

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 36 (1963)
Heft: II

Artikel: Quelques propriétés de l'espace de Minkowski sur les complexes
Autor: Loeffel, J.-J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-113368>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Quelques propriétés de l'espace de MINKOWSKI sur les complexes

par J.-J. Loeffel

CERN, Genève, Division Théorique

(15. VIII. 62)

Résumé. La fonction de Wightman (fonction W) à $n + 1$ points pour un champ scalaire se présente comme une fonction analytique de n quadrivecteurs qui est holomorphe dans le tube futur. D'après Hall et Wightman, on peut élargir ce domaine d'holomorphie au tube étendu (par tube étendu, nous entendons le plus petit domaine invariant par L^+ (\mathcal{C}) qui contient le tube futur). Si l'on admet l'invariance par réflexion spatiale, on peut considérer la fonction W comme une fonction analytique des produits scalaires des n vecteurs. Elle est alors holomorphe dans l'image du tube futur par l'application π qui fait passer des vecteurs aux produits scalaires.

On montre ici que, dans le cas où $n < 4$, on peut obtenir cette image en partant d'un espace de MINKOWSKI de dimension n , et en appliquant π au tube correspondant.

Ce résultat s'obtient grâce au théorème suivant, qui a été formulé par Jost: Tout sous-espace qui contient des points du tube futur peut se transformer par une famille continue de transformations de LORENTZ complexes de manière à ce que: 1° les carrés des parties imaginaires des vecteurs de ce sous-espace croissent de manière monotone; 2° l'espace finalement obtenu soit réel (Théorème 4).

Pour démontrer ce théorème, on utilise les propriétés de décomposition biorthogonale des sous-espaces complexes (Théorèmes 1, 2 et 3).

Introduction

a) Au cours de recherches récentes sur la structure mathématique de la théorie des champs quantifiés, on a été amené à considérer des fonctions de n -tuples $(x_1, \dots, x_n) = (x)_n$ de vecteurs pris dans un espace de MINKOWSKI sur les complexes, définies et holomorphes dans le tube $\mathfrak{T}^n = \{(x)_n \mid \Im x_i \in V_+\}$ (V_+ désigne le cône futur), et invariantes pour les transformations du groupe de LORENTZ (réel) orthochrone $L^{\uparrow 1}$). Le théorème de BARGMANN, HALL et WIGHTMAN²⁾ affirme que ces fonctions peuvent être considérées comme des fonctions holomorphes des produits scalaires $f(x_i, x_j)$ des n vecteurs x_1, \dots, x_n .

L'objet de ce travail est d'établir une propriété de la relation qui lie les n -tuples de vecteurs à leurs produits scalaires.

¹⁾ Fonctions de WIGHTMAN (WIGHTMAN [1]); transformées de FOURIER des fonctions retardées (LEHMANN, SYMANZIK, ZIMMERMANN [2]).

²⁾ HALL et WIGHTMAN ont donné de ce théorème une démonstration valable lorsque la dimension de l'espace de MINKOWSKI est égale à 4 [3]. R. Jost [4] et K. HEPP [5] ont généralisé le théorème à une dimension quelconque.

b) Considérons une suite $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \dots$ d'espaces vectoriels emboîtés; $x \in \mathfrak{B}_m$ est de la forme $(\zeta^0, \zeta^1, \dots, \zeta^{m-1}, 0, 0, \dots)$. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de \mathfrak{B}_m sera défini par

$$f(x, y) = \zeta^0 \eta^0 - \zeta^1 \eta^1 - \dots - \zeta^{m-1} \eta^{m-1}.$$

\mathfrak{B}_m sera appelé espace de MINKOWSKI sur les complexes de dimension m ³⁾. \mathfrak{T}_m sera l'ensemble des vecteurs de \mathfrak{B}_m tels que: a) $\Im \zeta^0 > 0$, b) $f(\Im x, \Im x) > 0$. Si $m < m'$, on a évidemment $\mathfrak{T}_m = \mathfrak{T}_m \cap \mathfrak{B}_m$. Nous désignerons par \mathfrak{T}_m^n l'ensemble des n -tuples de vecteurs de \mathfrak{T}_m .

Désignons par $S(n)$ l'ensemble des matrices symétriques complexes à n lignes et n colonnes. Définissons une application π de \mathfrak{T}_m^n dans $S(n)$: $(x)_n \rightarrow \pi(x)_n = (z_{ij})$, $z_{ij} = f(x_i, x_j)$. Posons $\pi(\mathfrak{T}_m^n) = M_m(n)$. Les matrices $\pi(x)_n$ ont leur rang $\leq m$; par conséquent $M_m(n) \subset S^m(n)$, $S^m(n)$ désignant l'ensemble des matrices de $S(n)$ dont le rang est $\leq m$.

Désignons l'ensemble des fonctions holomorphes sur \mathfrak{T}_m^n et invariantes par les transformations de L^\dagger par (\mathfrak{T}_m^n) ; désignons par $(M_m(n))$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $M_m(n)$. Le théorème de BARGMANN, HALL et WIGHTMAN s'énonce alors: pour tout $W \in (\mathfrak{T}_m^n)$, il existe un $\varphi \in (M_m(n))$ tel que $W = \varphi \pi$.

On a évidemment

$$M_1(n) \subset M_2(n) \subset \dots \subset S(n).$$

Si $M_{m'}^m(n)$ désigne l'ensemble des matrices de $M_{m'}(n)$ dont le rang est $\leq m$ ($\leq m'$), c'est-à-dire si $M_{m'}^m(n) = M_{m'}(n) \cap S^m(n)$, on peut écrire $M_m(n) \subset M_{m'}^m(n)$.

Le but de ce travail est de montrer que

$$M_m(n) = M_{m'}^m(n).$$

c) En utilisant le théorème de BARGMANN, HALL et WIGHTMAN, on peut tirer de ce résultat la conséquence suivante: les valeurs que $W \in (\mathfrak{T}_m^n)$ prend dans les points $(x)_n$ de \mathfrak{T}_m^n tels que $\pi(x)_n \in M_{m'}^m(n)$ ($m \leq m'$) sont déjà prises par la restriction de W à $\mathfrak{T}_m^n = \mathfrak{T}_m^n \cap \mathfrak{B}_m^n$.

Si $m' > n$, $M_{m'}(n) = M_{m'}^n(n)$. Notre résultat appliqué à $M_{m'}(n)$ permet d'affirmer que

$$M_{m'}(n) = M_n(n) \quad (m' > n).$$

De cette dernière relation, on déduit que les fonctions «de trois points» ($n = 2$) peuvent être discutées dans un espace de MINKOWSKI de dimension 2, tandis que les fonctions «de quatre points» ($n = 3$) peuvent être discutées dans un espace de MINKOWSKI de dimension 3. R. JOST [6] est déjà parvenu par d'autres moyens à la même conclusion. On en trouvera une application dans un travail de D. RUELLE [7] sur le domaine d'holomorphie de la fonction «de trois points».

Je tiens à remercier M. le Professeur R. JOST de m'avoir suggéré ce travail. J'ai trouvé dans le cours qu'il a fait à l'E.P.F. en hiver 1960/1961 les précieuses indications qui m'ont permis de résoudre le problème posé. Les emprunts que j'ai faits à ces leçons sont trop nombreux pour que je puisse en donner la liste.

³⁾ Cette définition sera formulée en des termes un peu différents au § I.4.

Que MM. les Professeurs M. FIERZ et R. JOST trouvent ici l'expression de ma gratitude pour l'hospitalité qu'ils m'ont accordée au Séminaire de Physique Théorique de l'E. P. F. Je remercie également la Commission pour la Science Atomique (Fonds national suisse) de son appui financier.

Chapitre I

L'espace de MINKOWSKI sur les complexes

Les moyens mis en œuvre dans ce travail sont ceux de l'algèbre linéaire des espaces vectoriels de dimension finie.

Nos notations et notre terminologie en ces matières sont le plus souvent empruntées à l'ouvrage de E. ARTIN: *Geometric Algebra* (Interscience Publishers 1957) et à celui de J. DIEUDONNÉ: *La Géométrie des groupes classiques* (Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, Heft 5, 1955). Nous renverrons fréquemment à des propriétés établies dans ces deux traités.

Dans ce chapitre, nous allons introduire quelques notions et exposer quelques faits simples dont nous aurons besoin dans les chapitres suivants.

I.1. L'espace de MINKOWSKI sur les réels

Par *espace de MINKOWSKI sur les réels*, nous entendons un espace vectoriel \mathfrak{M} de dimension N sur \mathcal{R} , muni d'une forme symétrique non dégénérée f_0 , de signature $(1, N - 1)$. L'indice de f_0 vaut 1⁴⁾. Nous désignerons par Q_0 la forme quadratique associée à f_0 :

$$Q_0(x) = f_0(x, x), x \in \mathfrak{M}.$$

$x \in \mathfrak{M}$ est dit du *genre temps* si $Q_0(x) > 0$, etc. Si x est du genre temps, et si y est non nul et orthogonal à x , y est du genre espace. Si x est du genre temps, tous les vecteurs non nuls de l'hyperplan $\langle x \rangle^*$ sont du genre espace.

Un sous-espace \mathfrak{A} de \mathfrak{M} est appelé *sous-espace de MINKOWSKI*, ou *sous-espace du genre temps*, si \mathfrak{A} contient un vecteur du genre temps. Si \mathfrak{A} est du genre temps, il est non singulier⁴⁾. Un sous-espace sera dit *du genre espace* si \mathfrak{A}^* est du genre temps; $Q(y) < 0$ pour y non nul de \mathfrak{A} ; \mathfrak{A} est non singulier. Si \mathfrak{A} est non singulier, \mathfrak{A} est soit du genre temps, soit du genre espace. Si \mathfrak{A} est un sous-espace singulier de \mathfrak{M} , la dimension de $\text{rad } \mathfrak{A}$ ⁴⁾ est 1; \mathfrak{A} ne contient alors aucun vecteur du genre temps.

L'ensemble V des vecteurs du genre temps est un cône ouvert. V se décompose en deux composantes disjointes, connexes par arcs, V_+ et V_- . Si x est dans l'une, $-x$ est dans l'autre. V_+ et V_- sont des demi-cônes ouverts connexes.

Tous les espaces de MINKOWSKI de même dimension sont isométriques⁴⁾. Un sous-espace \mathfrak{A} du genre temps, de dimension a , d'un espace de MINKOWSKI, est isométrique à un espace de MINKOWSKI de dimension a . C'est pourquoi nous désignons les sous-espaces du genre temps par le terme de sous-espaces de MINKOWSKI.

⁴⁾ Pour ces notions, cf. J. DIEUDONNÉ, op. cit, Chap. I, en particulier les §§ 5–8, 11; E. ARTIN, op. cit, Chap. 3, § 3.

Le groupe orthogonal de \mathfrak{M} relativement à f_0 ⁴⁾ sera désigné par L : c'est le groupe de LORENTZ (réel).

I.2. La notion de réalité dans les espaces vectoriels sur les complexes⁵⁾

Un espace vectoriel \mathfrak{B} de dimension N sur \mathcal{C} peut être considéré comme un espace vectoriel de dimension $2N$ sur \mathcal{R} . Nous disons qu'un ensemble \mathfrak{A} de vecteurs de \mathfrak{B} est un \mathcal{R} -sous-espace si $\alpha x + \beta y$ est dans \mathfrak{A} ($x, y \in \mathfrak{A}, \alpha, \beta \in \mathcal{R}$). Si \mathfrak{B} est un ensemble de vecteurs de \mathfrak{B} , nous désignerons le plus petit \mathcal{R} -sous-espace de \mathfrak{B} contenant \mathfrak{B} par le symbole $\langle \mathfrak{B} \rangle_{\mathcal{R}}$ ($\langle \mathfrak{B} \rangle$ désignera le plus petit sous-espace de \mathfrak{B} contenant \mathfrak{B}).

Soit Γ une application de \mathfrak{B} sur lui-même, satisfaisant à:

$$1) \quad \Gamma(x_1 + x_2) = \Gamma(x_1) + \Gamma(x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathfrak{B},$$

$$2) \quad \Gamma(\alpha x) = \bar{\alpha} \Gamma(x), \quad x \in \mathfrak{B}, \alpha, \bar{\alpha} \in \mathcal{C},$$

$\bar{\alpha}$: conjugué complexe de α .

$$3) \quad \Gamma^2(x) = x, \quad x \in \mathfrak{B}.$$

Nous disons que Γ est une *anti-involution* sur \mathfrak{B} . Γ apparaît comme une involution de \mathfrak{B} considéré comme espace vectoriel sur \mathcal{R} . L'ensemble \mathfrak{B}^+ des vecteurs x de \mathfrak{B} qui satisfont à $\Gamma(x) = x$ est un \mathcal{R} -sous-espace de \mathfrak{B} . Il en est de même pour l'ensemble \mathfrak{B}^- des vecteurs x avec $\Gamma(x) = -x$. On a $\mathfrak{B}^- = i \mathfrak{B}^+$, et $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^+ \oplus \mathfrak{B}^-$. Nous définissons deux applications \mathcal{R} -linéaires de \mathfrak{B} sur \mathfrak{B}^+ par

$$\mathfrak{Re} = \frac{1}{2} (1 + \Gamma), \quad \mathfrak{Im} = \frac{1}{2} i (1 - \Gamma).$$

Les vecteurs de \mathfrak{B}^+ sont appelés *réels*, ceux de \mathfrak{B}^- , *imaginaires*. $\mathfrak{Re}(x)$ est appelée *partie réelle* de x , $\mathfrak{Im}(x)$ est appelée *partie imaginaire* de x .

Notons quelques relations. Pour tout sous-espace \mathfrak{A} , on a:

$$\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A}) = \langle \mathfrak{Re}(\mathfrak{A}) \rangle = \langle \mathfrak{Im}(\mathfrak{A}) \rangle,$$

$$\mathfrak{Re}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{Im}(\mathfrak{A}).$$

Si $\Gamma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$, on dira que \mathfrak{A} est *réel* (ne pas confondre un sous-espace réel avec un \mathcal{R} -sous-espace). $\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A})$ est le plus grand sous-espace réel contenu dans \mathfrak{A} , $\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})$ est le plus petit sous-espace réel contenant \mathfrak{A} . Les trois énoncés suivants sont équivalents:

- 1) $\Gamma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A},$
- 2) $\mathfrak{A} = \langle \mathfrak{Re}(\mathfrak{A}) \rangle,$
- 3) \mathfrak{A} a une base réelle.

Pour qu'une droite $\langle x \rangle$ soit réelle, il faut et il suffit que $\mathfrak{Re}(x)$ et $\mathfrak{Im}(x)$ soient linéairement dépendants. Un vecteur x satisfaisant à cette dernière condition sera dit

⁵⁾ Cf. DIEUDONNÉ, op. cit, Chap. I, § 3.

semi-réel. S'il n'y satisfait pas, nous dirons qu'il est *complexe*. Un sous-espace \mathfrak{A} sera dit complexe si tous ses vecteurs non nuls sont complexes. Pour que \mathfrak{A} soit complexe, il faut et il suffit que $\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A}) = 0$ ⁶⁾ (ne pas confondre un sous-espace complexe avec un espace sur les complexes).

Une application linéaire Λ de \mathfrak{B} dans \mathfrak{B} sera dite réelle si $\Lambda \Gamma = \Gamma \Lambda$.

Posons $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A})) \oplus \mathfrak{B}$; on a alors $\mathfrak{B} \cap \Gamma(\mathfrak{B}) = 0$.

Remarquons pour finir que si \mathfrak{A} est un \mathcal{R} -sous-espace de dimension N dans \mathfrak{B} , tel que $\mathfrak{A} \cap i\mathfrak{A} = 0$, on peut écrire $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \oplus i\mathfrak{A}$. On peut alors définir une anti-involution Γ sur \mathfrak{B} en posant $\Gamma(x) = x$ pour $x \in \mathfrak{A}$, et $\Gamma(x) = -x$ pour $x \in i\mathfrak{A}$.

I.3. Anti-involution et forme symétrique

a) Soit \mathfrak{B} un espace vectoriel de dimension N sur \mathcal{C} , muni d'une forme symétrique f et d'une anti-involution Γ .

Si la condition

$$f(\Gamma(x), \Gamma(y)) = \overline{f(x, y)}$$

est satisfaite, nous dirons que f et Γ sont *compatibles*.

Si f et Γ sont compatibles, la restriction f_0 de f à \mathfrak{B}^+ est une forme symétrique (\mathcal{R} -bilinéaire) sur \mathfrak{B}^+ . Une base orthogonale de \mathfrak{B}^+ étant une base orthogonale de \mathfrak{B} , on peut énoncer⁷⁾:

Pour que f_0 soit non dégénérée, il faut et il suffit que f soit non dégénérée.

Des raisonnements analogues nous permettent d'affirmer que:

Pour que $\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})$ ne soit pas singulier, il faut et il suffit que $\text{Re}(\mathfrak{A})$ ne soit pas singulier.

Si x est orthogonal à y , $\Gamma(x)$ est orthogonal à $\Gamma(y)$. Si \mathfrak{B} n'est pas singulier, il s'en suit que

$$\Gamma(\mathfrak{A}^*) = (\Gamma(\mathfrak{A}))^*. \quad (1)$$

Par conséquent

$$\text{rad } \Gamma(\mathfrak{A}) = \Gamma(\text{rad } \mathfrak{A}) \quad (2)$$

et

$$\text{si } \Gamma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}, \quad \Gamma(\mathfrak{A}^*) = \mathfrak{A}^*. \quad (3)$$

Un sous-espace réel admet une base orthogonale réelle.

Une isométrie Λ de \mathfrak{B} sur lui-même qui satisfait à $\Gamma \Lambda = \Lambda \Gamma$ sera dite *réelle*.

On montre aisément la proposition suivante:

Pour que Γ et f soient compatibles, il faut et il suffit que la forme h , définie sur \mathfrak{B} par

$$h(x, g) = f(\Gamma(x), y)$$

soit hermitienne.

f et h coïncident sur \mathfrak{B}^+ . On peut donc énoncer: pour que h ne soit pas dégénérée, il faut et il suffit que f ne soit pas dégénérée.

⁶⁾ 0 désigne le sous-espace qui ne contient que le vecteur nul.

⁷⁾ Cf. ARTIN, théorème 3.7.

Nous désignerons par H la forme quadratique associée à h : $H(x) = h(x, x)$ pour $x \in \mathfrak{B}$.

b) L'une des questions qu'on se pose avec profit au sujet d'un espace vectoriel muni d'une forme sesquilinearéaire réflexive est celle des sous-espaces irréductibles⁸⁾ (un sous-espace est irréductible s'il ne peut s'écrire sous forme de somme orthogonale de deux sous-espaces $\neq 0$). La solution de cette question permet par exemple, lorsque la forme n'est pas alternée, d'établir l'existence de bases orthogonales de \mathfrak{B} . On connaît l'importance de ce théorème d'existence.

Si \mathfrak{B} est un espace vectoriel sur \mathcal{C} , muni d'une forme symétrique f et d'une anti-involution Γ compatible avec f , on est amené à introduire la notion de «biorthogonalité»: x est *biorthogonal* à y si $f(x, y) = h(x, y) = 0$. On a: si x est biorthogonal à y , $\Re(x)$ est orthogonal à $\Re(y)$ et à $\Im(y)$. Si \mathfrak{A} et \mathfrak{B} sont deux sous-espaces orthogonaux, et si \mathfrak{A} est réel, \mathfrak{A} et \mathfrak{B} sont biorthogonaux.

Nous allons nous poser au chapitre II la question de la décomposition des sous-espaces de \mathfrak{B} en des sommes biorthogonales de sous-espaces biorthogonallement irréductibles. La solution que nous trouverons (théorèmes 1, 2 et 3) nous permettra de résoudre au chapitre III le problème qui fait l'objet de ce travail.

I.4. L'espace de MINKOWSKI sur les complexes

Nous allons formuler dans ce paragraphe une définition de l'espace de MINKOWSKI sur les complexes qui sera mieux adaptée à nos besoins que celle que nous avons donnée dans notre introduction. Nous énoncerons ensuite quelques propriétés de l'espace de MINKOWSKI sur les complexes.

a) Nous partons d'un espace de MINKOWSKI \mathfrak{M} de dimension N sur les réels. L'ensemble $\mathfrak{B} = \langle \mathfrak{M} \rangle$ des combinaisons linéaires à coefficients complexes de vecteurs de \mathfrak{M} est un espace vectoriel de dimension N sur les complexes. Nous pouvons définir une forme symétrique f qui prolonge la forme symétrique f_0 de \mathfrak{M} à tout l'espace \mathfrak{B} . Cette extension est unique⁹⁾. Pour retrouver \mathfrak{M} comme «partie réelle» de \mathfrak{B} , nous remarquons que \mathfrak{B} peut être considéré comme la somme directe de \mathfrak{M} et de $i\mathfrak{M}$, puis nous définissons une anti-involution Γ sur \mathfrak{B} par

$$\Gamma(x) = x \text{ pour } x \in \mathfrak{M},$$

$$\Gamma(x) = -x \text{ pour } x \in i\mathfrak{M}$$

(cf. § I.2.). Nous avons bien $\Re(\mathfrak{B}) = \mathfrak{M}$.

La forme symétrique f et l'anti-involution Γ sont compatibles:

$$f(\Gamma(x), \Gamma(y)) = \overline{f(x, y)}. \quad (1)$$

De plus,

$$\text{La restriction de } f \text{ à } \mathfrak{M} = \{x \mid x \in \mathfrak{B}, \Gamma(x) = x\} \quad (2)$$

(qui est réelle: cf. § I.3) a la signature $(1, N - 1)$.

⁸⁾ ARTIN, p. 119; cf. en particulier le théorème 3.7.

⁹⁾ CHEVALLEY, [10], Chap. I.

Or, deux espaces vectoriels \mathfrak{V}_1 et \mathfrak{V}_2 de dimension N sur \mathcal{C} , munis de formes symétriques et d'anti-involutions (Γ_1 , resp. Γ_2) satisfaisant aux conditions précédentes, sont équivalents dans ce sens qu'il existe une isométrie Λ de \mathfrak{V}_1 sur \mathfrak{V}_2 qui «conserve les relations de réalité», c'est-à-dire telle que $\Lambda \Gamma_1 = \Gamma_2 \Lambda$ (cf. § I.3. a)). L'espace \mathfrak{V} que nous venons de construire peut être considéré comme le type des espaces vectoriels satisfaisant à (1) et (2). Nous sommes ainsi amenés à formuler la *définition* suivante: un *espace de MINKOWSKI sur les complexes*, de dimension N , est un espace vectoriel de dimension N sur \mathcal{C} muni d'une forme symétrique f et d'une anti-involution Γ satisfaisant aux conditions (1) et (2).

Puisque la restriction f_0 de f à $\mathfrak{M} = \text{Re}(\mathfrak{V})$ n'est pas dégénérée, f ne l'est pas non plus (§ I.3. a); un espace de MINKOWSKI sur \mathcal{C} n'est donc pas singulier.

Le groupe des isométries de \mathfrak{V} sera appelé groupe de LORENTZ complexe $L(\mathcal{C})$. Les isométries réelles de $L(\mathcal{C})$ (§ I.3. a)) forment le groupe de LORENTZ réel L .

Un sous-espace réel \mathfrak{A} de \mathfrak{V} (§ I.2. b)) tel que $\text{Re}(\mathfrak{A})$ soit du genre temps (§ I.1.) sera appelé *sous-espace de MINKOWSKI* (sur \mathcal{C}). Tous les sous-espaces de MINKOWSKI de même dimension dans \mathfrak{V} sont équivalents dans ce sens qu'on peut passer de l'un à l'autre par une isométrie de L^\dagger .

b) Si $Q(x) = 0$, $\text{Re}(x)$ et $\text{Im}(x)$ sont orthogonaux, et $Q(\text{Re}(x)) = Q(\text{Im}(x))$; par conséquent, $Q(\text{Re}(x)) = Q(\text{Im}(x)) \leq 0$ (§ I.1.), et $H(x) \leq 0$. Si $Q(x) = H(x) = 0$, x est semi-réel.

Lemme 1: Si \mathfrak{A} est un sous-espace complexe et isotrope¹⁰⁾ de \mathfrak{V} , $\mathfrak{A} \oplus \Gamma(\mathfrak{A})$ n'est pas singulier.

Démonstration: Puisque \mathfrak{A} est complexe, c'est-à-dire puisque $\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A}) = 0$, le seul vecteur réel de \mathfrak{A} est le vecteur nul (§ I.2.); par conséquent, si $x \in \mathfrak{A}$ n'est pas nul, $\text{Re}(x)$ est du genre espace. L'ensemble des parties réelles des vecteurs de \mathfrak{A} , qui est $\text{Re}(\mathfrak{A})$, est donc du genre espace; donc $\text{Re}(\mathfrak{A})$ n'est pas singulier (§ I.1.). Donc $\mathfrak{A} \oplus \Gamma(\mathfrak{A})$ ne l'est pas non plus (§ I.3. a)); c. q. f. d.

Lemme 2: Si \mathfrak{A} est réel, dim. rad $(\mathfrak{A}) \leq 1$.

Démonstration: Puisque $\Gamma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$, \mathfrak{A} possède une base dans $\text{Re}(\mathfrak{A})$ (§ I.2.). Or, $\text{Re}(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{M}$, qui est un espace de MINKOWSKI sur \mathcal{R} ; l'indice de \mathfrak{M} étant égal à 1, dim. rad $\text{Re}(\mathfrak{A}) \leq 1$ ¹¹⁾. c. q. f. d.

Chapitre II

La décomposition biorthogonale des sous-espaces d'un espace de MINKOWSKI sur les complexes

Les sous-espaces de l'espace de MINKOWSKI \mathfrak{V} admettent-ils tous une base biorthogonale? Si ce n'est pas le cas, quels sont ceux qui en ont une, et que dire de ceux qui n'en ont pas? Ce sont là des questions que nous avons déjà soulevées au § I.3. Nous avons souligné alors leur intérêt et mentionné qu'en les élucidant, nous trouvons un moyen de résoudre le problème qui nous estposé.

Les trois paragraphes de ce chapitre exposent et démontrent une série de résultats qui sont rassemblés dans les théorèmes 1 (§ II.2.), 2 et 3 (§ II.3.). Ces théorèmes donnent une réponse complète aux questions que nous venons de rappeler.

¹⁰⁾ «Isotrope»: cf. ARTIN, définition 3.7. DIEUDONNÉ dit «totalement isotrope», Chap. I, § 7.

¹¹⁾ cf. ARTIN. Théorèmes 3.7 et 3.10.

II.1. *Les sous-espaces de \mathfrak{B} .*

Il est utile d'avoir dès le début le tableau suivant présent à l'esprit. Les sous-espaces \mathfrak{A} de \mathfrak{B} y sont classés en quatre types, suivant le caractère de $\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A})$ et de $\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})$:

| $\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})$ | $\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A})$ | Type | Classe |
|---------------------------------------|--|--------------|--------|
| n. s. | n. s. | (α) | I |
| s. | n. s. | (β) | |
| s. | s. | (γ) | |
| n. s. | s. | (δ) | |

(s. = singulier, n. s. = non singulier)

On montre aisément que si \mathfrak{A} admet une base biorthogonale, et si $\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})$ n'est pas singulier, $\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A})$ n'est pas non plus singulier. Un coup d'œil au tableau ci-dessus nous convainc que cet énoncé est équivalent à celui-ci:

Théorème 1a: *Pour que \mathfrak{A} possède une base biorthogonale, il faut qu'il appartienne à la classe I.*

Nous démontrerons que cette condition est suffisante (Théorème 1, § II.2.).

II.2. *Les sous-espaces de la classe I*

Nous entreprenons maintenant de démontrer que les sous-espaces de la classe I admettent une base biorthogonale.

a) Si le sous-espace \mathfrak{A} est *réel*, on a

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A}) ;$$

tous les sous-espaces réels sont ainsi du type (α) ou du type (γ), et ils appartiennent donc tous à la classe I. Or, si \mathfrak{A} est réel, \mathfrak{A} admet une base orthogonale réelle. Une base orthogonale réelle est une base biorthogonale. Donc,

Lemme 3: *Tous les sous-espaces réels de \mathfrak{B} admettent une base biorthogonale.*

b) Si \mathfrak{A} est *complexe*, $\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A}) = 0$ n'est pas singulier; et \mathfrak{A} est soit du type (α), soit du type (β). Ainsi, tous les sous-espaces complexes de \mathfrak{B} sont dans la classe I.

Distinguons deux cas: 1) \mathfrak{A} isotrope; 2) \mathfrak{A} non isotrope¹⁰⁾.

Dans le premier cas, nous argumenterons de la manière suivante: \mathfrak{A} possède une base $\{e_i\}$ ($1 \leq i \leq \dim \mathfrak{A}$) telle que $h(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$. Puisque \mathfrak{A} est isotrope, on a en particulier $f(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$. La base $\{e_i\}$ est donc biorthogonale.

Tout sous-espace complexe isotrope possède une base biorthogonale. (1)

c) Lorsque \mathfrak{A} est *complexe*, mais *non isotrope*, la démonstration que \mathfrak{A} possède une base biorthogonale est plus délicate. Pour la faire, nous devrons utiliser l'hypothèse que \mathfrak{B} est un espace de MINKOWSKI, c'est-à-dire que la condition (2) du § I.4. est satisfaite.

Notre démonstration repose sur les propriétés d'une fonction à valeurs réelles F définie sur l'ensemble \mathfrak{V}' des vecteurs non isotropes de \mathfrak{V} :

$$F(x) = \frac{H(x)}{|Q(x)|} \text{ pour } x \in \mathfrak{V}',$$

$F(x)$ est évidemment continue sur \mathfrak{V}' . On vérifie aisément que pour tout $x \in \mathfrak{V}'$ et pour tout $\lambda \neq 0$ dans \mathcal{C} , $F(\lambda x) = F(x)$. Ainsi, pour étudier les valeurs que F prend sur \mathfrak{V}' , on peut se borner aux vecteurs de \mathfrak{V}' qui satisfont à $Q(x) = 1$.

On montre aisément l'inégalité suivante:

$$F(x) \leq 1 \text{ pour } x \in \mathfrak{V}'. \quad (2)$$

Soit \mathfrak{A} un sous-espace *complexe non isotrope*. Désignons par \mathfrak{A}' l'ensemble (non vide) des vecteurs non isotropes de \mathfrak{A} . Soit y un vecteur *isotrope non nul* de \mathfrak{A} . \mathfrak{A} étant complexe, y est complexe (§ I.2.), et par conséquent, $H(y) < 0$ (§ I.4. b)). On peut montrer que:

Pour tout nombre réel positif α (si grand soit-il), il existe un voisinage \mathfrak{U}_α ^{11a)} de y tel que $x \in \mathfrak{U}_\alpha \cap \mathfrak{A}'$ entraîne $F(x) < -\alpha$ (autrement dit: si $x \in \mathfrak{A}'$ tend vers y , $F(x)$ tend vers $-\infty$). } (3)

La fonction G , définie par

$$G(x) = \frac{F(x)}{2 - F(x)} \text{ pour } x \in \mathfrak{A}',$$

[cf. l'inégalité (2)] est continue sur \mathfrak{A}' . En vertu de (3), si $x \in \mathfrak{A}'$ tend vers $y \in \mathfrak{A}$, isotrope, non nul, $G(x)$ tend vers -1 ; nous pouvons compléter la définition de G en posant $G(y) = -1$ pour y isotrope non nul. La fonction G ainsi prolongée est définie et continue sur l'ensemble \mathfrak{A}'' des vecteurs non nuls de \mathfrak{A} . On a encore $G(\lambda x) = G(x)$ pour $x \in \mathfrak{A}''$, et $\lambda \neq 0$ dans \mathcal{C} .

$G(x)$ atteint sa borne supérieure sur \mathfrak{A}' .

En effet, soit $\{e_i\}$ ($1 \leq i \leq \dim \mathfrak{A}$) une base arbitraire de \mathfrak{A} . Formons la sphère $\mathfrak{S} = \{x \mid x = \sum \lambda^i e_i, \sum |\lambda^i|^2 = 1\}$; $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{A}''$. Puisque $G(\lambda x) = G(x)$, G prend toutes ses valeurs sur \mathfrak{S} . Or, \mathfrak{S} est compact. Il existe donc un $x_0 \in \mathfrak{S}$ tel que $G(x_0) \geq G(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{A}''$. La borne supérieure de G est supérieure à -1 , donc $x_0 \in \mathfrak{A}'$ (c'est-à-dire que x_0 n'est pas isotrope).

La fonction $\lambda(2 - \lambda)^{-1}$ (λ réel, $\neq 2$) étant monotone croissante, on a

$$F(x_0) \geq F(x) \text{ pour } x \in \mathfrak{A}'. \quad (4)$$

d) Cet x_0 dont nous venons de montrer l'existence possède la propriété décisive suivante:

Si $y \in \mathfrak{A}$ est orthogonal à x_0 , y est biorthogonal à x_0 . (5)

En effet, puisque x_0 n'est pas isotrope, nous pouvons supposer que $Q(x_0) = 1$ ($F(\lambda x_0) = F(x_0)$). Pour tout $y \in \mathfrak{A}$, $g_y(\tau) = F(x_0 + \tau y)$ est une fonction rationnelle de τ réel,

^{11a)} Au sens de la topologie affine.

continue pour $|\tau|$ inférieur à une certaine quantité positive (qui peut dépendre de y). On a :

$$\frac{dg_y(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \operatorname{Re} (h(x_0, y) - F(x_0) f(x_0, y));$$

de (4), on tire

$$\operatorname{Re} (h(x_0, y) - F(x_0) f(x_0, y)) = 0 \text{ pour } y \in \mathfrak{A}.$$

En remplaçant y par $e^{i\varphi} y$ (φ réel, arbitraire), on obtient

$$h(x_0, y) = F(x_0) f(x_0, y) \text{ pour } y \in \mathfrak{A}.$$

L'énoncé (5) suit de cette relation.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le

Lemme 4: *Tout sous-espace complexe \mathfrak{A} de \mathfrak{B} possède une base biorthogonale.*

Démonstration: Nous avons déjà démontré cette propriété dans le cas où \mathfrak{A} est isotrope (énoncé (1)). D'autre part, si la dimension de \mathfrak{A} est 1, la propriété est évidente. Supposons qu'elle soit démontrée pour tous les sous-espaces complexes de dimension $a - 1$. Si \mathfrak{A} est un sous-espace complexe de dimension a , non isotrope, \mathfrak{A} contient un vecteur x_0 non isotrope qui satisfait à (5), c'est-à-dire que la décomposition $\mathfrak{A} = \langle x_0 \rangle \perp \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B} = \langle x_0 \rangle^* \cap \mathfrak{A}$)¹²⁾ est biorthogonale. \mathfrak{B} étant complexe, de dimension $a - 1$, la propriété est démontrée pour \mathfrak{A} ; c. q. f. d.

e) Les lemmes 3 et 4 nous permettent de faire la démonstration annoncée au début de ce paragraphe.

Commençons par les sous-espaces des types (α) et (β): si \mathfrak{A} est de l'un de ces deux types, $\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A})$ n'est pas singulier, et nous pouvons écrire:

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A})) \perp \mathfrak{B} \quad (6)$$

avec $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap (\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A}))^*$ ¹²⁾. On sait de plus que $\mathfrak{B} \cap \Gamma(\mathfrak{B}) = 0$ (§ I.2.). Puisque $\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A})$ est réel, (6) est une décomposition biorthogonale de \mathfrak{A} (§ I.3.). Le lemme 3, appliqué à $\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A})$, et le lemme 4, appliqué à \mathfrak{B} , nous permettent d'affirmer que \mathfrak{A} possède une base biorthogonale.

f) Il nous reste à régler le cas des sous-espaces du type (γ).

Par définition, si \mathfrak{A} est du type (γ), $\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A})$ et $\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})$ sont tous deux singuliers. Ces deux sous-espaces étant réels, leurs radicaux sont réels (§ I.3. a), de dimension 1 (§ I.4. b): lemme 2; posons $\operatorname{rad}(\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A})) = \langle y_1 \rangle$, $\operatorname{rad}(\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})) = \langle y_2 \rangle$, y_1 et y_2 réels, isotropes (non nuls); puisque $\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})$, on a $f(y_1, y_2) = 0$; or, deux vecteurs réels, isotropes et orthogonaux sont collinéaires (cf. § I.1.); par conséquent,

$$\operatorname{rad}(\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A})) = \operatorname{rad}(\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})) = \langle y \rangle$$

(y isotrope, réel, $\neq 0$). Puisque $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{D}$ entraîne $\mathfrak{B} \cap \operatorname{rad} \mathfrak{D} \subset \operatorname{rad} \mathfrak{B}$, on a (avec $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})$):

$$\langle y \rangle \subset \operatorname{rad} \mathfrak{A}. \quad (7)$$

¹²⁾ Si \mathfrak{A} et \mathfrak{B} sont deux sous-espaces d'un espace \mathfrak{V} non singulier, si $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ et si \mathfrak{A} est non singulier, on peut écrire $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \perp (\mathfrak{A}^* \cap \mathfrak{B})$.

$\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A})$ étant réel, $\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A})$ admet une base orthogonale réelle, qui contiendra nécessairement λy ($\lambda \neq 0$), car $\langle y \rangle = \text{rad}(\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A}))$ ⁷⁾.

On voit ainsi qu'il est possible d'écrire $\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B} \perp \langle y \rangle$, avec \mathfrak{B} réel. Nous savons que \mathfrak{B} n'est pas singulier¹³⁾. Donc, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \perp \mathfrak{D}$, avec $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}^* \cap \mathfrak{A}$ ¹²⁾. \mathfrak{B} étant réel, cette somme est biorthogonale. \mathfrak{D} contient $\langle y \rangle$; c'est l'unique droite réelle de \mathfrak{D} , donc, dans $\mathfrak{D} = \langle y \rangle \oplus \mathfrak{E}$, \mathfrak{E} satisfait à $\mathfrak{E} \cap \Gamma(\mathfrak{E}) = 0$ (§ I.2.). Puisque $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{A}$, et que $\langle y \rangle \subset \text{rad} \mathfrak{A}$ (cf. (7)), on a $\mathfrak{D} = \langle y \rangle \perp \mathfrak{E}$; $\langle y \rangle$ étant réel, la somme est biorthogonale. Donc, on a construit pour \mathfrak{A} la décomposition biorthogonale suivante:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \perp \langle y \rangle \perp \mathfrak{E}. \quad (8)$$

Le lemme 3 appliqué à \mathfrak{B} et le lemme 4 appliqué à \mathfrak{E} montrent que \mathfrak{A} admet une base biorthogonale. Réunissons à ce dernier résultat celui de la section e), et combinons-les avec le théorème 1 a du paragraphe précédent: il vient le

Théorème 1: *Pour qu'un sous-espace d'un espace de MINKOWSKI possède une base biorthogonale, il faut et il suffit qu'il appartienne à la classe I.*

II.3. Les sous-espaces de la classe II

Nous avons appris au § II.1. que les sous-espaces de la classe II ne possèdent pas de base biorthogonale. Nous allons voir dans ce paragraphe quels sont ceux qui sont (biorthogonallement) irréductibles, et comment les autres peuvent se décomposer en une somme biorthogonale d'éléments irréductibles.

a) Nous avons déjà remarqué que la classe II ne contient ni sous-espaces réels, ni sous-espaces complexes (§ II.2. a) et b)); en particulier, elle ne contient aucune droite de \mathfrak{B} , car les droites sont soit réelles, soit complexes.

Passons aux plans (dimension 2) de \mathfrak{B} . Si le plan \mathfrak{P} est de la classe II, il suit du théorème 1 qu'il est (biorthogonallement) irréductible. Nous allons construire un tel plan.

\mathfrak{P} ne pouvant être ni réel ni complexe, $0 \neq \mathfrak{P} \cap \Gamma(\mathfrak{P}) \neq \mathfrak{P} \neq \mathfrak{P} + \Gamma(\mathfrak{P})$, donc $\dim(\mathfrak{P} \cap \Gamma(\mathfrak{P})) = 1$, $\dim(\mathfrak{P} + \Gamma(\mathfrak{P})) = 3$. Ainsi, la classe II n'est pas vide que si la dimension de \mathfrak{B} est ≥ 3 .

La droite réelle $\mathfrak{P} \cap \Gamma(\mathfrak{P})$ devant être singulière, on a $\mathfrak{P} \cap \Gamma(\mathfrak{P}) = \langle y \rangle$ avec y réel, isotrope, non nul. Soit x un vecteur tel que $\mathfrak{P} = \langle y \rangle \oplus \langle x \rangle$. Puisque $\mathfrak{P} + \Gamma(\mathfrak{P})$ ne peut être singulier, x n'est pas orthogonal à y , et, par conséquent, \mathfrak{P} n'est pas singulier. \mathfrak{P} , contenant une droite isotrope, et n'étant pas singulier, est un plan hyperbolique¹⁴⁾. Soit y_1 le vecteur isotrope de \mathfrak{P} avec $f(y, y_1) = 1$ ¹⁴⁾. On a $\mathfrak{P} = \langle y \rangle \oplus \langle y_1 \rangle$, ce qui montre que y_1 est complexe.

Les plans de la classe II sont donc nécessairement des plans hyperboliques dont l'une des droites est réelle, l'autre étant complexe. (On peut montrer inversément que tous les plans de ce type sont de la classe II, donc irréductibles.)

Lorsque nous parlerons de plan «irréductible», nous entendrons des plans hyperboliques de ce type (nous laisserons donc l'adverbe «biorthogonallement» de côté).

Pour finir, un exemple de plan irréductible. Soit $\{e_i\}$ ($1 \leq i \leq N$, $N \geq 3$) une base orthogonale réelle de \mathfrak{B} , avec $Q(e_1) = 1$, $Q(e_2) = \dots = Q(e_N) = -1$. On vérifie

¹³⁾ Cf. ARTIN, p. 116.

¹⁴⁾ ARTIN: Définition 3.8.

aisément que le plan sous-tendu par les vecteurs $y = e_1 + e_2$ et $y_1 = -e_2 + ie_3$ est irréductible.

b) Soit \mathfrak{A} un sous-espace de la classe II, dont la dimension a soit supérieure à 2. $\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})$ n'est pas singulier, $\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A})$ l'est; notons $\text{rad}(\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A})) = \langle y \rangle$, y réel, isotrope, non nul (cf. lemme 2).

$$\langle y \rangle \notin \text{rad } \mathfrak{A}. \quad (1)$$

En effet, si $\langle y \rangle$ était dans $\text{rad } \mathfrak{A}$, $\langle y \rangle$ serait dans $\text{rad}(\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A}))$ (y est réel!); or, $\text{rad}(\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})) = 0$. (Comparer avec la relation (7) du paragraphe précédent.)

Nous pouvons écrire $\mathfrak{A} \cap \Gamma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B} \perp \langle y \rangle$, avec \mathfrak{B} réel, non singulier¹³⁾; puis

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \perp \mathfrak{D},$$

avec $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}^* \cap \mathfrak{A}^{12)}$; cette somme est biorthogonale. \mathfrak{D} contient $\langle y \rangle$; cette droite est l'unique droite réelle de \mathfrak{D} (cf. § II.2. f)). Montrons que $\langle y \rangle \notin \text{rad } \mathfrak{D}$: en effet, si $\langle y \rangle \subset \text{rad } \mathfrak{D}$, $\langle y \rangle$ serait dans $\text{rad } \mathfrak{A}$, contrairement à (1). D'où:

$$\mathfrak{D} \text{ contient un vecteur } x \text{ avec } f(x, y) \neq 0. \quad (2)$$

x est nécessairement complexe (si $x \in \mathfrak{D}$ n'est pas complexe, $x \in \langle y \rangle$, et $f(x, y) = 0$).

C'est de la propriété (2) que provient la difficulté. Tout d'abord, elle nous enlève la possibilité de décomposer \mathfrak{D} , puis \mathfrak{A} comme nous l'avons fait à la section f) du paragraphe précédent (cf. relation (8) de ce paragraphe). Ensuite, elle a pour conséquence que \mathfrak{D} contient des plans irréductibles. En effet, on vérifie immédiatement que le plan $\mathfrak{P}_0 = \langle x, y \rangle$ est un plan irréductible; de plus, si la dimension d de \mathfrak{D} est supérieure à 2 (si \mathfrak{D} ne coïncide pas avec \mathfrak{P}_0), \mathfrak{D} contient des vecteurs orthogonaux à \mathfrak{P}_0 ; si z en est un, $\mathfrak{P}_z = \langle y, x + z \rangle$ est également un plan irréductible contenu dans \mathfrak{D} .

Soit \mathfrak{P} un plan irréductible dans \mathfrak{D} ($d > 2$). Nous pouvons écrire $\mathfrak{D} = \mathfrak{P} \perp \mathfrak{E}$, avec $\mathfrak{E} = \mathfrak{P}^* \cap \mathfrak{D}^{12})$ (étant hyperbolique, \mathfrak{P} n'est pas singulier); on a $\mathfrak{E} \cap \Gamma(\mathfrak{E}) = 0$ (la seule droite réelle de \mathfrak{D} , qui est $\langle y \rangle$, est dans \mathfrak{P}).

En général, \mathfrak{P} et \mathfrak{E} ne sont pas biorthogonaux. Nous montrerons dans l'appendice comment on peut construire un \mathfrak{P} et un \mathfrak{E} qui le soient. Lorsque nous aurons démontré ainsi l'existence d'une décomposition biorthogonale de \mathfrak{D} en \mathfrak{P} et \mathfrak{E} , nous pourrons alors écrire la somme biorthogonale suivante:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \perp \mathfrak{P} \perp \mathfrak{E}, \quad (3)$$

(cf. la relation (8) du § II.2.), avec \mathfrak{B} réel, \mathfrak{E} complexe, \mathfrak{P} irréductible. En utilisant les lemmes 3 et 4 du paragraphe précédent, nous pourrons énoncer le

Théorème 2: *Tout sous-espace de la classe II, de dimension $a \geq 3$, peut se décomposer en une somme biorthogonale d'un plan irréductible et de $a - 2$ droites.*

Il serait facile de démontrer ensuite que toute somme biorthogonale d'un plan irréductible et de quelques droites est un sous-espace de la classe II. Nous y renonçons cependant.

Avant de passer à la construction annoncée, notons une conséquence des théorèmes 1 et 2:

Théorème 3: *Les (seuls) espaces biorthogonallement irréductibles d'un espace de MINKOWSKI sur les complexes sont 1) les droites; 2) les plans hyperboliques dont l'une des droites isotropes est réelle, l'autre étant complexe.*

Chapitre III

Le théorème 4

III.1. Géométrie du tube \mathfrak{T} . L'application π

Soit \mathfrak{B} un espace de MINKOWSKI sur les complexes; $\dim. \mathfrak{B} = N$.

Nous désignons par \mathfrak{T} le tube $\{x \mid \Im(x) \in V_+\}$ de \mathfrak{B} . \mathfrak{T} est invariant par les isométries de L^\dagger .

a) Nous établissons tout d'abord quelques propriétés de \mathfrak{T} et des sous-espaces de \mathfrak{B} qui ont une intersection non vide avec \mathfrak{T} .

\mathfrak{T} ne contient pas de vecteurs isotropes.

En effet, $Q(x) = 0$ entraîne $Q(\Im(x)) \leq 0$.

Soit \mathfrak{A} un sous-espace de \mathfrak{B} . Pour que $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{T}$ ne soit pas vide, il faut et il suffit que $\Re(\mathfrak{A}) = \Im(\mathfrak{A})$ contienne des vecteurs du genre temps. $\Re(\mathfrak{A})$ n'est donc pas singulier (§ I.1.). D'après le § I.3., section a), nous pouvons énoncer le

Lemme 5: Si $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{T} \neq \phi$, $\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})$ est un sous-espace de MINKOWSKI (cf. § I.4. a)). Comme tel, $\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})$ n'est pas singulier. En particulier, si $\mathfrak{A} = \Gamma(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{T} \neq \phi$ entraîne que \mathfrak{A} est un sous-espace de MINKOWSKI.

Lemme 6: Si $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{T} \neq \phi$, $\text{rad } \mathfrak{A}$ est complexe.

Démonstration: Si x est un vecteur réel de $\text{rad } \mathfrak{A}$, et si y est un vecteur de $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{T}$, $f(x, y) = f(x, \Gamma(y)) = 0$, donc $f(x, \Im(y)) = 0$; puisque $\Im(y)$ est du genre temps, et que $Q(x) = 0$, $x = 0$. c. q. f. d.

Il découle de ce lemme que si y est un vecteur non nul de $\text{rad } \mathfrak{A}$, $H(y) < 0$.

Nous pouvons préciser le lemme 6 de la manière suivante: Si $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{T} \neq \phi$, $\mathfrak{A} \cap \Gamma(\text{rad } \mathfrak{A}) = 0$. En effet, si $x \in \mathfrak{A} \cap \Gamma(\text{rad } \mathfrak{A})$, il existe $y \in \text{rad } \mathfrak{A}$ tel que $x = \Gamma(y)$. Nous avons $f(x, y) = 0$, car $x \in \mathfrak{A}$; autrement dit, $H(y) = 0$. Donc $y = 0$, et x aussi; c. q. f. d.

Lemme 7: Si $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{T} \neq \phi$, il existe un sous-espace $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ tel que $\mathfrak{A} = \text{rad } \mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$, cette somme étant biorthogonale.

Démonstration: Du lemme 6 et du lemme 1 (§ I.4. b)), il suit que $\mathfrak{C} = \text{rad } \mathfrak{A} \oplus \Gamma(\text{rad } \mathfrak{A})$ n'est pas singulier. Posons $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \oplus \Gamma(\text{rad } \mathfrak{A})$. $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D}$. Puisque \mathfrak{C} n'est pas singulier, on peut écrire

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{C} \perp \mathfrak{B}, \quad (1)$$

avec $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}^* \cap \mathfrak{D}^{12})$. \mathfrak{B} est ainsi orthogonal à $\text{rad } \mathfrak{A}$ et à $\Gamma(\text{rad } \mathfrak{A})$, donc \mathfrak{B} est biorthogonal à $\text{rad } \mathfrak{A}$.

Montrons que $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$. Soit $x \in \mathfrak{B}$; x peut s'écrire $y + \Gamma(z)$, $y \in \mathfrak{A}$, $z \in \text{rad } \mathfrak{A}$; x étant orthogonal à \mathfrak{C} , $f(x, t) = 0$ pour $t \in \mathfrak{C}$, en particulier, pour $t \in \text{rad } \mathfrak{A}$; or $f(x, t) = f(\Gamma(z), t) = h(z, t)$ pour $t \in \text{rad } \mathfrak{A}$; en particulier, avec $t = z$, $h(z, z) = H(z) = 0$: z est donc nul, et $x = y$ est dans \mathfrak{A} . Ainsi $\text{rad } \mathfrak{A} \perp \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$.

Or, de (1), on tire que

$$2 \dim. (\text{rad } \mathfrak{A}) + \dim. \mathfrak{B} = \dim. \mathfrak{D} = \dim. \mathfrak{A} + \dim. \text{rad } \mathfrak{A}$$

donc

$$\dim. \mathfrak{B} + \dim. \text{rad } \mathfrak{A} = \dim. \mathfrak{A}.$$

Par conséquent,¹⁵⁾

$$\mathfrak{A} = \text{rad } \mathfrak{A} \perp \mathfrak{B} \quad \text{c. q. f. d.}$$

Une conséquence du lemme 7: soit $x \in \mathfrak{A}$; nous pouvons écrire $x = y_0 + y$, avec $y_0 \in \text{rad } \mathfrak{A}$, $y \in \mathfrak{B}$, et y_0 est biorthogonal à y ; par conséquent, $\mathfrak{Jm}(y_0)$ est orthogonal à y . Posons $x(t) = y + (1-t)y_0$ (t réel). Nous avons $x(0) = x$, $x(1) = y$. $Q(\mathfrak{Jm}(x(t))) = (1-t)^2 Q(\mathfrak{Jm}(y_0)) + Q(\mathfrak{Jm}(y))$. Puisque y_0 est isotrope, $Q(\mathfrak{Jm}(y_0)) \leq 0$; et puisque $(1-t)^2$ est monotone décroissante ($0 \leq t \leq 1$), $Q(\mathfrak{Jm}(x(t)))$ est monotone croissante. Par conséquent, si $\mathfrak{Jm}(x) \in V$, $\mathfrak{Jm}(x(t))$ reste dans V pour $0 \leq t \leq 1$; en particulier, si $\mathfrak{Jm}(x) \in V_+$, $\mathfrak{Jm}(y)$ est également dans V_+ . Nous pouvons ainsi affirmer

$$Si x est dans \mathfrak{T}, y est aussi dans \mathfrak{T}. \quad (2)$$

Ce résultat trouvera son application dans la section c) de ce paragraphe.

b) *L'application π .*

Comme dans l'introduction, nous poserons $\mathfrak{B}^n = \mathfrak{B} \times \dots \times \mathfrak{B}$ (n fois); les points de \mathfrak{B}^n sont donc les n -tuples $(x)_n = (x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de \mathfrak{B} . Nous associerons à $(x)_n \in \mathfrak{B}^n$ le sous-espace $\mathfrak{A} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle x \rangle_n$ de \mathfrak{B} . Si $\dim. \mathfrak{A} = a$, nous dirons que $(x)_n$ a la dimension a ; nous dirons que $(x)_n$ est singulier, isotrope, etc., si \mathfrak{A} est singulier, isotrope, etc. A toute application Λ de \mathfrak{B} dans \mathfrak{B} , nous ferons correspondre une application Λ^n de \mathfrak{B}^n dans \mathfrak{B}^n : $\Lambda^n(x)_n = (\Lambda(x_1), \dots, \Lambda(x_n)) = (\Lambda x)_n$.

π est une application de \mathfrak{B}^n dans l'ensemble $S(n)$ des matrices symétriques complexes à n lignes et n colonnes:

$$\pi : (x)_n \rightarrow \pi(x)_n = (z_{ij}), \quad z_{ij} = f(x_i, x_j).$$

$S_r(n)$ désignera l'ensemble des matrices de $S(n)$ dont le rang est inférieur ou égal à r .

Nous énonçons sans démonstration deux propriétés de π :

Lemme 8: Soit a la dimension de $\mathfrak{A} = \langle x \rangle_n$, a_0 la dimension de $\text{rad } \mathfrak{A}$, et r le rang de $\pi(x)_n$. On a $r + a_0 = a$.

Lemme 9: Si $(x)_n$ et $(y)_n$ ne sont pas singuliers, et si $\pi(x)_n = \pi(y)_n$, il existe une isométrie $\Lambda \in L(\mathcal{C})$ telle que $(\Lambda x)_n = (y)_n$. Si $\dim. (x)_n < \dim. \mathfrak{B}$, Λ peut être choisi dans $L_+(\mathcal{C})$.

c) \mathfrak{T}^n désignera le produit direct $\mathfrak{T} \times \dots \times \mathfrak{T}$ (n fois); $\mathfrak{T}^n \subset \mathfrak{B}^n$.

Lemme 10: Si $(y)_n \in \mathfrak{T}^n$ est réel, $(y)_n$ n'est pas singulier.

Démonstration: Le lemme 10 est une conséquence immédiate du lemme 5.

Lemme 11: Si $(x)_n \in \mathfrak{T}^n$, il existe dans \mathfrak{T}^n un $(y)_n$ non singulier, tel que $\pi(y)_n = \pi(x)_n$.

Démonstration: Posons $\mathfrak{A} = \langle x \rangle_n$. Si r désigne le rang de $\pi(x)_n$, et si a désigne la dimension de \mathfrak{A} , on a $r \geq a$ (lemme 8). $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{T}$ n'est pas vide; on peut y appliquer le lemme 7, et poser $\mathfrak{A} = \text{rad } \mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$, où \mathfrak{B} est orthogonal à $\Gamma(\text{rad } \mathfrak{A})$. Du lemme 8, il suit que $\dim. \mathfrak{B} = r$. Ecrivons $x_i = y_i + y_{0i}$ ($1 < i < n$), avec $y_i \in \mathfrak{B}$, $y_{0i} \in \text{rad } \mathfrak{A}$; nous avons évidemment $\pi(x)_n = \pi(y)_n$, où $(y)_n = (y_1, \dots, y_n)$. D'autre part, $(y)_n \in \mathfrak{T}^n$: c'est l'énoncé (2). Montrons pour finir que $(y)_n$ n'est pas singulier. En effet, $\dim.$

¹⁵⁾ Si $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$: sous-espaces), et si $\dim. \mathfrak{A} = \dim. \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

$(y)_n \leq r$, car $\langle y \rangle_n \subset \mathfrak{B}$; $\dim. (y)_n \geq r$, car $\text{rang } \pi(y)_n = r$; donc $\dim. (y)_n = \text{rang } \pi(y)_n$, donc $(y)_n$ n'est pas singulier (lemme 8). c. q. f. d.

III.2. Considérations préliminaires

a) Soit \mathfrak{W} un sous-espace de MINKOWSKI dans \mathfrak{B} ; $\dim. \mathfrak{W} = r_0$. Posons $\mathfrak{t} = \mathfrak{T} \cap \mathfrak{W}$; \mathfrak{t} est un tube de \mathfrak{W} .

Comme nous l'avons annoncé dans notre introduction – en des termes un peu différents – le but de ce travail est de démontrer l'énoncé suivant:

(A) *Pour tout \mathfrak{W} , $\pi(\mathfrak{t}^n) = \pi(\mathfrak{T}^n) \cap S_{r_0}(n)$.* (C'est-à-dire: l'ensemble des matrices images de points de \mathfrak{t}^n coïncide avec l'ensemble des matrices images de points de \mathfrak{T}^n dont le rang est inférieur ou égal à r_0 .)

Je prétends que l'énoncé (A) est équivalent à l'énoncé (B) suivant:

(B) *Pour tout point $(x)_n \in \mathfrak{T}^n$, il existe un point $(y)_n \in \mathfrak{T}^n$ tel que*

$$\pi(y)_n = \pi(x)_n, \quad (a)$$

$$\langle y \rangle_n \text{ soit réel.} \quad (b)$$

Démonstration: (A) \rightarrow (B): Soit $(x)_n$ un point de \mathfrak{T}^n , et soit r le rang de $\pi(x)_n$:

$$\pi(x)_n \in \pi(\mathfrak{T}^n) \cap S_r(n).$$

D'après (A), pour tout $r_0 \geq r$, et pour tout sous-espace de MINKOWSKI \mathfrak{W} de dimension r_0 , $\pi(x)_n \in \pi(\mathfrak{t}^n)$, c'est-à-dire qu'il existe un point $(y)_n$ de \mathfrak{t}^n tel que $\pi(y)_n = \pi(x)_n$. Or, $\dim. (y)_n \geq \text{rang } \pi(y)_n = r$ (lemme 8); d'autre part $\langle y \rangle_n \subset \mathfrak{W}$, donc $\dim. (y)_n \leq r_0 = \dim. \mathfrak{W}$. Choisissons de faire $r_0 = r$. On a alors $\dim. \langle y \rangle_n = \dim. \mathfrak{W}$, donc $\langle y \rangle_n = \mathfrak{W}^{15}$). Par conséquent, $\langle y \rangle_n$ est réel.

(B) \rightarrow (A). Il est clair que pour tout \mathfrak{W} , $\pi(\mathfrak{t}^n) \subset \pi(\mathfrak{T}^n)$, et que, si $(y)_n \in \mathfrak{t}^n$, $\text{rang } \pi(y)_n \leq \dim. (y)_n \leq r_0 = \dim. \mathfrak{W}$. Donc $\pi(\mathfrak{t}^n) \subset \pi(\mathfrak{T}^n) \cap S_{r_0}(n)$. Soit maintenant une matrice Z dans $\pi(\mathfrak{T}^n) \cap S_{r_0}(n)$: il existe un point $(y)_n \in \mathfrak{T}^n$ tel que $\pi(y)_n = Z$, et d'après (B), on peut admettre que $\langle y \rangle_n$ est réel. $\langle y \rangle_n$ étant réel, et son intersection avec \mathfrak{T} n'étant pas vide, $\langle y \rangle_n$ est un sous-espace de MINKOWSKI (lemme 10), non singulier. Par conséquent, $\dim. \langle y \rangle_n = \text{rang } Z \leq r_0$. Soit \mathfrak{B} un sous-espace de MINKOWSKI contenu dans \mathfrak{W} avec $\dim. \mathfrak{B} = \dim. \langle y \rangle_n$. Il existe une isométrie Λ dans L^1 appliquant $\langle y \rangle_n$ sur \mathfrak{B} (§ I.4. a)). $(\Lambda y)_n$ est encore dans \mathfrak{T}^n , donc dans $\mathfrak{t}^n = \mathfrak{T}^n \cap \mathfrak{W}^n$, et $\pi(\Lambda y)_n = Z$. c. q. f. d.

b) Au paragraphe suivant, nous démontrerons le *théorème 4*:

Pour tout sous-espace non singulier \mathfrak{A} de \mathfrak{B} , tel que $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{T} \neq \phi^{16}$, il existe une isométrie $\Lambda \in L_+(\mathcal{C})$ telle que

1) $\Lambda(\mathfrak{A})$ soit réel,

2) *il existe un chemin $\Lambda(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) allant de l'identité de $L_+(\mathcal{C})$ à Λ , tel que $Q(\mathfrak{Im}(x(t)))$ soit monotone croissant (au sens large) pour tout x de \mathfrak{A} ($x(t) = \Lambda(t)(x)$).*

Ce théorème est dû à R. JOST, qui l'a énoncé dans son cours à l'E. P. F. (Zurich), en hiver 1960–1961. Nous allons démontrer qu'il entraîne l'énoncé (B).

¹⁶⁾ Il suffit à vrai dire d'exiger que $\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})$ ne soit pas singulier. Si $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{T} \neq \phi$, $\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})$ n'est pas singulier (lemme 5, § III.1.).

Démonstration: D'après le lemme 11 du paragraphe précédent, pour tout $(x)_n \in \mathfrak{T}^n$, il existe un $(z)_n$ non singulier dans \mathfrak{T}^n tel que $\pi(z)_n = \pi(x)_n$. Nous pouvons donc nous borner à montrer que le théorème 4 entraîne l'énoncé (B) pour des $(x)_n$ non singuliers.

Soit $(x)_n$ un point non singulier de \mathfrak{T}^n ; désignons par \mathfrak{A} le sous-espace $\langle x \rangle_n$; soit Λ l'isométrie dont l'existence est affirmée par le théorème 4; posons $(y)_n = (\Lambda x)_n$. Puisque $\{x_1, \dots, x_n\}$ sous-tend \mathfrak{A} , $\{y_1, \dots, y_n\}$ sous-tend $\Lambda(\mathfrak{A})$. D'après le théorème 4, $\langle y \rangle_n$ est donc réel.

Je prétends que $y_i \in \mathfrak{T}$ ($1 \leq i \leq n$). En effet, puisque $Q(\Im(x_i(t)))$ est monotone croissant, et que $\Im(x_i) = \Im(x_i(0))$ est dans V , $\Im(y_i)$ est dans la même composante de V que $\Im(x_i)$. Or $\Im(x_i) \in V_+$, donc $\Im(y_i) \in V_+$, et $y_i \in \mathfrak{T}$. c.q.f.d.

c) Avant de passer à la démonstration du théorème 4, faisons quelques remarques.

Nous dirons qu'une isométrie Λ de \mathfrak{B} est *accroissante sur le sous-espace* \mathfrak{A} de \mathfrak{B} si $Q(\Im(\Lambda(x))) \geq Q(\Im(x))$ pour tout x de \mathfrak{A} .

1) Pour que l'isométrie Λ soit accroissante sur \mathfrak{A} , il faut et il suffit que $H(\Lambda(x)) \geq H(x)$ pour tout x de \mathfrak{A} .

En effet, on a $\Re Q(\Lambda(x)) = \Re Q(x)$, c'est-à-dire $Q(\Re(\Lambda(x))) - Q(\Im(\Lambda(x))) = Q(\Re(x)) - Q(\Im(x))$; par conséquent, $Q(\Im(\Lambda(x))) \geq Q(\Im(x))$ si et seulement si $Q(\Re(\Lambda(x))) \geq Q(\Re(x))$; par conséquent, $H(\Lambda(x)) = Q(\Re(\Lambda(x))) + Q(\Im(\Lambda(x))) \geq H(x) = Q(\Re(x)) + Q(\Im(x))$, si et seulement si $Q(\Im(\Lambda(x))) \geq Q(\Im(x))$.

2) Considérons un sous-espace \mathfrak{A} de \mathfrak{B} qui soit une somme biorthogonale de sous-espaces $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_a$:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \perp \dots \perp \mathfrak{A}_a;$$

soient $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_a$ des sous-espaces mutuellement biorthogonaux, tels que $\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{B}_j = 0$ ($i \neq j$) et que $\mathfrak{A}_i \subset \mathfrak{B}_i$; soient $\Lambda_1, \dots, \Lambda_a$ des isométries: $\Lambda_i(\mathfrak{B}_i) = \mathfrak{B}_i$, Λ_i accroissante sur \mathfrak{A}_i . Je prétends que

$$\Lambda = \Lambda_1 \perp \dots \perp \Lambda_a^{17})$$

est une isométrie de $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \perp \dots \perp \mathfrak{B}_a$ accroissante sur \mathfrak{A} .

En effet, pour $x \in \mathfrak{A}$, $x = x_1 + \dots + x_a$, avec $x_i \in \mathfrak{A}_i$; $\Lambda(x) = \Lambda_1(x_1) + \dots + \Lambda_a(x_a)$. Les x_i sont biorthogonaux entre eux, les $\Lambda_i(x_i)$ également, et $H(\Lambda_i(x_i)) \geq H(x_i)$. Par conséquent,

$$H(\Lambda(x)) = \sum_{i=1}^a H(\Lambda_i(x_i)) \geq \sum_{i=1}^a H(x_i) = H(x) \quad \text{c.q.f.d.}$$

Nous appliquerons ce dernier fait à la démonstration du théorème 4.

III.3. Démonstration du théorème 4

Répétons l'énoncé du théorème 4, avec une légère modification basée sur une remarque du paragraphe précédent, section c):

Théorème 4: (R. JOST): *Pour tout sous-espace non singulier \mathfrak{A} de \mathfrak{B} , avec $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{T} \neq \phi^{16}$), il existe une isométrie $\Lambda \in L_+(\mathcal{C})$ telle que*

1) $\Lambda(\mathfrak{A})$ soit réel,

¹⁷⁾ ARTIN. Définition 3.6.

2) il existe un chemin $A(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) allant de l'identité de $L(\mathcal{C})$ à A , tel que pour tout x de \mathfrak{A} , $H(x(t))$ soit monotone croissant (au sens large) ($x(t) = A(t)(x)$).

Démonstration: a) Puisque $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{T} \neq \emptyset$, $\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})$ n'est pas singulier (lemme 5, § III.1.). \mathfrak{A} est donc du type (α) ou du type (δ) (cf. le tableau du § II.1.). Si \mathfrak{A} est du type (α) , \mathfrak{A} est de la classe I; le théorème 1 (§ II.2.) affirme que \mathfrak{A} possède une base biorthogonale $\{e_1, \dots, e_a\}$ ($a = \dim \mathfrak{A}$):

$$\mathfrak{A} = \langle e_1 \rangle \perp \dots \perp \langle e_a \rangle.$$

Si \mathfrak{A} est du type (δ) , \mathfrak{A} est de la classe II, et le théorème 2 (§ II.3.) affirme que \mathfrak{A} peut être décomposé en une somme biorthogonale de $a - 2$ droites et d'un plan hyperbolique irréductible:

$$\mathfrak{A} = \langle e_1 \rangle \perp \dots \perp \langle e_{a-2} \rangle \perp \mathfrak{P}.$$

\mathfrak{A} n'étant pas singulier, aucune des droites de la décomposition biorthogonale de \mathfrak{A} n'est isotrope¹⁷⁾.

Posons $\mathfrak{B}_i = \langle e_i, \Gamma(e_i) \rangle$ ($1 \leq i \leq a-2$ ou a), $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{P} + \Gamma(\mathfrak{P})$.
On a

$$\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}_1 + \dots + \mathfrak{B}_a \text{ si } \mathfrak{A} \text{ est du type } (\alpha),$$

$$\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}_1 + \dots + \mathfrak{B}_{a-2} + \mathfrak{B}_0 \text{ si } \mathfrak{A} \text{ est du type } (\delta).$$

Les \mathfrak{B}_i étant mutuellement orthogonaux, et $\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})$ n'étant pas singulier, la somme est directe, et aucun des \mathfrak{B}_i n'est singulier¹⁸⁾; on a donc

$$\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}_1 \perp \mathfrak{B}_2 \perp \dots$$

Les \mathfrak{B}_i étant réels, la somme est une décomposition biorthogonale de $\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})$. (Comparer cette section avec la remarque 2) du § III.2. c.)

b) Dans les sections c) et d), nous montrerons comment on peut construire dans chaque \mathfrak{B}_i une isométrie A_i de \mathfrak{B}_i sur lui-même.

- 1) qui soit accroissante sur $\langle e_i \rangle$, respectivement sur \mathfrak{P} ;
- 2) telle que $A_i(\langle e_i \rangle)$, resp. $A_0(\mathfrak{P})$ soit réel;
- 3) telle qu'il existe un chemin $A_i(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) d'isométries de \mathfrak{B}_i avec $A_i(0) = 1_{\mathfrak{B}_i}$ ¹⁹⁾, $A_i(1) = A_i$, tel que $H(x(t))$ soit monotone croissante pour tout $x \in \langle e_i \rangle$, resp. \mathfrak{P} ($x(t) = A_i(t)(x)$).

Supposons que ce résultat soit acquis. Au moyen des isométries A_1, A_2, \dots , nous pouvons construire une isométrie $\tilde{A} = A_1 \perp A_2 \perp \dots$ de $\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})$ sur lui-même. On a $\tilde{A}(\mathfrak{A}) = A_1(\langle e_1 \rangle) \perp \dots$. Nous voyons que $\tilde{A}(\mathfrak{A})$ est réel, puisqu'il se présente comme une somme d'espaces réels. Comme $\mathfrak{B} = (\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})) \perp (\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A}))^*$ ($\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A})$ n'est pas singulier)²⁰⁾, nous pouvons former à partir de \tilde{A} l'isométrie $A = \tilde{A} \perp 1_{(\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A}))^*}$ de \mathfrak{B} sur lui-même.

Je prétends que A a les propriétés annoncées dans le théorème. En effet, nous venons de voir que

¹⁸⁾ Cf. ARTIN, p. 115–116.

¹⁹⁾ ibid., p. 124.

²⁰⁾ Cf. ARTIN: théorème 3.5., équation (3.35).

1) $\Lambda(\mathfrak{A}) = \tilde{\Lambda}(\mathfrak{A})$ est réel.

2) Le chemin $\Lambda(t) = \tilde{\Lambda}(t) \perp 1_{(\mathfrak{A} + \Gamma(\mathfrak{A}))^*}$, avec $\tilde{\Lambda}(t) = \Lambda_1(t) \perp \Lambda_2(t) \perp \dots$ mène de $1_{\mathfrak{B}}$ à Λ , et $\Lambda(t)$ est une isométrie. Si $x \in \mathfrak{A}$, $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_a e_a$, resp. $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{a-2} e_{a-2} + \lambda_0 e_0$, avec $e_i \in \mathfrak{B}_i$ et $e_0 \in \mathfrak{P}$; $x(t) = \Lambda(t)(x) = \lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t) + \dots$, avec $e_i(t) \in \mathfrak{B}_i$. Les \mathfrak{B}_i étant mutuellement biorthogonaux, $H(x(t)) = |\lambda_1|^2 H(e_1(t)) + |\lambda_2|^2 H(e_2(t)) + \dots$. Les $H(e_i(t))$ étant monotones croissantes (au sens large), $H(x(t))$ l'est aussi, quels que soient les $\lambda_1, \lambda_2, \dots$.

c) Construction de Λ_i pour $\mathfrak{B}_i = \langle e_i, \Gamma(e_i) \rangle$.

1) Si e_i est semi-réel, $\langle e_i \rangle$ est réel. Posons $\Lambda_i = 1_{\mathfrak{B}_i}$; cette isométrie satisfait trivialement à tout ce que nous en exigeons.

Si e_i est complexe, nous remarquons que $\Re(\langle e_i \rangle)$ n'est pas singulier, puisque $\mathfrak{B}_i = \langle \Re(\langle e_i \rangle) \rangle$ ne l'est pas (§ I.3. a)). Par conséquent, $\Re(\langle e_i \rangle)$ est soit du genre temps, soit du genre espace (§ I.1.).

2) $\Re(\langle e_i \rangle)$ est du genre espace.

Puisque e_i n'est pas isotrope, nous pouvons admettre que $Q(e_i) = -1$. Posons $e_i = x + iy$, avec x et y réels; puisque e_i est complexe, x et y sont linéairement indépendants. Puisque $Q(e_i)$ est réel, x et y sont orthogonaux. Puisque $\Re(\langle e_i \rangle) = \langle x, y \rangle$ est du genre espace, x et y sont du genre espace (§ I.1.): $Q(x) < 0, Q(y) < 0$. De $Q(e_i) = -1$, il suit que $\Re Q(e_i) = Q(x) - Q(y) = -1$; donc $Q(x) = -1 + Q(y)$ est inférieur à -1 . Par conséquent, $H(e_i) = Q(x) + Q(y) < -1$.

Puisque $Q(e_i)$ est réel, x et y sont orthogonaux. Posons $x = \lambda x', y = \mu y'$, x' et y' réels, $Q(x') = Q(y') = -1$, λ et μ réels et positifs. λ et μ satisfont à $\lambda^2 - \mu^2 = 1 (= -Q(e_i))$ et à $\lambda^2 + \mu^2 = -H(e_i)$. Il existe ainsi un nombre réel positif φ , unique, tel que $\lambda = \operatorname{Ch} \varphi, \mu = \operatorname{Sh} \varphi$; φ est déterminé par la condition $\operatorname{Ch} 2\varphi = -H(e_i) (> 1)$. Il existe une rotation Λ_i de \mathfrak{B}_i , et une seule, telle que $\Lambda_i(e_i) = x'$ ²¹⁾. Cette rotation est accroissante sur $\langle e_i \rangle$, car $H(e_i) < H(x') = -1$. La matrice associée à Λ_i dans la base $\{x', y'\}$ de \mathfrak{B}_i est

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Ch} \varphi & i \operatorname{Sh} \varphi \\ -i \operatorname{Sh} \varphi & \operatorname{Ch} \varphi \end{pmatrix}.$$

Définissons $\Lambda_i(t)$ par la matrice

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Ch} t\varphi & i \operatorname{Sh} t\varphi \\ -i \operatorname{Sh} t\varphi & \operatorname{Ch} t\varphi \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1).$$

$\Lambda_i(t)$ est une rotation; le chemin $\Lambda_i(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) mène de $1_{\mathfrak{B}_i}$ à Λ_i . $x(t) = \Lambda_i(t)(x) = \alpha(x' \operatorname{Ch}(1-t)\varphi + iy' \operatorname{Sh}(1-t)\varphi)$ pour $x = \alpha e_i$.

$H(x(t)) = -|\alpha|^2 \operatorname{Ch} 2(1-t)\varphi$ est donc monotone croissant dans l'intervalle $0 < t < 1$, quel que soit $x \in \langle e_i \rangle$.

3) $\Re(\langle e_i \rangle)$ est du genre temps.

e_i n'étant pas isotrope, nous pouvons admettre que $Q(e_i) = 1$. Comme tout à l'heure, posons $e_i = x + iy$, avec x et y réels; $\Re(\langle e_i \rangle) = \langle x, y \rangle$. Puisque e_i est complexe, et que $Q(e_i)$ est réel, x et y forment une base orthogonale de $\Re(e_i)$.

²¹⁾ Cf. ARTIN, théorème 3.17.

Puisque $\Re(\langle e_i \rangle)$ est du genre temps et que $Q(e_i) = Q(x) - Q(y) = 1$, nous voyons que $0 < Q(x) < 1$, $Q(y) < 0$. Donc $H(e_i) = Q(x) + Q(y) = 2Q(x) - 1$ est compris entre -1 et $+1$:

$$-1 < H(e_i) < 1.$$

Comme tout à l'heure, posons $x = \lambda x'$, $y = \mu y'$, avec x' et y' réels, $Q(x') = 1$, $Q(y') = -1$, λ et μ réels, positifs. λ et μ satisfont à $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ ($= Q(e_i)$), $\lambda^2 - \mu^2 = H(e_i)$. Il existe un nombre réel φ , unique, compris entre 0 et $\pi/2$, tel que $\lambda = \cos \varphi$, $\mu = \sin \varphi$; φ est univoquement déterminé par la relation $\cos 2\varphi = H(e_i)$. Il existe une rotation Λ_i de \mathfrak{V}_i , et une seule, telle que $\Lambda_i(e_i) = x'$ ²⁵); Λ_i est accroissante sur $\langle e_i \rangle$, car $H(e_i) < H(x') = 1$. La matrice associée à Λ_i dans la base $\{x', y'\}$ est

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -i \sin \varphi \\ -i \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Définissons $\Lambda_i(t)$ par la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos t\varphi & -i \sin t\varphi \\ -i \sin t\varphi & \cos t\varphi \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1).$$

$\Lambda_i(t)$ est une rotation; le chemin $\Lambda_i(t)$ mène de $1_{\mathfrak{V}_i}$ à Λ_i . $x(t) = \Lambda_i(t)(x) = \alpha(x' \cos(1-t)\varphi + i y' \sin(1-t)\varphi)$ pour $x = \alpha e_i$. $H(x(t)) = |\alpha|^2 \cos 2(1-t)\varphi$ est donc monotone croissant pour $0 \leq t \leq 1$, pour tout $x \in \langle e_i \rangle$.

d) *Construction de Λ_0 pour $\mathfrak{V}_0 = \mathfrak{P} + \Gamma(\mathfrak{P})$.*

Le plan irréductible \mathfrak{P} contient deux vecteurs isotropes non orthogonaux. L'un, disons y , est réel; l'autre, disons z , est complexe. Nous pouvons toujours admettre que $f(y, z) = 1$. On a $\mathfrak{P} = \langle y, z \rangle$, et $\mathfrak{V}_0 = \langle y, z, \Gamma(z) \rangle$.

z étant isotrope et complexe, $H(z)$ est négatif: $H(z) < 0$ (§ I.4. b)).

Pour tout $x \in \mathfrak{P}$, et pour tout isométrie Λ de \mathfrak{V}_0 laissant y invariant, on a

$$H(\Lambda(x)) - H(x) = |f(y, x)|^2 (H(\Lambda(z)) - H(z)).$$

On en déduit que, pour que Λ soit accroissante sur \mathfrak{P} , il faut et il suffit que Λ soit accroissante sur $\langle z \rangle$.

Pour qu'un vecteur $y_0 = \alpha y + \beta z + \gamma \Gamma(z)$ de \mathfrak{V}_0 satisfasse aux conditions $Q(y_0) = 0$, $f(y, y_0) = 1$, il faut et il suffit que $\beta + \gamma = 1$, $\alpha = -\beta \gamma H(z)$. On a alors

$$H(y_0) = |\beta - \gamma|^2 H(z). \quad (1)$$

Posons $\beta = \gamma = 1/2$, et $\alpha = -1/4 H(z)$; y_0 est alors réel, et $H(y_0) = 0$.

La rotation Λ_0 de \mathfrak{V}_0 (unique)²⁵ qui satisfait à $\Lambda_0(y) = y$, $\Lambda_0(z) = y_0$ est accroissante sur $\langle z \rangle$, car $H(z) < H(y_0) = 0$.

Pour trouver la matrice de Λ_0 dans la base $\{y, z, \Gamma(z)\}$ de \mathfrak{V}_0 , posons $\Lambda_0(\Gamma(z)) = \hat{y} = y + \lambda z + \mu \Gamma(z)$. La matrice de Λ_0 est alors

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4}H(z) & \alpha \\ 0 & \frac{1}{2} & \lambda \\ 0 & \frac{1}{2} & \mu \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice étant égal à 1, on doit avoir $\mu - \lambda = 2$. Puisque \hat{y} satisfait à $Q(\hat{y}) = 0$, $f(y, \hat{y}) = 1$, on doit avoir $\mu + \lambda = 1$, $\varkappa = -\lambda \mu H(z)$ (cf. ci-dessus). On trouve ainsi $\lambda = -1/2$, $\mu = 3/2$, $\varkappa = 3/4 H(z)$, et la matrice de A_0 est ainsi:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4}H(z) & \frac{3}{4}H(z) \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Définissons $A_0(t)$ par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{t}{2}\left(1 - \frac{t}{2}\right)H(z) & \frac{t}{2}\left(1 + \frac{t}{2}\right)H(z) \\ 0 & 1 - \frac{t}{2} & -\frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 + \frac{t}{2} \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

$A_0(t)$ est une rotation de \mathfrak{P}_0 qui laisse y invariant; le chemin $A_0(t)$ relie $1_{\mathfrak{P}_0}$ à A_0 . Montrons que $H(x(t))$ est monotone croissante pour tout x de \mathfrak{P} . Il suffit, d'après ce que nous avons vu plus haut, de montrer que $H(z(t))$ est monotone croissante. $z(t) = A_0(t) \cdot z = -y t/2 (1 - t/2) H(z) + z (1 - t/2) + \Gamma(z) t/2$. La formule (1) nous donne

$$H(z(t)) = t(t-2) H(z),$$

qui est monotone croissant pour $0 \leq t \leq 1$ ($H(z) < 0$!). c. q. f. d.

Appendice

Construction d'un \mathfrak{P} et d'un \mathfrak{E} biorthogonaux. (cf. § II.3. b)). Soit \mathfrak{P}_0 un plan irréductible de \mathfrak{D} ; écrivons $\mathfrak{P}_0 = \langle y, y_0 \rangle$, avec y_0 isotrope, univoquement déterminé par la condition $f(y, y_0) = 1$.

Posons $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{P}_0^* \cap \mathfrak{D}$. Si $\{x_i\}$ ($1 \leq i \leq d-2$) est une base de \mathfrak{E}_0 , le plan irréductible le plus général de \mathfrak{D} peut être écrit:

$$\mathfrak{P} = \langle y, y_0 + \sum_{i=1}^{d-2} \alpha_i x_i \rangle,$$

avec des $\alpha_i \in \mathcal{C}$ arbitraires.

Pour trouver une base de $\mathfrak{E} = \mathfrak{P}^* \cap \mathfrak{D}$, partons de la base $\{x_i\}$ de \mathfrak{E}_0 , que nous supposerons être *orthogonale*. Posons $e_i = x_i + \beta_i y$ ($1 \leq i \leq d-2$). Remarquons que les e_i , qui appartiennent à \mathfrak{D} , sont linéairement indépendants (car $y \notin \mathfrak{E}_0$), mutuellement orthogonaux, et orthogonaux à y . Par un choix convenable des β_i , on peut les rendre orthogonaux à \mathfrak{P} ; pour cela, il faut et il suffit que $f(e_i, y_0 + \sum \alpha_j x_j) = 0$ ($1 \leq i \leq d-2$); or, ces conditions sont remplies si $\beta_i = -\alpha_i Q(x_i)$. Avec ce choix des β_i , les e_i forment une base orthogonale de \mathfrak{E} .

Nous avons ainsi obtenu la paire la plus générale formée d'un \mathfrak{P} irréductible et du $\mathfrak{E} = \mathfrak{P}^* \cap \mathfrak{D}$ correspondant:

$$\mathfrak{P} = \langle y, y_0 + \sum \alpha_i x_i \rangle, \\ \mathfrak{E} = \langle x_1 - y \alpha_1 Q(x_1), x_2 - y \alpha_2 Q(x_2), \dots \rangle.$$

Puisque $\mathfrak{E}_0 \cap \Gamma(\mathfrak{E}_0) = 0$, le lemme 4 du paragraphe II.2. nous permet de supposer que la base $\{x_i\}$ de \mathfrak{E}_0 est *biorthogonale*. Cela nous permettra d'écrire plus simplement les conditions auxquelles les α_i doivent satisfaire pour que \mathfrak{P} et \mathfrak{E} soient biorthogonaux. Ces conditions sont :

$$1) \quad h(e_i, y) = 0 \quad (1 \leq i \leq d-2),$$

ce qui est acquis d'avance (y est réel, et orthogonal aux e_i);

$$2) \quad h(e_i, y_0 + \sum \alpha_j x_j) = 0 \quad (1 \leq i \leq d-2),$$

c'est-à-dire

$$h(x_i, y_0) + \alpha_i H(x_i) + \overline{\alpha_i Q(x_i)} = 0. \quad (2)$$

Désignons par x_1, \dots, x_ρ les vecteurs isotropes de la base $\{x_i\}$ de \mathfrak{E}_0 ; les vecteurs non isotropes $x_{\rho+1}, \dots, x_{d-2}$ seront supposés satisfaire à $Q(x_i) = 1$ ($\rho+1 \leq i \leq d-2$). Les conditions (2) deviennent :

$$\alpha_i H(x_i) = -h(x_i, y_0) \quad 1 \leq i \leq \rho,$$

$$\alpha_i H(x_i) + \overline{\alpha_i} = -h(x_i, y_0) \quad \rho+1 \leq i \leq d-2.$$

Si $H(x_i) \neq 0$ pour $i \leq \rho$, et si $H(x_i) \neq \pm 1$ pour $i \geq \rho+1$, ces conditions peuvent être satisfaites quels que soient les $h(x_i, y_0)$; les α_i doivent alors être choisis ainsi :

$$\alpha_i = -\frac{h(x_i, y_0)}{H(x_i)} \quad i \leq \rho,$$

$$\alpha_i = \frac{H(x_i) h(x_i, y_0) - h(y_0, x_i)}{(H(x_i))^2 - 1} \quad i \geq \rho+1.$$

Il est facile de vérifier qu'on a bien $H(x_i) < 0$ pour $i \leq \rho$, et $H(x_i) < -1$ pour $i \geq \rho+1$.

Bibliographie

- [1] A. WIGHTMAN, Phys. Rev. 101, 860 (1956).
- [2] H. LEHMANN, K. SYMANZIK, W. ZIMMERMANN, Nuovo Cim. 1, 425 (1955).
- [3] D. HALL, A. WIGHTMANN, Mat.-fys. Medd. DKV. 31 No 5 (1957).
- [4] R. JOST, Helv. Phys. Acta 33, 773 (1960).
- [5] K. HEPP, Diplomarbeit ETH (1960) (non publié).
- [6] R. JOST in *Field Theory and Many Body Problem*, ed. E. R. Caianello (1961).
- [7] D. RUELLE, Helv. Phys. Acta 34, 587 (1961).
- [8] E. ARTIN: *Geometric Algebra* (Interscience Publishers 1957).
- [9] J. DIEUDONNÉ: *Géométrie des groupes classiques* (Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, Heft 5, 1955).
- [10] C. CHEVALLEY: *Algebraic Theory of Spinors* (Columbia University Press 1954).