

<b>Zeitschrift:</b>	Helvetica Physica Acta
<b>Band:</b>	35 (1962)
<b>Heft:</b>	VII-VIII
<b>Artikel:</b>	Théorie des quanta dans l'espace de Hilbert réel. IV, Champs de deuxième espèce (opérateurs de champ antilinéaires), T- et CP-covariance
<b>Autor:</b>	Stueckelberg, E.C.G. / Guenin, M.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-113292">https://doi.org/10.5169/seals-113292</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Théorie des quanta dans l'espace de Hilbert réel IV:  
**Champs de 2<sup>e</sup> espèce (opérateurs de champ antilinéaires),  
T- et CP-covariance\*)**

par **E. C. G. Stueckelberg et M. Guenin\*\*) (Universités de Genève et Lausanne)**

(8. V. 62)

*Abstract.* In previous articles (referred to as I, II, III) we showed that quantized fields can be, in principle, *antilinear operators* (i.e. anticommuting with  $i = \sqrt{-1}$ ). It is shown, that antilinear scalar (or tensor) fields  $\bar{w}$  cannot exist (algebraic contradiction). For antilinear spinor fields  $\bar{\psi}^A$ , a representation for the *FD*-case has been found. An antilinear operator  $\bar{K}_+$  exists, relating in  $\psi = \bar{\psi} \bar{K}_+$  *linear* ( $\psi$ ) and *antilinear FD-fields* ( $\bar{\psi}$ ). (The *BE* case is to be excluded on account of C-covariance or for thermodynamical reasons.)

Treating *interacting fields*, the antilinear formalism is shown to be impossible, if scalar (or tensor) fields exist. Pure Fermi interaction however, is possible. One or more of the four spinor fields  $\psi^A_{(i)}$  ( $(i) = (1)$  to  $(4)$ ) may be treated as antilinear fields  $\bar{\psi}^A_{(i)}$ . An operator  $\bar{K}_{- - +}$  must be contained in the interaction momentum-energy density  $\theta^\alpha \beta^{(int)}$ , if an odd number of  $\bar{\psi}_{(i)}$ 's occurs. Furthermore a reality condition for the 10 coupling constants is necessary. This assures automatically *T*-covariance.

All calculations in this article could be done in CHS (Complex Hilbert Space). However, our method of RHS (Real Hilbert Space) is much more convenient, antilinear operators in CHS being linear in RHS. Also, the disconnected parts of the Lorentz group (*P* and *T*) are much easier to handle, the method providing for a «fool proof notation».

We conclude: *The theory of antilinear FD fields is isomorph to the theory of linear FD-fields, if the (observed) separate T- and CP-covariance is postulated. BE fields can not occur, but must be considered as 'bound states' of FD fields.*

### Introduction et conclusion

Dans une série d'articles<sup>1) 2) 3)</sup> (auxquels nous nous référerons par I, II, III; une note<sup>7)</sup> a déjà paru), nous avons tout d'abord (I) montré que la

\*) Travail subventionné par le Fonds National Suisse pour la recherche scientifique.

\*\*) Ce travail fait l'objet d'une thèse de doctorat de l'un de nous (M.G.), soutenue devant la faculté des sciences de l'Université de Genève, le 14 juin 1962.

théorie des quanta dans un *espace de Hilbert réel* (RHS\*) et celle dans un *espace de Hilbert complexe* (CHS\*)) étaient isomorphes. Il existe notamment la correspondance biunivoque  $\overset{\circ}{J} \rightleftarrows i = \sqrt{-1}$ . En III ont été formulées les lois générales auxquelles une théorie des champs (scalaires  $w$ , spinoriels  $\psi$ ) doit satisfaire. Nous avons montré, qu'outre les champs de 1<sup>re</sup> espèce, commutant avec  $\overset{\circ}{J}$  (III. 1. 5, 1<sup>st</sup> k.), des champs de 2<sup>e</sup> espèce, anticommutant avec  $\overset{\circ}{J}$  (III. 1. 5, 2<sup>nd</sup> k.) pouvaient être conçus, a priori. Pour simplifier nos expressions, nous les appellerons *champs linéaires* et *champs antilinéaires*\*\*) respectivement.

Developpant le *champ scalaire antilinéaire*, nous montrons (§ 1), que les *deux possibilités*\*\*\*) de quantification amènent à des contradictions algébriques. Il en est de même pour tout champ tensoriel. Nous en tirons la conclusion :

*Les champs scalaires et tensoriels,  $w, w^\alpha, \dots$  sont nécessairement linéaires.*

Pour le *champ spinoriel antilinéaire* (§§ 2, 3)  $\bar{\psi}^A(x)$ , nous obtenons les *deux cas*: commutation (BE) et anticommutation (FD). Le raisonnement de SCHWINGER<sup>4)</sup>\*\*) (C-covariance), ou la *condition thermodynamique* (PAULI<sup>6</sup>): postulat d'une borne inférieure pour l'énergie  $H$ \*\*\*\*) excluent le cas BE. On s'aperçoit alors:

1. que les expressions pour les densités de quantité de mouvement-énergie et de courant-charge ont la même forme ( $\psi_\alpha(x) = \partial_\alpha \psi(x)$ ):

$$T^\alpha{}_\beta^{(0)}(x) = \frac{1}{4} \overset{\circ}{J}^{-1} (\bar{\psi}^T \gamma^\alpha \psi_\beta - \bar{\psi}^T{}_\beta \gamma^\alpha \psi + \bar{\psi} \gamma^\alpha \psi^T{}_\beta - \bar{\psi}_\beta \gamma^\alpha \psi^T) (x), \quad (0.2)$$

$$\overset{\circ}{j}{}^\alpha(x) = \frac{1}{2} (\bar{\psi}^T \gamma^\alpha \psi - \bar{\psi} \gamma^\alpha \psi^T) (x) \quad (0.3)$$

est valable pour  $\psi$  et pour  $\bar{\psi}$ .

2. que les relations d'anticommutation (III 8. 12) et (III 8. 13) sont aussi valables dans les 2 cas.

Developpant en termes de deux systèmes de paquets d'ondes  $\{\varphi'^A\}$  et  $\{\chi'^A\}$  (cf. III § 11), on s'aperçoit que les deux ensembles  $\{\varphi'\}$  et  $\{\chi'\}$  en

$$\bar{\psi}(x) = \mathbf{S}_{\varphi'} \varphi'(x) \bar{a}_{\varphi'} + \mathbf{S}_{\chi'} \chi'^T(x) \bar{b}^T{}_{\chi'} \quad (0.4)$$

\*) RHS (CHS) = Real (Complex) Hilbert Space (cf. I, II, III).

\*\*)  $w, \psi$  sont des *champs linéaires* (ou, dans certaines équations, *linéaires ou antilinéaires*).  $\bar{w}, \bar{\psi}$  sont des *champs antilinéaires*. Tout opérateur avec une barre  $\bar{K}_\pm, \bar{a}, \dots$  est antilinéaire, i.e.  $[\bar{K}_\pm, \overset{\circ}{J}]_+ = 0$ .

\*\*\*) Ces deux possibilités ne peuvent pas être caractérisées par commutation ou anticommutation ((BE) ou (FD)).

\*\*\*\*) Le symbole  $\overset{\circ}{H}$  en I, II, III était faux: il faut écrire  $H$ , parce que lors de  $T \leftarrow O_T$ ,  $H$  garde son signe:

$$\overset{\circ}{H}{}^\mu = \left\{ \overset{\circ}{H}, H \right\}; \quad 'H = O^{-1}{}_T H O_T = H; \quad 'H = O^{-1}{}_T \overset{\circ}{H} O_T = -\overset{\circ}{H}. \quad (0.1)$$

doivent être identifiés. Ceci provient du fait que les  $\bar{a}^T_{\varphi'}$  et  $\bar{a}_{\varphi'}$  n'ont plus le caractère d'opérateurs de création et d'annihilation.

En termes de l'algèbre des  $\bar{a}_{\varphi'}$  et  $\bar{b}_{\varphi'}$ , l'opérateur  $O_C$  effectuant la  $C$ -conjugaison peut être donné explicitement (§ 3).

Dans le § 4 nous donnons une *représentation des*  $\bar{a}_{\varphi'}$  et  $\bar{b}_{\varphi'}$ . Aussi trouvons-nous que les *valeurs propres de la quantité de mouvement-énergie* ( $\bar{H}'_{\mu}$ ) et de la charge ( $Q'$ ) sont identiques avec celles du champ linéaire.

Le § 5 donne une expression (multivoque, en fonction de  $Q$ ) de l'opérateur  $O_{\lambda}$  changeant la phase de  $\psi$ .

L'identité des valeurs propres  $\bar{H}'_{\mu}$  et  $Q'$  laisse prévoir l'existence d'opérateurs antilinéaires ( $\bar{K}_-$  et  $\bar{K}_+$ ), ramenant le formalisme antilinéaire au linéaire, conformément à

$$\psi(x) = \bar{\psi}(x) \bar{K}_{\pm}; \quad (0.5)$$

$$\bar{K}^T_{\pm} \bar{K}_{\pm} = \bar{K}_{\pm} \bar{K}^T_{\pm} = 1, \quad (0.6)$$

$$[\bar{\psi}, \bar{K}_{\pm}]_{\pm} = [\bar{\psi}, \bar{K}^T_{\pm}]_{\pm} = 0. \quad (0.7)$$

(Une transformation orthogonale transformant un  $\bar{A}$  en un  $A$  est impossible.) Nous avons trouvé la représentation de ces deux opérateurs (telle que  $\bar{K}^T_{\pm} = \bar{K}_{\pm}$ ). (Les représentations (III. 11.14) et (4.2) ont été choisies de telle manière que  $\bar{K}_+$  les relie.)

Le § 7 prépare la théorie d'interaction, en définissant (en termes des opérateurs de SCHRÖDINGER  $w(\vec{x})$  et  $\psi(\vec{x})$ ), l'*hamiltonien des champs libres*  $H_{(i)}^{(lib)}$  \*).

Ensuite (§ 8), l'impossibilité du «formalisme  $\bar{\psi}$ » est démontrée si des champs tensoriels  $w$ ,  $w^{\alpha}$ ,  $w^{(\alpha \beta)}$ , ... existent: *Donc, en particulier, il y a impossibilité d'une électrodynamique avec un champ de matière décrit par  $\bar{\psi}$ .*

Par contre, une théorie où seuls des champs de *FD* interviennent, est possible. Nous démontrons d'abord, qu'une densité de quantité de mouvement-énergie d'interaction  $\theta^{\alpha \beta(int)}$  peut être trouvée pour des champs linéaires

$$\theta^{\alpha \beta(int)}(x) = \sum_{a(\nu)=1}^{10} \theta_{a(\nu)}^{\alpha \beta(int)}(x), \quad (0.8)$$

$$\theta_{a(\nu)}^{\alpha \beta(int)}(x) = -g^{\alpha \beta} \bar{J}^{-1} \left\{ \begin{aligned} & \bar{g}_{a(\nu)}^{\nu} (\bar{\psi}_{(1)}^T \gamma^{(\nu)} \psi_{(2)}) (\bar{\psi}_{(3)}^T \gamma_{(\nu)} \psi_{(4)}) \\ & \mp (\bar{\psi}_{(4)}^T \gamma_{(\nu)} \psi_{(3)}) (\bar{\psi}_{(2)}^T \gamma^{(\nu)} \psi_{(1)}) \bar{g}_{a(\nu)}^{\nu} \} (x). \end{aligned} \right\} \quad (0.9_{\mp})$$

\*) Valable pour  $\psi$  et pour  $\bar{\psi}$ .

L'index  $a(\nu)$  dénombre les 10 différentes possibilités de couplage. Les

$$\breve{J}^{-1} \breve{g}_{a(\nu)}(\breve{J}) = C_{a(\nu)}(\breve{J}) \quad (0.10)$$

sont les constantes de couplage, fonctions de  $\breve{J}$  ( $\rightleftarrows$  Nombres complexes dans l'CHS). Pour les 5 interactions conservant la parité,  $a(\nu) = SS, VV, TT, AA, PP^*$ ), nous avons:

$$\gamma^{(\nu)} = \gamma^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu} = \gamma^{[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu]}, \quad (0.11 \text{ ctr.})$$

$$\gamma_{(\nu)} = \gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu} = \dots \quad (0.11 \text{ cov.})$$

(0.9<sub>-</sub>) est alors valable, vu que  $\breve{\gamma}^{(\nu)} \sim = \mp \breve{\gamma}^{(\nu)}$  et  $\breve{\gamma}_{(\nu)} = \mp \breve{\gamma}_{(\nu)}$  ont la même symétrie (condition  $\theta^{\alpha \beta T} = \theta^{\alpha \beta}$ ).

Pour les interactions violant la parité, on garde la définition covariante (0.11 cov.), mais on définit les matrices contravariantes par

$$\gamma^{(\nu)} = \gamma_5 \gamma^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu}; \quad \gamma_5 = \gamma^{1234}. \quad (0.11_5)$$

La condition  $\theta^{\alpha \beta T} = \theta^{\alpha \beta}$  exige (0.9<sub>-</sub>) pour  $(\nu) = (0), (2), (4)$  (ou  $a(\nu) = PS, T_{(dual)} T, SP$ ) et (0.9<sub>+</sub>) pour  $(\nu) = (1), (3)$  ( $a(\nu) = AV, VA$ ), vu la symétrie des  $\breve{\gamma}^{(\nu)}$  et  $\breve{\gamma}_{(\nu)}$ .

Si un seul champ, soit  $\bar{\psi}_{(4)}$ , est antilinéaire (§ 10), il est nécessaire, qu'un opérateur antilinéaire constant  $\bar{\Omega}$  intervienne.

On a

$$\theta_{a(\nu)}^{\alpha \beta (int)}(x) = (0.9_{\mp}) \quad (\psi_{(4)} \rightarrow \bar{\psi}_{(4)} \bar{\Omega} = \tilde{\psi}_{(4)}) \quad (0.12_{\mp})$$

c'est-à-dire que l'on substitue l'opérateur linéaire

$$\tilde{\psi}_{(4)} = \bar{\psi}_{(4)} \bar{\Omega} \quad (0.13)$$

pour  $\psi_{(4)}$  dans (0.9<sub>±</sub>).

Les conditions que l'on doit imposer à  $\bar{\Omega}$  montrent qu'il est du «type  $\bar{K}_{\mp}$ », les différentes possibilités ne faisant que modifier les représentations des quatres  $\psi_{(4)}$ , nous pouvons donc écrire

$$\psi_{(4)} = \tilde{\psi}_{(4)} = \bar{\psi}_{(4)} \bar{\Omega}. \quad (0.13)$$

Mais un phénomène intéressant apparaît:

Si l'on exige l'existence d'un formalisme antilinéaire, les 10 constantes de couplage doivent être indépendantes de  $\breve{J}$ , c'est-à-dire

$$\breve{J}^{-1} \breve{g}_{a(\nu)}(\breve{J}) = C_{a(\nu)}(\breve{J}) \equiv \lambda_{a(\nu)} \quad (0.14)$$

où les dix  $\lambda_{a(\nu)}$  sont des  *nombres (réels)*.

\*)  $S$  (-calaire),  $V$  (-ecteur),  $T$  (-enseur), (vecteur)  $A$  (-xial),  $P$  (-seudovecteur).

On voit ici le grand avantage formel du choix (0.10):  $\breve{g}_{a(\nu)}(\breve{J}) = \breve{J} \lambda_{a(\nu)}$  devient un opérateur pseudochrone. Ceci donne à  $\theta^{\alpha \beta(int)}(x)$  la «forme covariante» vu son caractère orthochrone. Aussi a-t-on, si les 4 phases  $\lambda_{(i)}$  dans les transformations  $T \leftarrow O_T$  (III. 8.3) des quatres  $\psi_{(i)}$  sont les mêmes, plus exactement, si

$$-\lambda_{(1)} + \lambda_{(2)} - \lambda_{(3)} + \lambda_{(4)} = \lambda_{(tot)} = 0, \quad (0.15) ^*)$$

covariance par rapport à  $T \leftarrow O_T$ .

De la covariance p.r. à  $CPT$  ( $\leftarrow O_{CPT}$ ) (établie dans le formalisme réel au § 9), suit donc (§ 10) aussi la covariance par rapport à  $CP$  ( $\leftarrow O_{CP}$ ).

Nous concluons: *La théorie des champs spinoriels antilinéaires  $\psi_{(i)}$  est donc, à tout point de vue physique, isomorphe à la théorie des champs linéaires  $\psi_{(i)}$ . Elle a le défaut de ne pas admettre des champs scalaires et tensoriels  $w$ ,  $w^\alpha$ ,  $w^{(\alpha \beta)}$ , ..., mais elle a l'avantage de nous fournir une raison pour la  $T$  ( $\leftarrow O_T$ )-covariance actuellement observée<sup>11)</sup> <sup>12)</sup> <sup>13)</sup> \*\*).*

*Vu les tentatives de ramener les champs  $w$ ,  $w^\alpha$ , ... à des champs  $\psi_{(i)}^A$  (par exemple HEISENBERG<sup>14)</sup>), il nous semble possible qu'un principe physique se cache derrière l'isomorphisme  $\psi_{(i)}^A \rightleftarrows \psi_{(i)}$ .*

Nous tenons à remercier MM. J. M. JAUCH, C. PIRON et H. RUEGG de leurs conseils.

### § 1. Non-existence de champs scalaires et tensoriels antilinéaires

Appliquant l'identité (III. 1.4) à la relation (III. 2.16) pour le cas d'un champ de 2<sup>e</sup> espèce  $\bar{w}(x)$ , nous obtenons

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \{ \breve{J} \bar{w}^T(x) [\bar{w}(z), \bar{w}(y')]_\mp \pm [\breve{J} \bar{w}^T(x), \bar{w}(y')]_\mp \bar{w}(z) \} \\ + \alpha_2 \{ \breve{J} \bar{w}(z) [\bar{w}^T(x), \bar{w}(y')]_\mp \pm [\breve{J} \bar{w}(z), \bar{w}(y')]_\mp \bar{w}^T(y') \} \end{aligned} \right\} = \breve{D}^0(x y') \bar{w}(z). \quad (1.1)$$

Or, pour des opérateurs antilinéaires  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$ , on a la relation

$$[J \bar{A}, \bar{B}]_\mp = \breve{J} [\bar{A}, \bar{B}]_\pm. \quad (1.2)$$

\*) Ceci n'est pas la seule possibilité (cf. ROMAN<sup>8</sup>)). Pour avoir la covariance par rapport à  $T$  il suffit que

$$(\breve{J}^{-1} g_{a(\nu)})^T e^{\breve{J} \lambda_{(tot)}} = \breve{J} g_{a(\nu)}. \quad (0.16)$$

\*\*) Le cas où nous avons un nombre pair (2 ou 4) de champs antilinéaires est trivial. Si l'on a trois  $\bar{\psi}_{(i)}$  et un seul  $\psi_{(4)}$ , la méthode appliquée donne le résultat. Dans les 3 cas, la condition de réalité (0.14) doit être satisfaite.

Donc, pour satisfaire (1.1), en admettant pour des commutateurs ou anti-commutateurs des  *nombres c* ( $\rightleftarrows$  des opérateurs ne dépendant que de  $\breve{J}$  vu CHS  $\rightleftarrows$  RHS), on doit choisir, dans (1.1), dans le coefficient de  $\alpha_1$  le signe supérieur et dans celui de  $\alpha_2$  le signe inférieur, et vice versa. (1.1) amène alors aux relations :

$$[\bar{w}(z), \bar{w}(y)]_{\mp} = 0, \quad (1.3)$$

$$\breve{J}[\bar{w}^T(x), \bar{w}(y)]_{\pm} = \breve{D}^0(x y), \quad (1.4)$$

$$\pm \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \quad (1.5)$$

Il est essentiel que si l'on choisit le commutateur dans (1.3), c'est l'anti-commutateur que l'on doive prendre dans (1.4) et vice versa.

Pour démontrer que ces relations n'admettent pas de solutions, nous devons passer au développement en terme de 2 ensembles de paquets d'ondes  $\{u'\}$  et  $\{v'\}$ , définis en III § 5. Nous écrirons

$$\bar{w}(y) = 2^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{S}_{u''} u''(y) \bar{a}_{u''} + \mathbf{S}_{v''} v''^T(y) \bar{b}_{v''}^T). \quad (1.6)$$

L'opérateur transposé est

$$\bar{w}^T(x) = 2^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{S}_{u'} u'(x) \bar{a}_{u'}^T + \mathbf{S}_{v'} v'^T(x) \bar{b}_{v'}^T). \quad (1.6^T)$$

En se rappelant la définition de  $\breve{D}^0(x y)$  en termes de paquets (III 5.8 et 5.11), on remarque d'abord, qu'on est obligé d'*identifier les deux ensembles*  $\{u'\}$  et  $\{v'\}$ .

La relation (1.3) nous amène alors à

$$\bar{a}_{u'} \bar{a}_{u''} \mp \bar{b}_{u''}^T \bar{b}_{u'}^T = 0, \quad (1.7)$$

$$\bar{a}_{u'} \bar{b}_{u''}^T \mp \bar{a}_{u''} \bar{b}_{u'}^T = 0, \quad (1.8)$$

$$\bar{b}_{u'}^T \bar{a}_{u''} \mp \bar{b}_{u''}^T \bar{a}_{u'} = 0 \quad (1.9)$$

et, de (1.4), suit

$$\bar{a}_{u'}^T \bar{a}_{u''} \pm \bar{b}_{u''}^T \bar{b}_{u'} = \delta_{u' u''}, \quad (1.10)$$

$$\pm \bar{a}_{u''} \bar{a}_{u'}^T + \bar{b}_{u'} \bar{b}_{u''}^T = -\delta_{u' u''}, \quad (1.11)$$

$$\bar{a}_{u'}^T \bar{b}_{u''}^T \pm \bar{a}_{u''} \bar{b}_{u'}^T = 0, \quad (1.12)$$

$$\pm \bar{b}_{u''}^T \bar{a}_{u'}^T + \bar{b}_{u'} \bar{a}_{u''}^T = 0. \quad (1.13)$$

(Il est entendu que l'on doit choisir, ou partout le signe supérieur, ou partout le signe inférieur.)

On remarque tout de suite, que le signe supérieur dans (1.11) amène à une contradiction algébrique, parce que  $\bar{a}_{u'} \bar{a}^T_{u'}$  et  $\bar{b}_{u'} \bar{b}^T_{u'}$  sont des opérateurs positifs, dont la somme ne peut pas être égale à  $-1$ .

Il ne nous reste qu'à considérer le signe inférieur. Pour démontrer que ce choix contient aussi une contradiction algébrique, il suffit de considérer les relations  $(1.7_+)$  à  $(1.13_+)$  pour  $u' = u''$ . Omettant l'index  $u'$ , (1.8) et (1.9) nous donnent les identités

$$\bar{a} \bar{b}^T = \bar{b}^T \bar{a} = 0. \quad (1.14)$$

Opérant avec  $\bar{a}$  sur (1.10) et avec  $\bar{b}^T$  sur (1.11), nous obtenons, vu (1.14)

$$\bar{a} \bar{a}^T \bar{a} = \bar{a}; \quad \bar{a}^T \bar{a} \bar{a}^T = \bar{a}^T, \quad (1.15)$$

$$\bar{b}^T \bar{b} \bar{b}^T = -\bar{b}^T; \quad \bar{b} \bar{b}^T \bar{b} = -\bar{b}. \quad (1.16)$$

Soient  $\lambda'$  les valeurs propres de l'opérateur symétrique défini positif  $\bar{b} \bar{b}^T$ :

$$\bar{b} \bar{b}^T \Psi' = \Psi' \lambda'; \quad \lambda' \geq 0. \quad (1.17)$$

Opérant avec  $\bar{b}^T$  sur (1.17), nous obtenons:

$$\bar{b}^T \bar{b} \bar{b}^T \Psi' = \bar{b}^T \Psi' \lambda' \quad (1.18)$$

mais d'autre part, vu (1.16)

$$\bar{b}^T \bar{b} \bar{b}^T \Psi' = -\bar{b}^T \Psi'. \quad (1.19)$$

$\lambda'$  étant positif ou nul, ces deux équations impliquent

$$\bar{b}^T \Psi' = 0 \quad (1.20)$$

d'où, vu (1.17), on obtient la seule valeur propre  $\lambda' = 0$ .  $\bar{b} \bar{b}^T$  est donc l'opérateur zéro. De (1.16) suit alors

$$\bar{b} = \bar{b}^T = 0. \quad (1.21)$$

(1.7) nous donne

$$\bar{a} \bar{a} = 0 \quad (1.22)$$

et (1.11) implique maintenant

$$\bar{a} \bar{a} \bar{a}^T = \bar{a} \quad (1.23)$$

soit

$$\bar{a} = \bar{a}^T = 0. \quad (1.24)$$

Tous les opérateurs en question sont nuls, résultat qui contredit les équations inhomogènes (1.10) et (1.11). Par conséquent, les 2 choix possibles pour (1.3) et (1.4) amènent à des contradictions algébriques.

## § 2. Le champ spinoriel antilinéaire

L'identité (III 8.8) s'écrit, pour un champ de 2<sup>e</sup> espèce  $\bar{\psi}^A(x)$ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \{ \bar{\psi}^T_A(x) \gamma^{\alpha A}{}_B [\bar{\psi}^B(z), \bar{\psi}^{B'}(y')]_{\mp} \pm [\bar{\psi}^T_A(x), \bar{\psi}^{B'}(y')]_{\mp} \gamma^{\alpha A}{}_B \bar{\psi}^B(z) \} \\ + \alpha_2 \{ \bar{\psi}_A(z) \gamma^{\alpha A}{}_B [\bar{\psi}^{T B}(x), \bar{\psi}^{B'}(y')]_{\mp} \pm [\bar{\psi}_A(z), \bar{\psi}^{B'}(y')]_{\mp} \gamma^{\alpha A}{}_B \bar{\psi}^{T B}(x) \} \\ = \bar{S}^0{}^{B'}{}_A(y' x) \gamma^{\alpha A}{}_B \bar{\psi}^B(z) . \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Sauf en ce qui concerne le signe de  $\alpha_1$ , cette relation est identique à celle pour le champ de 1<sup>re</sup> espèce (III 8.11). Pour des commutateurs, ou anti-commutateurs nombre  $c$ , (2.1) est satisfait par les relations

$$[\bar{\psi}^A(x), \bar{\psi}^B(y)]_{\mp} = 0 , \quad (2.2)_{\mp}$$

$$[\bar{\psi}^A(x), \bar{\psi}^T{}_B(y)]_{\mp} = \bar{S}^0{}^A{}_B(x y) , \quad (2.3)_{\mp}$$

$$-\alpha_1 \mp \alpha_2 = 1 . \quad (2.4)_{\mp}$$

Les règles (2.2) et (2.3) sont donc identiques à celles pour le champ de 1<sup>re</sup> espèce (III 8.12), (III 8.13). (2.4) diffère de (III 8.14) par le signe de  $\alpha_1$ .

De manière analogue au cas scalaire, nous développerons

$$\bar{\psi}^A(x) = \mathbf{S}_{\varphi'} \varphi'^A(x) \bar{a}_{\varphi'} + \mathbf{S}_{\chi'} \chi'^T{}^A(x) \bar{b}^T{}_{\chi'} \quad (2.5)$$

en termes de deux ensembles de paquets d'ondes  $\{\varphi'^A\}$  et  $\{\chi'^A\}$ .

L'opérateur transposé est

$$\bar{\psi}^T{}_B(y) = \mathbf{S}_{\varphi''} \bar{\varphi}''{}_B(y) \bar{a}^T{}_{\varphi''} + \mathbf{S}_{\chi''} \bar{\chi}''{}^T{}_B(y) \bar{b}^T{}_{\chi''} . \quad (2.5^T)$$

Pour satisfaire les règles d'(anti-)commutation, nous devons à nouveau identifier les paquets  $\{\varphi'\} = \{\chi'\}$ .

(2.2) nous fournit les relations homogènes

$$\bar{a}_{\varphi'} \bar{a}_{\varphi''} \mp \bar{b}^T{}_{\varphi''} \bar{b}^T{}_{\varphi'} = 0 , \quad (2.6)_{\mp}$$

$$\bar{a}_{\varphi'} \bar{b}^T{}_{\varphi''} \mp \bar{a}_{\varphi''} \bar{b}^T{}_{\varphi'} = 0 , \quad (2.7)_{\mp}$$

$$\bar{b}^T{}_{\varphi'} \bar{a}_{\varphi''} \mp \bar{b}^T{}_{\varphi''} \bar{a}_{\varphi'} = 0 \quad (2.8)_{\mp}$$

et (2.3) les relations inhomogènes

$$\bar{a}_{\varphi'} \bar{a}^T{}_{\varphi''} \mp \bar{b}_{\varphi''} \bar{b}^T{}_{\varphi'} = \delta_{\varphi' \varphi''}, \quad (2.9_{\mp})$$

$$\mp \bar{a}^T{}_{\varphi''} \bar{a}_{\varphi'} + \bar{b}^T{}_{\varphi'} \bar{b}_{\varphi''} = \delta_{\varphi' \varphi''}, \quad (2.10_{\mp})$$

$$\bar{a}_{\varphi'} \bar{b}_{\varphi''} \mp \bar{a}^T{}_{\varphi''} \bar{b}^T{}_{\varphi'} = 0. \quad (2.11_{\mp})$$

Mettant en évidence  $\breve{J}^{-1}$ , les expressions pour la quantité de mouvement-énergie (III 8.4) ont la forme suivante:

$$\breve{\Pi}^{(1)}{}_{\mu} = - \breve{J}^{-1} \int (d\breve{\sigma}_{\alpha} \breve{\psi}^T \gamma^{\alpha} \bar{\psi}_{\mu}) (y), \quad (2.12^{(1)})$$

$$\begin{aligned} \breve{\Pi}^{(2)}{}_{\mu} &= - \breve{J}^{-1} \int (d\breve{\sigma}_{\alpha} \breve{\psi}_{\mu} \gamma^{\alpha} \bar{\psi}^T) (y), \\ &= \breve{J}^{-1} \int (d\breve{\sigma}_{\alpha} \breve{\psi} \gamma^{\alpha} \bar{\psi}^T{}_{\mu}) (y). \end{aligned} \quad (2.12^{(2)})$$

Les expressions pour la charge ont la même forme que pour les champs de 1<sup>re</sup> espèce, soit

$$Q^{(1)} = \int (d\breve{\sigma}_{\alpha} \breve{\psi}^T \gamma^{\alpha} \bar{\psi}) (y), \quad (2.13^{(1)})$$

$$Q^{(2)} = \int (d\breve{\sigma}_{\alpha} \breve{\psi} \gamma^{\alpha} \bar{\psi}^T) (y). \quad (2.13^{(2)})$$

En termes des opérateurs  $\bar{a}_{\varphi'}$  et  $\bar{b}_{\varphi'}$ , ces expressions sont ( $\partial_{\mu} \varphi'(x) \cong \breve{J} \breve{k}'{}_{\mu} \varphi'(x)$ ):

$$\breve{\Pi}^{(1)}{}_{\mu} \cong \mathbf{S}_{\varphi'} (\bar{a}^T \bar{a} - \bar{b} \bar{b}^T)_{\varphi'} \breve{k}'{}_{\mu}, \quad (2.14^{(1)})$$

$$\breve{\Pi}^{(2)}{}_{\mu} \cong - \mathbf{S}_{\varphi'} (\bar{a} \bar{a}^T - \bar{b}^T \bar{b})_{\varphi'} \breve{k}'{}_{\mu}, \quad (2.14^{(2)})$$

$$Q^{(1)} = \mathbf{S}_{\varphi'} (\bar{a}^T \bar{a} + \bar{b} \bar{b}^T)_{\varphi'}, \quad (2.15^{(1)})$$

$$Q^{(2)} = \mathbf{S}_{\varphi'} (\bar{a} \bar{a}^T + \bar{b}^T \bar{b})_{\varphi'}. \quad (2.15^{(2)})$$

L'expression pour  $\breve{\Pi}_{\mu}$  est

$$\breve{\Pi}_{\mu} = \alpha_1 \breve{\Pi}^{(1)}{}_{\mu} + \alpha_2 \breve{\Pi}^{(2)}{}_{\mu} \quad (2.16)$$

avec (2.4). Si nous exigeons pour la charge  $Q$  la relation (III 9.2), i.e.

$$- [Q, \bar{\psi}^{B'}(y')]_{-} = \bar{\psi}^{B'}(y') \quad (2.17)$$

l'application de l'identité (III 8.8) (où, vu l'anticommutativité de  $\bar{\psi}$  avec  $\breve{J}$ ,  $\alpha_1$  doit être remplacé par  $-\alpha_1$ ) nous amène à

$$Q = \beta_1 Q^{(1)} + \beta_2 Q^{(2)} \quad (2.18)$$

avec, maintenant

$$\beta_1 = -\alpha_1; \quad \beta_2 = -\alpha_2 \quad (2.19)$$

au lieu de (III 9.3).

### § 3. La conjugaison de charge

Nous procémons comme en III: nous exigeons qu'une transformation  $O^{-1}{}_C \dots O_C (O_C \leftarrow C)$  existe, telle que (III 10.3)

$$'\bar{\psi}(x) = O^{-1}{}_C \bar{\psi}(x) O_C = \bar{\psi}^T(x) \quad (3.1)$$

laisse invariante les règles de commutation (2.2<sub>+</sub>) et (2.3<sub>+</sub>) ainsi que  $\breve{H}_\mu$ . Or, de nouveau, la symétrie de  $S^{AB}(x y)$  (III 10.2) nous décide pour l'anticommutation. Etant donné que l'on a maintenant (vu (2.12))

$$O^{-1}{}_C \breve{H}^{(1)}_\mu O_C = -\breve{H}^{(2)}_\mu, \quad (3.2)$$

$$O^{-1}{}_C \breve{H}^{(2)}_\mu O_C = -\breve{H}^{(1)}_\mu, \quad (3.3)$$

le seul choix possible, est

$$-\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}. \quad (3.4)$$

Si l'on met  $\breve{J}^{-1}$  en évidence, soit en (2.12) soit en (III 8.2) (pour  $T^\alpha_\beta$ ), on s'aperçoit que (0.2) est valable pour  $\bar{\psi}$  aussi bien que pour  $\psi$ .

Utilisant les relations (2.9<sub>+</sub>) et (2.10<sub>+</sub>), nous pouvons écrire  $\breve{H}_\mu$  en termes des  $\bar{b}_{\varphi'}$ , soit

$$\breve{H}_\mu \cong \mathbf{S}_{\varphi'} (\bar{b}^T \bar{b} + \bar{b} \bar{b}^T - 1)_{\varphi'} \breve{k}'_\mu = \mathbf{S}_{\varphi'} \breve{H}_{\mu \varphi'}. \quad (3.5)$$

On voit, qu'à part une contribution négative de «point zéro» égale à celle du cas linéaire (III 11.15), l'énergie par onde plane  $\varphi' \rightleftarrows \breve{k}'_\mu$  est définie positive ( $\breve{k}'^4 > 0$ ). Pour la charge, l'utilisation des relations (2.9<sub>+</sub>) et (2.10<sub>+</sub>), donne, vu (2.18), (2.19) (i.e.  $\beta_1 = 1/2$ ,  $\beta_2 = -1/2$ )

$$Q = \frac{1}{2} (Q^{(1)} - Q^{(2)}) = \mathbf{S}_{\varphi'} (\bar{a}^T \bar{a} - \bar{a} \bar{a}^T)_{\varphi'} = \mathbf{S}_{\varphi'} Q_{\varphi'} \quad (3.6)$$

soit (0.3).

Il ne nous reste qu'à donner la forme explicite de  $O_C$ . Pour faire ceci, nous introduisons les deux opérateurs antisymétriques:

$$\eta_{\varphi'} = \overline{J} ((\bar{a}^T)^2 + (\bar{a})^2)_{\varphi'} = - \overline{J} ((\bar{b}^T)^2 + (\bar{b})^2)_{\varphi'} = - \eta_{\varphi'}^T, \quad (3.7)$$

$$\xi_{\varphi'} = \overline{J} (\bar{a}^T \bar{a} - \bar{b} \bar{b}^T)_{\varphi'} = - \overline{J} (\bar{b}^T \bar{b} - \bar{a} \bar{a}^T)_{\varphi'} = - \xi_{\varphi'}^T \quad (3.8)$$

qui satisfont, en vertu des relations (2.6<sub>+</sub>) à (2.11<sub>+</sub>) à

$$[\eta_{\varphi'}, \bar{a}_{\varphi''}]_- = \overline{J} \delta_{\varphi' \varphi''} \bar{a}^T_{\varphi''}, \quad (3.9a)$$

$$[\eta_{\varphi'}, \bar{b}^T_{\varphi''}]_- = - \overline{J} \delta_{\varphi' \varphi''} \bar{b}_{\varphi''}, \quad (3.9b)$$

$$[\xi_{\varphi'}, \bar{a}^T_{\varphi''}]_- = \overline{J} \delta_{\varphi' \varphi''} \bar{a}^T_{\varphi''}, \quad (3.10a)$$

$$[\xi_{\varphi'}, \bar{b}_{\varphi''}]_- = - \overline{J} \delta_{\varphi' \varphi''} \bar{b}_{\varphi''}. \quad (3.10b)$$

Nous décomposons ensuite  $O_C$  en

$$O_C = O_{(1)} O_{(2)}. \quad (3.11)$$

Alors, en vertu de (3.9),

$$O_{(1)} = \prod_{\varphi'} e^{-\pi \eta_{\varphi'} / 2} \quad (3.12)$$

satisfait à

$$O_{(1)}^{-1} \bar{a}_{\varphi'} O_{(1)} = \overline{J} \bar{a}^T_{\varphi'}, \quad (3.13a)$$

$$O_{(1)}^{-1} \bar{b}^T_{\varphi'} O_{(1)} = - \overline{J} \bar{b}_{\varphi'}, \quad (3.13b)$$

et

$$O_{(2)} = \prod_{\varphi'} e^{\pi \xi_{\varphi'} / 2} \quad (3.14)$$

transforme suivant

$$O_{(2)}^{-1} \overline{J} \bar{a}^T_{\varphi'} O_{(2)} = \bar{a}^T_{\varphi'}, \quad (3.15a)$$

$$O_{(2)}^{-1} (- \overline{J} \bar{b}_{\varphi'}) O_{(2)} = \bar{b}_{\varphi'}. \quad (3.15b)$$

Donc  $O_C$  (3.11) transforme  $\bar{a}_{\varphi'}$ , en  $\bar{a}^T_{\varphi'}$  et  $\bar{b}^T_{\varphi'}$  en  $\bar{b}_{\varphi'}$ . Etant donné (2.5) et (2.5<sup>T</sup>), cette transformation exprime (3.1).

Nous avons éliminé les *lois de commutation*, en nous servant d'un procédé analogue à celui de SCHWINGER<sup>4)</sup><sup>5)</sup> (invariance p.r. à la «strong reflection», d'après PAULI<sup>6)</sup>). Or, l'*argument thermodynamique de PAULI*<sup>6)</sup> (énergie bornée soit vers le bas (soit vers le haut), température  $T > 0$

(soit  $T < 0$ ) (cf. III)), est aussi valable. En effet pour le cas des commutateurs, on a

$$\breve{\Pi}_\mu = \mathbf{S}_{\varphi'} (\bar{b}^T \bar{b} - \bar{b} \bar{b}^T - 1)_{\varphi'} (\alpha_1 - \alpha_2) \breve{k}'_\mu, \quad (3.16)$$

$$- \alpha_1 - \alpha_2 = 1. \quad (3.17)$$

Quel que soit le signe de  $(\alpha_1 - \alpha_2)$ ,  $\breve{\Pi}_\mu$  n'est borné ni vers le haut, ni vers le bas, car  $\bar{b} \bar{b}^T$  et  $\bar{b}^T \bar{b}$ , qui ont des signes opposés, ont tout les deux des valeurs propres non bornées  $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$  (qui ne peuvent pas se compenser sinon  $\breve{\Pi}_\mu$  serait un nombre; ce qui contredit (III 8.5)).

#### § 4. Représentation des $\bar{a}_{\varphi'}$ et $\bar{b}_{\varphi'}$ et valeurs propres de $\breve{\Pi}_\mu$ et $Q$

Il s'agit maintenant de démontrer, qu'une représentation des  $\bar{a}_{\varphi'}$  et  $\bar{b}_{\varphi'}$ , satisfaisant  $(2.6_+)$  à  $(2.11_+)$  existe. Nous écrirons

$$\breve{J} = j \times 1_4 \times 1_4 \times 1_4 \times \dots \times 1_4 \times 1_4 \times 1_4 \times \dots \quad (4.1)*$$

et

$$\bar{a}_{\varphi(\varrho)} = k \times \sigma \times \sigma \times \sigma \times \dots \times \sigma \times \alpha \times \tau \times \tau \times \dots \quad (4.2a)$$

$$\bar{b}_{\varphi(\varrho)} = k \times \sigma \times \sigma \times \sigma \times \dots \times \sigma \times \beta \times \tau \times \tau \times \tau \times \dots \quad (4.2b)$$

où  $\alpha$  respectivement  $\beta$  sont à la  $\varrho^{ième}$  place.  $j$  et  $k$  sont des pseudo-quaternions (matrices à 2 lignes et colonnes (I A-4.8)\*)). Les  $1_4$ \*,  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des matrices à 4 lignes et colonnes

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma^T; \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tau^T; \quad (4.3)$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

---

\*)  $j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad l = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 1_4 = 1 \times 1.$

On vérifie que toutes les relations sont satisfaites. Le calcul étant assez fastidieux, nous donnons les relations utilisées:

$$\sigma \tau = \tau \sigma = k \times k, \quad (4.5)$$

$$\alpha \sigma = \sigma \beta^T; \quad \sigma \alpha = \beta^T \sigma; \quad (4.6)$$

$$\tau \alpha = -\beta^T \tau; \quad \alpha \tau = -\tau \beta^T; \quad (4.7)$$

$$\alpha^2 = -(\beta^T)^2, \quad \alpha \beta^T = \beta^T \alpha = 0, \quad (4.8)$$

$$\sigma^2 = \tau^2 = \alpha \alpha^T + \beta \beta^T = \alpha^T \alpha + \beta^T \beta = 1_4. \quad (4.9)$$

Les valeurs propres de la charge  $Q_{\varphi'}$  et de la quantité de mouvement-énergie  $\check{H}_{\mu \varphi'}$  par paquet  $\varphi'$  sont, vu (3.6) et (3.5)

$$Q_{\varphi'} = 1 \times 1_4 \times \dots \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times 1_4 \times \dots, \quad (4.10)$$

$$\check{H}_{\mu \varphi'} = \left\{ 1 \times 1_4 \times \dots \times \left( \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 1_4 \right) \times 1_4 \times \dots \right\} k'_{\mu}. \quad (4.11)$$

En termes de matrices à 2 lignes et colonnes (III 11.13) et (III 11.14) nous pouvons aussi écrire

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (N \times 1) - (1 \times N), \quad (4.13) ^*)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (N \times 1) + (1 \times N). \quad (4.14)$$

---

\*  
 $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha^T \alpha; \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$  (4.12)

Soit, en utilisant les  $a_{\varphi'}$  et  $b_{\chi'}$  des champs de 1<sup>re</sup> espèce (III 11.10<sub>+</sub> et suiv.)

$$Q = \mathbf{S}_{\varphi'} N_{\varphi'} - \mathbf{S}_{\chi'} N_{\chi'}, \quad (4.15)$$

$$\breve{H}_\mu = \mathbf{S}_{\varphi'} \left( N_{\varphi'} - \frac{1}{2} \right) \breve{k}'_\mu + \mathbf{S}_{\chi'} \left( N_{\chi'} - \frac{1}{2} \right) \breve{k}'_\mu. \quad (4.16)$$

Ceci montre, que les valeurs propres de  $Q$  et  $\breve{H}_\mu$  sont identiques à celles des opérateurs correspondant de 1<sup>re</sup> espèce (III 11.12 et 11.15). (Le choix des représentations a été fait de manière à avoir non seulement l'égalité des valeurs propres, mais l'identité des représentations de  $Q$  et  $\breve{H}_\mu$ ).

### § 5. La transformation de phase

Nous cherchons la transformation orthogonale  $O_\lambda$ , satisfaisant à

$${}' \bar{\psi}(x) = O^{-1}{}_\lambda \bar{\psi}(x) O_\lambda = e^{\breve{J} \lambda} \bar{\psi}(x) \quad (5.1)$$

p. r. à laquelle les observables  $\theta^{\alpha\beta}(x)$ ,  $s^{\alpha\beta\gamma}(x)$  et  $j^\alpha(x)$  sont invariantes.

Ecrivant

$$O_\lambda = e^{\breve{J} \lambda F}, \quad F = F^T, \quad [\breve{J}, F]_- = 0 \quad (5.2)$$

nous avons l'identité

$$- [\breve{J} F, \bar{\psi}]_- = - \breve{J} [F, \bar{\psi}]_+ = \breve{J} \bar{\psi}. \quad (5.3)$$

Or,  $F$  devant être un scalaire, nous ne disposons, essentiellement, que de  $Q$ . Soit donc

$$F = F(Q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n Q^n \quad (5.4)$$

où les  $c_n$  sont des nombres (réels). La propriété (2.17) de  $Q$  peut s'écrire

$$Q \bar{\psi} = \bar{\psi} (Q - 1) \quad (5.5)$$

d'où résulte

$$Q^n \bar{\psi} = \bar{\psi} (Q - 1)^n \quad (5.6)$$

et

$$F(Q) \bar{\psi} = \bar{\psi} F (Q - 1). \quad (5.7)$$

D'autre part, (5.3) exige

$$F(Q) \bar{\psi} = \bar{\psi} (-1 - F(Q)). \quad (5.8)$$

La comparaison des deux équations nous conduit à l'équation fonctionnelle

$$F(Q) + F (Q + 1) = -1 \quad (5.9)$$

dont la solution générale est

$$F(Q) = -\frac{1}{2} + G(Q) \quad (5.10)$$

où  $G(Q)$  est une série trigonométrique en  $Q$ , solution de

$$G(Q) = -G(Q+1), \quad (5.11)$$

$$G(Q) = 0 \quad (5.12)$$

étant la solution la plus simple.

### § 6. Relation entre champ linéaire et champ antilinéaire

Comme les valeurs propres de  $Q$  et de  $\overset{\circ}{\Pi}_\mu$  sont identiques, on s'attend à ce que le champ de 2<sup>e</sup> espèce puisse être relié au champ de 1<sup>e</sup> espèce.

On pense d'abord à une transformation orthogonale

$$O^{-1} \bar{\psi} O = \psi. \quad (6.1)$$

Or, on voit qu'une pareille transformation n'est pas possible. En effet, en écrivant (cf. (III 1.7))

$$\bar{F} = k \times F_{(k)} + l \times F_{(l)}, \quad (6.2)$$

$$F = 1 \times F_{(1)} + j \times F_{(j)} \quad (6.3)$$

cela exigerait l'existence d'une matrice orthogonale à 2 lignes et colonnes  $o^{-1} = o^T$  telle que

$$o^{-1} k o = \lambda 1 + \mu j. \quad (6.4)$$

Or, cette équation n'a pas de solutions, vu que  $k$  est symétrique et a la trace nulle. Il en est de même pour  $l$ . L'autre possibilité est donnée par les équations (0.5) à (0.7). Ces 2 opérateurs  $\bar{K}_\pm$  existent. Dans notre représentation particulière (4.2), l'opérateur

$$\bar{K}_+ = k \times \tau \times \tau \times \tau \times \dots \quad (6.7)$$

transforme en effet ( $\varphi' = \chi'$ ), conformément à

$$\bar{a}_{\varphi'} \bar{K}_+ = a_{\varphi'} = 1 \times (k \times k) \times \dots \times (a \times 1) \times 1_4 \times \dots \quad (6.8)$$

$$\bar{b}^T_{\chi'} \bar{K}_+ = b^T_{\chi'} = 1 \times (k \times k) \times \dots \times (k \times a^T) \times 1_4 \times \dots \quad (6.9)$$

les opérateurs antilinéaires dans les opérateurs linéaires dans la représentation choisie (III 11.14). On a utilisé (4.5) à (4.9) et, en plus,

$$\alpha \tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha \times 1, \quad (6.10) *$$

$$\beta^T \tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = k \times \alpha^T. \quad (6.11) *$$

L'opérateur  $\bar{K}_-$  est, dans notre représentation,

$$\bar{K}_- = k \times \sigma \times \sigma \times \sigma \times \dots \quad (6.12)$$

Les opérateurs transformés suivant  $\bar{K}_-$  satisfont également à toutes les règles d'anticommutation, mais la représentation est «l'inverse» de celle que l'on obtient avec  $\bar{K}_+$ :

$$\bar{a}_\varphi \cdot \bar{K}_- = 1 \times 1_4 \times 1_4 \times \dots \times (-\alpha \times k) \times (k \times k) \times (k \times k) \times \dots \quad (6.13)$$

$$\bar{b}^T \cdot \bar{K}_- = 1 \times 1_4 \times 1_4 \times \dots \times (1 \times \alpha^T) \times (k \times k) \times (k \times k) \times \dots \quad (6.14)$$

Ecrivant les densités de quantité de mouvement-énergie et de courant-chARGE  $\theta^{\alpha \beta}(x)$  (resp.  $T^{\alpha \beta}_\beta(x)$  et  $s^{\alpha \beta \gamma}(x)$ ) et  $j^\alpha(x)$ , en utilisant chaque fois les valeurs appropriées des coefficients  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , on s'aperçoit bien qu'ils ont la même forme si on les écrit en termes de  $\psi$  ou de  $\bar{\psi}$  reliés par  $\bar{K}_\pm$ .

## § 7. Forme Schrödingerienne de l'hamiltonien du champ libre

Pour pouvoir formuler la théorie d'interaction, nous introduisons les opérateurs de SCHRÖDINGER (I 5.13)\*\*). Pour le *champ scalaire linéaire*:

$$w(x) = w(\vec{x} t) \rightarrow w(\vec{x}), \quad (7.1)$$

$$\partial_4 w(x) = \partial_t w(\vec{x} t) \rightarrow \dot{w}(\vec{x}) = \pi^T(\vec{x}) \quad (7.2)$$

---

\*) Cf. (III 11.13),  $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

\*\*)  $F(x) \rightarrow F(\vec{x})$  en (I 5.13); nous omettons le  $-$  en  $F(\vec{x})$ , étant donnée son autre signification dans le présent article.

et nous définissons, vu  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$  (III 4.3)

$$\left. \begin{aligned} H_{(w)}^{(lib)} &= \overset{\cup}{\prod}^{(lib)} = \int \left( d\sigma_{\alpha} \left( \frac{1}{2} \theta^{(1)\alpha} \mathbf{1} + \frac{1}{2} \theta^{(2)\alpha} \mathbf{1} \right) (y) \right. \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \int dV(\vec{y}) (\pi \pi^T + \pi^T \pi + \\ &\quad \left. w^T \cdot (M_{(w)} - \Delta) w + (M_{(w)} - \Delta) w \cdot w^T \right) (y). \end{aligned} \right\} (7.3)$$

De (III 2.18 et 2.19 1<sup>st</sup> k.), on tire

$$\left. \begin{aligned} [w(\vec{x}), w(y)]_- &= [w(x), w^T(y)]_- = [\pi(x), \pi(\vec{y})]_- \\ &= [\pi(x), \pi^T(y)]_- = [w(\vec{x}), \pi^T(\vec{y})]_- = 0, \end{aligned} \right\} (7.4)$$

$$\overset{\cup}{J} [\pi(x), w(y)]_- = \overset{\cup}{J} [\pi^T(\vec{x}), w^T(\vec{y})]_- = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (7.5)$$

d'où résulte

$$[\overset{\cup}{J} H_{(w)}^{(lib)}, w(\vec{x})]_- = \pi^T(\vec{x}), \quad (7.6)$$

$$[\overset{\cup}{J} H_{(w)}^{(lib)}, \pi^T(x)]_- = (\Delta - M_{(w)}) w(\vec{x}). \quad (7.7)$$

Dans une théorie d'interaction, nous admettons pouvoir écrire

$$H = \sum_{(i)} H_{(i)}^{(lib)} + H^{(int)} \quad (7.8)$$

la sommation s'effectuant sur tous les champs, dénotés par un index  $(i)$   $(k) = (1) (2) \dots$  (à ne pas confondre avec l'index spatial  $i$   $k = 1, 2, \dots$ ). On postulera

$$[\overset{\cup}{J} H_{(i)}^{(int)}, w(\vec{x})]_- = 0, \quad (7.9)$$

$$[\overset{\cup}{J} H_{(i)}^{(int)}, \pi^T(\vec{x})]_- = \varrho(\vec{x}). \quad (7.10)$$

*Lemme:* Il est nécessaire que  $\overset{\cup}{J} H_{(i)}^{(lib)}$  commute avec les opérateurs d'un autre champ  $(k)$ :

$$\left. \begin{aligned} [\overset{\cup}{J} H_{(i)}^{(lib)}, w_{(k)}(\vec{x})]_- &= [\overset{\cup}{J} H_{(i)}^{(lib)}, \pi_{(k)}^T(\vec{x})]_- \\ &= [\overset{\cup}{J} H_{(i)}^{(lib)}, \overset{(-)}{\psi}_{(k)}(\vec{x})]_- = 0; \quad (i) \neq (k). \end{aligned} \right\} (7.11)$$

On aura donc en particulier :

$$[\overset{\cup}{J} H, w(\vec{x})]_- = \pi^T(\vec{x}) \equiv \dot{w}(\vec{x}), \quad (7.12)$$

$$[\overset{\cup}{J} H, \pi^T(\vec{x})]_- = (\Delta - M_{(w)}) w(\vec{x}) + \varrho(\vec{x}) \equiv \dot{\pi}^T(\vec{x}) = \ddot{w}(\vec{x}) \quad (7.13)$$

d'où ressort, écrit en termes d'opérateurs de Heisenberg, l'équation d'onde inhomogène

$$(\square - M_{(w)}) w(\vec{x}) = -\varrho(x). \quad (7.14)$$

Pour le *champ spinoriel, linéaire ou antilinéaire* ( $\psi_{(i)}$  ou  $\bar{\psi}_{(i)}$ ) nous définissons  $T_{\beta}^{\alpha (lib)}$  en ajoutant au terme (0.2) un terme qui est nul pour les champs libres, soit

$$\left. \begin{aligned} T_{\beta(i)}^{\alpha (lib)}(x) &= T_{\beta(i)}^{\alpha (0)} - \frac{1}{4} \overset{\circ}{J}{}^{-1} \delta_{\beta}^{\alpha} \\ &\times \{ \overset{\circ}{\psi}^T \cdot (\gamma^0 \partial_{\varrho} + M \gamma^0) \psi - \overset{\circ}{\psi}^T (\gamma^0 \partial_{\varrho} - M \gamma^0) \cdot \psi + \overset{\circ}{\psi} \cdot \\ &\times (\gamma^0 \partial_{\varrho} + M \gamma^0) \psi^T - \overset{\circ}{\psi} (\gamma^0 \partial_{\varrho} - M \gamma^0) \cdot \psi^T \}_{(i)}(x) \end{aligned} \right\} \quad (7.15)***$$

équation, avec  $M = M_{(i)}$ , valable pour  $\psi_{(i)}$  et  $\bar{\psi}_{(i)}$ . Cette forme a l'avantage, qu'en termes des opérateurs  $\psi_{(i)}(\vec{x})$  ou  $\bar{\psi}_{(i)}(\vec{x})$ , les dérivés temporels s'annullent en  $H_{(i)}^{(lib)}$

$$\left. \begin{aligned} H_{(i)}^{(lib)} &= \int (d\overset{\circ}{\sigma}_{\alpha} T_{(i)}^{\alpha 4 (lib)}) (y) = \frac{1}{2} \overset{\circ}{J}{}^{-1} \int dV(\vec{y}) \\ &\times (\overset{\circ}{\psi}^T \cdot (\vec{\gamma} \vec{\partial} + M \gamma^0) \psi - (\vec{\gamma} \vec{\partial} + M \gamma^0) \psi \cdot \overset{\circ}{\psi}^T)_{(i)}(\vec{y}) . \end{aligned} \right\} \quad (7.16) *$$

Les relations d'anticommutation sont ((III 8.12<sub>+</sub> et 8.13<sub>+</sub>) ainsi que (2.2<sub>+</sub> et 2.3<sub>+</sub>) étant des relations identiques)

$$[\psi_{(i)}(\vec{x}), \psi_{(i)}(\vec{y})]_+ = 0, \quad (7.17)$$

$$[\psi^A_{(i)}(\vec{x}), \overset{\circ}{\psi}^T_{(i)B}(\vec{y})]_+ = -\gamma^4{}^A{}_B \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (7.18) **$$

(vu les définitions (III 8.9 et III 2.12):  $\overset{\circ}{\delta}{}^4(x y) = -\overset{\circ}{\delta}{}_4(x y) = \delta(\vec{x} - \vec{y})$ ). Les équations (7.17) et (7.18) sont valables pour  $\psi_{(i)}$  et  $\bar{\psi}_{(i)}$ . On tire de ces relations (pour  $\psi_{(i)}$  et  $\bar{\psi}_{(i)}$ ):

$$[\overset{\circ}{J} H_{(i)}^{(lib)}, \psi_{(i)}(\vec{x})]_- = \gamma^4 (\vec{\gamma} \vec{\partial} + \gamma^0 M_{(i)}) \psi_{(i)}(\vec{x}). \quad (7.19)$$

Utilisant (7.11) et postulant

$$[\overset{\circ}{J} H^{(int)}, \psi_{(i)}(\vec{x})]_- \equiv \gamma^4 \chi_{(i)}(\vec{x}) \quad (7.20)$$

\*) N. B.: Le 1<sup>er</sup> terme est  $\overset{\circ}{\psi}^T B \cdot (\vec{\gamma} \dots)^B C \psi^C$  et le 2<sup>e</sup>  $(\vec{\gamma} \dots)^B C \psi^C \cdot \overset{\circ}{\psi}^T B$ .

\*\*) Si l'on pose (cf. III 7.14)  $\overset{\circ}{\eta}{}_{AB} \doteq \gamma^4{}^A{}_B$ , on a pour

$$[\psi^A_{(i)}(\vec{x}), \psi^T B_{(i)}(\vec{y})]_+ = \delta_B^A \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

une expression définie positive, comme ce doit être le cas.

\*\*\*) Un opérateur *à droite du point* ( $\partial_{\alpha}$ ) opère *à droite*! Un opérateur *à gauche d'un point* ( $\partial_{\alpha}$ ) opère *à gauche*! (cf. III Note\*) p. 682).

(avec  $\chi_{(i)}$  ou  $\chi_{(i)}$ ), l'équation

$$[\overset{\circ}{J} H, \psi_{(i)}(\vec{x})]_- = \gamma^4 ((\vec{\gamma} \vec{\partial} + \gamma^0 M_{(i)}) \psi_{(i)} + \chi_{(i)}) (\vec{x}) \equiv \psi_{(i)}(\vec{x}) \quad (7.21)$$

s'écrit, vu  $(\gamma^4)^2 = -\gamma^0$ , pour les opérateurs de Heisenberg

$$(\gamma^\alpha \partial_\alpha + M_{(i)} \gamma^0) \psi_{(i)}(x) = -\chi_{(i)}(x), \quad (7.22)$$

$$\psi_{(i)}(x) (\gamma^\alpha \partial_\alpha - M_{(i)} \gamma^0) = \chi_{(i)}(x). \quad (7.23)$$

Si l'on calcule la divergence de  $T_{\beta(i)}^{\alpha (lib)}$  on trouve, en termes de  $\chi_{(i)}$ :

$$\partial_\alpha T_{\beta(i)}^{\alpha (lib)}(x) = \frac{1}{2} \overset{\circ}{J}^{-1} (\overset{\circ}{\psi}^T \beta \chi + \overset{\circ}{\chi}^T \psi_\beta + \overset{\circ}{\psi}_\beta \chi^T + \overset{\circ}{\chi} \psi_\beta^T)_{(i)}(x). \quad (7.24)$$

### § 8. Impossibilité de l'existence de champs scalaires ou tensoriels si des champs antilinéaires existent

Si nous avons un ou plusieurs champs antilinéaires  $\bar{\psi}_{(i)}$ , nous devons avoir selon (7.11)

$$[\overset{\circ}{J} H_{(w)}, \bar{\psi}_{(i)}(x)]_- = \overset{\circ}{J} [H_{(w)}, \bar{\psi}_{(i)}(\vec{x})]_+ = 0 \quad (8.1)$$

c'est-à-dire que  $H_{(w)}$  (7.3) doit *anticommute* avec  $\bar{\psi}_{(i)}$ . Or, utilisant la représentation des champs libres (III 5.10 et 5.15) et (2.5 et 4.2) nous devons écrire formellement (en séparant  $1_2$  resp.  $k$ , cf. (I A-2.3, III 1.7))

$$w = 1_2 \times w' \times A, \quad \bar{\psi} = k \times B \times \psi' \quad (8.2)$$

(espace produit). Donc,  $B$  doit anticommuter (ou commuter) avec  $w'^T w'$  et avec  $w' w'^T$ , et  $\psi'$  commuter (ou anticommuter) avec  $A^T A$  et  $A A^T$ . Or il n'existe pas d'opérateur  $B$  qui anticommuter avec toutes les possibilités du type

$$(1 \times 1) \times \dots \times (a_{(Bose)}^T \times 1) \times \dots \times (a_{(Bose)} \times 1) \times \dots \quad (8.3) *$$

On peut, par contre, poser  $B = (1 \times 1) \times (1 \times 1) \times \dots$  et il existe l'opérateur

$$\Gamma = (k \times k) \times (k \times k) \times \dots \quad (8.4)$$

qui anticommuterait avec tous les opérateurs du type

$$\frac{\bar{a}_{\varphi(\varrho)}}{k} = \sigma \times \sigma \times \dots \times \sigma \times \alpha \times \tau \times \tau \times \dots \quad (8.5)$$

---

\*<sup>1</sup>)  $a_{(Bose)} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$  cf. (III 5.14).

Mais il n'existe pas d'opérateur  $A$  tel que l'on puisse écrire

$$I = A^T A = A A^T \quad (8.6)$$

les valeurs propres de  $I$  étant  $\pm 1$ .

Ce résultat peut être généralisé pour des champs tensoriels (qui doivent également être linéaires).

*Donc, si l'on admet l'existence de champs spinoriels antilinéaires, aucun champ scalaire ou tensoriel ne peut exister.*

Il ne nous reste donc qu'à étudier une théorie ne faisant intervenir que des champs spinoriels (interaction de Fermi).

### § 9. L'interaction de Fermi pour les champs linéaires

Formons de (0.9), l'*hamiltonien d'interaction*

$$\left. \begin{aligned} H_{a(\nu)}^{(int)} &= \overline{J}^{-1} \int (dV \{ \overline{g}_{a(\nu)} (\overline{\psi}_{(1)}^T \gamma^{(\nu)} \psi_{(2)}) (\overline{\psi}_{(3)}^T \gamma_{(\nu)} \psi_{(4)}) \\ &\quad \mp (\overline{\psi}_{(4)}^T \gamma^{(\nu)} \psi_{(3)}) (\overline{\psi}_{(2)}^T \gamma_{(\nu)} \psi_{(1)}) \overline{g}_{a(\nu)}^T \}) (y) \\ &= \int (d\overline{\sigma}_\alpha \theta^{\alpha \beta} {}^{(int)}_{a(\nu)}) (y) . \end{aligned} \right\} (9.1)_\mp$$

Pour que  $\overline{J} H_{(i)}^{(lib)}$  commute avec  $\psi_{(k)}$  ( $(i) \neq (k)$ ), les différents champs  $\psi_{(i)}^{(T)}$  doivent commuter ou anticommuter entre eux. *Nous choisissons, arbitrairement, l'anticommutation.*

$$[\psi_{(i)}, \psi_{(k)}]_+ = [\psi_{(i)}, \psi_{(k)}^T]_+ = 0, \quad (i) \neq (k) . \quad (9.2)$$

On a alors

$$(\overline{\psi}_{(i)} \gamma^{(\nu)} \psi_{(k)}^T) = \pm (\overline{\psi}_{(k)}^T \gamma^{(\nu)} \psi_{(i)}) , \quad \text{si } \gamma^{(\nu)} \sim = \mp \gamma^{(\nu)} . \quad (9.3)$$

Les inhomogénéités sont (signe de (9.1) et (9.3))

$$\chi_{(1)}^{(\nu)} = \overline{g}_{a(\nu)} \gamma^{(\nu)} \psi_{(2)} (\overline{\psi}_{(3)}^T \gamma_{(\nu)} \psi_{(4)}) , \quad (9.4)_{(1)}$$

$$\chi_{(2)}^{(\nu)} = \mp \gamma^{(\nu)} \psi_{(1)} (\overline{\psi}_{(4)}^T \gamma_{(\nu)} \psi_{(3)}) \overline{g}_{a(\nu)}^T , \quad (9.4)_{(2)}$$

$$\chi_{(3)}^{(\nu)} = \overline{g}_{a(\nu)} \gamma_{(\nu)} \psi_{(4)} (\overline{\psi}_{(1)}^T \gamma^{(\nu)} \psi_{(2)}) , \quad (9.4)_{(3)}$$

$$\chi_{(4)}^{(\nu)} = \mp \gamma_{(\nu)} \psi_{(3)} (\overline{\psi}_{(2)}^T \gamma^{(\nu)} \psi_{(1)}) \overline{g}_{a(\nu)}^T . \quad (9.4)_{(4)}$$

Utilisant (7.24) et (9.3), on peut écrire, sans commuter les dérivés  $\psi_{(i)} \beta$  avec les  $\psi_{(k)}$

$$\left. \begin{aligned} \partial_\alpha T_{\beta(i)}^{(\text{lib})}(x) &= \partial_{\beta(i)} \overline{J}^{-1} \sum_{a(\nu)} \{ \overline{g}_{a(\nu)} (\overline{\psi}_{(1)}^T \gamma^{(\nu)} \psi_{(2)}) (\overline{\psi}_{(3)}^T \gamma_{(\nu)} \psi_{(4)}) \\ &\quad \mp (\overline{\psi}_{(4)}^T \gamma^{(\nu)} \psi_{(3)}) (\overline{\psi}_{(2)}^T \gamma_{(\nu)} \psi_{(1)}) \overline{g}_{a(\nu)}^T \} (x) \end{aligned} \right\} (9.6)_\mp$$

où  $\partial_{\beta(i)}$  n'opère que sur  $x^\beta$  en  $\psi_{(i)}(x)$  et en  $\psi_{(i)}^T(x)$ . En outre, on peut constater (utilisant (7.24)), que si l'on complète  $\sum_{(i)} T^{\alpha\beta(i)}$  en ajoutant  $\sum_{(i)} 1/2 \partial_\varrho s_{(i)}^{\varrho\alpha\beta}$  avec la densité de spin

$$s^{\varrho\alpha\beta}_{(i)}(x) = \breve{J}^{-1} \frac{1}{4} (\breve{\psi}_{(i)}^T \gamma^{\varrho\alpha\beta} \psi_{(i)} + \breve{\psi}_{(i)} \gamma^{\varrho\alpha\beta} \psi_{(i)}^T)(x) \quad (9.7)$$

on obtient  $\theta^{\alpha\beta(i)}$  =  $\sum_{(i)} \theta_{(i)}^{\alpha\beta(i)}$  =  $\theta^{(\alpha\beta)(lib)}$ . Ajoutant à ce  $\theta^{\alpha\beta(lib)}$  le  $\theta^{\alpha\beta(int)}$  (0.8) (0.9), on obtient donc un  $\theta^{\alpha\beta}(x)$  satisfaisant à l'équation de continuité et à la symétrie (I 0.25)\*).

Avant de procéder aux champs antilinéaires, nous voulons considérer les propriétés de covariance p. r. aux opérations  $C$ ,  $P$  et  $T$  ( $\leftarrow O_C$ ,  $O_P$  et  $O_T$ ), pour démontrer l'avantage du formalisme réel, où toutes les opérations sont linéaires. Nous supposons d'abord que les 4 phases  $\lambda_{(i)}$  en (III 8.3) sont toujours égales (plus exactement (0.15)).

Les termes sont alors ortho-chores ou pseudo-chores p. r. à  $P \leftarrow O_P$  suivant leur parité.

Par rapport à  $T \leftarrow O_T$ , les termes ne sont covariants que si (0.14) (constantes de couplage réelles) est satisfait. Autrement la constante de couplage change conformément à

$$O^{-1}{}_T(\breve{J}^{-1} \breve{g}_{a(\nu)}) O_T = (\breve{J}^{-1} \breve{g}_{a(\nu)})^T. \quad (9.8)$$

L'opération  $C \leftarrow O_C$  change (vu (9.3)) suivant:

$$O^{-1}{}_C(\breve{\psi}_{(i)}^T \breve{\gamma}^{(\nu)} \psi_{(k)}) O_C = (\breve{\psi}_{(i)} \breve{\gamma}^{(\nu)} \psi_{(k)}^T) \quad \left. \begin{array}{l} \\ = \pm (\breve{\psi}_{(k)}^T \gamma^{(\nu)} \psi_{(i)}) ; \quad \breve{\gamma}^{(\nu)} \sim = \mp \gamma^{(\nu)}. \end{array} \right\} \quad (9.9)$$

Donc, au signe près, les 2 termes dépendant du champ en  $\theta^{\alpha\beta(int)}_{a(\nu)}$  s'interchangent. Si  $\breve{\gamma}^{(\nu)}$  et  $\breve{\gamma}_{(\nu)}$  ont la même symétrie on a le signe (-) en (0.9<sub>-</sub>) pour tous les termes (sauf  $AV$  et  $VA$ , où  $\breve{J}^{-1} \breve{g}_{a(\nu)}$  est remplacé par  $-\breve{J}^{-1} \breve{g}_{a(\nu)}^T = (\breve{J}^{-1} \breve{g}_{a(\nu)})^T$ ). Si leur symétrie est opposée, cas  $AV$  et  $VA$ , on obtient le même résultat, vu le signe (+) en (0.9<sub>+</sub>). Donc, les 5 termes conservant la parité sont covariant p. r. à  $P \leftarrow O_P$  et p. r. à  $CT \leftarrow O_{CT}$ . Les autres 5 termes ne sont invariants que p. r. à

$$CPT \leftarrow O_{CPT}. \quad (9.10)$$

En particulier, les 5 termes conservant la parité sont covariant p. r. à  $C \leftarrow O_C$ ,  $P \leftarrow O_P$ ,  $T \leftarrow O_T$  individuellement, si les constantes de couplage sont réelles,

\*) Nous avons esquissé le calcul aboutissant à (9.6) vu qu'il n'est pas trivial (non commutativité des  $\psi_{(i)\beta}$ ). Aussi est-il remarquable que, au moins formellement, une densité de quantité de mouvement-énergie  $\theta^{(\alpha\beta)}(x)$  existe pour l'interaction de Fermi, vu la remarque de STEPANOV<sup>9</sup>) et de BOGOLIUBOV et SHIRKOV<sup>10</sup>).

i.e. (0.10). Cette condition de réalité (0.10) assure donc, pour les 5 termes violant la parité, leur covariance p. r. à  $T \leftarrow O_T$  et  $CP \leftarrow O_{CP}$ .

### § 10. L'interaction de Fermi si un champ est antilinéaire

Nous considérons tout d'abord le cas, où un seul champ,  $\bar{\psi}_{(4)}$ , est antilinéaire. Le  $\theta^{\alpha \beta (int)}$  et  $H^{(int)}$  sont donnés par (0.12) et (9.1). Nous utilisons le symbole  $\tilde{\psi}_{(4)} = \bar{\psi}_{(4)} \bar{\Omega}$ , pour bien marquer, qu'à priori,  $\tilde{\psi}_{(4)}$  n'est pas un champ linéaire (satisfaisant aux (III 8.12<sub>+</sub>) et (III 8.13<sub>+</sub>)) mais seulement un opérateur linéaire (nous démontrerons par la suite que  $\tilde{\psi}_{(4)} = \psi_{(4)}$ ).

Pour garder les équations de continuité (9.6), nous devons exiger que  $\tilde{\psi}_{(4)}$  satisfasse les relations de  $\psi_{(4)}$  en (9.2). Pour que  $\bar{\psi}_4$  commute avec  $\int H_{(i)}^{(lib)}$ , nous devons exiger

$$[\psi_{(i)}, \bar{\psi}_{(4)}]_{\mp} = [\psi_{(i)}, \bar{\psi}_{(4)}^T]_{\mp} = 0; \quad (i) \neq (4). \quad (10.1)$$

D'autre part, pour que  $\bar{\Omega}$  ne soit pas un nouveau champ (ce qui est impossible, vu, qu'étant scalaire, un champ scalaire antilinéaire n'existe pas) il faut

$$[\bar{\Omega}, \psi_{(i)}]_{\mp} = [\bar{\Omega}, \psi_{(i)}^T]_{\mp} = 0; \quad (i) = (1) (2) (3) \quad (10.2)$$

valable aussi pour  $\bar{\psi}_{(4)}^*$ :

$$[\bar{\Omega}, \bar{\psi}_{(4)}]_{\mp} = [\bar{\Omega}, \bar{\psi}_{(4)}^T]_{\mp} = 0. \quad (10.3)$$

En plus, faut-il que la condition de réalité (0.13) soit satisfaite. Ces conditions déterminent  $\bar{\Omega}$  presque univoquement. On peut par exemple avoir

$$\bar{\Omega} = \bar{K}_{- - +} = k \times (\sigma \times \sigma \times \sigma \times \tau) \times (\sigma \times \sigma \times \sigma \times \tau) \times \dots \quad (10.4)$$

ce qui décide pour (10.2<sub>-</sub>). On a alors forcément (10.3<sub>+</sub>). Les seules autres possibilités sont, soit  $\bar{K}_{- - -}$  avec  $\dots \times (\sigma \times \sigma \times \sigma \times \sigma) \times \dots$ , soit  $\bar{K}_{+++}$  des autres  $\bar{K}_{(mixtes)}$  avec partout le même facteur à 16 lignes et colonnes formé par le produit direct de 4  $\sigma$  et  $\tau$ 's, par exemple  $\dots \times (\tau \times \tau \times \sigma \times \tau) \times \dots$ . Ces autres facteurs ne font que changer les représentations des  $a_{(i)\varphi'}$  et  $b_{(i)\chi'}$ .

On obtient, avec (10.4) (signe conformément à (9.1<sub>±</sub>)):

$$\bar{\chi}_{(4)(\nu)} = \mp \bar{\Omega}^T \gamma_{(\nu)} \psi_{(3)} (\bar{\psi}_{(2)}^T \gamma^{(\nu)} \psi_{(1)}) \bar{g}_{a(\nu)}^T. \quad (10.5_{\mp})$$

(C'est dans ce calcul, qu'il est essentiel que, vu la réalité de (0.13),  $\bar{\Omega}$  et  $\bar{\psi}_{(4)}$  anticommutent avec  $\bar{g}_{a(\nu)} = \int \lambda_{a(\nu)}$ ). On s'aperçoit alors, vu (9.4<sub>(4)</sub>), que ( $\bar{\Omega}$  écrit derrière les 4 opérateurs linéaires ( $\bar{g}$  étant opérateur))

\*) On ne peut qu'avoir  $4 \times [.,.]_-$ ,  $4 \times [.,.]_+$  ou  $2 \times [.,.]_-$  et  $2 \times [.,.]_+$ .

$\tilde{\psi}_{(4)} = \bar{\psi}_{(4)} \bar{\Omega}$  satisfait l'équation inhomogène (7.22) (vu  $\bar{\Omega}^T \bar{\Omega} = 1$ ). D'autre part l'équation de continuité (9.6) est assurée pour  $\bar{\psi}_{(4)}$  avec  $\psi_{(4)} \rightarrow \tilde{\psi}_{(4)}$ . Finalement on voit, que, vu (10.4) et (0.5) (cf. § 6), on a

$$\tilde{\psi}_{(4)} = \psi_{(4)} . \quad (10.6)$$

Le cas où plusieurs champs sont décrits par des opérateurs antilinéaires peut également être traité. Tout se ramène à

$$\tilde{\psi}_{(i)} = \psi_{(i)} \bar{\Omega} = \psi_{(i)} . \quad (10.7)$$

### Bibliographie

- <sup>1)</sup> E. C. G. STUECKELBERG, Helv. Phys. Acta *33*, 727 (1960), referred to as I.
- <sup>2)</sup> E. C. G. STUECKELBERG and M. GUENIN, Helv. Phys. Acta *34*, 621 (1961), referred to as II.
- <sup>3)</sup> E. C. G. STUECKELBERG, M. GUENIN, C. PIRON, and H. RUEGG, Helv. Phys. Acta *34*, 675 (1961), referred to as III.

A certain number of misprints are contained in III. They are

$$\dots = D^+(y x) = D^{+T}(x y) , \quad (\text{III } 5.8)$$

$$\overset{\circlearrowleft}{D^0}(x y) = \dots = \overset{\circlearrowleft}{D^0}{}^T(x y) \quad (\text{III } 5.11)$$

in the line following (III 6.2 *M*)  $\dots \hat{\gamma}^\alpha{}^A{}_B \dots$

$$\overset{\circlearrowleft}{\eta} = \lambda \overset{\circlearrowleft}{\eta} \sim , \quad (\text{III } 7.8 \text{ } M)$$

$$\overset{\circlearrowleft}{\eta}{}_{AB} \stackrel{*}{=} \gamma^n{}^A{}_B \quad (\text{III } 7.14)$$

in the line following (III 8.1)  $\dots \overset{\circlearrowleft}{\psi}{}^T{}_A(x) \dots$

$$[\psi^A(x), \overset{\circlearrowleft}{\psi}{}^T{}_B(y)]_\mp = \overset{\circlearrowleft}{S^0}{}^A{}_B(x y) , \quad (\text{III } 8.13 \text{ 1st } k)$$

$$\psi^A(x) = \dots \quad (\text{III } 11.6)$$

- <sup>4)</sup> J. SCHWINGER, Phys. Rev. *82*, 914 (1951).
- <sup>5)</sup> W. PAULI, Niels Bohr and the Development of Physics, p. 30–31 (1955).
- <sup>6)</sup> W. PAULI, Ann. Inst. Poincaré *6*, 137 (1936); Phys. Rev. *58*, 716 (1940); Rev. Mod. Phys. *13*, 203 (1941); Progr. Theor. Phys. *5*, 526 (1950).
- <sup>7)</sup> M. GUENIN and E. C. G. STUECKELBERG, Helv. Phys. Acta *34*, 506 (1961).
- <sup>8)</sup> P. ROMAN, Theory of Elementary Particles, p. 325.
- <sup>9)</sup> B. M. STEPANOV, Thesis, Math. Inst. Acad. Sci. USSR (1953), Doklady Akad. Nauk USSR *100*, 889 (1955).
- <sup>10)</sup> N. N. BOGOLIUBOV and D. V. SHIRKOV, Introduction to the Theory of Quantized Fields, p. 446 (1959).
- <sup>11)</sup> M. T. BURGY, V. E. KROHN, T. B. NOVEY, G. R. RINGER, and V. L. TELELDI, Phys. Rev. *120*, 1829 (1960).
- <sup>12)</sup> H. WEGENER, Z. für Phys. *154*, 553 (1959).
- <sup>13)</sup> G. CHARPAK, F. J. M. FARLEY, R. L. GARWIN, T. MÜLLER, J. C. SENS, and A. ZICHICHI, Nuovo Cim. *22*, 1043 (1961).
- <sup>14)</sup> Pour les travaux de W. HEISENBERG, nous nous référerons à l'article: H. P. DÜRR, Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit, Vieweg, Braunschweig, p. 299 (1961).