathfrak{H}$  sont respectivement  $O$  ou  $I$ ;  $u$  est donc irréductible.

Supposons maintenant que  $u^{(i)}$  est de classe + 1 ou - 1: on a donc  $\tilde{u}_x^{(i)} = C^{-1} u_x^{(i)} C$ ; or  $B^{(i)}$  satisfait à la relation 4) ci-dessus; en comparant ces deux égalités et en faisant usage du corollaire du lemme de SCHUR (dans sa réalisation complexe!) on trouve que  $B^{(i)}$  doit être un multiple de  $C$ :  $B^{(i)} = c C$  où  $c$  est élément de  $C^{(i)}$ , corps de base de

$\mathfrak{H}_C^{(i)}$ . En remplaçant  $B^{(i)}$  par cette valeur dans  $A^{(i)}$ , on obtient  $(A^{(i)})^2 = \pm c c^* I$ , selon que  $u^{(i)}$  est de classe  $\pm 1$ . En reprenant la définition de  $A$  et en remarquant que  $k$  est un quaternion imaginaire de norme 1, on obtient  $A^2 = -[a, J]^2$ . Or on se souvient que  $[a, J]$  est un opérateur linéaire hermitien; par conséquent,  $A^2$  est un opérateur négatif défini, ce qui n'est compatible avec la forme ci-dessus que si  $u^{(i)}$  est de classe  $-1$ . Par conséquent, si  $u^{(i)}$  est de classe  $+1$ ,  $A$  doit être nulle; en appliquant le raisonnement fait plus haut dans le cas où  $u^{(i)}$  était de classe 0, on obtient de même que si  $u^{(i)}$  est de classe  $+1$ ,  $u$  doit être irréductible. La démonstration de la troisième partie de notre théorème est donc achevée.

Dans le cas où  $u^{(i)}$  est une représentation par des matrices dans un espace de dimension finie, FINKELSTEIN *et al.*<sup>4)</sup> trouvent aussi ce résultat, bien que dans une formulation un peu différente. Ils affirment même qu'il suffit que  $u^{(i)}$  soit de classe  $-1$  pour que  $u$  soit réductible. N'ayant pas besoin de cela dans la suite, on n'alourdira pas plus cet exposé par l'étude de cette circonstance.

### c) Les représentations des groupes abéliens

Ces représentations seront étudiées dans ce paragraphe dans le but de formuler l'équivalent quaternionien du théorème de STONE-NEUMARK-AMBROSE-GODEMENT auquel on se référera dans la suite en le désignant par le sigle: *SNAG*.

Montrons tout d'abord que toute représentation unitaire et irréductible  $u$  d'un groupe abélien  $G$  est nécessairement de dimension 1.  $G$  étant abélien, chacun des  $u_x$  commute avec tous les autres et peut donc s'écrire sous la forme  $u_x = r(x) I + s(x) J(x)$ , en vertu du corollaire du lemme de SCHUR démontré plus haut; les  $J(x)$  ainsi obtenus commutent encore tous entre eux; de sorte que les opérateurs  $K(x, y) = J(x) J(y)$  sont tous hermitiens et commutent de plus avec chacun des  $u_x$ ; en appliquant à nouveau le corollaire au lemme de SCHUR dans le cas particulier où l'opérateur considéré est hermitien, on déduit que  $K(x, y) = \varepsilon(x, y) I$  où  $\varepsilon(x, y)$  est réel; tous les  $J(x)$  sont donc des multiples réels de l'un d'eux; on peut par conséquent écrire:

$$u_x = r(x) I + s(x) J.$$

On a vu que  $J$  possède nécessairement au moins un vecteur propre; il existe donc toujours dans l'espace de représentation de  $u$  au moins un sous-espace de dimension 1 qui est laissé invariant par  $J$  et donc par  $u$  elle-même. Or  $u$  est irréductible par hypothèse;  $\mathfrak{H}$  se réduit donc à ce sous-espace invariant de dimension 1, ce qui prouve notre assertion: toute représentation unitaire et irréductible  $u$  d'un groupe abélien  $G$  est nécessairement de dimension 1. Les  $u_x$  étant unitaires, on a

$$r(x)^2 + s(x)^2 = 1$$

et on peut donc poser  $r(x) = \cos \theta(x)$  et  $s(x) = \sin \theta(x)$ ; remarquant encore que  $J$  est borné et de carré égal à  $-I$  on écrira  $u_x$  sous la forme

$$u_x = e^{J\theta(x)},$$

notation symbolique définie par son développement habituel en série infinie.

On vérifie alors aisément que  $u$  étant une représentation unitaire fortement continue de  $G$ , la fonction  $\theta$  définie ci-dessus est un *caractère* sur  $G$ , c'est-à-dire, suivant

PONTRJAGIN<sup>10)</sup>), un homomorphisme de  $G$  sur le groupe quotient  $S^1$  de la droite réelle  $R$  par un groupe  $N$  isomorphe à celui des nombres entiers. L'ensemble des caractères sur un groupe abélien  $G$  forme un groupe, noté  $\Gamma$  et dit *groupe des caractères de  $G$* ; si  $G$  est localement compact,  $\Gamma$ , muni de sa structure topologique canonique (voir PONTRJAGIN, § 30) est aussi localement compact.

En particulier, si  $G = R$ , tout caractère sur  $G$  est de la forme

$$\theta(x) = p \cdot x \pmod{2\pi}$$

où  $p$  est un nombre réel quelconque; si  $G$  est le groupe des translations dans l'espace-temps de MINKOWSKI, le théorème 36 de PONTRJAGIN sur les caractères d'un produit direct de groupes abéliens permet d'affirmer que tout caractère sur  $G$  est de la forme:

$$\theta(x) = p \cdot x \pmod{2\pi}$$

( $p$  et  $x$  étant des quadrivecteurs dans l'espace de MINKOWSKI, leur produit scalaire  $p \cdot x$  est donné par:  $g_{\mu\nu} p^\mu x^\nu$ , où  $g_{\mu\nu}$  est la métrique dans cet espace).

Dans le cas quaternionien, auquel nous nous intéressons ici, il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des caractères sur  $G$  et l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles de  $G$ . En effet, d'une part, deux représentations irréductibles équivalentes ont même caractère, et ne diffèrent que par leur  $J$ , et d'autre part, deux représentations irréductibles, qui ont même caractère et ne diffèrent que par leur  $J$ , sont équivalentes.

Ainsi le problème de la recherche de toutes les classes d'équivalence de représentations irréductibles quaternionniennes de  $G$  peut être ramené à celui de la détermination des caractères sur  $G$ .

Etablissons maintenant le lemme suivant:

**Lemme 4.2:** Soient  $G$  un groupe abélien et  $u$  une représentation unitaire de  $G$  dans un espace de HILBERT quaternionien  $\mathfrak{H}$ ; il existe alors au moins une transformation  $J$  de  $\mathfrak{H}$ , unitaire et antihermitienne, qui commute avec chacun des  $u_x$ .

On remarque d'emblée que ce lemme n'a rien à voir avec les propriétés topologiques de  $G$ :  $G$  est muni seulement d'une structure de groupe abélien abstrait, et  $u$  est un homomorphisme (au sens de la théorie des groupes abstraits!) de  $G$  dans l'ensemble des transformations unitaires de  $\mathfrak{H}$ .

A moins que  $u$  soit triviale dans  $\mathfrak{H}$ , il existe au moins un élément  $x_0$  de  $G$  tel que  $u_{x_0}^2$  soit différent de l'identité  $I$  dans  $\mathfrak{H}$ ; soit alors  $N_0$  le sous-espace (proprement contenu dans  $\mathfrak{H}$ ) formé des éléments  $f$  de  $\mathfrak{H}$  tels que  $u_{x_0}^2 f = f$ :

$$N_0 = \{f \in \mathfrak{H} \mid u_{x_0}^2 f = f\}.$$

Soit  $M_0$  le complément orthogonal de  $N_0$  dans  $\mathfrak{H}$ . Cette décomposition de  $\mathfrak{H}$  en somme directe de  $M_0$  et  $N_0$  réduit  $u$ ; en effet, soit  $f$  un élément de  $N_0$ ; formons pour  $x$  quelconque dans  $G$ :

$$u_{x_0}^2 (u_x f) = u_x u_{x_0}^2 f = u_x f$$

puisque  $f$  appartient à  $N_0$ ; donc  $u_x f$  appartient aussi à  $N_0$ ; ainsi chaque  $u_x$  applique  $N_0$  dans lui-même; de plus  $u$  est unitaire; par conséquent il résulte de l'assertion

précédente que  $u_x$  applique  $M_0$  dans lui-même. Il y aura donc un sens à parler des restrictions de  $u$  à  $M_0$  et à  $N_0$ . Formons maintenant l'opérateur antihermitien

$$j = (u_{x_0} - u_{x_0}^*)$$

qui jouit de plus de la propriété suivante: si  $f$  est un vecteur non-nul de  $M_0$ ,  $jf$  est toujours différent de zéro. Désignons par  $u^0$  et  $j_0$  les restrictions à  $M_0$  de  $u$  et de  $j$ . En vertu de ce qui précède on a:

- (i)  $u^0$  est une représentation unitaire de  $G$  dans  $M_0$ .
- (ii)  $j_0$  est une transformation bornée, injective et antihermitienne de  $M_0$ .
- (iii)  $j_0$  commute avec chacun des  $u_x^0$ .

On a déjà rencontré un opérateur qui satisfait aux conditions (ii) et (iii) en démontrant le corollaire au lemme de SCHUR; on déduit alors immédiatement (par un raisonnement semblable à celui qui avait été fait à cette occasion) qu'il existe dans  $M_0$  un opérateur  $J_0$  unitaire et antihermitien qui commute avec chaque opérateur qui commute avec chacun des  $u_x^0$ .

On peut répéter dans  $N_0$  la construction précédente (effectuée dans  $\mathfrak{H}$ ), définir un sous-espace  $M_1$  de  $N_0$  au moyen d'un élément  $x_1$  convenablement choisi dans  $G$ , puis construire un opérateur  $J_1$  qui soit l'analogie dans  $M_1$  de l'opérateur  $J_0$  de  $M_0$ ; par itération de ce procédé, on couvrira ainsi tout le sous-espace  $M$ , complémentaire du sous-espace  $N$  défini par:

$$N = \{f \in \mathfrak{H} \mid u_x f = f \text{ pour tout } x \text{ de } G\}.$$

En faisant la somme directe des  $J_i$  ainsi obtenus, on obtient une transformation  $J_M$  de  $M$ , unitaire et antihermitienne qui commute avec toute transformation de  $M$  commutant elle-même avec chacun des opérateurs de la restriction de  $u$  à  $M$ .

Dans  $N$ ,  $u$  est la représentation triviale; on peut ainsi définir un opérateur  $J_N$  agissant dans  $N$  et auquel on n'impose que d'être unitaire et antihermitien.

En effectuant alors la somme directe de  $J_M$  et  $J_N$  on obtient une transformation  $J$  de l'espace tout entier, unitaire et antihermitienne et qui, de plus, commute avec chacun des  $u_x$ . Le lemme 4.2 est ainsi complètement démontré.

En vertu des arguments développés au § 2 (voir en particulier les théorèmes 4.1 et 4.2 (i)), il existe alors dans  $\mathfrak{H}$  une famille d'espaces de HILBERT complexes  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ , complets dans  $\mathfrak{H}$  et invariants sous  $u$ ; restreinte à un quelconque de ces  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ ,  $u$  forme une représentation unitaire  $u^{(i)}$  du groupe abélien  $G$  considéré.

Enfin, on remarque que si le sous-espace  $N$  (apparaissant dans la démonstration du lemme ci-dessus) est nul, alors  $J$ , non seulement commute avec chacun des  $u_x$ , mais commute encore avec chaque opérateur qui, lui-même, commute avec chacun des  $u_x$ .

Considérons maintenant un groupe *topologique*  $G$ , abélien, localement compact, connexe et simplement connexe. Le théorème 3.3 affirme que, de toute représentation projective de  $G$  définie sur les rayons d'un espace de HILBERT quaternionien  $\mathfrak{H}$ , on peut extraire une représentation unitaire  $u$ , continue, de  $G$  dans  $\mathfrak{H}$ .  $G$  étant abélien, on peut appliquer à  $u$  le lemme 4.2, de sorte que  $u$  satisfait aux conditions du théorème 4.2. On peut appliquer le SNAG (voir, par exemple, RIESZ et NAGY<sup>12)</sup>, pp. 387 et suiv.) à l'une quelconque des représentations *complexes*  $u^{(i)}$  issues de  $u$ : il existe une famille

spectrale  $a^{(i)}(S)$  étalée sur le groupe  $\Gamma$  des caractères de  $G$ , et une seule, pour laquelle on ait :

$$u_x^{(i)} = \int_{\Gamma} e^{i\theta(x)} da^{(i)}(S);$$

on sait de plus que  $a^{(i)}(S)$  commute avec tout opérateur qui commute lui-même avec chacun des  $u_x^{(i)}$ .

Par le processus canonique de prolongement, décrit précédemment (voir § 2), on obtient alors l'*équivalent quaternionien du SNAG*: il existe une famille spectrale  $a(S)$  étalée sur le groupe  $\Gamma$  des caractères de  $G$  pour laquelle on ait :

$$u_x = \int_{\Gamma} e^{J\theta(x)} da(S);$$

de plus,  $a(S)$  commute avec tout opérateur qui commute avec chacun des  $u_x$ . Toutefois, le problème de l'unicité, de cette famille spectrale reste à élucider. Pour un  $J$  donné et à  $i$  fixe, la famille spectrale est unique, car le processus de prolongement canonique est unique. Montrons maintenant que pour un  $J$  donné, la famille spectrale ne dépend pas du choix de  $i$ ; pour cela, construisons les espaces  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  et  $\mathfrak{H}_C^{(j)}$  correspondant respectivement à deux quaternions imaginaires  $i$  et  $j$  de norme 1; formons l'opérateur  $v = k I$  où  $k$  est un quaternion imaginaire, de norme 1, tel que  $k i k^* = j$  (un tel quaternion existe toujours, quels que soient  $i$  et  $j$ ); on remarque d'emblée que  $v$  est un opérateur co-unitaire qui commute avec n'importe quel opérateur linéaire; de plus,  $v$  applique  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  sur  $\mathfrak{H}_C^{(j)}$ ; en effet, si  $f$  est un vecteur de  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$ ,  $J(vf) = j(vf)$ , et si  $f'$  est un vecteur de  $\mathfrak{H}_C^{(j)}$ ,  $J(v^{-1}f') = i(v^{-1}f')$ ; enfin, si  $t$  est un opérateur linéaire qui commute avec  $J$ , ses restrictions respectivement à  $\mathfrak{H}_C^{(i)}$  et à  $\mathfrak{H}_C^{(j)}$  sont liées par la relation  $t^{(j)} = v t^{(i)} v^{-1}$ . Soit alors  $u$  une représentation (unitaire, donc linéaire!) de  $G$  dans  $\mathfrak{H}$ ; appliquons le SNAG à ses restrictions complexes  $u^{(i)}$  et  $u^{(j)}$ :

$$u_x^{(i)} = \int_{\Gamma} e^{i\theta(x)} da^{(i)}(S), \quad u_x^{(j)} = \int_{\Gamma} e^{j\theta(x)} db^{(j)}(S).$$

Or  $u_x^{(j)} = v u_x^{(i)} v^{-1}$ , d'où il résulte que  $v a^{(i)}(S) v^{-1}$  satisfait aux mêmes conditions que  $b^{(j)}(S)$ . Le SNAG complexe affirmant l'unicité de la famille spectrale, on en déduit que  $b^{(j)}(S) = v a^{(i)}(S) v^{-1}$  et donc:

$$b(S) = v a(S) v^{-1}.$$

Or  $a(S)$  est linéaire et commute par conséquent avec  $v$ , d'où il résulte que  $b(S) = a(S)$ , ce qui prouve l'unicité de la famille spectrale à  $J$  fixe.  $J$  lui-même n'est pas unique, ainsi que le montre déjà sa construction dans le lemme 4.2;  $a(S)$  ne peut évidemment pas ne pas dépendre de  $J$ . Ainsi, le choix de  $J$  fixe uniquement la famille spectrale  $a(S)$ .

## 5. Conclusions

Toutes les notions physiques ont été introduites dès la première section (« Structure de la Physique Quantique ») dans le langage naturel des opérations sur les systèmes de propositions; à côté de son intérêt didactique, cette généralisation présente l'avantage de permettre un traitement indépendant des divers modèles mathématiques qui en

constituent une réalisation; cette circonstance est essentielle si on veut pouvoir discuter l'opportunité d'une réalisation non-conventionnelle de la théorie – ici la forme quaternionienne de la mécanique quantique. Les sections suivantes ont été consacrées à établir les faits mathématiques généraux propres à la réalisation considérée. Le problème de la réduction de phase est résolu, pour nombre de cas physiquement intéressants, par les théorèmes 3.2, 3.3 et 3.4; le théorème 3.2 n'a pas d'équivalent aussi général dans le cas complexe. La théorie des représentations des groupes par des opérateurs *unitaires* agissant dans un espace de HILBERT quaternionien a été développée dans la dernière section. Le cas des groupes abéliens a été traité plus particulièrement en raison de l'intérêt qu'il présente pour un prochain article à paraître dans ce journal<sup>(II)</sup>; l'opérateur  $J$  qui apparaît dans le cas abélien jouera en effet un rôle capital dans l'établissement des liens entre les formes complexes et quaternionniennes de la mécanique quantique relativiste; cette étape sera essentiellement fondée sur les théorèmes 4.1 et 4.2.

## 6. Remerciements

Ce travail constitue la première partie d'une thèse présentée à l'Université de Genève, Institut de Physique Théorique.

Que M. le Professeur J. M. JAUCH, mon directeur de thèse, ainsi que tous ceux qui m'ont aidés par leurs critiques, MM. les Professeurs A. HAEFLIGER, L. MICHEL, E. C. G. STUECKELBERG, et MM. B. MISRA, C. PIRON et D. SPEISER, trouvent ici l'expression de ma vive gratitude.

Cette étude a été réalisée avec l'appui financier de la Fondation Holderbank à qui je manifeste ma reconnaissance.

## Bibliographie

- <sup>1)</sup> G. BIRKHOFF and J. von NEUMANN, Ann. of Math. 37, 823 (1936).
- <sup>2)</sup> D. FINKELSTEIN, J. M. JAUCH and D. SPEISER, CERN 59-7, 59-9, 59-17.
- <sup>3)</sup> D. FINKELSTEIN, J. M. JAUCH, S. SCHIMINOVICH and D. SPEISER, Journ. of Math. Phys. 3, 207 (1962).
- <sup>4)</sup> D. FINKELSTEIN, J. M. JAUCH and D. SPEISER, Journ. of Math. Phys. 4, 136 (1963).
- <sup>5)</sup> E. C. G. STUECKELBERG et collaborateurs, Helv. Phys. Acta 33, 727 (1960); 34, 621 (1961); 34, 675 (1961); 35, 673 (1962).
- <sup>6)</sup> C. PIRON, thèse (Université de Lausanne) (1963).
- <sup>7)</sup> G. EMCH and C. PIRON, Journ. of Math. Phys. 4, 469 (1963).
- <sup>8)</sup> E. P. WIGNER, Group Theory (New York 1959).
- <sup>9)</sup> J. M. JAUCH et C. PIRON, CERN 5702/TH.324 (1963).
- <sup>10)</sup> L. PONTRJAGIN, Topological Groups (Princeton 1958).
- <sup>11)</sup> H. BOERNER, Darstellungen von Gruppen (Springer-Verlag, 1955).
- <sup>12)</sup> F. RIESZ et B. Sz.-NAGY, Leçons d'analyse fonctionnelle (Paris et Budapest 1955).
- <sup>13)</sup> V. BARGMANN, Ann. of Math. 59, 1 (1954).
- <sup>14)</sup> A. M. GLEASON, J. Math. and Mech. 6, 885 (1957).
- <sup>15)</sup> C. PIRON, communication personnelle.
- <sup>16)</sup> D. MONTGOMERY and L. ZIPPIN, Topological Transformation Groups (New York 1955).
- <sup>17)</sup> H. CARTAN and S. EILENBERG, Homological Algebra (Princeton 1956).
- <sup>18)</sup> N. BOURBAKI, Éléments de Mathématiques, Groupes et Algèbres de Lie, Fasc. XXVI (Paris 1960).
- II) G. EMCH, Helv. Phys. Acta 36, 770 (1963).
- 49 H. P. A. 36, 6 (1963)