

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 36 (1963)  
**Heft:** III

**Artikel:** Lorentz-kovariante analytische Funktionen  
**Autor:** Hepp, Klaus  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-113377>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Lorentz-kovariante analytische Funktionen

von **Klaus Hepp**

Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich

(1. XI. 62)

*Abstract:* The structure of the module  $O_{[r, s]}(D)$  of holomorphic tensor fields (transforming according to the irreducible representation  $[r, s]$  of the proper complex Lorentz group  $L_+(\mathbf{C})$ ) over the ring  $O_{[0, 0]}(D)$  of  $L_+(\mathbf{C})$ -invariant holomorphic functions is investigated. A decomposition of every  $F \in O_{[r, s]}(D)$  into a finite linear combination of tensor polynomials  $Q_{\mu}^{[r, s]} \in O_{[r, s]}(D)$  with  $L_+(\mathbf{C})$ -invariant holomorphic coefficient functions is shown to exist (locally) for a large class of domains  $D$ . As a generalization of a theorem of BARGMANN, HALL and WIGHTMAN it is proved that in such domains each  $L_{(+)}(\mathbf{C})$ -invariant holomorphic function is a strongly holomorphic function of the  $L_{(+)}(\mathbf{C})$ -invariants. The results are applied to the Wightman functions of arbitrary spinor fields, for which for instance it is shown that all 3-point functions can be continued into the Källén-Wightman-domain. Finally sufficient conditions for the existence of invariant amplitudes for scattering and production processes are given.

## § 1. Einleitung

Die Methoden der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlicher haben in den letzten Jahren zu einem gewissen Fortschritt in der Theorie der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen beigetragen.

In der allgemeinen Quantenfeldtheorie<sup>1)2)</sup> haben die physikalischen Grössen (Vakuumerwartungswerte von Produkten von Feldoperatoren im  $x$ -Raum bzw. von retardierten und zeitgeordneten Produkten im  $p$ -Raum) eindeutige analytische Fortsetzungen zu holomorphen Tensorfeldern mehrerer komplexer Vektorargumente, in denen sich Strukturen der Theorie, wie Lorentz-Kovarianz und Lokalität, für gewisse Untersuchungen besonders geeignet ausdrücken (vgl. <sup>3)</sup>). In den analytischen S-Matrix-Theorien (vgl. <sup>4)</sup>) postuliert man, durch die Störungstheorie geleitet, Regularitäts-eigenschaften von Feynman-Amplituden im Raum der komplexen Impulsvektoren auf der «Massenschale» und versucht, von dieser Seite her die Phänomene der relativistischen Elementarprozesse zu verstehen.

Die mathematischen Schwierigkeiten bei diesen Untersuchungen sind bekanntlich gross. So beschränkt man sich bei den meisten grundsätzlichen Fragen auf das vereinfachte Modell eines neutralen Skalarfeldes, in der Hoffnung, dass die Komplikationen für realistische Teilchen mit beliebigen Spins rein algebraischer Natur sind. Wir werden an der Klasse der Lorentz-kovarianten holomorphen Tensorfelder, die nach dem obigen in einem gewissen Sinne die fundamentalen Grössen der Theorie darstellen, zeigen, wie und unter welchen Bedingungen eine «Reduktion auf skalare Grössen» im mathematisch strengen Sinne möglich ist.

Genauer sei  $\Lambda \rightarrow S(\Lambda)$  eine irreduzible Tensordarstellung der eigentlichen komplexen Lorentz-Gruppe  $L_+(\mathbf{C})$  (vgl. § 2.), und es sei  $F^\alpha(z_1, \dots, z_n)$  ein  $s$ -Tupel ( $s \equiv \dim S$ ) von in einem Gebiet  $D$  im  $\mathbf{C}^{4n}$  der komplexen Vierervektoren  $z \equiv (z_1, \dots, z_n)$  holomorphen Funktionen, die sich nach der Darstellung  $S$  kovariant transformieren:

$$F^\alpha(\Lambda z_1, \dots, \Lambda z_n) = \sum_{\alpha'=1}^s S(\Lambda)_{\alpha'}^\alpha F^{\alpha'}(z_1, \dots, z_n) \quad (1.1)$$

für alle  $z \in D$  und alle  $\Lambda \in L_+(\mathbf{C})$  mit  $\Lambda z \equiv (\Lambda z_1, \dots, \Lambda z_n) \in D^*$ .

Ist  $\Lambda \rightarrow S(\Lambda)$  die Einsdarstellung, so heisse  $F(z)$  in  $D$   $L_+(\mathbf{C})$ -invariant. Die Menge  $O_S(D)$  der in  $D$  holomorphen  $S$ -kovarianten Tensorfelder (1.1) bildet einen Modul über dem Ring  $O_{[0,0]}(D)$  der in  $D$   $L_+(\mathbf{C})$ -invarianten holomorphen Funktionen.

Das Hauptproblem dieser Arbeit ist es abzuklären, wann der Modul  $O_S(D)$  über dem Ring  $O_{[0,0]}(D)$  von endlichem Typus ist, das heisst wann es in  $D$  endlich viele  $S$ -kovariante holomorphe Tensorfelder  $Q_\alpha^S(z)$  («Standardkovarianten») gibt derart, dass sich jede  $S$ -kovariante analytische Funktion  $F \in O_S(D)$  in  $D$  darstellen lässt als

$$F(z) = \sum_{\alpha=1}^K f_\alpha(z) Q_\alpha^S(z) \quad (1.2)$$

mit  $L_+(\mathbf{C})$ -invarianten holomorphen Funktionen  $f_\alpha \in O_{[0,0]}(D)$ .

Wir werden zeigen (§ 4.), dass eine solche «Standardzerlegung» (1.2) im allgemeinen nicht überall lokal möglich ist, und werden hinreichende Bedingungen (§ 5.) für die Existenz von lokalen und globalen Standardzerlegungen in  $O_S(D)$  angeben. In allen Fällen werden die Standardkovarianten ein minimales System von  $S$ -kovarianten Polynomen (§ 3.) sein, von gewissermassen trivialer kinematischer Natur. Damit wendet sich das Interesse den  $L_+(\mathbf{C})$ -invarianten holomorphen Koeffizientenfunktionen zu. Hier werden wir (§ 5.) ein Theorem von BARGMANN, HALL und WIGHTMAN<sup>5)</sup> verallgemeinern und einen kanonischen Zusammenhang zwischen  $L_+(\mathbf{C})$ -invarianten holomorphen Funktionen und stark holomorphen Funktionen der  $L_+(\mathbf{C})$ -Invarianten herstellen. Diese Resultate werden schliesslich (§ 6.) auf die Theorie der Wightman-Funktion und verallgemeinerten retardierten Funktionen und auf das Problem der invarianten  $S$ -Matrixamplituden<sup>7)</sup> angewandt.

## § 2. Tensordarstellungen von $L_+(\mathbf{C})$

In diesem Abschnitt werden kurz die irreduziblen Tensordarstellungen der eigentlichen homogenen komplexen Lorentz-Gruppe  $L_+(\mathbf{C})$ , der Gruppe der komplexen unimodularen  $4 \times 4$ -Matrizen, die die symmetrische Bilinearform

$$(x, y) \equiv x^0 y^0 - \sum_{n=1}^3 x^n y^n = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \quad (2.1)$$

invariant lassen, charakterisiert. Die  $L_+(\mathbf{C})$  ist isomorph zur eigentlichen komplexen 4-dimensionalen Orthogonalgruppe  $O_+(4, \mathbf{C})$  (die hyperbolische Signatur der Metrik

\*) Durch (1.1) lässt sich  $F^\alpha(z)$  stets  $S$ -kovariant und eindeutig nach  $L_+(\mathbf{C})$   $D$  analytisch fortsetzen<sup>5)</sup>. Daher sei o.E.  $D = L_+(\mathbf{C})$   $D$  angenommen. Da die Tensordarstellungen von  $L_+(\mathbf{C})$  vollreduzibel sind<sup>6)</sup>, ist ferner die Annahme der Irreduzibilität von  $S(\Lambda)$  keine Beschränkung der Allgemeinheit.

$g_{\mu\nu}$  ist nur sinnvoll im Hinblick auf die physikalischen Randwerte im reellen Minkowski-Raum), und so ergeben sich die irreduziblen Tensordarstellungen leicht mit den Methoden der klassischen Darstellungstheorie<sup>6)</sup>. Zur quantitativen Diskussion des physikalisch interessanten Falles der  $L_+(\mathbf{C})$  ist es jedoch vorteilhafter\*), sich auf die einfache Struktur der Darstellungstheorie der  $SL(2, \mathbf{C}) \otimes SL(2, \mathbf{C})$ , der universellen Überlagerungsgruppe der  $L_+(\mathbf{C})$ , zu stützen und im Spinorkalkül zu operieren. Hier gewinnen viele Formeln eine besonders einfache Gestalt, und es wäre möglich, den Aufwand an nichttrivialer komplexer Analysis durch direkte Abschätzungen zu verkleinern (vgl. Lemma 3 und § 5.).

Ordnet man über die Darstellung

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

der Pauli'schen  $2 \times 2$ -Matrizen jedem komplexen Vierervektor  $z$  eineindeutig und linear eine  $2 \times 2$ -Matrix  $\tilde{z}$  zu:

$$z \leftrightarrow \tilde{z} = \sum_{\nu=0}^3 z^\nu \sigma_\nu \quad (2.3)$$

dann wird bekanntlich<sup>32) 10)</sup> ein  $2 - 1$ -Homomorphismus von  $SL(2, \mathbf{C}) \otimes SL(2, \mathbf{C})$  auf  $L_+(\mathbf{C})$  gestiftet, indem jedem  $(A, B) \in SL(2, \mathbf{C}) \otimes SL(2, \mathbf{C})$  die durch

$$\widetilde{A}(A, B) z \equiv A \tilde{z} B^T \quad (2.4)$$

definierte Transformation  $\widetilde{A}(A, B) \in L_+(\mathbf{C})$  zugeordnet wird. Bei diesem Homomorphismus bilden die  $\widetilde{A}(A, \bar{A})$  mit der zu  $A$  konjugiert komplexen Matrix  $\bar{A}$  genau die Einskomponente der reellen homogenen Lorentz-Gruppe  $L_+^\uparrow$ .

Es sei  $\mathfrak{R}^{[r, s]}$  der komplexe Vektorraum der Spinoren  $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_1 \dots \beta_s}$  vom Range  $(r, s)$  mit  $\alpha_i = 1, 2, \beta_j = \dot{1}, \dot{2}$ . Dann ist durch (Summation stets über doppelte Indizes):

$$((A \times B) \psi)_{\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_1 \dots \beta_s} \equiv \prod_{i=1}^r A_{\alpha_i}^{\alpha'_i} \prod_{j=1}^s B_{\beta_j}^{\beta'_j} \psi_{\alpha'_1 \dots \alpha'_r \beta'_1 \dots \beta'_s} \quad (2.5)$$

eine  $2^{r+s}$ -dimensionale i. a. reduzible Darstellung von  $SL(2, \mathbf{C}) \otimes SL(2, \mathbf{C})$  gegeben. Auf dem  $(r+1)(s+1)$ -dimensionalen Teilraum  $\mathfrak{S}^{[r, s]}$  der in  $\alpha$  und  $\beta$  symmetrischen Spinoren  $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_1 \dots \beta_s}$  ist die Darstellung (2.5) irreduzibel, und alle endlichen stetigen irreduziblen Darstellungen von  $SL(2, \mathbf{C}) \otimes (SL(2, \mathbf{C})$  sind vom Typ  $[r, s]$  mit ganzen Zahlen  $r, s \geq 0$ <sup>9)</sup>.

Ein wichtiger invarianter Spinor ist die  $\varepsilon$ -Matrix

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

die in der Darstellung (2.2) mit  $i \sigma_2$  übereinstimmt. Denn wegen  $A \varepsilon A^T = \det(A) \varepsilon$  für alle komplexen  $2 \times 2$  Matrizen  $A$  ergibt die  $\varepsilon$ -Kontraktion zweier ungepunkteter

\*<sup>9)</sup> Die wesentlichen Resultate dieser Arbeit lassen sich unabhängig vom Spinorkalkül für alle klassischen komplexen Gruppen beweisen<sup>8)</sup>.

oder gepunkteter Indizes eines Spinors wieder einen Spinor von um 2 niedrigerem Rang.

Symmetrische Spinoren  $\psi \in \mathfrak{S}^{[r, s]}$  von geradzahligem Gesamttrang  $r + s \equiv O(2)$  und Tensoren  $T$  über dem 4-dimensionalen Minkowski-Raum, die sich nach irreduziblen Darstellungen der  $L_+(\mathbf{C})$  transformieren, stehen nach den folgenden Formeln in eineindeutiger linearer Beziehung zueinander:

$$\left. \begin{aligned} T(\psi)^{\mu_1 \dots \mu_r} &= \prod_{i=1}^r \left( \frac{\sigma_{\mu_i}}{2} \right)^T_{\alpha_i \dot{\beta}_i} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_r \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_s} \prod_{j=1}^{\frac{r-s}{2}} \frac{\epsilon_{\dot{\beta}_s + 2j-1 \dot{\beta}_s + s}}{2} & (r \geq s), \\ T(\psi)^{\mu_1 \dots \mu_s} &= \prod_{i=1}^s \left( \frac{\sigma_{\mu_i}}{2} \right)^T_{\alpha_i \dot{\beta}_i} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_r \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_s} \prod_{j=1}^{\frac{s-r}{2}} \frac{\epsilon_{\alpha_r + 2j-1 \alpha_r + 2j}}{2} & (r \leq s), \end{aligned} \right\} (2.7)$$

mit der Umkehrung:

$$\left. \begin{aligned} \psi(T)_{\alpha_1 \dots \alpha_r \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_s} &= \prod_{i=1}^r (\sigma_{\mu_i})_{\alpha_i \dot{\beta}_i} T^{\mu_1 \dots \mu_r} \prod_{j=1}^{\frac{r-s}{2}} \epsilon_{\dot{\beta}_s + 2j-1 \dot{\beta}_s + 2j} & (r \geq s), \\ \psi(T)_{\alpha_1 \dots \alpha_r \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_s} &= \prod_{i=1}^s (\sigma_{\mu_i})_{\alpha_i \dot{\beta}_i} T^{\mu_1 \dots \mu_s} \prod_{j=1}^{\frac{s-r}{2}} \epsilon_{\alpha_r + 2j-1 \alpha_r + 2j} & (r \leq s). \end{aligned} \right\} (2.8)$$

Die Komplexifikationen aller irreduziblen Tensordarstellungen von  $L_+^\dagger$  sind über die folgende Relation durch Darstellungen der  $SL(2, \mathbf{C}) \otimes SL(2, \mathbf{C})$  vom Typ  $[r, s]$ ,  $r + s \equiv O(2)$ , gegeben:

$$T((A \times B) \psi)^{\mu_1 \dots \mu_n} = \prod_{i=1}^n A(A, B)_{\nu_i}^{\mu_i} T(\psi)^{\nu_1 \dots \nu_n}, \quad (2.9)$$

und das Transformationsgesetz einer  $[r, s]$ -kovarianten Funktion lautet:

$$F_{\alpha \dot{\beta}} (A(A, B) z_1, \dots A(A, B) z_n) = S(A, B)_{\alpha \dot{\beta}}^{\alpha' \dot{\beta}'} F_{\alpha' \dot{\beta}'}(z_1, \dots z_n) \quad (2.10)$$

mit

$$S(A, B)_{\alpha \dot{\beta}}^{\alpha' \dot{\beta}'} = \prod_{i=1}^r A_{\alpha_i}^{\alpha'_i} \prod_{j=1}^s B_{\dot{\beta}_j}^{\dot{\beta}'_j}.$$

Als Bausteine für ein minimales System von Standardkovarianten werden wir in dem folgenden Abschnitt neben dem Vektor  $z^\mu$  noch einige einfache irreduzible Tensorpolynome brauchen. Der Pseudovektor

$$(z_1 \wedge z_2 \wedge z_3)^\mu \equiv \epsilon^{\mu \nu \rho \sigma} (z_1)_\nu (z_2)_\rho (z_3)_\sigma \quad (2.11)$$

von drei Vierervektoren  $z_1, z_2, z_3$  steht über

$$-(z_1 \wedge z_2 \wedge z_3, z_4) = [z_1, z_2, z_3, z_4] \quad (2.12)$$

mit der Determinante  $[z_1, z_2, z_3, z_4]$  von  $z_1, z_2, z_3, z_4$  in Zusammenhang. Dabei ist  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  der total antisymmetrische Tensor vom Rang 4 mit  $\epsilon^{0123} = 1$ . Es gilt die Identität:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = - \det \begin{vmatrix} g^{\alpha\mu} & \dots & g^{\alpha\sigma} \\ \vdots & & \vdots \\ g^{\delta\mu} & \dots & g^{\delta\sigma} \end{vmatrix}. \quad (2.13)$$

Schliesslich sind

$$M_{\pm}(z_1, z_2)^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4} [z_1^\mu z_2^\nu - z_1^\nu z_2^\mu \pm i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (z_1)_\rho (z_2)_\sigma] \quad (2.14)$$

schiefe selbstduale bzw. antiselbstduale Tensoren vom Rang 2.

Über (2.8) erhält man für (2.11) und (2.14) die folgenden Spinorkovarianten:

$$\begin{aligned} \overbrace{(z_1 \wedge z_2 \wedge z_3)_{\alpha\dot{\beta}}} = i & [(z_1, z_2) (\tilde{z}_3)_{\alpha\dot{\beta}} + (z_2, z_3) (\tilde{z}_1)_{\alpha\dot{\beta}} \\ & - (z_1, z_3) (\tilde{z}_2)_{\alpha\dot{\beta}} + (\tilde{z}_1 \epsilon \tilde{z}_2^T \epsilon \tilde{z}_3)_{\alpha\dot{\beta}}] \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\tilde{M}_+(z_1, z_2)_{\alpha_1\alpha_2} = \mathbf{S}_{\alpha} (\tilde{z}_1 \epsilon \tilde{z}_2^T)_{\alpha_1\alpha_2}, \quad \tilde{M}_-(z_1, z_2)_{\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2} = \mathbf{S}_{\dot{\beta}} (\tilde{z}_1^T \epsilon \tilde{z}_2)_{\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2}, \quad (2.16)$$

wobei  $\mathbf{S}$  für die (separate) totale Symmetrisierung der un gepunkteten und gepunkteten Indizes steht:

$$\mathbf{S}_{\alpha, \dot{\beta}} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_r, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_s} \equiv \frac{1}{r! s!} \sum_{P, Q} \psi_{\alpha_{P(1)} \dots \alpha_{P(r)}, \dot{\beta}_{Q(1)} \dots \dot{\beta}_{Q(s)}} \quad (2.17)$$

mit Summation über alle Permutationen  $P$  von  $(1, \dots, r)$  und  $Q$  von  $(1, \dots, s)$ . Schliesslich gilt

$$(z_1, z_2) = -\frac{1}{2} \operatorname{Sp} (\tilde{z}_1 \epsilon \tilde{z}_2^T \epsilon). \quad (2.18)$$

Im folgenden werden wir ohne Gefahr von Missverständnissen die Tilde über einem Spinor fortlassen, dessen Transformationsverhalten ohnehin eindeutig durch die Anzahl der  $\alpha$ - und  $\dot{\beta}$ -Indizes bestimmt ist.

### § 3. $L_+(C)$ -kovariante Polynome

Die Klasse der  $L_+(C)$ -kovarianten Polynome ist in mehrfacher Hinsicht wichtig. Einmal bildet sie die einfachste Familie von  $L_+(C)$ -kovarianten Tensorfeldern, und die sich hier ergebenden grundsätzlichen Zusammenhänge zwischen der Invariantentheorie und der komplexen Analysis werden später die «kanonische» Struktur des Moduls  $O_{[r, s]}(D)$  und der Ringe  $O_{[0, 0]}(D), O_0(D)$  kennzeichnen. Zum anderen werden wir für jede irreduzible Darstellung  $[r, s]$  von  $L_+(C)$  ein minimales System von kovarianten Polynomen  $Q_{\alpha}^{[r, s]}(z)$  konstruieren, die den Modul  $\mathfrak{P}_{[r, s]}(z)$  der  $[r, s]$ -kovarianten Polynome in den Variablen  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{4n}$  über dem Unterring  $\mathfrak{P}_0(z) \subset \mathfrak{P}_{[0, 0]}(z)$  der  $L(C)$ -invarianten Polynome erzeugen. Dieses Erzeugendensystem wird später – nach der «Komplettierung» des Moduls  $\mathfrak{P}_{[r, s]}(z)$  zum Modul  $O_{[r, s]}(D)$  – in gewissen Fällen für die in  $D$   $[r, s]$ -kovarianten analytischen Funktionen

ausreichen. Schliesslich gewinnen wir hier einen quantitativen Zusammenhang zwischen  $L_{(+)}(\mathbf{C})$ -invarianten Polynomen und Polynomen in den  $L_{(+)}(\mathbf{C})$ -Invarianten – eine Illustration der analytischen Strukturen, die wir im § 5. antreffen werden.

Man erhält leicht einen Überblick über die algebraische Struktur der Moduln  $\mathfrak{P}_{[r, s]}(z)$  durch die Reduktion von Monomen

$$\prod_{i=1}^d (z_{\alpha_i})_{\alpha_i \dot{\beta}_i}, \quad z_{\alpha_i} \in \{z_1, \dots, z_n\}, \quad (3.1)$$

in unter  $L_+(\mathbf{C})$  irreduzible Komponenten. Ist  $q_{\alpha_1 \dots \alpha_r, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_s}$  ein irreduzibler Spinor der Darstellung  $[r, s]$ , so zerfällt bekanntlich das Tensorprodukt  $q_{\alpha_1 \dots \alpha_r, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_s} \times z_{\alpha_{r+1} \dot{\beta}_{s+1}}$  in die folgenden irreduziblen Terme:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{\alpha, \dot{\beta}} q_{\alpha_1 \dots \alpha_r, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_s} z_{\alpha_{r+1} \dot{\beta}_{s+1}} , \quad \sum_{\alpha} q_{\alpha_1 \dots \alpha_r, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_s} z_{\alpha_{r+1} \dot{\beta}_{s+1}} \varepsilon_{\dot{\beta}_s \dot{\beta}_{s+1}} , \\ & \sum_{\dot{\beta}} q_{\alpha_1 \dots \alpha_r, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_s} z_{\alpha_{r+1} \dot{\beta}_{s+1}} \varepsilon_{\alpha_r \alpha_{r+1}}, \quad q_{\alpha_1 \dots \alpha_r, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_s} z_{\alpha_{r+1} \dot{\beta}_{s+1}} \varepsilon_{\alpha_r \alpha_{r+1}} \varepsilon_{\dot{\beta}_s \dot{\beta}_{s+1}} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

zu den Darstellungen  $[r+1, s+1]$ ,  $[r+1, s-1]$  ( $s > 0$ ),  $[r-1, s+1]$  ( $r > 0$ ) und  $[r-1, s-1]$  ( $r, s > 0$ ). So zerfällt (3.1) (vgl. Lemma 3) in eine Summe von  $[r, s]$ -kovarianten Monomen mit stets  $r+s \equiv 0(2)$ , in denen gewisse  $\alpha$ - und  $\dot{\beta}$ -Indexpaare  $\varepsilon$ -kontrahiert sind und die freien  $\alpha$ - und  $\dot{\beta}$ -Indizes symmetrisiert sind. Die Identität (2.13) spiegelt sich im binären Bereich der Spinoren in der Tatsache, dass Ketten von mit mehr als 2  $\varepsilon$ -Spinoren kontrahierten  $(z_{\alpha_i})_{\alpha_i \dot{\beta}_i}$  sich stets in einfachere Kovarianten zerlegen lassen durch Identitäten wie

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{\alpha} (z_1 \varepsilon z_2^T \varepsilon z_3 \varepsilon z_4^T)_{\alpha_1 \alpha_2} = (z_1, z_3) M_+(z_2, z_4)_{\alpha_1 \alpha_2} + (z_2, z_4) M_+(z_1, z_3)_{\alpha_1 \alpha_2} \\ & \quad - (z_1, z_2) M_+(z_3, z_4)_{\alpha_1 \alpha_2} - (z_3, z_4) M_+(z_1, z_2)_{\alpha_1 \alpha_2} \\ & \quad - (z_1, z_4) M_+(z_2, z_3)_{\alpha_1 \alpha_2} - (z_2, z_3) M_+(z_1, z_4)_{\alpha_1 \alpha_2} . \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Ebenfalls lassen sich Kovarianten wie  $M_+(z_1, z_2) M_-(z_3, z_4)$ ,  $[z_1, z_2, z_3, z_4] z_5$ ,  $M_{\pm}(z_1, z_2) \times (z_3 \wedge z_4 \wedge z_5)$  und  $(z_1 \wedge z_2 \wedge z_3) (z_4 \wedge z_5 \wedge z_6)$  singularitätenfrei auf einfache Kovarianten mit Koeffizientenpolynomen in den Skalarprodukten reduzieren. Durch vollständige Induktion nach  $d$  folgt das

*Lemma 1:* Der Modul  $\mathfrak{P}_{[r, s]}(z)$ ,  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^{4n}$ , ist über dem Ring  $\mathfrak{P}_0(z)$  von endlichem Typus. Jedes kovariante Polynom  $q_{\alpha \dot{\beta}}(z) \in \mathfrak{P}_{[r, s]}(z)$  ist zerlegbar in:

$$q_{\alpha \dot{\beta}}(z) = \sum_{\alpha}^K q_{\alpha}(z) Q_{\alpha}^{[r, s]}(z)_{\alpha \dot{\beta}} \quad (3.4)$$

mit invarianten Polynomen  $q_{\alpha}(z) \in \mathfrak{P}_0(z)$  in den Skalarprodukten  $(z_i, z_j)$  und mit den folgenden Standardkovarianten:

( $\alpha$ ) für  $r = s + 2, t > s$ :

$$Q_{\alpha}^{[r, s]}(z)_{\alpha \dot{\beta}} = \sum_{\alpha \dot{\beta}} \left[ \prod_{l=1}^s (z_{\alpha_l}) \prod_{m=1}^t M_+(z_{\alpha_{s+2m-1}}, z_{\alpha_{s+2m}}) \right]_{\alpha \dot{\beta}}, \quad (3.5a)$$

(β) für  $s = r + 2 t > r$ :

$$Q_{\alpha \dot{\beta}}^{[r, s]}(z) = \mathbf{S}_{\alpha \dot{\beta}} \left[ \prod_{l=1}^r (z_{\alpha_l}) \prod_{m=1}^t M_{-}(z_{\alpha_r+2m-1}, z_{\alpha_r+2m}) \right]_{\alpha \dot{\beta}}, \quad (3.5b)$$

(γ) für  $r = s \neq 0$ :

$$Q_{\alpha \dot{\beta}}^{[r, r]}(z) = \mathbf{S}_{\alpha \dot{\beta}} \prod_{l=1}^r (z_{\alpha_l})_{\alpha_l \dot{\beta}_l}, \quad (3.5c)$$

$$Q_{\alpha \dot{\beta}}^{[r, r]}(z) = \mathbf{S}_{\alpha \dot{\beta}} \prod_{l=1}^{r-1} (z_{\alpha_l})_{\alpha_l \dot{\beta}_l} (z_{\alpha_r} \wedge z_{\alpha_{r+1}} \wedge z_{\alpha_{r+2}})_{\alpha_r \dot{\beta}_r}, \quad (3.5d)$$

(δ) für  $r = s = 0$ :

$$Q_0^{[0, 0]}(z) = 1, \quad Q_{\alpha}^{[0, 0]}(z) = [z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, z_{\alpha_3}, z_{\alpha_4}]. \quad (3.5e)$$

Hierbei steht  $\alpha \dot{\beta}$  für  $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \dot{\beta}_1, \dots, \dot{\beta}_s$  und  $\alpha$  für alle Kombinationen von Vierervektoren  $z_{\alpha} \in \{z_1, \dots, z_n\}$ , die über  $\mathbf{C}$  verschiedene Standardkovarianten liefern. Für festes  $[r, s]$  und  $n$  gilt:  $1 \leq \alpha \leq K = K(r, s, n) \leq \infty$ .

Insbesondere ist also jedes  $L(\mathbf{C})$ -invariante Polynom  $p(z_1, \dots, z_n)$  als Polynom  $\hat{p}((z_i, z_j))$  in den  $r \equiv n(n+1)/2$   $L(\mathbf{C})$ -Vektorinvarianten  $(z_i, z_j)$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$ , darstellbar und ebenso jedes  $L_+(\mathbf{C})$ -invariante Polynom  $q(z_1, \dots, z_n)$  als Polynom  $\hat{q}((z_i, z_j), [z_{k_1}, \dots, z_{k_4}])$  in den  $r_+ \equiv n(n+1)/2 + \max \left\{ 0, \binom{n}{4} \right\}$   $L_+(\mathbf{C})$ -Invarianten  $(z_i, z_j)$  und  $[z_{k_1}, \dots, z_{k_4}]$  mit  $1 \leq k_1 < \dots < k_4 \leq n$ . Dies ist ein Spezialfall des sogenannten 1. Hauptsatzes der Invariantentheorie<sup>6)</sup>. Jedoch ist eine solche Darstellung im allgemeinen nicht eindeutig. Zwischen den  $L(\mathbf{C})$ -Invarianten von  $n$  4-Vektoren  $z_1, \dots, z_n$  gelten für  $n \geq 5$  die Relationen:

$$\det \begin{vmatrix} (z_{i_1}, z_{j_1}) & \dots & (z_{i_1}, z_{j_5}) \\ \vdots & & \vdots \\ (z_{i_5}, z_{j_1}) & \dots & (z_{i_5}, z_{j_5}) \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{array}{l} 1 \leq i_1 < \dots < i_5 \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_5 \leq n \end{array} \quad (3.6)$$

und für die  $L_+(\mathbf{C})$ -Invarianten noch für  $n \geq 4$ :

$$[z_{k_1}, \dots, z_{k_4}] [z_{l_1} \dots z_{l_4}] + \det \begin{vmatrix} (z_{k_1}, z_{l_1}) & \dots & (z_{k_1}, z_{l_4}) \\ \vdots & & \vdots \\ (z_{k_4}, z_{l_1}) & \dots & (z_{k_4}, z_{l_4}) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.7)$$

mit  $1 \leq k_1 < \dots < k_4 \leq n$ ,  $1 \leq l_1 < \dots < l_4 \leq n$ .

Aus dem 2. Hauptsatz der Invariantentheorie<sup>6)</sup><sup>11)</sup> folgt, dass alle Polynom-Relationen zwischen den  $L_+(\mathbf{C})$  Vektorinvarianten auf (3.6) (und (3.7)) zurückgeführt werden können: sei in dem  $\mathbf{C}^{r(+)}$  der komplexen Variablen  $z_{ij}$  (und  $z_{k_1 k_2 k_3 k_4}$ ) mit den Symmetrien  $z_{ij} = z_{ji}$  (und  $z_{k_1 k_2 k_3 k_4} = \text{sgn } \pi \times z_{k_{\pi(1)} k_{\pi(2)} k_{\pi(3)} k_{\pi(4)}}$ ) ein Polynom  $P(\hat{z})$  gegeben, das bei der Substitution

$$z_{ij} = (z_i, z_j) \quad (\text{und } z_{k_1 k_2 k_3 k_4} = [z_{k_1}, z_{k_2}, z_{k_3}, z_{k_4}]) \quad (3.8)$$

für die Vektorinvarianten der  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^{4n}$  identisch verschwindet, dann gehört  $P(\hat{z})$  dem Polynomideal über dem  $\mathbf{C}^{r(+)}$  an, das durch die Relationen (3.6) (und (3.7)) in den Variablen  $z_{ij}$  (und  $z_{k_1 k_2 k_3 k_4}$ ) erzeugt wird.

Sei  $I^{(+)}: \mathbf{C}^{4n} \rightarrow \mathbf{C}^{r(+)}$  die Abbildung, die jedem  $n$ -Tupel von Vierervektoren  $z_1, \dots, z_n$  die  $r_{(+)} L_{(+)}(\mathbf{C})$ -Invarianten  $I_1^{(+)}(z), \dots, I_{r_{(+)}}^{(+)}(z)$  – nämlich die  $(z_i, z_j)$  und eventuell die  $[z_{k_1}, \dots, z_{k_4}]$  – zuordnet. Man überzeugt sich leicht<sup>5)8)</sup>, dass das  $I^{(+)}$ -Bild des  $\mathbf{C}^{4n}$  genau die durch die Relationen (3.6) (und (3.7)) definierte algebraische Varietät  $\hat{I}^{(+)} \subset \mathbf{C}^{r(+)}$  ist.

Jetzt lassen sich unsere Kenntnisse über die Struktur der Ringe  $\mathfrak{P}_{[0,0]}(z)$ ,  $\mathfrak{P}_{(0)}(z)$  folgendermassen zusammenfassen:

*Lemma 2:* Zu jedem im  $\mathbf{C}^{4n}(z) L_{(+)}(\mathbf{C})$ -invarianten Polynom  $P(z_1, \dots, z_n)$  gibt es ein Polynom  $\hat{P}(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_{r_{(+)}})$  im  $\mathbf{C}^{r(+)}(\hat{z})$  mit

$$P(z_1, \dots, z_n) = \hat{P}(I_1^{(+)}(z), \dots, I_{r_{(+)}}^{(+)}(z)) \equiv \hat{P} \circ I^{(+)}(z). \quad (3.9)$$

Je zwei Polynome  $\hat{P}_1(\hat{z}), \hat{P}_2(\hat{z})$  definieren dasselbe  $L_{(+)}(\mathbf{C})$ -invariante Polynom  $P(z)$ , falls sie auf  $\hat{I}^{(+)}$  übereinstimmen, das heisst falls ihre Differenz dem durch die Relationen (3.5) (und (3.6)) erzeugten Polynomideal angehört.

Man vergleiche mit Lemma 1 und 2 die Sätze 2 und 3 des Abschnittes § 5!

Eine charakteristische Schwierigkeit wird später bei den funktionentheoretischen Untersuchungen auftreten und nur mit nichttrivialen Sätzen der analytischen Garbentheorie überwunden werden können: die Tatsache, dass im allgemeinen die Standardkovarianten  $Q_{\alpha\beta}^{[r,s]}(z)$  nicht global singularitätenfrei fast überall zu einem im Darstellungsraum  $\mathfrak{S}^{[r,s]}$  linear unabhängigen System verkürzt werden können. Da nun in den Fällen, wo dies doch möglich ist, stärkere Resultate beweisbar sind, seien kurz quantitativ die Abhängigkeitsrelationen diskutiert.

Im Falle  $n = 1$  ist  $\mathfrak{P}^{[r,s]}(z_1)$  leer für  $r \neq s$  und  $\mathfrak{P}^{[r,r]}(z_1)$  wird erzeugt durch das einzige Tensorpolynom:

$$Q^{[r,r]}(z_1)_{\alpha\dot{\beta}} = \mathbf{S}_{\alpha\dot{\beta}} \prod_{l=1}^r (z_1)_{\alpha_l \dot{\beta}_l}. \quad (3.10)$$

Für  $n = 2$  ist das Erzeugendensystem von  $\mathfrak{P}_{[r,s]}(z_1, z_2)$

$$Q_{\alpha\dot{\beta}}^{[r,s]}(z_1, z_2) = \mathbf{S}_{\alpha\dot{\beta}} \left[ \prod_{l=1}^{\alpha} (z_1) \prod_{m=1}^{\min[r,s]-\alpha} (z_2) \prod_{n=1}^{\frac{|r-s|}{2}} M_{\pm}(z_1, z_2) \right]_{\alpha\dot{\beta}}. \quad (3.11)$$

$(0 \leq \alpha \leq \min\{r, s\})$  linear unabhängig im  $\mathfrak{S}^{[r,s]}$ , falls  $z_1$  und  $z_2$  linear unabhängig und nicht total isotrop sind (vgl. § 4.).

Für  $n = 3$  wird  $\mathfrak{S}^{[r,s]}$  durch die Standardkovarianten (3.5) aufgespannt, falls die Gram'sche Determinante  $G(z_1, z_2, z_3) \neq 0$  ist. Für die Darstellungen vom Typ  $[r,r]$ ,  $[2,0]$  und  $[0,2]$  bilden die  $Q_{\alpha\dot{\beta}}^{[r,s]}(z)$  dann eine Basis. Für Darstellungen  $[r,s]$  mit  $|r-s| = 2$  sind für  $G(z_1, z_2, z_3) \neq 0$  die einzigen Abhängigkeitsrelationen über dem Konstantenkörper  $\mathbf{C}$ , und zwar von der Art:

$$\mathbf{S}_{\alpha\dot{\beta}} [z_1 M_{\pm}(z_2, z_3) + z_2 M_{\pm}(z_3, z_1) + z_3 M_{\pm}(z_1, z_2)]_{\alpha\dot{\beta}} = 0. \quad (3.12)$$

Daher kann hier das Erzeugendensystem  $\{Q_{\alpha}^{[r,s]}(z)\}$  global und singularitätenfrei zu einer Basis von  $\mathfrak{S}^{[r,s]}$  verkürzt werden. Für  $|r-s| > 2$  treten dann weiter Relationen über  $\mathfrak{P}_0(z)$  auf, wie:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S}_{\alpha, \beta} & [(z_1, z_1) M_{\pm}(z_2, z_3) M_{\pm}(z_2, z_3) + (z_2, z_2) M_{\pm}(z_3, z_1) M_{\pm}(z_3, z_1) \\ & + (z_3, z_3) M_{\pm}(z_1, z_2) M_{\pm}(z_1, z_2) + 2(z_1, z_2) M_{\pm}(z_2, z_3) M_{\pm}(z_3, z_1) \\ & + 2(z_2, z_3) M_{\pm}(z_3, z_1) M_{\pm}(z_1, z_2) + 2(z_3, z_1) M_{\pm}(z_1, z_2) M_{\pm}(z_2, z_3)]_{\alpha, \beta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Hier ist keine globale singularitätenfreie Verkürzung des Erzeugendensystems mehr möglich.

Für  $n = 4$  sind in der Darstellung  $[0, 0]$  die Erzeugenden 1 und  $[z_1 z_2 z_3 z_4]$  unabhängig über  $\mathfrak{P}_0(z)$  und ebenso in (1.1) die Vektoren  $z_1, z_2, z_3, z_4$  und die Pseudovektoren  $z_1 \wedge z_2 \wedge z_3, z_2 \wedge z_3 \wedge z_4, z_3 \wedge z_4 \wedge z_1, z_4 \wedge z_1 \wedge z_2$ . Sonst existiert hier und für höhere  $n$  keine globale Polynombasis von  $\mathfrak{P}^{[r,s]}(z)$ .

Wenn auch die Darstellung (3.4) nicht eindeutig ist, so kann man dennoch Zerlegungen angeben, bei denen die auftretenden Terme «nicht zu gross» werden. Genauer heisse eine Einheit vom Grade  $d$  die  $[r, s]$ -Kovariante:

$$\left. \begin{aligned} Q_{\alpha}^{[r,s]}(z)_{\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_1 \dots \beta_s} & \prod_{a=1}^{\frac{d-m}{2}} \text{Sp} (z_{\alpha_m+2a-1} \varepsilon z_{\alpha_m+2a}^T \varepsilon) \times \\ & \times \prod_{b=1}^{\frac{d-r}{2}} \varepsilon_{\alpha_r+2b-1 \alpha_r+2b} \prod_{c=1}^{\frac{d-s}{2}} \varepsilon_{\beta_s+2c-1 \beta_s+2c} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

mit  $m = \max\{r, s\}$  (bzw.  $m = r, r+2$  für  $r = s \neq 0$ ) und mit  $d-r, d-s = 0, 2, 4, \dots$  und  $Q_{\alpha}^{[r,s]}(z)$  nach (3.5). Der Betrag eines numerischen Faktors vor (3.14) heisse Gewicht der Einheit. Dann gilt das

*Lemma 3:* Es gibt eine Reduktion des Monoms  $\prod_{i=1}^d (z_{\alpha_i})_{\alpha_i \beta_i}$  vom Grade  $d$  in eine Summe von Einheiten (3.14) vom Grade  $d$  und höchstens einem Gesamtgewicht  $B^d$  ( $B < \infty$  konstant, unabhängig von  $z$  und  $d$ ).

Der Beweis erfolgt induktiv nach  $d$  durch wiederholte Anwendung der Clebsch-Gordan-Reihe. Auf die Bereitstellung der notwendigen Spinoridentitäten (vgl. (3.3)) sei hier verzichtet, da die Hauptresultate dieser Arbeit – Satz 2 und 3 – ebenfalls aus einem allgemeinen Satz von GRAUERT und REMMERT<sup>12)</sup> (vgl. 8)) gefolgt werden können.

#### § 4. Der Fall $n = 1, 2$ und ein Gegenbeispiel für $n = 3$

Lorentz-kovariante analytische Funktionen von einer oder zwei Vierervektorvariablen lassen stets eine eindeutige holomorphe Standardzerlegung (1.2) zu. Dieser – von H. ARAKI entdeckte Sachverhalt \*) – beruht wesentlich auf der Existenz von

\*) Ich danke Herrn Dr. H. ARAKI für die Benutzung seiner Resultate an dieser Stelle.

Isotropiegruppen  $G_+(z)$  von  $L_+(\mathbf{C})$ , unter denen auf Grund der  $L_+(\mathbf{C})$ -Kovarianz (1.1) das Tensorfeld  $F_{\alpha\dot{\beta}}(z)$  invariant sein muss. Die spezielle Gestalt dieser  $G_+(z)$ -invarianten Tensoren liefert zusammen mit der linearen Unabhängigkeit der Standardkova- rianten (3.10), (3.11) für  $n = 1, 2$  die Behauptung.

Eine Verallgemeinerung dieser Resultate auf holomorphe Tensorfelder mit 3 und mehr Argumentvektoren ist dagegen nicht mehr uneingeschränkt möglich, wie es ein typisches Gegenbeispiel für den Fall  $n = 3$  am Ende dieses Abschnittes illustrieren wird.

*Satz 1:* (H. ARAKI):

a) Alle  $[r, s]$ -holomorphen Tensorfelder  $F_{\alpha\dot{\beta}}(z_1)$  von einer Vierervektorvariablen  $z_1 \in D_1 \subset \mathbf{C}^4$  sind eindeutig zerlegbar in der Form:

$$F_{\alpha\dot{\beta}}(z_1) = \begin{cases} f(z_1) Q^{[r, r]}(z_1)_{\alpha\dot{\beta}} & \text{für } r = s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.1)$$

mit einer in  $D_1$  holomorphen  $L(\mathbf{C})$ -invarianten Funktion  $f(z_1)$ .

b) Für  $[r, s]$ -holomorphe Tensorfelder  $F_{\alpha\dot{\beta}}(z_1, z_2)$  von zwei Vierervektorvariablen  $(z_1, z_2) \in D_2 \subset \mathbf{C}^8$  gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$F_{\alpha\dot{\beta}}(z_1, z_2) = \sum_{\alpha=0}^{\min\{r, s\}} f_{\alpha}(z_1, z_2) Q_{\alpha}^{[r, s]}(z_1, z_2)_{\alpha\dot{\beta}} \quad (4.2)$$

mit in  $D_2$  holomorphen  $L(\mathbf{C})$ -invarianten Funktionen  $f_{\alpha}(z_1, z_2)$ .

Dem Beweis dieses Satzes schicken wir zwei Hilfssätze voraus:

*Lemma 4:* Sei  $G_+(z_1)$  die Isotropiegruppe von  $z_1$ , das heisst die Untergruppe der Elemente von  $L_+(\mathbf{C})$ , die den Vektor  $z_1$  fest lassen, und sei der Spinor  $\psi_{\alpha\dot{\beta}} \in \mathfrak{S}^{[r, s]}$  mit  $r + s \equiv 0(2)$  invariant unter  $G_+(z_1)$ . Dann ist  $\psi_{\alpha\dot{\beta}} = 0$  für  $r \neq s$  oder  $z_1 = 0$  und für  $r = s$  und  $z_1 \neq 0$  von der Gestalt:

$$\psi_{\alpha\dot{\beta}} = \psi \mathbf{S}_{\alpha\dot{\beta}} \prod_{i=1}^r (z_1)_{\alpha_i \dot{\beta}_i}, \quad \psi \in \mathbf{C}. \quad (4.3)$$

*Beweis:* Sei zunächst  $z_1 = l_0 = (1, 0, 0, 0)$  (das heisst  $\tilde{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ). Dann ist die reelle Orthogonalgruppe  $O_+(3, \mathbf{R})$  in drei Dimensionen die Untergruppe der reellen Elemente von  $G_+(z_1)$ .  $O_+(3, \mathbf{R})$  ist über den Homomorphismus (2.4) das Bild der Paare  $(U, \bar{U})$  mit  $U \in S U(2, \mathbf{C})$ .

Alle irreduziblen eindeutigen Darstellungen von  $O_+(3, \mathbf{R})$  sind vom Typ  $\mathfrak{D}^j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , realisiert durch symmetrische Spinoren vom Rang  $(2j, 0)$  oder, äquivalent,  $(0, 2j)^9$ . Daher zerfällt die irreduzible Darstellung  $[r, s]$ ,  $r + s \equiv 0(2)$ , von  $L_+(\mathbf{C})$  als Darstellung von  $O_+(3, \mathbf{R})$  wie ein Tensorprodukt:

$$[r, s] \sim \mathfrak{D}^{r/2} \otimes \mathfrak{D}^{s/2} \sim \mathfrak{D}^{(r+s)/2} \oplus \dots \oplus \mathfrak{D}^{|r-s|/2}. \quad (4.4)$$

Ein Spinor  $\psi_{\alpha\dot{\beta}} \neq 0$  aus  $\mathfrak{S}^{[r,s]}$  ist also genau dann invariant unter  $O_+(3, \mathbf{R})$ , falls  $r = s$  ist und  $\psi_{\alpha\dot{\beta}}$  von der Gestalt:

$$\psi_{\alpha\dot{\beta}} = \psi \sum_{\alpha\dot{\beta}} \prod_{i=1}^r (l_0)_{\alpha_i\dot{\beta}_i}, \quad \psi \in \mathbf{C}. \quad (4.5)$$

Zu einem beliebigen Vektor  $z_1$  mit  $(z_1, z_1) \neq 0$  gibt es stets ein  $\Lambda \in L_+(\mathbf{C})$  mit  $z_1 = \alpha \Lambda l_0$ ,  $\alpha \in \mathbf{C}$ . Falls  $\psi_{\alpha\dot{\beta}}$   $G_+(z_1)$ -invariant ist, so ist

$$\tilde{\psi}_{\alpha\dot{\beta}} \equiv S(\Lambda^{-1})_{\alpha\dot{\beta}}^{\alpha'\dot{\beta}'} \psi_{\alpha'\dot{\beta}'} \quad (4.6)$$

$G_+(l_0)$ -invariant und daher von der Form (4.5). Also gilt (4.3), wenn immer  $(z_1, z_1) \neq 0$  ist.

Ist nun  $z_1 \neq 0$  ein Nullvektor, so kann er immer durch  $L_+(\mathbf{C})$  auf  $l = (1, 0, 0, 1)$  (also  $\tilde{l} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ) transformiert werden.

In diesem Fall wird die Untergruppe  $G_+(l)$  erzeugt durch die Bilder der Elemente von  $SL(2, \mathbf{C}) \otimes SL(2, \mathbf{C})$ :

$$\left. \begin{array}{l} (A(\alpha), B(\beta)) \text{ mit } A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ (C(\theta), \overline{C(\theta)}) \text{ mit } C(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}. \end{array} \right\} \quad (4.7)$$

Sei  $\psi(r_2)_{\dot{\beta}} \equiv \psi_{1\dots 1 \overbrace{2\dots 2}^{r_2}, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_s}$  die Komponente des  $G_+(l)$ -invarianten Spinors  $\psi_{\alpha\dot{\beta}} \in \mathfrak{S}^{[r,s]}$ , wo  $r_2$  der (symmetrischen) Indizes  $\alpha_i = 2$  sind. Dann gilt

$$((A(\alpha) \times \mathbf{1}) \psi)(r_2)_{\dot{\beta}} = \sum_{m=0}^{r-r_2} \psi(r_2 + m)_{\dot{\beta}} \binom{m+r_2}{m} \alpha^m. \quad (4.8)$$

Damit  $\psi_{\alpha\dot{\beta}}$  unter allen  $A(\alpha) \times \mathbf{1}$  invariant ist, ist notwendig und hinreichend:

$$\psi(r_2 + m)_{\dot{\beta}} = 0 \quad \text{für alle } \dot{\beta} \quad \text{und} \quad r - r_2 \geq m \geq 1. \quad (4.9)$$

Daher ist  $\psi(r_2)_{\dot{\beta}} = 0$  für alle  $\dot{\beta}$  ausser für  $r_2 = 0$ , und aus einem analogen Argument mit  $\mathbf{1} \times B(\beta)$  folgt das Verschwinden aller Komponenten von  $\psi_{\alpha\dot{\beta}}$  ausser von  $\psi_{1\dots 1 i\dots i}$ . Schliesslich bedingt die Invarianz unter  $C(\theta) \times \overline{C(\theta)}$  die Gleichheit  $r = s$ . Dies beweist Lemma 1.

*Lemma 2:* Sei  $G_+(z_1, z_2)$  die Untergruppe der Elemente von  $L_+(\mathbf{C})$ , die zwei linear unabhängige, nicht total isotrope Vektoren  $z_1, z_2$  fest lässt. Dann ist jeder  $G_+(z_1, z_2)$ -invariante Spinor  $\psi_{\alpha\dot{\beta}} \in \mathfrak{S}^{[r,s]}$  mit  $r + s \equiv 0(2)$  von der Gestalt

$$\psi_{\alpha\dot{\beta}} = \sum_{\alpha=0}^{\min\{r, s\}} \psi(\alpha) Q_{\alpha}^{[r, s]}(z_1, z_2)_{\alpha\dot{\beta}} \quad (4.10)$$

mit eindeutig bestimmten komplexen Koeffizienten  $\psi(\alpha)$ .

*Beweis:* 2 Vektoren  $z_1, z_2$  mit  $\det(z_1, z_2) \neq 0$  können stets durch  $L_+(\mathbf{C})$  in den durch  $l_0 = (1, 0, 0, 0)$  und  $l_3 = (0, 0, 0, 1)$  aufgespannten Teilraum gedreht werden.  $G_+(l_0, l_3)$  besteht aus den Elementen  $\Lambda(C(\theta), \overline{C(\theta)})$  über den Homomorphismus (2.4).

Sei  $\psi(r_1, s_1)$  eine Komponente des Spinors  $\psi_{\alpha\dot{\beta}} \in \mathfrak{S}^{[r, s]}$  mit  $r_1$  der  $\alpha_i = 1$ ,  $s_1$  der  $\dot{\beta}_j = 1$ . Diese transformiert sich unter  $G_+(l_0, l_3)$  wie folgt:

$$((C(\theta) \times \overline{C(\theta)}) \psi)(r_1, s_1) = e^{i\theta/2(2r_1 - r + s - 2s_1)} \psi(r_1, s_1). \quad (4.11)$$

Daher folgt aus der  $G_+(l_0, l_3)$ -Invarianz von  $\psi_{\alpha\dot{\beta}}$ :

$$r_1 = \frac{r-s}{2} + s_1. \quad (4.12)$$

Im Falle  $r \geq s$  ist somit der symmetrische Spinor  $\psi_{\alpha\dot{\beta}}$  eindeutig durch die folgenden  $s+1$  Komponenten bestimmt:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{s_1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{\frac{r-s}{2}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{s-s_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{\frac{r-s}{2}}); \quad (\dot{\beta}_1, \dots, \dot{\beta}_s) = (\underbrace{\dot{1}, \dots, \dot{1}}_{s_1}, \underbrace{\dot{2}, \dots, \dot{2}}_{s-s_1}). \quad (4.13)$$

Nun ist

$$\left(\frac{l_0 + l_3}{2}\right)_{\alpha\dot{\beta}} = \delta_{\alpha}^1 \delta_{\dot{\beta}}^1, \quad \left(\frac{l_0 - l_3}{2}\right)_{\alpha\dot{\beta}} = \delta_{\alpha}^2 \delta_{\dot{\beta}}^2 \quad \text{und} \quad M_+(l_0, l_3)_{\alpha_1 \alpha_2} = -(\delta_{\alpha_1}^1 \delta_{\alpha_2}^2 + \delta_{\alpha_1}^2 \delta_{\alpha_2}^1).$$

Dies ermöglicht die Darstellung:

$$\psi_{\alpha\dot{\beta}} = \sum_{s_1=1}^s \tilde{\psi}(s_1) \mathbf{S}_{\alpha\dot{\beta}} \left[ \prod_{i=1}^{s_1} \left(\frac{l_0 + l_3}{2}\right)_{\alpha_i \dot{\beta}_i} \prod_{j=s_1+1}^s \left(\frac{l_0 - l_3}{2}\right)_{\alpha_j \dot{\beta}_j} \times \prod_{k=1}^{\frac{r-s}{2}} M_+(l_0, l_3)_{\alpha_{s+2k-1} \alpha_{s+2k}} \right], \quad (4.14)$$

also:

$$\psi_{\alpha\dot{\beta}} = \sum_{\kappa=1}^{\min\{r, s\}} \psi(\kappa) Q_{\kappa}^{[r, s]}(z_1, z_2)_{\alpha\dot{\beta}}.$$

Aus der Gleichheit der Zahl der Komponenten (4.13) und der Anzahl der  $Q_{\kappa}^{[r, s]}(z_1, z_2)$  folgt die Eindeutigkeit der Darstellung und die lineare Unabhängigkeit der Standardkovarianten.

Ist für lineare unabhängige  $z_1, z_2$  die Skalarproduktmatrix vom Rang 1, so können  $z_1, z_2$  durch  $L_+(\mathbf{C})$  in den von  $l_2 = (0, 0, 1, 0)$  und  $l = (1, 0, 0, 1)$  aufgespannten Teilraum gedreht werden.  $G_+(l_2, l)$  besteht aus den Elementen  $A(A(\alpha), B(\alpha))$  mit (4.7).

Sei  $\psi(r_2, s_2)$  eine Komponente des Spinors  $\psi_{\alpha\dot{\beta}} \in \mathfrak{S}^{[r, s]}$  mit  $r_2$  der  $\alpha_i = 2$ ,  $s_2$  der  $\dot{\beta}_j = 2$ . Dann gilt unter  $G_+(l_2, l)$

$$((A(\alpha) \times B(\alpha)) \psi)(r_2, s_2) = \sum_{m=0}^{r-r_2} \sum_{n=0}^{s-s_2} \alpha^{m+n} \binom{r_2+m}{m} \binom{s_2+n}{n} \psi(r_2+m, s_2+n). \quad (4.15)$$

Notwendig und hinreichend für die  $G_+(l_2, l)$ -Invarianz ist:

$$\sum_{m=0}^{r-r_2} \sum_{n=0}^{s-s_2} \frac{(r_2+m)!}{m!} \frac{(s_2+n)!}{n!} \psi(r_2+m, s_2+n) = 0 \quad (4.16)$$

$m+n=M$

für  $1 \leq M \leq r + s - r_2 - s_2$ . Setzt man  $M = 1$ , so folgt

$$\psi(r_2 + 1, s_2) = -\frac{s_2 + 1}{r_2 + 1} \psi(r_2, s_2 + 1) \quad (4.17)$$

und mit  $s_2 = s$ :  $\psi(r_2, s) = 0$  für  $1 \leq r_2 \leq r$  und mit  $r_2 = r$ :  $\psi(r, s_2) = 0$  für  $1 \leq s_2 \leq s$ . Also gilt:

$$\psi(r_2, s_2) = \begin{cases} 0 & \text{für } r_2 + s_2 > \min\{r, s\} \\ (-1)^{r_2} \binom{r_2 + s_2}{r_2} \psi(0, r_2 + s_2) & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.18)$$

Wegen

$$(l_2)_{\alpha \dot{\beta}} = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha \dot{\beta}}, \quad (l)_{\alpha \dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha \dot{\beta}}$$

und

$$M_+(l_2, l)_{\alpha_1 \alpha_2} = -2i \delta_{\alpha_1}^1 \delta_{\alpha_2}^1, \quad M_-(l_2, l)_{\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2} = 2i \delta_{\dot{\beta}_1}^1 \delta_{\dot{\beta}_2}^1$$

sind wieder alle  $G_+(l_2, l)$ -invarianten Spinoren eindeutig in der Form (4.10) darstellbar und die Standardkovarianten  $Q_{\alpha \dot{\beta}}^{[r, s]}(l_2, l)$  sind linear unabhängig. Dies beweist die Behauptung.

Zum Beweis von Satz 3 im Falle  $n = 1$  betrachten wir ein  $0 \neq z_1 \in D_1$  und  $A$  aus der Isotropiegruppe  $G_+(z_1)$ . Dann folgt aus der  $[r, s]$ -Kovarianz von  $F_{\alpha \dot{\beta}}$ :

$$F_{\alpha \dot{\beta}}(z_1) = F_{\alpha \dot{\beta}}(A z_1) = S(A)_{\alpha \dot{\beta}}^{\alpha' \dot{\beta}'} F_{\alpha' \dot{\beta}'}(z_1) \quad (4.19)$$

und nach Lemma 1 die Gestalt (4.1) für  $F_{\alpha \dot{\beta}}(z_1)$  mit eindeutig bestimmtem Koeffizienten  $f(z_1)$ . Eingesetzt in (4.19) folgt aus der Eindeutigkeit von  $f(z_1)$  die  $L_+(C)$ -Invarianz und die Holomorphie: für  $z_1 \neq 0$  ist stets eine Komponente  $\alpha_0 \dot{\beta}_0$  von  $Q_{\alpha \dot{\beta}}^{[r, r]}(z_1) \neq 0$  und daher

$$f(z_1) = \frac{F_{\alpha_0 \dot{\beta}_0}(z_1)}{Q_{\alpha_0 \dot{\beta}_0}^{[r, r]}(z_1)} \quad (4.20)$$

holomorph. Da der Nullpunkt  $z_1 = 0$  von niederer Dimension ist, folgt die Holomorphie und  $L_+(C)$ -Invarianz von  $f(z_1)$  in ganz  $D_1$ .

Analog schliesst man für  $n = 2$  durch Betrachtung von  $G_+(z_1, z_2)$  für linear unabhängige, nicht total isotropé  $z_1, z_2$ . In solchen Punkten folgert man die Zerlegbarkeit von  $F_{\alpha \dot{\beta}}(z_1, z_2)$  nach (4.3), und, da die Standardkovarianten hier linear unabhängig sind, ist (4.3) eindeutig nach den Koeffizientenfunktionen  $f_{\alpha}(z_1, z_2)$  lösbar. Diese sind daher wieder  $L_+(C)$ -invariant und holomorph in ganz  $D_2$ , da die Menge der Ausnahmepunkte nur nach dem Riemann'schen Fortsetzungssatz hebbare Singularitäten beitragen kann. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Für drei Vierervektoren  $z_1, z_2, z_3$  existieren im allgemeinen keine nichttrivialen Isotropiegruppen mehr. Falls die Gram'sche Determinante  $G(z) \neq 0$  ist, spannen  $z_1, z_2, z_3$  und  $z_1 \wedge z_2 \wedge z_3$  den 4-dimensionalen komplexen Minowski-Raum  $C^4$  auf. Für  $G(z) = 0$  dagegen liegen  $z_1, z_2, z_3$  und  $z_1 \wedge z_2 \wedge z_3$  in einem durch Einheitsvektoren  $l_1, l_2, l$  aufgespannten singulären Teilraum  $\langle l_1, l_2, l \rangle \subset C^4$ :

$$z_i = c_{i1} l_1 + c_{i2} l_2 + c_{i3} l \quad (1 \leq i \leq 3) \quad (4.21)$$

mit  $(l_i, l_j) = -\delta_{ij}$ ,  $(l_i, l) = (l, l) = 0$  ( $1 \leq i, j \leq 3$ ) und  $l_1 \wedge l_2 \wedge l = \sigma l$ ,  $\sigma = \pm 1$  je nach der Orientierung der  $z_i$ .

Offenbar gilt:

$$z_1 \wedge z_2 \wedge z_3 = \sigma \det \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{13} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{31} & \dots & c_{33} \end{vmatrix} l \quad (4.22)$$

und

$$C_1(z) \equiv \det \begin{vmatrix} (z_2, z_2), (z_2, z_3) \\ (z_2, z_3), (z_3, z_3) \end{vmatrix} = \det^2 \begin{vmatrix} c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{vmatrix} \quad (\text{zykl.}) . \quad (4.23)$$

Aus (4.22) und (4.23) folgt bei geeigneter Wahl der Zweige von  $\sqrt{C_i(z)}$  für  $G(z) = 0$  die  $L_+(\mathbf{C})$ -invariante Relation:

$$\sum_{i=1}^3 \sqrt{C_i(z)} z_i^\mu - \sigma (z_1 \wedge z_2 \wedge z_3)^\mu = 0 . \quad (4.24)$$

Nach dieser geometrischen Überlegung lässt sich leicht eine  $L_+(\mathbf{C})$ -kovariante analytische Funktion  $F(z_1, z_2, z_3)$  konstruieren, die nicht in ihrem ganzen Definitionsbereich eine lokale holomorphe Zerlegung gestattet. Offenbar ist

$$G(z)^{-1} X_\sigma^\mu(z) \equiv G(z)^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^3 \sqrt{C_i(z)} z_i^\mu - \sigma (z_1 \wedge z_2 \wedge z_3)^\mu \right\} \quad (4.25)$$

holomorph für alle  $z$  mit  $G(z) \prod_{i=1}^3 C_i(z) \neq 0$ . Ferner ist ein Punkt  $w$  mit  $G(w) = 0$  aber mit  $\prod_{i=1}^3 C_i(w) \neq 0$  und linear unabhängigen  $w_i = b_{i1} l_1 + b_{i2} l_2 + b_{i3} l$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) ein regulärer Punkt von  $\{G(z) = 0\}$ . Denn für einen Einheitsvektor  $l_0$  mit  $(l_0, l_0) = 1$ ,  $(l_0, l) \neq 0$ , ist die Variablensubstitution  $(z_1, l_0) \leftrightarrow G(z)$  bei festen restlichen Komponenten von  $z_1, z_2, z_3$  biholomorph in einer Umgebung von  $w$  wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(z)}{\partial (z_1, l_0)} \Big|_{z=w} &= -2 (w_1 \wedge w_2 \wedge w_3, l_0 \wedge w_2 \wedge w_3) \\ &= 2(l_0, l) \det \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{13} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{31} & \dots & b_{33} \end{vmatrix} \det \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} \neq 0 . \end{aligned} \quad (4.26)$$

Daher ist in einem solchen Punkt  $w$   $G^{-1}(z) X_\sigma^\mu(z)$  holomorph, obwohl die eindeutig bestimmten (vgl. § 3.)  $L(\mathbf{C})$ -invarianten Koeffizientenfunktionen  $G^{-1}(z) \sqrt{C_i(z)}$  und  $G^{-1}(z)$  dort singulär werden. Dieses Gegenbeispiel ist typisch für alle Darstellungen  $[r, s]$  für  $n \geq 3$ .

Ein Punkt  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^{4n}$  heisse regulär, wenn der Rang  $r_Z$  seiner Skalarproduktmatrix  $Z = ((z_i, z_j))$  gleich der Dimension des durch ihn aufgespannten Teilraums  $\langle z_1, \dots, z_n \rangle \subset \mathbf{C}^4$  ist. Nach 5) ist im Falle  $r_Z = 3, 4$  jeder Punkt  $z \in \mathbf{C}^{4n}$  regulär.

Ein zu dem obigen  $w$  regulärer Punkt  $w^0$  mit gleichen Invarianten ist gegeben durch  $w_i^0 = b_{i1} l_1 + b_{i2} l_2$ . Man überzeugt sich leicht, dass in einer hinreichend kleinen Umgebung  $U(w^0)$  stets auf  $\{G(z) = 0\}$ , falls  $\dim \langle z_1, z_2, z_3 \rangle = 3$  ist,  $G(z)^{-1} X_+^\mu(z)$  holomorph und  $G(z)^{-1} X_-^\mu(z)$  singulär (oder umgekehrt) ist. Daher ist  $w^0$  Randpunkt des Regularitätsbereiches von  $G(z)^{-1} X_\pm^\mu(z)$ .

Ein gemischter Tensor wie  $G(z)^{-1} X_+^\mu(z) X_-^\nu(z)$  muss jedoch nach dem Riemann'schen Fortsetzungssatz in ganz  $U(\omega^0)$  holomorph sein, da für  $\dim \langle z_1, z_2, z_3 \rangle = 3$  eine eventuelle Singularität von  $G(z)^{-1}$  entweder durch  $X_+^\mu(z)$  oder durch  $X_-^\nu(z)$  absorbiert wird und die algebraische Menge  $\{\dim \langle z_1, z_2, z_3 \rangle < 3\}$  im  $C^{12}$  niederdimensional ist. Tatsächlich verschwindet die scheinbare Singularität  $G(z)^{-1}$  als Koeffizientenfunktion, falls man  $G(z)^{-1} X_+^\mu(z) X_-^\nu(z)$  in  $L_+(\mathbf{C})$ -irreduzible Komponenten zerlegt:

$$\begin{aligned}
 G(z)^{-1} X_+^\mu X_-^\nu &= \sum_{i, k=1}^3 G^{-1} (\sqrt{C_i} \sqrt{C_k} - A_{ik}) S(z_i, z_k)^{\mu \nu} \\
 &+ \frac{2i}{G} \sum_{k=1}^3 \{(z_1, z_k) \sqrt{C_k} M_+(z_2, z_3)^{\mu \nu} + (z_2, z_k) \sqrt{C_k} M_+(z_3, z_1)^{\mu \nu} \\
 &\quad + (z_3, z_k) \sqrt{C_k} M_+(z_1, z_2)^{\mu \nu}\} \\
 &- \frac{2i}{G} \sum_{k=1}^3 \{(z_1, z_k) \sqrt{C_k} M_-(z_2, z_3)^{\mu \nu} + (z_2, z_k) \sqrt{C_k} M_-(z_3, z_1)^{\mu \nu} \\
 &\quad + (z_3, z_k) \sqrt{C_k} M_-(z_1, z_2)^{\mu \nu}\} \\
 &+ \frac{1}{4} \left( 1 + G^{-1} \sum_{i, k=1}^3 \sqrt{C_i} \sqrt{C_k} (z_i, z_k) \right) g^{\mu \nu}.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Dabei ist  $S(z_i, z_k)^{\mu \nu} = 1/2 (z_i^\mu z_k^\nu + z_i^\nu z_k^\mu) - 1/4 g^{\mu \nu} (z_i, z_k)$  der irreduzible symmetrische Tensor vom Rang 2 mit verschwindender Spur und  $A_{ik}$  das Komplement zu  $(z_i, z_k)$  in der Skalarproduktmatrix der  $z_1, z_2, z_3$ . Die Holomorphie der  $L(\mathbf{C})$ -invarianten Koeffizienten in  $U(\omega^0)$  folgt aus den Relationen:

$$\begin{aligned}
 A_{ik}(z) &= \sqrt{C_i(z)} \sqrt{C_k(z)} \\
 \sum_{k=1}^3 (z_j, z_k) \sqrt{C_k(z)} &= 0 \quad \text{für } G(z) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Die Diskussion dieses Beispiels zeigt also, dass man für  $n > 2$  keine holomorphe lokale Standardzerlegbarkeit mehr beweisen kann, wenn nicht zu jedem Punkt  $z$  im Definitionsbereich  $D$  ein regulärer Punkt  $z^0$  mit gleichen  $L_+(\mathbf{C})$ -Invarianten enthalten ist. Ferner ist nicht jedes System von invarianten Koeffizientenfunktionen in  $D$  singulärfreie, jedoch wird im nächsten Abschnitt für eine grosse Klasse von  $L_+(\mathbf{C})$ -invarianten Gebieten  $D$  wie in (4.27) die Existenz einer lokalen holomorphen Zerlegung in Standardkovarianten bewiesen.

## § 5. $L_+(\mathbf{C})$ -kovariante analytische Funktionen in $I^{(+)}$ -saturierten Gebieten

Das Gegenbeispiel im letzten Abschnitt zeigte, dass im Falle  $n > 2$  zusätzliche Voraussetzungen an den Definitionsbereich  $D$  zu fordern sind, damit jedes in  $D$  holomorphe  $L_+(\mathbf{C})$ -kovariante Tensorfeld überall eine lokale holomorphe Standardzerlegung erlaubt. Als notwendig erwies sich dabei die Bedingung, dass  $D$  zu jedem Punkt  $z \in D$  einen regulären Punkt  $z^0$  mit gleichen  $L_+(\mathbf{C})$ -Invarianten enthält oder, äquivalent<sup>5)</sup>, dass  $D$  saturiert ist bezüglich der Abbildung  $I^+$  (vgl. § 3.) in die Invarianten der Gruppe  $L_+(\mathbf{C})$ :

$$D = (I^+)^{-1} \circ I^+(D). \tag{5.1}$$

In  $I^+$ -saturierten Gebieten  $D$  gelten analog zu den Resultaten von BARGMANN, HALL und WIGHTMAN<sup>(5)</sup>, Lemma 2 und 3). Sätze über den Zusammenhang von Lorentz-Bahnen und -Invarianten und über die Struktur der Abbildung  $I^+ : \mathbf{C}^{4n} \rightarrow \mathbf{C}^{r+}$  (vgl. 8)<sup>13)</sup>). Es zeigt sich, dass  $I^+(D)$  eine algebraische Menge in einem Gebiet  $G \subset \mathbf{C}^{r+}$  ist, die in jedem Punkt von  $G$  als das genaue simultane Nullstellengebilde der Polynome (3.6) und (3.7) charakterisiert ist.

Während es auf algebraischen Mengen  $M \subset G \subset \mathbf{C}^{r+}$  im allgemeinen verschiedene inäquivalente Holomorphiebegriffe («komplexe Strukturen») gibt<sup>\*)12)</sup>, kann man für  $I^+(D)$  beweisen, dass alle diese komplexen Strukturen zusammenfallen und jede auf  $I^+(D)$  holomorphe Funktion lokal in eine konvergente Potenzreihe in den Variablen  $z_{ij}, z_{k_1 k_2 k_3 k_4}$  (vgl. § 3.) des umgebenden Raumes  $\mathbf{C}^{r+}(\hat{z})$  entwickelbar ist («starke Holomorphie»), das heisst  $I^+(D)$  ist in  $G \subset \mathbf{C}^{r+}$  eine normale algebraische Menge. Der an anderer Stelle<sup>8)</sup> gebrachte Beweis stützt sich auf klassische Sätze der Invariantentheorie (vgl. § 3.), auf einen Approximationssatz für kovariante analytische Funktionen in  $I^+$ -saturierten Gebieten durch kovariante Polynome<sup>(8)</sup>, Lemma 3) und auf ein Theorem von GRAUERT und REMMERT<sup>12)</sup>. Dabei ergibt sich in Verallgemeinerung zu § 3. ein kanonischer Isomorphismus zwischen dem Ring  $O_{[0,0]}(D)$  der auf  $D$  holomorphen  $L_+(\mathbf{C})$ -invarianten Funktionen und dem Ring  $O(I^+(D))$  der auf  $I^+(D)$  holomorphen Funktionen in den  $L_+(\mathbf{C})$ -Invarianten:

*Satz 2:* Zu jedem  $I^+$ -saturierten Gebiet  $D \subset \mathbf{C}^{4n}$  ist die  $L_+(\mathbf{C})$ -Invariantenvarietät  $I^+(D)$  eine normale algebraische Menge in einem Gebiet  $G \subset \mathbf{C}^{r+}$ . Jeder auf  $D$  holomorphen  $L_+(\mathbf{C})$ -invarianten Funktion  $f$  entspricht genau eine auf  $I^+(D)$  (stark) holomorphe Funktion  $\hat{f}$  mit

$$f(z) = \hat{f} \circ I^+(z) . \quad (5.2)$$

*Bemerkungen:*

1. Der gleiche Satz liefert in sinngemässer Abänderung für die volle komplexe Lorentz-Gruppe  $L(\mathbf{C})$  eine Verallgemeinerung eines Theorems von BARGMANN, HALL und WIGHTMAN<sup>5)</sup> auf  $I$ -saturierte Gebiete  $D$ , ebenfalls mit starker Holomorphie auf  $I(D)$ .

2. Eine auf einer algebraischen Menge  $M \subset G \subset \mathbf{C}^k$  (allgemeiner auf einer analytischen Menge  $M \subset G \subset \mathbf{C}^k$ , die in jedem Punkt  $z \in G$  das genaue simultane Nullstellengebilde von in  $z$  lokal holomorphen Funktionen ist) stark holomorphe Funktion  $f(z)$  ist also lokal Spurfunktion einer im volldimensionalen  $\mathbf{C}^k$  holomorphen Funktion, das heisst zu jedem  $z^0 \in M$  gibt es eine volldimensionale Umgebung  $U(z^0) \subset \mathbf{C}^k$  und eine in  $U(z^0)$  im gewöhnlichen Sinne holomorphe Funktion  $g(z)$  mit

$$f(z) = g(z) \quad \text{für alle } z \in U(z^0) \cap M . \quad (5.3)$$

Zwei in  $U(z^0)$  holomorphe Funktionen  $g_1(z), g_2(z)$  definieren auf  $U(z^0) \cap M$  die gleiche stark holomorphe Funktion, falls sie dort übereinstimmen (vgl. Lemma 2). Damit ist eine auf  $M \subset G \subset \mathbf{C}^k$  stark holomorphe Funktion eine Äquivalenzklasse von in  $G$

<sup>\*)</sup> z. B. ist die von BARGMANN, HALL und WIGHTMAN<sup>5)</sup> für eine in der «ausgedehnten Röhre»  $\mathfrak{T}'_n$  holomorphe  $L(\mathbf{C})$ -invariante Funktion  $f$  bewiesene komplexe Struktur als Funktion  $\hat{f}$  auf der Skalarproduktvarietät  $\mathfrak{M}_n$  die sogenannten «schwachen Holomorphie»:  $\hat{f}$  ist auf  $\mathfrak{M}_n$  stetig und in den gewöhnlichen Punkten von  $\mathfrak{M}_n$  (wo  $\mathfrak{M}_n$  komplexe Mannigfaltigkeit ist) holomorph im klassischen Sinne.

lokal holomorphe Funktionen. Falls  $G$  holomorphkonvex ist, folgt aus einem tiefen Satz der komplexen Analysis<sup>14)</sup>, dass es eine in ganz  $G$  holomorphe Funktion gibt, deren Spur auf  $M$   $f$  ist. Dies eröffnet eine eventuell interessante Perspektive im folgenden Abschnitt.

Für den Modul  $O_{[r, s]}(D)$  wurde in <sup>8)</sup> mit den gleichen Methoden bewiesen:

*Satz 3:* Jedes in einem  $I^+$ -saturierten Gebiet  $D$   $[r, s]$ -holomorphe Tensorfeld  $F_{\alpha \dot{\beta}}(z)$  lässt sich lokal zerlegen

$$F_{\alpha \dot{\beta}}(z) = \sum_{\kappa=1}^K \hat{f}_{\kappa} \circ I^+(z) Q_{\kappa}^{[r, s]}(z)_{\alpha \dot{\beta}} \quad (5.4)$$

in die Standardkovarianten (3.5) der Darstellung  $[r, s]$  und in auf  $I^+(D)$  lokal (stark) holomorphe Funktionen  $\hat{f}_{\kappa}$ . Ist  $D$  holomorph-konvex, so wird durch die Standardkovarianten  $\{Q_{\kappa}^{[r, s]}(z)\}$  der Modul  $O_{[r, s]}(D)$  über dem Ring  $O_{[0, 0]}(D) \simeq O(I^+(D))$  endlich erzeugt (das heisst eine Darstellung (5.4) gilt global in  $D$ ).

In Verallgemeinerung von Lemma 1 kann man zeigen, dass  $O_{[r, s]}(D)$  in  $I$ -saturierten holomorph-konvexen Bereichen ( $L(C)$  zerfällt in 2 disjunkte Komponenten)  $D$  bereits über dem Unterring  $O_0(D)$  der  $L(C)$ -invarianten Funktionen endlich erzeugt ist. Dazu muss man – wie es auch in den Beweisen von Satz 2 und 3 möglich ist – das Theorem von GRAUERT und REMMERT durch eine explizite Abschätzung der approximierenden Polynome (vgl. Lemma 3) ersetzen. Dann erhält man den

*Satz 3':* In jedem  $I$ -saturierten holomorph-konvexen Bereich  $D$  wird der Modul  $O_{[r, s]}(D)$  über dem Ring  $O_0(D) \simeq O(I(D))$  durch die Standardkovarianten  $\{Q_{\kappa}^{[r, s]}(z)\}$  endlich erzeugt. Insbesondere gilt stets in  $I$ -saturierten Bereichen eine lokale Standardzerlegung

$$F_{\alpha \dot{\beta}}(z) = \sum_{\kappa=1}^K \hat{f}_{\kappa} \circ I(z) Q_{\kappa}^{[r, s]}(z)_{\alpha \dot{\beta}} \quad (5.5)$$

mit auf  $I(D)$  lokal (stark) holomorphen Funktionen  $\hat{f}_{\kappa}$ .

Speziell erlaubt jede  $L_+(C)$ -invariante holomorphe Funktion hier eine Zerlegung

$$f(z) = f^0(z) + \sum_{\lambda=1}^L f^{\lambda}(z) [z_{\lambda_1} z_{\lambda_2} z_{\lambda_3} z_{\lambda_4}] \quad (5.6)$$

mit (lokalen)  $L(C)$ -invarianten holomorphen Funktionen.

In gewissen Fällen, wo die Standardzerlegung eindeutig ist (vgl. § 3.), kann man auf die Holomorphiekonvexität des Bereiches  $D$  verzichten und allgemeiner beweisen:

*Satz 4:* Sei  $D$  ein  $I$ -saturiertes Gebiet im  $C^{4n}$ . Dann wird der Modul  $O_{[r, s]}(D)$  über dem Ring  $O_0(D)$  durch die Standardkovarianten (3.4) erzeugt, falls  $n = 1$  oder  $2$  ist (vgl. Satz 1) und ferner bei  $n = 3$  für Darstellungen  $[r, s]$  mit  $|r - s| \leq 2$  und bei  $n = 4$  für  $[r, s] = [0, 0]$  oder  $[1, 1]$ .

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die Sätze dieses Abschnittes ihre Gültigkeit behalten, falls man statt  $I^{(+)}$ -saturierte Gebiete  $D \subset C^{4n}$   $I^{(+)}$ -Urbilder  $M$  von analytischen Mengen in Gebieten  $G \subset C^{r(+)}$  und überall die stark holomorphe Struktur betrachtet. Ein typisches Beispiel ist die «Massenschale»  $M$  im Raum  $C^{4n}$  der komplexen Impulsvektoren  $(p_1, \dots, p_n)$ , definiert durch

$$(p_i, p_i) = m_i^2 \quad (1 \leq i \leq n), \quad \sum_{i=1}^n p_i = 0. \quad (5.7)$$

Nach Berücksichtigung des Energie-Impuls-Erhaltungssatzes lässt sich  $M$  auch auf der im  $\mathbf{C}^{4(n-1)}$  der Variablen  $p_1, \dots, p_{n-1}$  eingebetteten komplexen Mannigfaltigkeit (es sei  $\prod_{i=1}^{n-1} m_i \neq 0$ )

$$V \equiv \{(p_1, \dots, p_{n-1}): (p_i, p_i) = m_i^2, 1 \leq i \leq n-1\} \quad (5.8)$$

als das genaue Nullstellengebilde eines Polynoms

$$(p_1 + \dots + p_{n-1}, p_1 + \dots + p_{n-1}) - m_n^2 \quad (5.9)$$

charakterisieren, dessen Singularitätenmenge mindestens 2-codimensional ist. Daher ist für  $\prod_{i=1}^{n-1} m_i \neq 0$  die «Massenschale»  $M$  eine normale algebraische Menge im  $\mathbf{C}^{4n}$  auf Grund eines Satzes von K. OKA<sup>15)</sup>. In diesem Fall ist die Forderung der *starken* Holomorphie von selbst erfüllt.

## § 6. Anwendungen

Wie wir es schon in der Einleitung ausgeführt haben, dient die vorliegende Untersuchung der Aufklärung des Zusammenhangs von  $L_+(\mathbf{C})$ -kovariantem Transformationsverhalten und Analytizitätseigenschaften in relativistischen Theorien.

Ein mathematisch klar umrissenes Anwendungsgebiet liegt in der allgemeinen Quantenfeldtheorie vor. Dazu betrachten wir eine lokale relativistische Quantenfeldtheorie im Wightman'schen Sinne<sup>13)</sup> mit temperierten Feldoperatordistributionen  $\psi_\mu^{(k)}(x)$  ( $k = 1, 2, 3 \dots; 1 \leq \mu \leq n_k$ ) in einem Hilbert-Raum  $\mathfrak{H}$  und speziell mit dem relativistischen Transformationsgesetz

$$U(a, A) \psi_\mu^{(k)}(x) U(a, A)^{-1} = S^{(k)}(A^{-1}, \bar{A}^{-1})_\mu^\nu \psi_\nu^{(k)}(A x + a) \quad (6.1)$$

für  $(a, A)$  aus der universellen Überlagerungsgruppe  $\tilde{I}_+^\dagger$  der inhomogenen eigentlichen orthochronen reellen Lorentz-Gruppe  $I_+^\dagger$ , wobei  $A = A(A, \bar{A})$  nach (2.4) definiert ist und  $(a, A) \rightarrow U(a, A)$  eine stetige unitäre Darstellung von  $\tilde{I}_+^\dagger$  in  $\mathfrak{H}$  ist und

$$(A, B) \rightarrow S^{(k)}(A, B) \quad (6.2)$$

eine o. E. irreduzible Darstellung  $[r, s]$  von  $S L(2, \mathbf{C}) \otimes S L(2, \mathbf{C})$ .

Dann sind bekanntlich die Vakuumerwartungswerte

$$\mathfrak{W}_{\mu_0 \dots \mu_n}^{k_0 \dots k_n}(x_0, \dots, x_n) \equiv (\Omega, \psi_{\mu_0}^{(k_0)}(x_0) \dots \psi_{\mu_n}^{(k_n)}(x_n) \Omega) \quad (6.3)$$

als temperierte Distribution in den Differenzvariablen  $\xi_i \equiv x_i - x_{i-1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , Randwerte von holomorphen Tensorfeldern  $W_{\mu_0 \dots \mu_n}^{k_0 \dots k_n}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ , den « $(n+1)$ -Punkt-Funktionen». Nach einem Satz von BARGMANN, HALL und WIGHTMAN<sup>5)</sup> ist  $W_{\mu_0 \dots \mu_n}^{k_0 \dots k_n}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  zunächst holomorph in der «ausgedehnten Röhre»  $\mathfrak{T}'_n$ :

$$\mathfrak{T}'_n \equiv \{(\zeta_1, \dots, \zeta_n): \mathcal{H}(\zeta'_1, \dots, \zeta'_n), A \in L_+(\mathbf{C}) \text{ mit } I m \zeta'_i \in V_+, \zeta_i = A \zeta'_i\} \quad (6.4)$$

( $V_+$  sei der Vorkegel im reellen 4-dimensionalen Minkowski-Raum) und transformiert sich dort  $L_+(\mathbf{C})$ -kovariant für  $(A, B) \in S L(2, \mathbf{C}) \otimes S L(2, \mathbf{C})$ :

$$W_{\mu_0 \dots \mu_n}^{k_0 \dots k_n} (\Lambda(A, B) \zeta_1, \dots \Lambda(A, B) \zeta_n) = S^{(k_0)}(A, B)_{\mu_0}^{\nu_0} \dots S^{(k_n)}(A, B)_{\mu_n}^{\nu_n} W_{\nu_0 \dots \nu_n}^{k_0 \dots k_n}(\zeta_1, \dots \zeta_n). \quad | \quad (6.5)$$

Die Wightman-Funktionen zu zweideutigen Darstellungen (6.5) verschwinden identisch, während sich die anderen eindeutig analytisch und  $L_+(\mathbf{C})$ -kovariant in die Vereinigung der «permutierten Röhren»  $\mathfrak{T}_n^P = \bigcup_{g \in \gamma_{n+1}} P(g) \mathfrak{T}'_n$  fortsetzen lassen<sup>1)3)</sup><sup>13)</sup>. Die Gebiete  $\mathfrak{T}'_n$  und  $\mathfrak{T}_n^P$  sind  $I$ -saturiert.

Aus unseren Untersuchungen folgt zunächst eine lokale Standardzerlegung (jeder irreduziblen Komponente) von  $W_{\mu_0 \dots \mu_n}^{k_0 \dots k_n}(\zeta_1, \dots \zeta_n)$  nach Satz 3. Die Wightman-Funktionen zu Darstellungen vom Typ  $[0, 0]$  sind speziell stark holomorph auf der  $L_+(\mathbf{C})$ -Invariantenviarietät  $I^+(\mathfrak{T}_n^P)$  und erlauben lokal eine Zerlegung nach Satz 3, während man jeder  $L(\mathbf{C})$ -invarianten Wightman-Funktion in kanonischer Weise eine auf  $\mathfrak{M}_n^P \equiv I(\mathfrak{T}_n^P)$  stark holomorphe Funktion in den Skalarprodukten zuordnen kann. Stets konvergiert lokal eine Potenzreihe in den Invarianten.

Für die 2- und 3-Punktfunktionen ist nach Satz 4 stets eine eindeutige Standardzerlegung in ganz  $\mathfrak{T}_n^P$  möglich mit holomorphen Koeffizientenfunktionen in dem Gebiet  $\mathfrak{M}_n^P$  der Skalarprodukte ( $n = 1, 2$ ). Wendet man das Fortsetzungsverfahren von KÄLLÉN und WIGHTMAN<sup>16)</sup> oder RUELLE<sup>17)</sup> zur Berechnung der Holomorphiehülle  $\mathfrak{H}(\mathfrak{M}_n^P)$  auf diese Funktionen an, so ist bekanntlich das Resultat trivial für  $n = 1$ , und für  $n = 2$  folgt unmittelbar der

*Satz:* Die 3-Punkt-Funktionen  $W_{\mu_0 \mu_1 \mu_2}^{k_0 k_1 k_2}(\zeta_1, \zeta_2)$  von 3 lokalen Spinorfeldern  $\psi_{\mu_0}^{(k_0)}(x_0), \psi_{\mu_1}^{(k_1)}(x_1), \psi_{\mu_2}^{(k_2)}(x_2)$  lassen sich stets eindeutig analytisch und  $L_+(\mathbf{C})$ -kovariant in das Källén-Wightman-Gebiet  $I^{-1}(\mathfrak{H}(\mathfrak{M}_2^P))$  fortsetzen.

Aus der Diskussion der Randhyperflächen der ausgedehnten Röhren  $\mathfrak{T}'_n$  und der Skalarproduktviarietät  $\mathfrak{M}_n$  (<sup>13)16)18-22)</sup>) folgt bis heute, dass alle  $\mathfrak{T}'_n$  mit  $n \leq 4$  Holomorphiegebiete sind. Nach Satz 3' existieren in diesen Gebieten für die Wightman-Funktionen globale holomorphe Standardzerlegungen.

Für  $n > 4$  ist die Skalarproduktviarietät  $\mathfrak{M}_n$  eine algebraische Menge in einem Gebiet  $G \subset \mathbf{C}^{n(n+1)/2}$ . Aus der Charakterisierung der Randpunkte von  $\mathfrak{M}_n$  nach KÄLLÉN und WIGHTMAN<sup>16)</sup> und JOST<sup>18)</sup> folgt, dass man als  $G$  das  $I$ -Bild  $\mathfrak{M}_n^n$  der ausgedehnten Röhre  $\mathfrak{T}_n^n$  von  $n$   $n$ -Vektoren wählen kann. Denn der eingehenden Analyse von WIGHTMAN in <sup>13)</sup> folgend kann man zeigen, dass die Randpunkte in

$$B_n^4 \equiv \partial \mathfrak{T}_n^4 \cap \partial \mathfrak{T}'_n \quad (6.6)$$

als spezielle Randpunkte von  $\mathfrak{T}_n^4$  (mit jeweils verschwindenden letzten  $n - 4$  Komponenten) durch keine  $n$ -dimensionale komplexe Lorentz-Transformation in das Innere von  $\mathfrak{T}_n^4$  gedreht werden können, und daraus folgt <sup>16)</sup>, dass  $\mathfrak{M}_n$  in  $\mathfrak{M}_n^n$  abgeschlossen und damit algebraisch ist<sup>23)</sup>. Daher ist  $\mathfrak{T}'_n$  Holomorphiegebiet, wenn man beweisen könnte, dass  $\mathfrak{T}_n^n$  oder, äquivalent nach einem Satz von RUELLE<sup>24)</sup>,  $\mathfrak{M}_n^n$  Holomorphiegebiet ist. Aus der letzteren Tatsache liesse sich weiter schliessen, dass sich die  $L^4(\mathbf{C})$ -invarianten Wightman-Funktionen  $W^{k_0 \dots k_n}(\zeta_1, \dots \zeta_n)$  von  $n + 1$  Skalarfeldern holomorph und  $L^n(\mathbf{C})$ -invariant in die ausgedehnte Röhre  $\mathfrak{T}_n^n$  von  $n$   $n$ -Vektoren fortsetzen lassen. Dies folgt unmittelbar aus der Bemerkung in Anschluss an Satz 2 in § 5., sogar mit zusätzlichen Aussagen über das Wachstum der (nicht eindeutig bestimmten) analytischen Fortsetzungen (<sup>25)</sup>, Seite 240). Man hat nur zu be-

nutzen, dass dann  $W^{k_0 \dots k_n}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  holomorph ist auf der in dem (hypothetischen) Holomorphiegebiet  $\mathfrak{M}_n^n$  normal eingebetteten algebraischen Menge  $\mathfrak{M}_n$ .

Auch für die verallgemeinerten retardierten Funktionen (26–28)) von Spinorfeldern  $\psi_i^{(k_i)}$  existieren lokale Standardzerlegungen im komplexen Impulsraum.

Als zweite wichtige Anwendung unserer Methoden untersuchen wir das Problem der invarianten Amplituden in einer S-Matrix-Theorie<sup>4)</sup>. Das S-Matrix-Element eines Wechselwirkungsprozesses von  $k$  einlaufenden und  $n - k$  auslaufenden Teilchen der Impulse  $\mathbf{p}_i$  und der Spinzustände  $a_{\alpha_i}^i(\mathbf{p}_i)$  (auf eine zusätzliche Isospin-Multiplizität werde hier nicht eingegangen) ist im wesentlichen gegeben durch die Feynman-Amplitude<sup>2)29)</sup>:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\mathbf{p}, a) &= \mathfrak{F}(\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}_n, a^1, \dots, a^n) \\ &= a_{\alpha_1}^1(\mathbf{p}_1) \dots a_{\alpha_k}^k(\mathbf{p}_k) \mathfrak{F}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) a_{\alpha_{k+1}}^{k+1}(\mathbf{p}_{k+1}) \dots a_{\alpha_n}^n(\mathbf{p}_n), \end{aligned} \quad | \quad (6.7)$$

wo  $\mathfrak{F}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \equiv \mathfrak{F}_{(\alpha)}(\mathbf{p})$  ein  $L_{(+)}^{(\dagger)}$ -kovarianten Tensorfeld ist, und zwar die Fouriertransformierte des Vakuumerwartungswertes eines zeitgeordneten Produktes der Feldoperatoren der wechselwirkenden Teilchen mit Differentiationsoperatoren ( $\square + m^2$ ),  $(\gamma^\mu \partial_\mu + m)$ , je nach Transformationscharakter. Dabei geht in (6.7) nur der Wert von  $\mathfrak{F}_{(\alpha)}(\mathbf{p})$  auf der Massenschale (5.7) ein.  $\mathfrak{F}_{(\alpha)}(\mathbf{p})$  ist kontrahiert mit den Kovarianten  $a_{\alpha_i}^i(\mathbf{p}_i)$ , die die Polarisationszustände der in- und out-Teilchen charakterisieren.

In den Untersuchungen über das Verhalten von Streu- und Produktionsamplituden postuliert man (oder beweist in gewissen Fällen) Analytizitätseigenschaften für das Tensorfeld  $\mathfrak{F}_{(\alpha)}(\mathbf{p})$  in den komplexen Vierervektorvariablen  $\mathbf{p}_i$ . Setzen wir also voraus, dass  $\mathfrak{F}_{(\alpha)}(\mathbf{p})$  holomorph und  $L_{(+)}(\mathbf{C})$ -kovariant ist auf einer  $L_{(+)}(\mathbf{C})$ -invarianten offenen Menge  $D$  auf der Massenschale  $M$  der Variablen  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ . Dann ist es für die Theorie wichtig (zum Beispiel für die Aufstellung von Spektraldarstellungen einer betrachteten Klasse von analytischen Funktionen), ob es einen endlichen Satz von in  $D$  holomorphen  $L_{(+)}(\mathbf{C})$ -invarianten Amplituden  $A_n(\mathbf{p})$ ,  $1 \leq n \leq N$ , gibt und einen Satz von «kinematischen» Standardinvarianten  $B_n(\mathbf{p}, a)$ ,  $1 \leq n \leq N$ <sup>7</sup>) gebildet aus den Impulsen  $\mathbf{p}_i$  und den Spingrößen  $a^i$ , derart dass die Feynman-Amplitude  $\mathfrak{F}(\mathbf{p}, a)$  zerlegbar ist in:

$$\mathfrak{F}(\mathbf{p}, a) = \sum_{n=1}^N A_n(\mathbf{p}) B_n(\mathbf{p}, a). \quad (6.8)$$

Dabei soll das Invariantensystem möglichst minimal sein und den physikalischen Nebenbedingungen genügen (zum Beispiel  $(i \gamma \mathbf{p}_i + m_i) n_i = 0$  für Spin 1/2-Teilchen und  $\mathbf{p}_i \mathbf{\epsilon}_i = 0$  für Spin 1-Teilchen).

Die Existenz einer Zerlegung (6.8) lässt sich formal (das heisst ohne Rücksicht auf Konvergenz) aus der Störungstheorie plausibel machen<sup>7</sup>). Ferner existieren Vorschriften, wie man in gewissen konkreten Fällen einen Zerlegungsansatz (6.8) mit vorgegebenen Invarianten  $B_n(\mathbf{p}, a)$  auf die Abwesenheit von «kinematischen» Singularitäten prüfen kann<sup>30)</sup>.

Aus den vorliegenden Untersuchungen bietet sich nun für  $I^{(+)}$ -saturierte offene Mengen  $D \subset M$  die folgende allgemeine und von der Störungstheorie unabhängige lokale Lösung dieser Aufgabe an: man zerlege das in  $D$  stark holomorphe Tensorfeld

(vgl. die Bemerkungen am Ende von § 5. über  $M$ ) lokal in Standardkovarianten der irreduziblen Komponenten von  $\mathfrak{F}_\alpha(p)$  und in  $L_{(+)}(C)$ -invariante holomorphe Koeffizientenfunktionen. Die  $Q_\alpha^{[r,s]}(p)$  werden weiter mit den Spingrößen  $a^j$  kontrahiert und ergeben nach Anwendung der physikalischen Nebenbedingungen<sup>7)</sup> singularitätenfrei ein für Prozesse von Teilchen mit nichtverschwindender Ruhemasse minimales System von Invarianten  $B_n(p, a)$ .

Ist  $D$  holomorph-konvex, wie im Falle der 2-Teilchen-Streuamplitude mit Holomorphie in dem von MANDELSTAM<sup>31)</sup> postulierten Gebiet auf der Massenschale, oder wenn Satz 4 anwendbar ist, so gewinnt man auf diese Weise ein globales System von holomorphen invarianten Amplituden  $A_n$  der Standardinvarianten  $B_n$ ,  $1 \leq n \leq N$ .

Meinem verehrten akademischen Lehrer, Herrn Prof. Dr. R. JOST, möchte ich an dieser Stelle herzlich für seine begeisternde Einführung in die mathematische Physik und sein stetes Interesse danken, dann besonders den Herren Dr. H. ARAKI und Dr. D. RUELLE für viele hilfreiche Ratschläge und wertvolle Kritik und Herrn Prof. Dr. M. FIERZ und den Freunden am Seminar für theoretische Physik der ETH für viele anregende Diskussionen.

### Literaturverzeichnis

- 1) A. S. WIGHTMAN, Phys. Rev. 101, 860 (1956).
- 2) H. LEHMANN, K. SYMANZIK und W. ZIMMERMANN, Nuovo Cim. 1, 205 (1955); *ibid.* 6, 319 (1957).
- 3) R. JOST, *Quantum Theory of Fields and Elementary Particles*, Boulder-Lectures, 1960.
- 4) G. F. CHEW, *S-Matrix Theory of Strong Interactions*, New York (1961), und dort aufgeführte Literatur.
- 5) D. HALL und A. S. WIGHTMAN, Dan. Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. 31 Nr. 5 (1957).
- 6) H. WEYL, *Classical Groups*, Princeton (1946).
- 7) A. C. HEARN, Nuovo Cimento 21, 333 (1961).
- 8) K. HEPP, Dissertation, Zürich (1962), (ersch. in Math. Ann.).
- 9) B. L. VAN DER WAERDEN, *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*, Berlin, (1932).
- 10) A. S. WIGHTMAN, in *Dispersion Relations and Elementary Particles*, Paris (1960).
- 11) B. L. VAN DER WAERDEN, Math. Ann. 95, 706 (1926).
- 12) H. GRAUERT und R. REMMERT, Math. Ann. 136, 245 (1958).
- 13) A. S. WIGHTMAN, J. Indian Math. Soc. 24, 625 (1960).
- 14) H. CARTAN, *Variétés analytiques complexes et cohomologie*, CBRM, Brüssel (1953).
- 15) K. OKA, J. Math. Soc. Japan, 3 (1951).
- 16) G. KÄLLÉN und A. S. WIGHTMAN, Dan. Vid. Selsk. Mat.-Fys. Skrifter 1 Nr. 6 (1958).
- 17) D. RUELLE, Helv. Phys. Acta 34, 587 (1961).
- 18) R. JOST, *Lectures at the International Spring School of Physics*, Napoli (1959).
- 19) G. KÄLLÉN, Nuclear Phys. 25, 568 (1961).
- 20) A. C. MANOHARAN, J. Math. Phys. 3, 853 (1962).
- 21) N. H. MÖLLER, preprint.
- 22) G. LUZZATTO, unveröffentlicht.
- 23) R. REMMERT, Math. Ann. 133, 328 (1957).
- 24) D. RUELLE, private Mitteilung.
- 25) H. GRAUERT, Math. Ann. 129, 233 (1955).
- 26) O. STEINMANN, Helv. Phys. Acta 33, 257 und 347 (1960).
- 27) D. RUELLE, Thèse, Brüssel, 1959 und Nuovo Cim. 19, 356 (1961).
- 28) H. ARAKI, J. Math. Phys. 2, 163 (1961) und Progr. Theor. Phys., Suppl. 18, 83 (1961).
- 29) M. L. GOLDBERGER, *Dispersion Relations and Elementary Particles*, Paris (1960).
- 30) M. L. GOLDBERGER, M. T. GRISARU, S. W. McDOWELL and D. Y. WONG, Phys. Rev. 120, 2250 (1960).
- 31) S. MANDELSTAM, Phys. Rev. 112, 1344 (1958) und Phys. Rev. 115, 1741 (1959).
- 32) R. JOST, in *Theoretical Physics in the Twentieth Century*, New York (1960).