

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 35 (1962)
Heft: II

Artikel: Meson- and Hyperon Massendifferenzen
Autor: Straumann, N.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-113270>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Meson- und Hyperon Massendifferenzen

von N. Straumann

Institut für Theoretische Physik, Universität Zürich

(25. XI. 1961)

Summary. The mass differences of the various meson- and hyperon charge multiplets are calculated (π -, K -mesons, Σ , Ξ -hyperons). It is assumed that the theoretical masses of a charge multiplet are equal and that the experimental mass differences rest on self energy effects. The self energies are calculated on the basis of field theory to the order e^2 and $e^2 f^2$ (f = coupling constant of the strong interactions). The method is similar to the calculation of the nucleon mass difference by O'RAIFEARTAIGH, TERREAUX and SREDNIAWA¹). We use the Prentki-d'Espagnat coupling. For π -mesons the purely electromagnetic self energy is dominant. For K -mesons this is smaller by a factor 3. The $e^2 f^2$ -effect is about equal for both particles and has the opposite sign of the e^2 -effect. Quantitatively, for a cut-off K_0 = nucleon mass, it is still too small by a factor 3–5 to overcompensate the purely electromagnetic self energy but it increases $\sim K_0^5$ (compared with $\sim K_0^2$ for the e^2 -effect). The correct mass difference could be obtained for $K_0 \sim 1,6 m_N$, which, however, is inconsistent with the quasistatic approximations used. – For the Σ 's the π -interactions give no splitting of Σ^+ and Σ^- as a group theoretical argument shows. The K interactions yield a contribution much too small. For the Ξ 's the π -interactions give the same result as for nucleons if one assumes global symmetry. The K -interactions contribute very little.

The connexion with other attempts based on dispersion relations and the experimental form factors of the nucleons is discussed.

1. Einleitung

Vor einiger Zeit haben O'RAIFEARTAIGH, SREDNIAWA und TERREAUX¹) den Proton-Neutron-Massenunterschied unter der Annahme zu erklären versucht, dass dieser auf einem gemischten elektromagnetisch-mesoni-schen Selbstenergieeffekt beruht. Zu diesem Zweck berechneten sie störungstheoretisch die Selbstenergien des Protons und des Neutrons in der Ordnung $e^2 f^2$ sowohl für (ϕs) - als auch für (ϕv) -Kupplung. Um endliche Resultate zu erhalten, führten sie in allen Wechselwirkungsenergien einen (und überall denselben) Formfaktor ein. Die Energiedichte für die

Nukleon-Photon-Wechselwirkung (in der Wechselwirkungsdarstellung) wird beispielsweise in der folgenden Weise verallgemeinert:

$$H(x) = -i e \int d^4(x', x'', x''', \bar{\psi}(x') \tau_\mu \gamma_\mu F(x - x', x - x'', x - x''') \times \\ \times \psi(x'') A_\mu(x''')) .$$

Dieser Formfaktor hat nichttriviale Modifikationen der Feynman-Dysonschen Regeln zur Berechnung der S-Matrixelemente zur Folge, die von O'RAIFEARTAIGH²⁾ angegeben wurden, der ausserdem beweisen konnte, dass eine nichtlokale Theorie der skizzierten Art bei geeigneter Wahl des Formfaktors in allen Ordnungen konvergiert. Dies ist insbesondere für den folgenden von ARNOUS und HEITLER³⁾ vorgeschlagenen Formfaktor der Fall:

$$F(x - x', x - x'', x + x''') = G(x - x', x - x'') \delta(x - x''') ,$$

$$g(p, q) = \frac{m^2 K_0^2}{m^2 K_0^2 + (p \cdot q)^2 - p^2 q^2} . \quad (1.1)$$

Dabei ist $g(p, q)$ die Fouriertransformierte von $G(x, y)$, m die Nukleon- bzw. Mesonmasse und K_0 ein universell angenommener Abschneideimpuls. Es gibt natürlich noch viele andere konvergenzerzeugende Formfaktoren.

Nebenbei sei erwähnt, das ARNOUS, HEITLER und Mitarbeiter⁴⁾⁵⁾ die Konsequenzen eines nichtlokalen Ansatzes der obigen Art ohne nähere Spezifizierung von F (F kann auch eine q -Zahl sein) weiter verfolgt und zu einer allgemeinen Rahmentheorie ausgebaut haben. Eine solche Theorie bringt aber die typischen Schwierigkeiten im Hinblick auf Lorentz- und Eichinvarianz mit sich⁶⁾. Die Konvergenz einer Feldtheorie scheint mit den beiden Invarianzforderungen nicht verträglich zu sein.

Der Formfaktor (1.1) ist eine Verallgemeinerung des Modelles der festen ausgedehnten Quelle der nichtrelativistischen Mesontheorie in das relativistische Gebiet. Für $p = 0$, $p_0 = m$ scheidet (1.1) die virtuellen Impulse $\mathbf{k} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$ bei $|\mathbf{k}| = K_0$ ab. Verschiedene Arbeiten⁷⁾⁸⁾⁹⁾ der letzten Jahre machen für K_0 einen Wert in der Gegend der Nukleonmasse wahrscheinlich. (1.1) ist einzeln C , T , P -invariant. Beim Proton-Neutron Massenunterschied entspricht (1.1) in allen Vertizes, wo eine Nukleonlinie ein- oder ausmündet, mehr oder weniger dem Modell der ausgedehnten Quelle, weil die Rechnung im Ruhesystem durchgeführt wird und anderseits das Nukleon in allen Teilen jedes *Feynmandiagrammes* wenigstens nahezu in Ruhe ist. In der Ordnung $e^2 f^2$ genügt dieser «cut-off» auch bereits zur Konvergenz. Der Einfluss von (1.1) in den relativistischen Vertizes (Meson-Photonwechselwirkung) ist nicht besonders gross.

Bei den Extremwerten 0 und 1 für die entsprechenden Matrixelemente ändert sich das Endresultat um einen Faktor 3. Auf alle Fälle werden die entsprechenden Matrixelemente dem Betrage nach kleiner (nach Abschätzungen in I um einen Faktor 0,6 bis 0,7). Leider konnten in I (selbst für die erwähnte niedrigste Ordnung (die Integrationen nicht exakt ausgeführt werden, so dass eine nichtrelativistische Näherung nötig wurde (Entwicklung nach $1/m_N$, m_N = Nukleonmasse). Da aber virtuelle Energien in der Gegend der Nukleonmasse beteiligt sind, ist diese Näherung sehr zweifelhaft, und das Ergebnis kann nur als eine grobe Annäherung an die korrekte theoretische Massendifferenz betrachtet werden. Das Resultat von I ist folgendes: Für $K_0 = m_N$ (Nukleonmasse) erhält der $e^2 f^2$ -Beitrag zur Proton-Neutron-Massendifferenz für beide Kopplungen das richtige Vorzeichen. Für (ρs) -Kopplung ist das Resultat etwa 100 mal zu klein. Die (ρv) -Kopplung gibt die richtige Größenordnung, aber das Resultat ist immer noch 5 bis 10 mal zu klein, um die rein elektromagnetische Selbstenergie des Protons überzukompensieren. Da aber der $e^2 f^2$ -Effekt proportional zu K_0^3 anwächst (verglichen zu $\log K_0$ für die Ordnung e^2), kann eine Erhöhung von K_0 (auf ungefähr zwei Nukleonmassen) leicht das korrekte Resultat geben, was aber wegen der quasistatischen Näherung nicht mehr konsistent wäre. In Anbetracht dieser groben Näherungen betrachten die Autoren dieses Ergebnis als nicht allzu unbefriedigend.

Im Anschluss an (I) schien es uns wünschenswert, ähnliche Rechnungen für andere Ladungsmultipletts durchzuführen. In der vorliegenden Arbeit werden die Massendifferenzen der π -Mesonen, der K -Mesonen, der Σ -Hyperonen und der Ξ -Hyperonen in denselben Näherungen ausgerechnet. Für die starken Wechselwirkungen verwenden wir die Prentki-d'Espagnat-Kopplung, die allerdings vorderhand kaum gesichert ist. Wir erhalten folgende Resultate: Die rein elektromagnetische Selbstenergie ist für die π -Mesonen sicher ausschlaggebend. Diese ist bei den K -Mesonen um einen Faktor 3 kleiner. (Die Selbstenergien verhalten sich im wesentlichen wie das reziproke Massenverhältnis.) Der $e^2 f^2$ -Effekt ist in beiden Fällen ungefähr gleich gross und hat beide Male das entgegengesetzte Vorzeichen zur Ordnung e^2 . Quantitativ ist er bei einem «cut-off» von der Grösse der Nukleonmasse immer noch um einen Faktor 3 zu klein, um bei den K -Mesonen die Ordnung e^2 überzukompensieren. Da er aber mit K_0^5 geht (vergleichen mit K_0^2 für die Ordnung e^2), kann eine Erhöhung von K_0 (auf ungefähr 1,5 m_N) sowohl die richtige K -Meson- wie auch die richtige π -Meson-Massendifferenz geben. Auch in unserer Rechnung wäre das wegen der nichtrelativistischen Näherung nicht mehr konsistent. An sich ist aber gegen eine Erhöhung von K_0 nichts einzubwenden, da nur die Größenordnung von K_0 bekannt ist, und K_0 auch

nicht für alle Prozesse exakt gleich sein muss. Die Situation ist hier ähnlich wie bei den Nukleonen. Man kann hoffen, dass die höheren Näherungen, insbesondere auch die weiteren Glieder in $1/m_N$ das Ergebnis noch verbessern würden. – Die π -Mesonen (inklusive elektromagnetische Wechselwirkung) geben keine Aufspaltung der geladenen Σ -Hyperonen, wie ein gruppentheoretisches Argument zeigt, während die K -Wechselwirkungen einen viel zu kleinen Beitrag liefern. Dies beruht einerseits auf der schwächeren Kopplung und anderseits auf der grossen K -Mesonmasse. Es scheint, dass dieses negative Resultat (verglichen mit den viel besseren Resultaten für die Nukleonen und K -Mesonen) eher auf einer falsch angenommenen Wechselwirkung als auf ungenügenden Näherungen beruht. Bei den Ξ -Hyperonen gibt die π -Wechselwirkung denselben Beitrag wie für den Proton-Neutron-Massenunterschied, falls man globale Symmetrie im Sinne von GELL-MANN annimmt. Die K -Wechselwirkungen tragen auch hier wenig bei.

Innerhalb der genannten Näherung ist unsere Rechnung konsequent feldtheoretisch, und wir machen keinen Gebrauch von empirischen oder halbempirischen Daten wie das empirische magnetische Moment oder die Elektron-Nukleonstreuung. In Abschnitt 8 werden wir die feldtheoretische Methode mit solchen halbempirischen Methoden vergleichen.

2. Bezeichnungen

Die Einheiten sind so gewählt, dass $c = \hbar = 1$ und

$$\frac{e^2}{4\pi} = \alpha = \frac{1}{137}.$$

Die verwendete relativistische Bezeichnung ist so, dass

$$a_\mu = (\mathbf{a}, a_4 = i a_0), \quad (a b) = a_\mu b_\mu; \quad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2 \delta_{\mu\nu}$$

etc., e bedeutet den Betrag der Elektronenladung. μ_π und μ_K bezeichnen die π - bzw. K -Mesonmasse, m_p , m_n , m_{Σ^+} etc. die verschiedenen Baryonmassen.

In der Prentki-d'Espagnat-Theorie¹⁰⁾ werden die Mesonen und Baryonen hinsichtlich ihrer Eigenschaften im Isoraum gemäss nebenstehender Tabelle klassifiziert.

Die Bezeichnung ist so gewählt, dass ein «gesterner» Operator immer dasjenige Teilchen erzeugt, dessen Index ei trägt (π_+^* erzeugt π_+ -Mesonen etc.). Natürlich ist $\pi_+ \equiv \pi_-^*$ usw.

Die starken Wechselwirkungen werden nach folgenden Forderungen aufgestellt:

1. Invarianz bezüglich Lorentztransformationen inklusive Spiegelungen.

2. Invarianz bei Drehungen und Spiegelungen im Isoraum.

Teilchen	Feldtyp und Bezeichnung	Masse in m_e
π_+ π_0 π_-	$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}$: Isopseudovektor $\pi_1 = 1/\sqrt{2} (\pi_+^* + \pi_+)$ $\pi_2 = 1/i \sqrt{2} (\pi_+^* - \pi_+)$ $\pi_3 = \pi_0$	273,25 264,27 273,25
K_+ K_0	$K = \begin{pmatrix} K_+ \\ K_0 \end{pmatrix}, \quad K^* = \begin{pmatrix} K_- \\ \bar{K}_0 \end{pmatrix}$: Isospinor 1. Art (\bar{K}_0 : Antiteilchen von K_0)	966 976
p_n	$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$: Isospinor 1. Art	1836,03 1838,56
A	A : Isoskalar	2182
Σ_+ Σ_0 Σ_-	$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \end{pmatrix}$: Isovektor $\Sigma_1 = 1/\sqrt{2} (\Sigma_- + \Sigma_+)$ $\Sigma_2 = 1/i \sqrt{2} (\Sigma_- - \Sigma_+)$ $\Sigma_3 = \Sigma_0$	2327 2329 2341
Ξ_0 Ξ_-	$\boldsymbol{\Xi} = \begin{pmatrix} \Xi_0 \\ \Xi_- \end{pmatrix}$: Isospinor 2. Art	2579 ± 16 $2583 \pm 5,5$

Beschränkt man sich auf trilineare Wechselwirkungen (bilinear in den Fermionfeldern), so erhält man als allgemeinsten Ausdruck für die Lagrangefunktion

$$\begin{aligned}
L_{\text{stark}} = & i g_1 \bar{N} \gamma_5 \boldsymbol{\tau} N \boldsymbol{\pi} + g_2 (\bar{A} \gamma_5 \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\pi} + \text{h. c.}) + \\
& + g_3 \bar{\Sigma} \gamma_5 \boldsymbol{\vartheta} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\pi} + i g_4 \bar{\Xi} \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{\pi} + \\
& + g_5 (\bar{N} \gamma_5 A K + \text{h. c.}) + g_6 (\bar{N} \boldsymbol{\tau} K \gamma_5 \boldsymbol{\Sigma} + \text{h. c.}) + \\
& + g_7 (\bar{\Xi} \boldsymbol{\tau}_2 K^* \gamma_5 A + \text{h. c.}) + g_8 (\bar{\Xi} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau}_2 K^* \gamma_5 \boldsymbol{\Sigma} + \text{h. c.}).
\end{aligned}$$

Darin sind $\boldsymbol{\tau}$ und $\boldsymbol{\vartheta}$ die zwei- bzw. dreidimensionalen Isospinmatrizen.

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\tau}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{\vartheta}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\vartheta}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\vartheta}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und es ist ausserdem angenommen, dass die gewöhnlichen Raumparitäten aller Baryonen dieselben sind.

Diese Wechselwirkungen erhalten Strangeness, Baryonzahl und elektrische Ladung. Sie sind ausserdem invariant bei Ladungskonjugation.

Wir haben nur die pseudoskalaren Terme aufgeschrieben. Tatsächlich verwenden wir im folgenden aber hauptsächlich die Pseudovektor-Kopplung. In diesem Fall hat man bei Hinzunahme der elektromagnetischen Wechselwirkungen und den gemachten Konventionen noch die üblichen Ersetzungen

$$\partial_\mu \pi_+^* \rightarrow (\partial_\mu + i e A_\mu) \pi_+^*,$$

$$\partial_2 \pi_+ \rightarrow (\partial_\mu - i e A_\mu) \pi_+ \quad \text{usw.}$$

für die geladenen Mesonfelder zu machen.

Die Selbstenergie eines Teilchens ist mit den Diagonalelementen der S-Matrix verknüpft durch

$$\langle p' | S | p \rangle = (-i) (2\pi)^4 \delta(p - p') \bar{u}(p') \delta m u(p) \quad \text{für Spin } \frac{1}{2}, \quad (2.2)$$

$$\langle q' | S | q \rangle = (-i) (2\pi)^4 \delta(q - q') \frac{1}{2\omega(q)} \delta(\mu^2) \quad \text{für Spin 0}, \quad (2.3)$$

falls man in den äusseren Linien der Feynmandiagramme den Faktor $(2\pi)^{-3/2}$ weglässt. Darin bedeuten p und p' bzw. q und q' die Energie-impulsvektoren des betreffenden Fermions bzw. Bosons; $\omega(q) = \sqrt{\mathbf{q}^2 + \mu^2}$.

3. Die elektromagnetischen Selbstenergien der geladenen Teilchen

In der Ordnung e^2 sind die elektromagnetischen Selbstenergien in invarianten Pauli-Rose-Variablen¹¹⁾¹²⁾ durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$\delta m = \frac{m\alpha}{2\pi} \int_1^{z_0} dz \frac{3z^2 - 1}{z^2} \quad \text{für Spin } \frac{1}{2}, \quad (3.1)$$

$$\delta\mu = \frac{\mu\alpha}{8\pi} \int_1^{z_0} dz \frac{3z^4 + 6z^2 - 1}{z^3} \quad \text{für Spin 0}. \quad (3.2)$$

z hängt mit dem Impuls der virtuellen Photonen (falls das Teilchen in Ruhe ist) wie folgt zusammen

$$z = \frac{1}{m} (\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} + |\mathbf{k}|) \quad \text{bzw.} \quad z = \frac{1}{\mu} (\sqrt{\mu^2 + \mathbf{k}^2} + |\mathbf{k}|).$$

Abschneiden der virtuellen Photonimpulse bei einem Grenzimpuls K_0 ist deshalb im wesentlichen gleichbedeutend mit Abschneiden von z an einer K_0 entsprechenden Stelle z_0 . Man erhält die folgenden numerischen Resultate:

$$\pi_{\pm} - \pi_0 = 10,85 ; \quad 23,35$$

$$K_{\pm} - K_0 = 4,90 ; \quad 8,60$$

$$\Sigma_{\pm} - \Sigma_0 = 3,24 ; \quad 4,80$$

$$\Xi_{-} - \Xi_0 = 3,23 ; \quad 4,77$$

Die beiden Zahlen beziehen sich auf $K_0 = 2/3 m_N$ bzw. $K_0 = m_N$.

Es sei noch bemerkt, dass ein Abschneiden mit Pauli-Rose-Variablen eine nachträgliche ad-hoc-Prozedur ist, die aber im statischen Falle (Teilchen in Ruhe) mit der allgemeinen Formfaktortheorie übereinstimmt. Für ein bewegtes Teilchen sind die beiden Theorien sehr verschieden (vgl. in ²⁾, Abschnitt 3.).

4. Die Massendifferenz der π -Mesonen in der Ordnung $e^2 f^2$

Auf Grund der Invarianz der starken Wechselwirkungen bei Drehungen im Isoraum geben nur gemischte Terme der Art $e^2 f^2$ (und höhere) von Null verschiedene Beiträge zu den Massenunterschieden. In den folgenden vier Paragraphen deuten wir kurz die Rechnung in der niedrigsten Ordnung für die verschiedenen Teilchen an. In diesem Paragraphen betrachten wir speziell die π -Mesonen. Wir möchten dabei zeigen, dass der $e^2 f^2$ -Effekt wahrscheinlich die Ordnung e^2 nicht überkompensiert, im Gegensatz zu den Nukleonen und K -Mesonen.

Die gesamte Wechselwirkungsenergieladung lautet*)

$$\begin{aligned} H_i(x) = & -i e \bar{p} \gamma_{\mu} p A_{\mu} + i e [\pi_+^* \partial_{\mu} \pi_+ - \partial_{\mu} \pi_+^* \pi_+] A_{\mu} + e^2 \pi_+^* \pi_+ A_{\mu} A_{\mu} + \\ & + i \left(\frac{f}{\mu} \right) [\bar{p} \gamma_5 \gamma_{\mu} p \partial_{\mu} \pi_0 - \bar{n} \gamma_5 \gamma_{\mu} n \partial_{\mu} \pi_0] + \\ & + i \left(\frac{f}{\mu} \right) \sqrt{2} [\bar{p} \gamma_5 \gamma_{\mu} n \partial_{\mu} \pi_+ + \bar{n} \gamma_5 \gamma_{\mu} p \partial_{\mu} \pi_+^*] + \\ & + \left(\frac{e f}{\mu} \right) \sqrt{2} [\bar{p} \gamma_5 \gamma_{\mu} n \pi_+ - \bar{n} \gamma_5 \gamma_{\mu} p \pi_+^*] A_{\mu}. \end{aligned}$$

Darin haben wir die «normalen abhängigen» Terme weggelassen, da diese bei der Berechnung der S-Matrix keine Rolle spielen, falls man in

*) Wir berücksichtigen nur die Kopplung an die Nukleonen. Dies genügt, um die Größenordnung zu erhalten.

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n P(H_i(x_1) \dots H_i(x_n))$$

für P das modifizierte « P^* -Produkt» einsetzt¹³⁾. Damit ist gemeint, dass bei der Entwicklung des P -Produktes in Wicksche Normalprodukte Kontraktionen der Art $[\overline{\partial_\mu \varphi} \overline{\partial_\nu \varphi^*}]$ durch $\overline{\partial_\mu \partial_\nu [\varphi \varphi^*]}$ zu ersetzen sind, d. h. man soll die Differentiation vor die Kontraktion ziehen.

Diese Vorschrift ist zwar nur in der lokalen Theorie gültig und gilt sicher nicht streng bei Anwesenheit eines Formfaktors. Da bis jetzt aber noch keine kovariante und konvergente nichtlokale Theorie vorliegt, können wir ihre Verwendung nur mit der Bemerkung rechtfertigen, dass wir unsere Rechnungen so eng wie möglich an die lokale Theorie anschliessen wollen.

Weiter wird die Rechnung vereinfacht, falls wir bezüglich f^2 eine Massenrenormierung durchführen. Wegen der Kleinheit der übrigen Beiträge ist man dann auch berechtigt,

$$\mu_{\text{exp}} \simeq \mu_{\text{theor}} + \delta\mu_{f^2} \quad (4.2)$$

zu setzen. In der $e^2 f^2$ -Näherung tritt natürlich keine Renormalisation der Kopplungskonstanten auf. Es stellt sich aber die Frage, ob für f^2 der numerische Wert der renormalisierten oder der nicht renormalisierten Kopplungskonstanten einzusetzen ist. Für die renormalisierte Kopplungskonstante scheint der Wert $f_r^2 = 0,08$ ziemlich sicher zu sein. Das unrenormalisierte f^2 ist jedenfalls grösser und wird, nach unveröffentlichten Arbeiten^{13 a)} auf $f^2 \simeq 0,2$ geschätzt. Wir geben im folgenden die Resultate jeweils für $f^2 = 0,1$ und $f^2 = 0,2$ an. Möglicherweise ist aber noch ein grösserer Wert zu wählen. Für Einzelheiten der Massenrenormalisation nach $\delta\mu_{f^2}$ verweisen wir auf I. Der Effekt ist dabei der, dass wir bis auf Terme, die ohnehin vernachlässigt werden, die Selbstenergie dadurch bekommen, dass wir in der S-Matrix $H_i(x)$ durch $H_i(x) - H_{f^2}^s(x)$ ersetzen und das Matrixelement im Sinne von (4.2) zwischen Einteilchenzuständen mit den experimentellen Massen bilden. $H_{f^2}^s(x)$ bedeutet die Selbstenergieladung in der Ordnung f^2 . – Die Bemerkungen dieses Paragraphen gelten auch für die folgenden drei.

a) Feynman-Graphen

Die Feynman-Graphen, die zu $\delta\mu_{\pi_\pm - \pi_0}^{(e^2/f^2)}$ für $H_i(x) - H_{f^2}^s(x)$ beitragen, sind in Tabelle A und B aufgezeichnet. A bezieht sich auf π_\pm und B auf π_0 . (Selbstverständlich ist $\delta\mu_{\pi_+} = \delta\mu_{\pi_-}$, wie ja schon aus CTP-Invarianz folgt, da π_+ und π_- zueinander Antiteilchen sind.)

Konvention:

- Nukleonlinie
- - - Mesonlinie
- ~~~~~ Photonlinie

Tabelle A

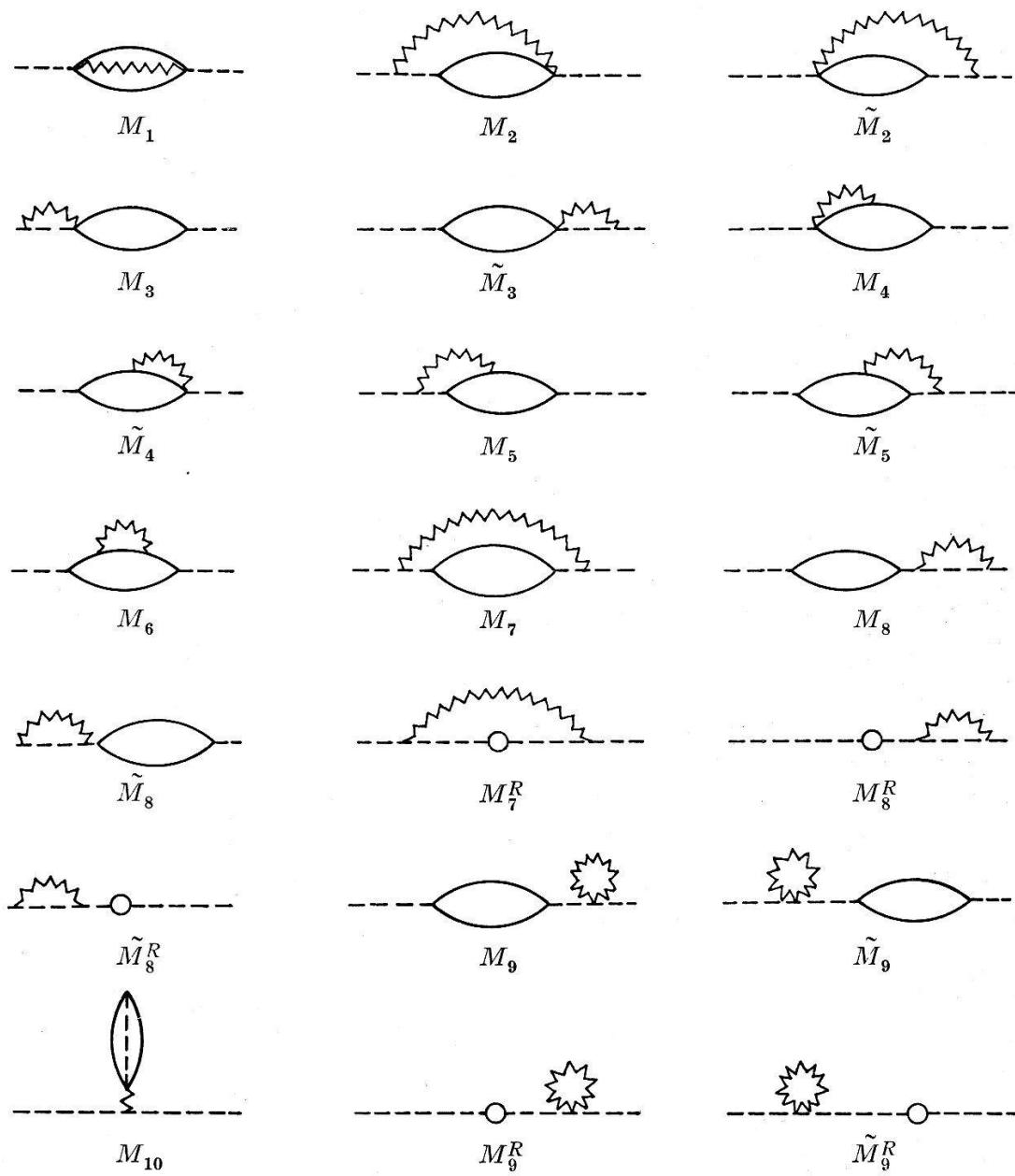


Tabelle B



Das Matrixelement M_{10} verschwindet, wie man leicht aus Symmetrieeigenschaften des Integranden schliesst. Ausserdem gilt allgemein $M = \tilde{M}$. Weiter ist $1/2 M_6 = M'_6$. Die Graphen, die einen Index (R) tragen, röhren von der Massenrenormierung her. Bei M_8 und M_9 und den zugehörigen Renormalisationsgraphen liegen die Zustände, die der inneren Mesonlinie entsprechen, auf der Energie-Impulsschale. In diesem Fall treten gewissen Mehrdeutigkeiten auf, die man nach einer Methode von HEITLER beseitigen kann¹⁴⁾.

b) Methode der Auswertung

Die Integrale, die zu den verschiedenen Feynman-Diagrammen gehören, sind divergent. Um sie konvergent zu machen, verwenden wir im Prinzip den in (1.1) angegebenen Formfaktor. Dieser wäre nach den Regeln, die O'RAIFEARATAIGH²⁾ angegeben hat, in jedem Vertex einzusetzen. Dadurch würde aber die Rechnung hoffnungslos kompliziert. Im Sinne der nicht relativistischen Näherung, zu der wir bei der Auswertung ohnehin gezwungen sind, genügt es aber, in allen Vertizes, wo eine Nukleonlinie einmündet, den Formfaktor durch einen kugelsymmetrischen «cut-off» zu ersetzen, weil die virtuellen Nukleonpaare in den Zwischenzuständen praktisch in Ruhe sind. Dies ist aber bei den π -Mesonen und den K -Mesonen in *allen* Vertizes der Fall. Im Gegensatz zu den Nukleonen gibt es hier keine relativistischen Meson-Photon-Vertizes. Nach Verwendung der Energie-Impulserhaltungssätze an jedem Vertex bleiben noch zwei virtuelle Impulsintegrationen übrig. Die eine bezieht sich auf eine Nukleonlinie und die andere auf die Photonlinie. Für beide schneiden wir nun die räumlichen Impulsbeträge bei K_0 ab.

Die Auswertungsmethode zeigen wir kurz für das einfachste Matrixelement M_1 . Dieses lautet (vgl. Fig. 1)

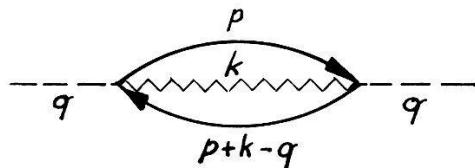


Fig. 1

$$M_1 = -\frac{2 i}{(2 \pi)^4} \left(\frac{e f}{\mu_\pi}\right)^2 \int^{K_0} d^4 p \int^{K_0} d^4 k \frac{\text{Sp} \{ \gamma_5 \gamma_\mu (i p - m_N) \gamma_5 \gamma_\mu [i (p + k - q) - m_N] \}}{k^2 [p^2 + m_N^2] [(p + k - q)^2 + m_N^2]} \quad (4.3)$$

K_0 bei den Integralzeichen deutet auf den scharfen «cut-off» für $|p|$ und $|k|$ hin. Die Spur im Zähler lässt sich leicht auswerten. Wir erhalten

$$M = \frac{16 i}{(2\pi)^4} \left(\frac{e f}{\mu}\right)^2 \int d^3 p \int d^3 k \Phi$$

mit

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{V - p_0(p_0 + k_0 - \mu) - 2m^2}{[k_0^2 - k^2][p_0^2 - \Omega^2][(p_0 + k_0 - q_0)^2 - \Omega_k^2]},$$

WO

$$V = p^2 + (p \cdot k) ,$$

$$k = |k|,$$

$$\Omega = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_N^2},$$

$$\Omega_k = \sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{k})^2 + m_N^2}.$$

Darin werden zunächst die k_0 und p_0 -Integrationen mit Residuenrechnung ausgeführt. In den drei Propagatoren sind in üblicher Weise den Massen kleine imaginäre Zusätze $-i \varepsilon_i$ beizufügen, die nach der Integration gleich Null zu setzen sind. Die ε_i sind natürlich voneinander verschieden zu wählen, und es ist auch eine Konvention über die Differenzen nötig. Wählt man diese geeignet, so kann die Rechnung sogar noch etwas vereinfacht werden. Das Resultat ist selbstverständlich unabhängig von der speziellen Konvention.

Die Polwerte von $\Phi/(2\pi i)^2$ sind:

$$\frac{V - \Omega (\Omega + \mu + k) - 2 m^2}{4 \Omega k [(\Omega + \mu + k)^2 - \Omega_k^2]} \quad \text{vom Pol:} \quad k_0 = -k, \\ p_0 = -\Omega,$$

$$\frac{V - \Omega}{4} \frac{\Omega_k - 2m^2}{\Omega_k [(\Omega_k - \Omega - \mu)^2 - k^2]} \quad \text{vom Pol:} \quad k_0 = \mu + \Omega - \Omega_k, \\ p_0 = -\Omega,$$

$$\frac{V + \Omega_k(\mu - k - \Omega_k) - 2m_N^2}{4k\Omega_k[(\mu - k - \Omega_k)^2 - \Omega^2]} \quad \text{vom Pol:} \quad k_0 = k, \\ p_0 = -\Omega.$$

Wie man sieht, enthalten die Beiträge der verschiedenen Pole für die weitere Integration einzeln noch Singularitäten. Diese verschwinden aber, wenn man die Terme geeignet zusammenfasst. Die Summe der drei Polwerte lässt sich nämlich schreiben als

$$\frac{[\Omega \Omega_k - 2 m_N^2 + V] [\Omega + \Omega_k + k]}{4 k \Omega \Omega_k [\mu_\pi^2 - (k + \Omega + \Omega_k)^2]} . \quad (4.5)$$

Wegen $\mu_x < m_N$ ist der Nenner definit.

Im allgemeinen werden nun die Integrationen über die räumlichen Impulse ausserordentlich kompliziert. An dieser Stelle sind wir deshalb gezwungen, für die weitere Auswertung eine nicht-relativistische Näherung zu machen. Diese besteht darin, dass wir den Integranden in (4.5) nach $1/m_N$ entwickeln und nur den ersten Term in der Entwicklung mitnehmen. Dabei werden die virtuellen Impulse als klein gegenüber der Nukleonmasse angesehen. Wir setzen also z. B.

$$\Omega = m_N + \frac{\mathbf{p}^2}{2m_N} \quad \text{usw.}$$

Die nicht-relativistische Näherung von (4.5) ist $1/8 m_N k$, und der Beitrag von M_1 zur Selbstenergie demzufolge nach (4.4) und (2.3)

$$\delta\mu = \left(\frac{e f}{\mu_\pi} m_N\right)^2 \frac{m_N}{6\pi^4} \left(\frac{K_0}{m_N}\right)^4 \frac{K_0}{4\mu_\pi}.$$

Für die gesamte Massendifferenz $\delta\mu_{\pi_\pm - \pi_0}^{(e^2 f^2)}$ erhalten wir in dieser Weise:

$$\begin{aligned} \delta\mu_{\pi_\pm - \pi_0}^{(e^2 f^2)} &= \left(\frac{e f}{\mu_\pi} m_N\right)^2 \frac{m_N}{6\pi^4} \left(\frac{K_0}{m_N}\right)^3 \left\{ \frac{\mu_\pi}{2m_N} \operatorname{ArSinh} \left(\frac{K_0}{\mu_\pi}\right) - \right. \\ &\quad - \frac{K_0^2}{4m_N\mu_\pi} - \frac{1}{8m_N\mu_\pi} \left[\sqrt{K_0^2 + \mu^2} K_0 - \mu_\pi^2 \operatorname{ArSinh} \left(\frac{K_0}{\mu_\pi}\right) \right] - \\ &\quad \left. - \frac{K_0}{2m_N} + \int_0^{K_0} dk \left[\frac{\mu_\pi^2}{m_N} \frac{k^2}{\omega^4} + \frac{\mu^4}{2m_N} \frac{1}{\omega^4} - \frac{\mu_\pi}{4m_N} \frac{k^4}{\omega^5} \right] \right\} \end{aligned}$$

wo

$$\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu_\pi^2}.$$

Numerisch ergibt sich für $K_0 = m_N$

$$\delta\mu_{\pi_\pm - \pi_0}^{(e^2 f^2)} = -3,25 m_e \quad \text{für} \quad f^2 = 0,1,$$

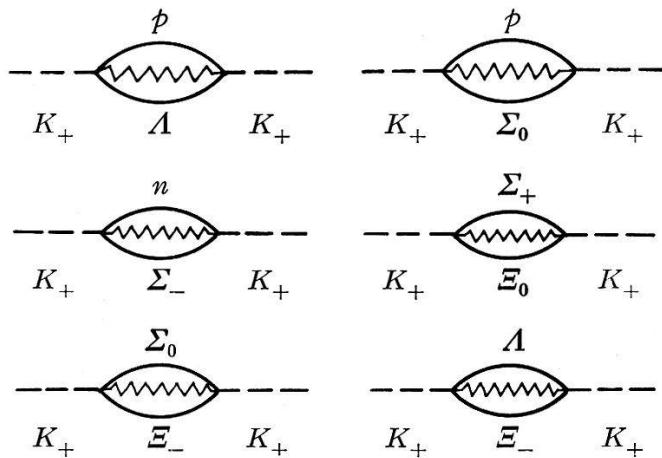
$$\delta\mu_{\pi_\pm - \pi_0}^{(e^2 f^2)} = -6,50 m_e \quad \text{für} \quad f^2 = 0,2.$$

Die entscheidenden Terme gehen mit K_0^4 und K_0^5 und zwar beide mit dem negativen Vorzeichen. (Die rein elektromagnetische Selbstenergie variiert vergleichsweise nur mit K_0^2 .) Der $e^2 f^2$ -Effekt ist viel kleiner als der e^2 -Effekt (Abschnitt 3) und die Massendifferenz $\mu_{\pi_\pm} - \mu_{\pi_0} > 0$ in Übereinstimmung mit der Erfahrung. Es ist leicht, ein geeignetes K_0 zu wählen, so dass diese Massendifferenz richtig herauskommt.

5. Die Massendifferenz der K -Mesonen in der Ordnung $e^2 f^2$

In der $e^2 f^2$ -Ordnung kommen für die K -Mesonen topologisch dieselben Graphen in Frage wie für die π -Mesonen. Entsprechend den verschiedenen

Kopplungen gehören aber zu einem Graphen mehrere Prozesse. Für M_1 kommen beispielsweise die folgenden vor:



Insgesamt erhält man damit für M_1

$$M_1 = -\frac{i}{(2\pi)^4} \left(\frac{e}{\mu_K}\right)^2 [f_{N-\Lambda}^2 + 3f_{N-\Sigma}^2 + 3f_{\Xi-\Sigma}^2 + f_{\Xi-\Lambda}^2] \times \\ \times \int d^4p \int d^4k \frac{\text{Sp} \{ \gamma_5 \gamma_\mu (i(p-m)) \gamma_5 \gamma_\mu [i(p+k-q)-m] \}}{k^2 [p^2+m^2] [(p+k-q)^2+m^2]}.$$

Darin sollen die Indizes der f die verschiedenen Kopplungen andeuten. Außerdem sind die Baryonmassenunterschiede vernachlässigt und m bedeutet eine mittlere Baryonmasse.

Bei der Auswertung tritt hier noch eine Besonderheit auf. Da nämlich die K -Mesonmasse ungefähr gleich der halben Nukleonmasse ist, kann μ_K in der nicht-relativistischen Näherung nicht mehr als klein betrachtet werden. Es war deshalb notwendig, μ_K als variablen Parameter zu behandeln, und die Integrale von grossen und kleinen Mesonmassen her für den physikalischen Wert zu extrapolieren. In Figur 2 ist $\delta\mu_{K_+ - K_0}^{(e^2/f^2)}$ als Funktion von μ_K für $K_0 = m_N$ aufgetragen. Die K -Meson-Baryon-Kopplungskonstanten sind dabei wie folgt gewählt. Wir setzen

$$\frac{1}{\mu_K^2} [f_{N-\Lambda}^2 + 3f_{N-\Sigma}^2 + 3f_{\Xi-\Sigma}^2 + f_{\Xi-\Lambda}^2] = \frac{1}{5} 8 \left(\frac{f_\pi}{\mu_\pi}\right)^2$$

mit

$$f_\pi^2 = 0,2.$$

Tatsächlich tritt nämlich, bis auf wenige Ausnahmen, die numerisch sehr wenig ausmachen, immer die Kombination

$$[f_{N-\Lambda}^2 + 3f_{N-\Sigma}^2 + 3f_{\Xi-\Sigma}^2 + f_{\Xi-\Lambda}^2]$$

der Kopplungskonstanten auf, so dass wir über ihre relativen Stärken nichts zu wissen brauchen.

Trotz der erwähnten Unsicherheit, die von der grossen K -Mesonmasse herröhrt, sehen wir, dass für mittelstarke K -Kopplungen ($\simeq 1/5$ der π - N -Kopplung) ein negativer Beitrag von etwa $3 m_e$ herauskommt. Dieser ist aber immer noch etwa 3 mal zu klein, um die elektromagnetische Selbstenergie überzukompensieren.

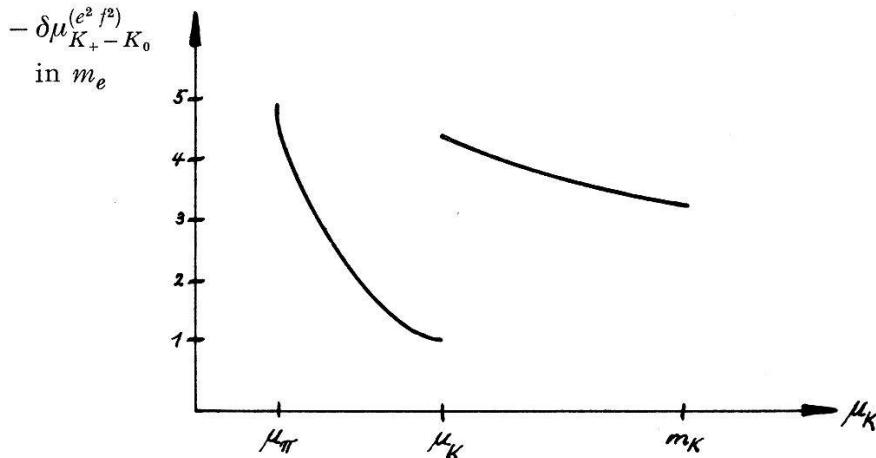


Fig. 2

$-\delta\mu_{K+ - K_0}^{(e^2 f^2)}$ als Funktion von μ_K . Die rechte Kurve gilt unter der Voraussetzung $\mu_K \sim m_N$ und die linke für $\mu_K \ll m_N$.

Die entscheidenden Terme gehen mit K_0^5 (verglichen mit K_0^2 für die Ordnung e^2), und ein entsprechender höherer Wert von K_0 (ca. $1.6 m_N$) würde das experimentell richtige Resultat liefern. Wegen der groben Näherungen, insbesondere der quasistatischen Näherung, dürfen wir darauf aber keinen besondern Wert legen. Die Situation ist also bei den K -Mesonen ähnlich wie bei den Nukleonen.

Infolge der starken Massenabhängigkeit der Ordnung e^2 kann man verstehen, dass bei den K -Mesonen der $e^2 f^2$ -Effekt diese überkompensiert, wogegen er dies bei den π -Mesonen nicht vermag. Es ist also verständlich, dass experimentell zwar $\mu_{\pi^\pm} > \mu_{\pi_0}$, aber $\mu_{K_0} > \mu_{K^\pm}$ ist.

6. Die Massendifferenz der Σ -Hyperonen in der Ordnung $e^2 f^2$

Bei den Σ -Hyperonen zeigt sich als interessante Besonderheit, dass die geladenen Teilchen nicht gleiche Massen haben. Diese Aufspaltung kann im Rahmen unserer Theorie nur durch die K -Wechselwirkungen zustande kommen. Dass die π -Wechselwirkungen nicht zu diesem Effekt führen können gilt unabhängig von der Störungstheorie, wie das folgende gruppentheoretische Argument zeigt. Die gesamte Wechselwirkungsenergiendichte ohne K -Kopplungen lautet (wir schreiben nur die pseudoskalaren Terme auf, doch ist das Folgende auch für Pseudovektorkopplung richtig):

$$\begin{aligned}
 H_i(x) = & -i e (\bar{\Sigma}_+ \gamma_\mu \Sigma_+ - \bar{\Sigma}_- \gamma_\mu \Sigma_-) A_\mu + i e (\pi_+^* \partial_\mu \pi_+ - \partial_\mu \pi_+^* \pi_+) A_\mu + \\
 & + e^2 A_\mu A_\mu \pi_+^* \pi_+ + i g_{\Sigma-\pi-\Sigma} \times \\
 & \times [-\bar{\Sigma}_+ \gamma_5 \Sigma_0 \pi_+ - \bar{\Sigma}_0 \gamma_5 \Sigma_+ \pi_+^* + \bar{\Sigma}_- \gamma_5 \Sigma_0 \pi_+^* - \bar{\Sigma}_0 \gamma_5 \Sigma_- \pi_+ + \\
 & + \bar{\Sigma}_+ \gamma_5 \Sigma_+ \pi_0 - \bar{\Sigma}_- \gamma_5 \Sigma_- \pi_0] + (\Sigma - \pi - \Lambda - \text{Kopplung}) .
 \end{aligned}$$

Werden darin die folgenden Substitutionen ausgeführt:

$$\Sigma_+ \rightarrow \Sigma_-^c ; \quad \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0^c ; \quad \pi \rightarrow \pi ; \quad A_\mu \rightarrow A_\mu ; \quad \Lambda \rightarrow \Lambda^c ,$$

wo c das ladungskonjugierte Feld bedeutet, so sieht man, unter Beachtung von

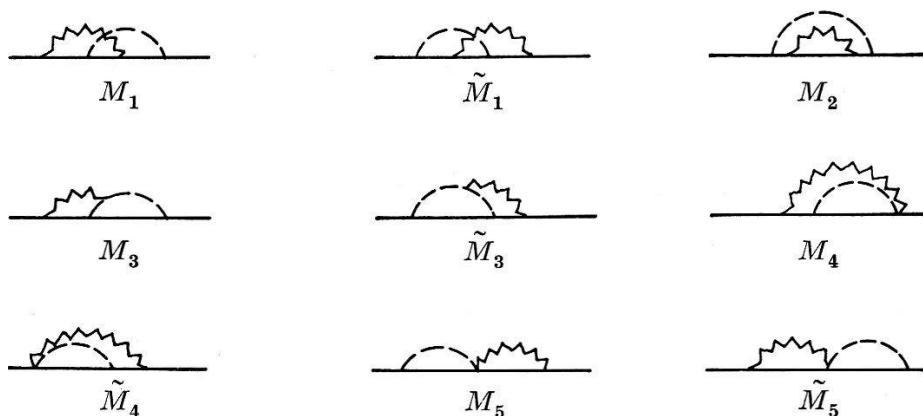
$$i \bar{\Sigma}_+ \gamma_\mu \Sigma_+ A_\mu = -i \bar{\Sigma}_+^c \gamma_\mu \Sigma_+^c A_\mu .$$

$$i \bar{\Sigma}_0 \gamma_5 \Sigma_- \pi_+^* = i \bar{\Sigma}_-^c \gamma_5 \Sigma_0^c \pi_+^* \quad \text{etc.} ,$$

dass sich $H_i(x)$ bis auf das Vorzeichen von g reproduziert. Da aber nur gerade Potenzen von g zur Selbstenergie beitragen, ist die Behauptung bewiesen.

Für Spin 1/2 wurden die Graphen, die für die Selbstenergie in der Ordnung $e^2 f^2$ in Frage kommen, schon in I gegeben. Einige konnten aber dort weggelassen werden, weil sie für das Proton und das Neutron gleiche Beiträge liefern. Wir ordnen die Graphen hier in den Tabellen A, B, C und D an. In A geben wir die Graphen bei denen die K -Kopplungen zur Differenz $\Sigma_+ - \Sigma_-$ beitragen; B umfasst die Graphen, die für Σ_+ und Σ_- gleichviel geben; C diejenigen, die für Σ_0 in Frage kommen, während in D die Graphen zusammengestellt sind, die nichttrivialerweise verschwinden.

Tabelle A



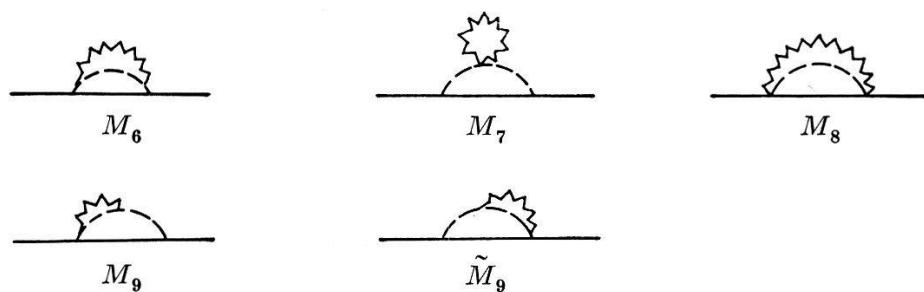


Tabelle B

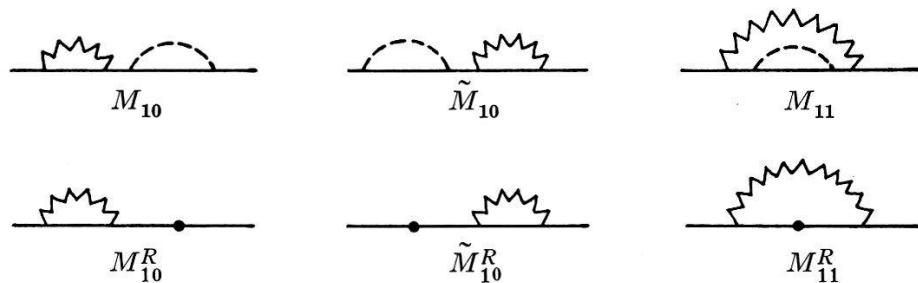


Tabelle C

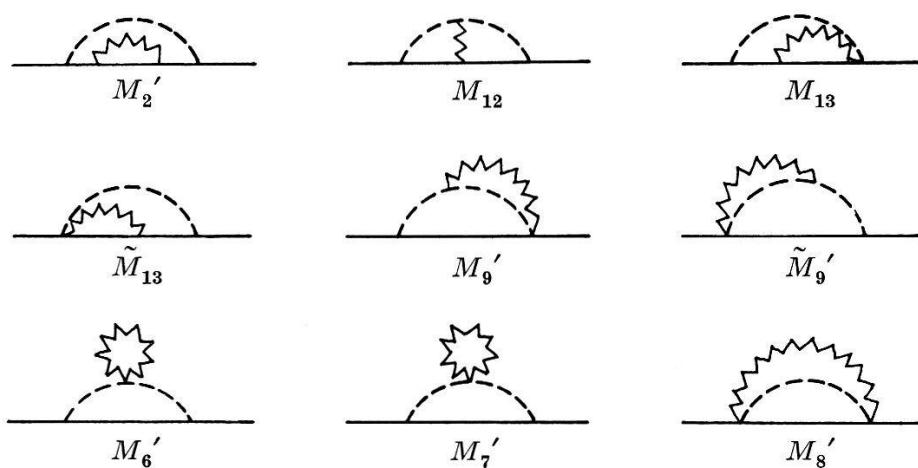
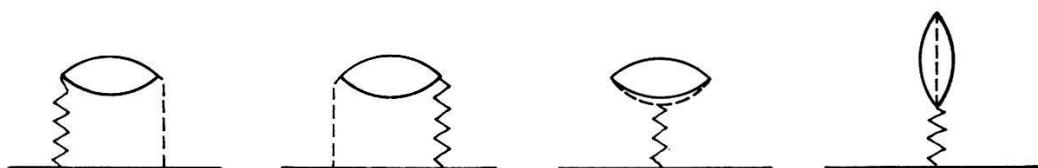


Tabelle D



Auch hier ist $M = \tilde{M}$, und für die Graphen M_{10} , M_{11} , M_{10}^R und M_{11}^R gelten dieselben Bemerkungen, die wir früher bei den entsprechenden Graphen der π -Mesonen hinsichtlich den inneren Linien auf der Energie-Impuls-schale gemacht haben.

Stellt man die Matrixelemente auf, die zu den Feynman-Diagrammen gehören, so bemerkt man, dass $\delta m_{\Sigma_+ - \Sigma_-}^{(e^2 f^2)}$ bei Vernachlässigung der Baryonmassenunterschiede proportional zu $(f_{N-\Sigma}^2 - f_{\Sigma-\Xi}^2)$ ist. Dies folgt auch daraus, dass die Σ - K - N -Kopplung (die elektromagnetische Wechselwirkung eingeschlossen) in die Σ - K - Ξ -Kopplung übergeht, falls man die folgenden Substitutionen ausführt:

$$\Sigma_+ \rightarrow \Sigma_-^c; \quad \Sigma_- \rightarrow \Sigma_+^c; \quad f_{\Sigma-N} \rightarrow f_{\Sigma-\Xi}; \quad p \rightarrow \Xi_-^c; \quad n \rightarrow \Xi_0^c.$$

Die Massendifferenz $\Sigma_+ - \Sigma_-$ kann demzufolge nur durch die verschiedenen starken K -Kopplungen zustande kommen. Leider zeigt nun aber die Rechnung, dass für mittelstarke Kopplungskonstanten

$$\left(\left(\frac{f_K}{\mu_K} \right)^2 \simeq \frac{1}{5} \left(\frac{f_\pi}{\mu_\pi} \right)^2 \right)$$

die Werte wesentlich zu klein herauskommen.

Wir erhalten die folgenden Resultate in der Ordnung $e^2 f^2$:

$$\begin{aligned} (m_{\Sigma_\pm} - m_{\Sigma_0})_{\Sigma-\pi-\Sigma} &= -1,5 \cdot C, \\ (m_{\Sigma_\pm} - m_{\Sigma_0})_{\Sigma-\pi-\Lambda} &= +1,31 \cdot C' \end{aligned} \quad (6.1)$$

für die π -Kopplungen

$$\begin{aligned} (m_{\Sigma_+} - m_{\Sigma_0})_K &= -1,57 C_1 + 1,24 C_2, \\ (m_{\Sigma_-} - m_{\Sigma_0})_K &= 1,24 C_1 - 1,57 C_2, \\ (m_{\Sigma_-} - m_{\Sigma_+})_K &= 2,8 (C_1 - C_2) \end{aligned} \quad (6.2)$$

für die K -Kopplungen, unter der Annahme $\mu_k \ll m_N$ und

$$\begin{aligned} (m_{\Sigma_+} - m_{\Sigma_0})_K &= 1,65 C_1 - 1,57 C_2, \\ (m_{\Sigma_-} - m_{\Sigma_0})_K &= -1,57 C_1 + 1,65 C_2, \\ (m_{\Sigma_-} - m_{\Sigma_+})_K &= -3,2 (C_1 - C_2), \end{aligned} \quad (6.3)$$

falls wir $\mu_K \simeq m_N$ annehmen.

Dabei ist

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{3} \left(\frac{e f_{\Sigma-\pi-\Sigma} m_N}{\mu_\pi} \right)^2 \frac{m_N}{8 \pi^4} \left(\frac{K_0}{m_N} \right)^3, \\ C' &= \frac{1}{3} \left(\frac{e f_{\Sigma-\pi-\Lambda} m_N}{\mu_\pi} \right)^2 \frac{m_N}{8 \pi^4} \left(\frac{K_0}{m_N} \right)^3, \\ C_1 &= \frac{1}{3} \left(\frac{e f_{\Sigma-K-N} m_N}{\mu_K} \right)^2 \frac{m_N}{8 \pi^4} \left(\frac{K_0}{m_N} \right)^3, \\ C_2 &= \frac{1}{3} \left(\frac{e f_{\Sigma-K-\Xi} m_N}{\mu_K} \right)^2 \frac{m_N}{8 \pi^4} \left(\frac{K_0}{m_N} \right)^3, \end{aligned} \quad (6.4)$$

Für $f_{\Sigma-\pi-\Sigma}^2 = 0,2$ und $K_0 = m_N$ ist $C = 2/3 m_e$. Wenn $f_{\Sigma-\pi-\Sigma}^2 = f_{\Xi-\pi-\Lambda}^2$ ist (im Sinne der globalen Symmetrie nach GELL-MANN), oder doch nicht sehr davon abweicht, so ergibt die π -Wechselwirkung eine sehr geringe Aufspaltung $\Sigma_\pm - \Sigma_0$ von der Größenordnung $1/5 m_e$. Ebenso werden die Beiträge der K -Kopplungen im besten Fall ($f_{\Sigma-K-\Sigma} \ll f_{\Sigma-K-N}$) von derselben Größenordnung und sind deshalb um einen Faktor 50 zu klein. Ausserdem steht das Vorzeichen von $\Sigma_- - \Sigma_+$ nicht fest, da die Näherung von kleinen und grossen K -Mesonmassen verschiedene Vorzeichen gibt. – Die Rechnung wurde auch für (ps) -Kopplung durchgeführt; die Ergebnisse sind ähnlich.

Im Rahmen unserer Theorie und dem angenommenen Wechselwirkungsschema kann also die Massendifferenz $\Sigma_+ - \Sigma_-$ nicht verstanden werden. Es ist nicht verwunderlich, dass die K -Wechselwirkungen einen dermassen kleinen Beitrag liefern. Dies beruht neben der schwächeren Kopplung auf der grossen K -Mesonmasse. Tatsächlich sind die Integrale für $\mu_K/m_N \ll 1$ wesentlich grösser als für $\mu_K/m_N \simeq 1$. In den meisten Fällen macht der Unterschied mindestens einen Faktor 5 aus. (Die kleinen Werte in (6.2) beruhen auf einer mehr «zufälligen» Kompensation der Matrixelemente, wogegen für $\mu_K/m_N \simeq 1$ alle Beiträge systematisch klein sind.) Diese Tatsache wird übrigens bei Anwendungen von Dispersionsrelationen verwendet, wo jeweils nur die *leichtesten* Zwischenzustände berücksichtigt werden (vgl. Abschnitt 8).

Da die starken Wechselwirkungen noch sehr schlecht bekannt sind, ist es durchaus denkbar, dass noch unbekannte Wechselwirkungen mit den Σ -Hyperonen existieren, oder dass das angenommene Wechselwirkungsschema falsch ist. Diese Vermutung liegt insofern nahe, als wir ja mit der gleichen Näherung wesentlich bessere Resultate für Nukleonen, π -Mesonen und K -Mesonen erhalten haben, die wenigstens ein qualitatives Verständnis oder zum mindesten Hoffnung auf ein Verständnis der Massendifferenzen eröffnen.

7. Die Massendifferenz der Ξ -Hyperonen

Die Ξ -Hyperonen haben denselben Isospin wie die Nukleonen. Damit hängt zusammen, dass der Proton-Neutron-Massenunterschied bei Vernachlässigung der K -Kopplungen und unter Annahme globaler Symmetrie im Sinne von GELL-MANN, gleich gross ist wie die Massendifferenz der Ξ -Hyperonen

$$m_p - m_n = m_{\Xi_-} - m_{\Xi_0}.$$

Dies ergibt sich daraus, dass die gesamte Wechselwirkung (ohne K -Baryon-Kopplungen) invariant ist bei den folgenden Substitutionen:

$$\not{p} \rightarrow \Xi_-^c ; \quad n \rightarrow \Xi_0^c ; \quad \pi \rightarrow \pi ; \quad A_\mu \rightarrow A_\mu .$$

Dies gilt sowohl für (ϕs) - als auch für (ϕv) -Kopplung. Die K -Mesonen geben auch hier sehr kleine Beiträge von der Grösse $1/5 m_e$. Ein Vergleich mit dem Experiment ist hier noch nicht möglich, da die Massendifferenz $E_- - E_0$ nicht genau genug bekannt ist.

8. Vergleich mit anderen Arbeiten

In verschiedenen Arbeiten der letzten Jahre wurde der Versuch gemacht, die Massendifferenz der Nukleonen mit halbphänomenologischen Methoden zu erklären. Als erste haben FEYNMAN und SPEISMAN¹⁵⁾ den Proton-Neutronmassenunterschied in der Weise berechnet, dass sie den Effekt der mesonischen Wechselwirkungen summarisch durch einen Pauli-Term $\mu e/2 m 1/2 \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ ersetzen, wobei die anomalen magnetischen Momente der Nukleonen aus dem Experiment entnommen werden (vgl. auch¹⁶⁾). Diese Arbeit und ihre Beziehung zu unserer Methode wurde schon in (I) diskutiert. Hier sei nur nochmals darauf hingewiesen, dass ein Pauli-Term mit konstantem magnetischem Moment bestenfalls ein Ersatz für kleine Photonimpulse ist. Da aber gerade die Hauptbeiträge von hohen Impulsen herrühren, muss die Frequenzabhängigkeit des magnetischen Momentes berücksichtigt werden. Konsequenterweise hat man dabei nach WICK¹⁷⁾ für die willkürlichen Formfaktoren, die FEYNMAN und SPEISMAN zur Konvergenz wählten, die experimentellen elektromagnetischen Formfaktoren für Streuung einzusetzen (jedenfalls für raumartige virtuelle Photonimpulse; für zeitartige Impulse ist der Formfaktor durch die Streuung gar nicht definiert). Wir möchten auf diesen Punkt etwas genauer eingehen. Mit Hilfe von (2.2) lässt sich leicht ein allgemeiner Ausdruck für die Selbstenergie eines Teilchens angeben. Für Spin 1/2 lautet dieser

$$\bar{u}(\not{p}) \delta m u(\not{p}) = i (2 \pi)^{-4} \int d^4 k \frac{1}{k^2 - i \epsilon} K(\nu, k^2) \quad (9.1)$$

mit

$$K(\nu, k^2) = i(2 \pi)^3 \frac{1}{2} \int d^4 x e^{i k x} \langle \not{p} \mid T \left(\boldsymbol{j}_\mu \left(\frac{x}{2} \right) \boldsymbol{j}_\mu \left(-\frac{x}{2} \right) \right) \mid \not{p} \rangle. \quad (9.2)$$

(9.1) gibt die Selbstenergie exakt in den starken Wechselwirkungen und störungstheoretisch in der Ordnung e^2 der elektromagnetischen Wechselwirkung. Dabei bedeutet $\boldsymbol{j}_\mu(x)$ den vollständigen Stromoperator in Heisenberg-Darstellung, und T ist der Operator der chronologischen Zeitordnung. Der Kern K hängt aus Invarianzgründen nur von den Invarianten k^2 und $\nu = -(\not{p} \cdot \not{k})/m$ ab.

Für den Vergleich mit der Störungstheorie bemerken wir noch folgendes. Wenn man die Wechselwirkung als

$$H_i(x) = H_{\text{stark}}(x) + H_e(x) \quad (9.3)$$

mit

$$H_e(x) = - j_\mu(x) A_\mu(x) \quad (9.4)$$

schreibt, wo $H_{\text{stark}}(x)$ alle starken Wechselwirkungen umfasst und $H_e(x)$ die Terme proportional e^*), so ist $j_\mu(x)$ in (9.2) der Operator $j_\mu(x)$ in (9.4) in der Heisenberg-Darstellung von $H_{\text{stark}}(x)$, und die Einteilchenzustände in (9.2) sind die bekleideten Zustände. Der Kern $K(\nu, k^2)$ hat eine grosse Ähnlichkeit mit der Streuamplitude für Comptonstreuung am betreffenden Teilchen, und es liegt deshalb nahe, wie dort Dispersionsrelationen aufzuschreiben. Dies wurde in ¹⁸⁾ für Spin 1/2 und in ¹⁹⁾ für Spin 0 getan und die Dispersionsrelationen in der Einnukleon- bzw. Einmesonnäherung ausgewertet. Dabei treten als unbekannte Größen die Matrixelemente des Stromoperators zwischen Einteilchenzuständen auf. Setzt man dafür den allgemeinsten eichinvarianten Ausdruck ein, für Spin 1/2 also

$$\begin{aligned} \langle \not{p}' | \mathbf{j}_\mu(0) | \not{p} \rangle &= i (2\pi)^{-3} \bar{u}(\not{p}') \left[e \gamma_\mu F_1((\not{p}' - \not{p})^2) + \right. \\ &\quad \left. + \mu \frac{e}{2m} \sigma_{\mu\nu} (\not{p}' - \not{p})_\nu F_2((\not{p}' - \not{p})^2) \right] u(\not{p}), \end{aligned} \quad (9.5)$$

so kommt man auf das Integral von FEYNMAN und SPEISMAN zurück, wo jetzt offenbar nach (9.5) die elektromagnetischen Formfaktoren für Streuung einzusetzen sind**). Diese sind, wie schon gesagt, nur für raumartige Impulsübertragung definiert. Im Feynman-Speisman-Integral wird aber über alle virtuellen Photonimpulse integriert. Im Geiste der Dispersionsrelationen hat man für zeitartige Impulse die analytischen Fortsetzungen einzusetzen. Diese sind für $k^2 \geq 4 m_N^2$ durch die Amplitude für die Erzeugung eines Nukleon-Antinukleonpaars in folgender Weise definiert:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\not{p}}, \not{p}'^{(-)} | \mathbf{j}_\mu(0) | 0 \rangle &= i(2\pi)^{-3} \bar{u}(\not{p}') \left[e \gamma_\mu F_1((\bar{\not{p}} + \not{p}')^2) + \right. \\ &\quad \left. + \mu \frac{e}{2m} \sigma_{\mu\nu} (\bar{\not{p}} + \not{p}')_\nu F_2((\bar{\not{p}} + \not{p}')^2) \right] v(\bar{\not{p}}). \end{aligned} \quad (9.6)$$

Dabei bedeuten \not{p}' und \not{p} die Energie-Impulsvektoren des Nukleons bzw. Antinukleons, und $\langle \bar{\not{p}}, \not{p}'^{(-)} |$ ist ein Nukleon-Antinukleonzustand mit einlaufenden Randbedingungen.

*) An sich gibt es auch Terme proportional e^2 . Diese spielen aber nur für Spin 0 eine Rolle und können dort leicht berücksichtigt werden.

**) Es dürfte aus dem Text klar hervorgehen, dass sich die Massendifferenz nur in der Einnukleonnäherung auf die elektromagnetischen Formfaktoren reduzieren lässt.

Von verschiedenen Autoren²⁰⁾²¹⁾ sind die Analytizitätseigenschaften der Formfaktoren untersucht und dafür Dispersionsrelationen aufgestellt und diskutiert worden. In¹⁸⁾ und¹⁹⁾ werden aber lediglich spezielle Modelle für F_1 und F_2 gewählt, die für raumartige Argumente die Messungen von HOFSTÄDTER²²⁾ und Mitarbeitern wiedergeben, und diese Modelle werden auch im «unphysikalischen Gebiet» verwendet. Die Autoren wählen Formfaktoren der Art

$$F(k^2) = \frac{\alpha^4}{(\alpha^2 + k^2)^2} . \quad (9.7)$$

Es stellt sich heraus, dass man in dieser Weise zwar die richtige Größenordnung für den Proton-Neutron-Massenunterschied bekommt, aber mit dem falschen Vorzeichen. Passt man analog das mittlere Ladungsradiusquadrat*) für π -Mesonen so an, dass die richtige Massendifferenz resultiert, so erhält man mit demselben Formfaktor auch bei den K -Mesonen das falsche Vorzeichen.

Es sei noch bemerkt, dass wir keine Berechtigung erkennen können, Formfaktoren wie (9.7) im «unphysikalischen Gebiet» (d. h. für zeitartige k^2) zu verwenden.

Schliesslich möchten wir noch die Einteilchennäherung der Dispersionsrelationen mit unserer Störungsrechnung vergleichen. Für das Matrixelement in (9.2) kann man die folgende störungstheoretische Reihe angeben²³⁾

$$\begin{aligned} \langle p | T \left(j_\mu \left(\frac{x}{2} \right) j_\mu \left(-\frac{x}{2} \right) \right) | p \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \times \\ &\times \langle p | P \left(j_\mu \left(\frac{x}{2} \right) j_\mu \left(-\frac{x}{2} \right) H_{\text{stark}}(x_1) \dots H_{\text{stark}}(x_n) \right) | p \rangle . \end{aligned} \quad (9.8)$$

Dabei sind rechts die nackten Einteilchenzustände einzusetzen.

Unsere Störungsrechnung bestand darin, dass wir für den Kern $K(\nu, k^2)$ die beiden niedersten nicht verschwindenden Terme in der Summe von (9.8)

$$\begin{aligned} K_{e^2 + e^2 f^2}(\nu, k^2) &= i (2\pi)^3 \frac{1}{2} \int d^4x e^{i k x} + \left\{ \langle p | P \left(j_\mu \left(\frac{x}{2} \right) j_\mu \left(-\frac{x}{2} \right) \right) | p \rangle + \right. \\ &+ \left. \int d^4x' \int d^4x'' \langle p | P \left(j_\mu \left(\frac{x}{2} \right) j_\mu \left(-\frac{x}{2} \right) H_{\text{stark}}(x') H_{\text{stark}}(x'') \right) | p \rangle \right\} \end{aligned}$$

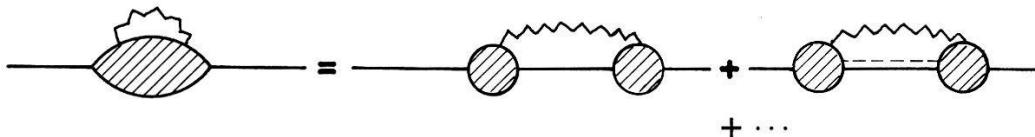
*) Das mittlere Ladungsradiusquadrat a ist wie folgt definiert:

$$F(k^2) = 1 - k^2 a^2/6 ,$$

wo $F(k^2)$ der elektromagnetische Formfaktor des π -Mesons ist.

mitgenommen haben, wobei wir explizite Ansätze für die starken Wechselwirkungen verwendeten. Dieser Näherung entsprechen die in Abschnitt 6 angegebenen Graphen.

Die Dispersionsreihe, die der Berücksichtigung von 1-Nukleon-0-Mesonzuständen, 1-Nukleon-1-Mesonzuständen und 1 Nukleon mehr Mesonzuständen im Absorptionsteil unter dem Dispersionsintegral entspricht, kann graphisch wie folgt dargestellt werden*):



Zu jedem dieser Dispersionsgraphen gehört eine ganze Klasse von störungstheoretischen Graphen. Der Einnukleonnäherung entsprechen genau diejenigen Graphen, bei denen ein Schnitt durch die Photonlinie derart möglich ist, dass nur eine Nukleonlinie (und keine Mesonlinie) geschnitten wird (vgl. das Beispiel in Fig. 3)

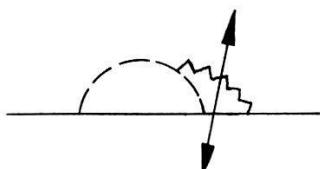


Fig. 3

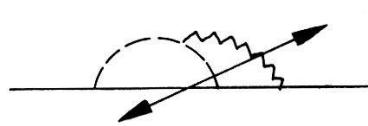


Fig. 4



Fig. 5

In dieser Weise sieht man, dass nicht alle Graphen von Abschnitt 6 in der Einnukleonnäherung vorkommen. Es fehlen die in Fig. 5 angegebenen. Ausserdem treten aber die meisten dieser Graphen auch in der 1-Meson-1-Nukleonnäherung wieder auf, da man, graphisch ausgedrückt, die Feynman-Diagramme auch so aufschneiden kann, dass neben der Nukleonlinie auch eine Mesonlinie geschnitten wird (vgl. Fig. 4).

In der Einnukleonnäherung werden also (da ja die ganze Dispersionsreihe exakt ist) erstens nicht alle Graphen der niederen Ordnung Störungstheorie berücksichtigt, und zweitens werden die berücksichtigten im allgemeinen nicht mit dem richtigen Gewicht mitgenommen. Dies zeigt, dass die beiden Näherungen sehr verschieden sind und deshalb als solche einander ergänzen.

*.) Das Zeichen ————— bedeutet alle starken Wechselwirkungen des einlaufenden Teilchens.

Ferner sei noch bemerkt, dass die Verwendung der Dispersionsrelationen lokale Kausalität voraussetzt. Andererseits werden die experimentellen elektromagnetischen Formfaktoren verwendet. Es ist sehr fraglich, ob die beiden Annahmen miteinander verträglich sind. Jedenfalls existiert bis jetzt keine lokale Theorie, die die Formfaktoren richtig wiedergibt, während es möglich war, mit Hilfe einer störungsmässig verwendeten nicht lokalen Theorie (abschneiden) die Formfaktoren einigermassen richtig zu erhalten⁸⁾⁹⁾.

9. Diskussion

Unsere Methode zur Berechnung der Massenaufspaltung eines Ladungsmultipletts beruht im Prinzip auf einer konsequenten und kompletten feldtheoretischen Behandlung, im Gegensatz zu den semiphänomenologischen Methoden, bei denen Formfaktoren vorkommen, die aus dem Experiment entnommen werden müssen. Eine quantitative Übereinstimmung mit dem Experiment kann jedoch nicht erwartet werden, da unsere Auswertung auf sehr groben Näherungen beruht. Davon seien die einschneidendsten nochmals wiederholt:

1. Störungstheorie bezüglich der starken Wechselwirkungen;
2. Quasistatische Näherung für die Baryonen;
3. Unsicherheit betreffend relativistischer Theorie des Abschneidens.

(Diese spielt aber keine sehr grosse Rolle, da wir im wesentlichen im Bereich der nichtrelativistischen ausgedehnten Quelle bleiben.)

Hierzu kommt die ungenügende Kenntnis der starken Wechselwirkungen und ihrer Kopplungsstärken. Für die *K*-Mesonen und Nukleonen scheinen uns die Ergebnisse einigermassen befriedigend. Der gemischte $e^2 f^2$ -Effekt hat in beiden Fällen das richtige Vorzeichen und die richtige Größenordnung. Er ist aber beide Male etwa um einen Faktor 5 zu klein. Eine Erhöhung des Abschneideimpulses würde die Resultate wesentlich verbessern wegen dem stärkeren Anwachsen der $e^2 f^2$ -Ordnung, verglichen mit dem rein elektromagnetischen Selbstenergieanteil. In unseren Rechnungen (quasistatische Näherung) wäre dies aber nicht mehr konsistent, doch erblicken wir darin eine Chance, die Fakten zu verstehen. Jedenfalls kann gesagt werden, dass wohl kein Zweifel besteht, dass die Massendifferenzen der Ladungsmultipletts auf Selbstenergien beruhen, und dass die Feldtheorie eine gewisse Hoffnung gibt, diese zu verstehen.

Die Massendifferenz $\Sigma_+ - \Sigma_-$ kann innerhalb des angenommenen Wechselwirkungsschemas nach GELL-MANN nur auf den *K*-Wechselwirkungen beruhen. Diese scheinen aber wesentlich zu klein zu sein, um den relativ grossen Wert von $10 m_e$ zu erklären. Wir glauben deshalb, dass die Σ -Hyperonen noch andere unbekannte Wechselwirkungen haben.

Diese Arbeit wurde auf Anregung von Herrn Prof. W. HEITLER und unter seiner Leitung ausgeführt. Ich spreche ihm dafür meinen grossen Dank aus. Besonders danken möchte ich auch Dr. L. O'RAIFEARTAIGH für wertvolle Diskussionen beim Beginn der Arbeit.

Literatur

- 1) L. O'RAIFEARTAIGH, B. SREDNIAWA und CH. TERREAUX, *Il Nuovo Cim.* **14**, 376 (1959). (Im folgenden unter I zitiert.)
- 2) L. O'RAIFEARTAIGH, *Helv. Phys. Acta* **33**, 783 (1960).
- 3) E. ARNOUS und W. HEITLER, *I. Nuovo Cim.* **11**, 443 (1959).
- 4) E. ARNOUS, W. HEITLER und Y. TAKAHASHI, *Il Nuovo Cim.* **16**, (1960).
- 5) E. ARNOUS, W. HEITLER und L. O'RAIFEARTAIGH, *Il Nuovo Cim.* **16**, 785 (1960).
- 6) L. O'RAIFEARTAIGH, erscheint demnächst.
- 7) G. F. CHEW, *Phys. Rev.* **94**, 1748, 1755 (1954) und folgende Arbeiten.
- 8) L. K. PANDIT, *Helv. Phys. Acta* **31**, 379 (1958).
- 9) L. K. PANDIT, *Il Nuovo Cim.* **70**, 534 (1958).
- 10) B. D'ESPAGNAT und J. PRENTKI, *Nucl. Phys.* **1**, 33 (1956); *Phys. Rev.* **102**, 1684 (1956).
- 11) W. PAULI und M. E. ROSE, *Phys. Rev.* **49**, 462 (1936); S. N. GUPTA, *Phys. Soc.* **63**, 681 (1950).
- 12) W. HEITLER, *Quantum Theory of Radiation* (Oxford, 1954, 3rd edition).
- 13) W. PAULI, *Ausgewählte Kapitel aus der Feldquantisierung*, Zürich 1951.
- 13a) G. RASCHE, noch unveröffentlicht.
- 14) Vgl. 12), pag. 297.
- 15) P. FEYNMAN und G. SPEISMAN, *Phys. Rev.* **94**, 500 (1954).
- 16) K. HUANG, *Phys. Rev.* **101**, 1173 (1956).
- 17) G. C. WICK, *Proceedings of the Seventh Annual Rochester Conference on High-Energy Nuclear Physics*, 1957, Ch. I, pag. 41.
- 18) M. CINI, E. FERRARI und R. GATTO, *Phys. Rev. Lett.* **2**, 7 (1959).
- 19) RIAZUDDIN, *Phys. Rev.* **114**, 1184 (1959).
- 20) CHEW, GASIOROWICZ, KARPLUS und ZACHARIASEN, *Phys. Rev.* **110**, 265 (1958).
- 21) FEDERBUSH, GOLDBERGER und TREIMAN, *Phys. Rev.* **112**, 642 (1958).
- 22) R. HOFSTÄDTER *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **30**, 482 (1958).
- 23) J. HAMILTON, *The Theory of Elementary Particles*, Oxford, 1959, Chapter VI.