

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 35 (1962)
Heft: II

Artikel: Untersuchungen zum statischen Modell der Mesontheorie
Autor: Rasche, Günther
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-113268>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Untersuchungen zum statischen Modell der Mesontheorie

von **Günther Rasche**

Institut für Theoretische Physik, Universität Zürich

(25. XI. 1961)

Summary. A variational principle given by SCHWINGER is used for meson processes treated by the static fixed source model. The nonrenormalized π - N coupling constant f^2 (f_r^2 = renormalized coupling constant) is calculated for the purpose of ascertaining whether the theory is consistent and leads to a unitary S -matrix (which is only the case when $f^2 \geq f_r^2$). The result is that for a cut-off ω_{\max} less than about $4,5 m_\pi c^2$ and $f_r^2 = 0,08$ f^2 lies between 0.15 and 0.25 and the theory is consistent. For higher values of ω_{\max} the approximations are not reliable but the indications are that the theory ceases to be consistent for a sufficiently high ω_{\max} .

The variational principle is also applied to double meson production and the results are similar to those derived with various approximations from the CHEW-Low equations.

Einleitung

KÄLLEN und PAULI¹⁾ haben gezeigt, dass selbst in einer verhältnismässig einfachen Feldtheorie wie dem LEE-Modell²⁾ Schwierigkeiten prinzipieller Art entstehen können. In diesem exakt lösbaren Modell zeigt es sich nämlich, dass bei gegebener renormalisierter Kopplungskonstante $f_r^2 > 0$ und gegebenem Abschneideimpuls $k_{\max} = +\sqrt{\omega_{\max}^2 - 1}$ die nicht-renormalisierte Kopplungskonstante $f^2 < 0$ wird, sobald $\omega_{\max} > \omega_{\text{krit}}$, wobei ω_{krit} als Funktion von f_r^2 durch Auswertung des Modells berechnet werden kann.

KÄLLEN und PAULI (loc. cit.) zeigten, dass ein $f^2 < 0$ zu sogenannten Geisterzuständen und einer nichtunitären S -Matrix führt.

CHEW und Low³⁾ haben für die kompliziertere (und im allgemeinen nur mit beträchtlichem Rechenaufwand näherungsweise auswertbare) statische pseudoskalare Mesontheorie (mit ladungssymmetrischer Pseudovektorkopplung) gezeigt, dass unter Voraussetzung der Unitarität der S -Matrix exakt $f_r^2 < f^2$ gilt.

Auswertungen der statischen Mesontheorie sind mit den Parametern f_r^2 und ω_{\max} gegeben worden und durch Anpassung an die Experimente

folgt $f_r^2 = 0,08$ und $4 \leq \omega_{\max} \leq 7$. (Wir verwenden natürliche Einheiten, das heisst $\hbar = c = m_\pi = 1$). Dabei wurde unseres Wissens nie nachgeprüft, ob diese Werte auch zu einer unitären S-Matrix bzw. einem Wert $f^2 > f_r^2$ führen. Die Schwierigkeit liegt darin, dass die unrenormalisierte Theorie bis jetzt nicht exakt genug ausgewertet wurde.

Wäre $f^2 < f_r^2$, so würde die Unitarität der S-Matrix verletzt und die Theorie wäre nicht konsistent. Der Zweck dieser Arbeit besteht nun darin, zu zeigen, dass für $f_r^2 = 0,08$ und $\omega_{\max} \leq 4,5$ die Theorie sicher noch konsistent ist. Es ergibt sich ein vernünftiger Wert für f^2 , $0,25 > f^2 > 0,15$. Bei höherem ω_{\max} ist die Näherung schlecht, aber es zeigt sich, dass es zumindest zweifelhaft ist, ob $f^2 > f_r^2$. Es gäbe dann also auch in der statischen Mesontheorie eine obere Grenze für die Abschneideenergie. Diese liegt aber über den in heutigen Rechnungen allgemein benutzten Werten für ω_{\max} , obwohl wahrscheinlich nicht sehr viel höher.

Ferner berechnen wir ebenfalls mit Hilfe des Variationsprinzips den Wirkungsquerschnitt für den Prozess $\pi + N \rightarrow 2\pi + N$ auf Grund der statischen Mesontheorie; dieser wurde schon mit demselben Modell ermittelt⁴⁻⁷). Es handelte sich dabei jedoch um Auswertungen von Integralgleichungen, die nur mit Vernachlässigungen zu lösen waren und in die ausserdem die dem Experiment entnommenen Streuphasen eingingen. Da die Ergebnisse dieser Arbeiten zum Teil erhebliche Diskrepanzen mit den Messungen aufweisen, ist es wünschenswert, den Prozess mit demselben Modell, aber durch eine vollkommen andere Näherungsmethode zu ermitteln. In dieser Arbeit werden die benötigten Matrixelemente für die Wirkungsquerschnitte direkt berechnet. Die Ergebnisse bestätigen im Wesentlichen die Rechnungen der vorgehenden Arbeiten, was zeigt, dass unser Variationsverfahren ungefähr so gut ist, wie die genannten Näherungen der Chew-Low-Gleichungen. Für den Prozess

$$\pi^+ + p \begin{cases} \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + p \\ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + n \end{cases}$$

findet man eine vernünftige Übereinstimmung mit den Messungen, während der Prozess

$$\pi^- + p \begin{cases} \rightarrow \pi^- + \pi^+ + n \\ \rightarrow \pi^- + \pi^0 + p \\ \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + n \end{cases}$$

durch die Theorie nicht befriedigend erklärt werden kann. Wir vermuten deshalb, dass der Fehler am Modell und nicht am Näherungsverfahren liegt.

I. Das statische Modell

Das Nukleon wird als ruhend angesehen mit Spindrehimpuls $\frac{1}{2} \sigma$ und Isobarens spin $\frac{1}{2} \tau$ als Freiheitsgraden. Seine Zustandsfunktion schreiben wir $|\frac{1}{2} \sigma'_3 \frac{1}{2} \tau'_3\rangle$. Dabei bedeuten die Eigenwerte $\tau'_3 = 1, -1$ ein Proton oder ein Neutron, und $\sigma'_3 = 1, -1$, dass die z -Komponente des Spins $+\frac{1}{2}$ bzw. $-\frac{1}{2}$ ist. Die Ausdehnung des Nukleons wird durch eine Quellsfunktion $Q(\mathbf{x})$ bzw. ihre Fouriertransformation $q(\mathbf{k})$ beschrieben. Die Mesonen werden durch ein quantisiertes Pseudoskalarfeld mit 3 Komponenten im Isobarens spinraum (entsprechend den drei möglichen Ladungszuständen) dargestellt. Einen Erzeugungsoperator für ein Meson im Ladungszustand t_3 mit dem Impuls \mathbf{k} schreiben wir $a^+(\mathbf{k}, t_3)$. Dabei entspricht $t_3 = 1, -1, 0$ den $\pi^+, \pi^-,$ und π^0 .

Einen Zustand mit einem Nukleon und einem Meson schreibt man

$$a^+(\mathbf{k}, t_3) \left| \frac{1}{2} \sigma'_3 \frac{1}{2} \tau'_3 \right\rangle$$

und entsprechend die Mehrmesonzustände.

Die Wechselwirkungsenergie ist bei symmetrischer Pseudovektorkoppelung⁸⁾⁹⁾

$$H_I = \sum_{\mathbf{k} t_3} [a(\mathbf{k}, t_3) V(\mathbf{k}, t_3) + a^+(\mathbf{k}, t_3) V^+(\mathbf{k}, t_3)]$$

mit

$$V(\mathbf{k}, t_3) = i f \sqrt{4\pi} \frac{(\mathbf{k} \sigma)}{\sqrt{2} \omega_k} \tau_{t_3} q(\mathbf{k}).$$

Zerlegt man das Mesonfeld nach Drehimpulseigenfunktionen, so ergibt sich

$$H_I = \sum_{\omega_k l_3 t_3} [a(\omega_k, l_3, t_3) V(k, l_3, t_3) + a^+(\omega_k, l_3, t_3) V^+(k, l_3, t_3)]$$

mit

$$V(k, l_3, t_3) = f \frac{k^2}{\sqrt{3} \omega_k} \sigma_{l_3} \tau_{t_3} q(k), \quad (l_3, t_3 = +1, -1, 0)$$

(n. b. es wechselwirken nur p -Mesonen und es sei $q(\mathbf{k}) = q(k)$). Dabei ist $a^+(\omega_k, l_3, t_3)$ ein Erzeugungsoperator für ein Meson mit Drehimpuls l und der z -Komponente l_3 sowie der Energie ω_k und der Isobarens spin komponente t_3 .

Ferner gilt für

$$\begin{aligned} \sigma_{+1} &= \sigma_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 + i \sigma_2) \\ \sigma_{-1} &= \sigma_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 - i \sigma_2) \end{aligned} \quad \sigma_0 = \sigma_3,$$

$$\langle \frac{1}{2} \sigma'_3 | \sigma_{\pm} | \frac{1}{2} \sigma''_3 \rangle = (-1)^{1/2 + 1/2} \sigma'_3 V(\frac{1}{2} \frac{1}{2} 1; -\sigma'_3 \sigma''_3 \pm 1) \|\sigma\|,$$

$$\langle \frac{1}{2} \sigma'_3 | \sigma_3 | \frac{1}{2} \sigma''_3 \rangle = (-1)^{1/2 + 1/2} \sigma'_3 V(\frac{1}{2} \frac{1}{2} 1; -\sigma'_3 \sigma''_3 \quad 0) \|\sigma\|,$$

wobei sich das reduzierte Matrixelement $\|\sigma\|$ aus der Forderung ergibt, dass die Eigenwerte von $\sigma_3 + 1$ bzw. -1 sind.

Es ergibt sich

$$\|\sigma\| = \sqrt{6}$$

also

$$\langle \frac{1}{2} \sigma'_3 | \sigma_{\pm} | \frac{1}{2} \sigma''_3 \rangle = (-1)^{1/2 + 1/2 \sigma'_3} \sqrt{2} \delta_{\sigma'_3 | \sigma''_3 \pm 1}.$$

Damit hat man als einzige nichtverschwindende Matrixelemente

$$\langle \frac{1}{2} | \sigma_+ | -\frac{1}{2} \rangle = -\sqrt{2}, \quad \langle -\frac{1}{2} | \sigma_- | \frac{1}{2} \rangle = \sqrt{2},$$

$$\langle \pm \frac{1}{2} | \sigma_3 | \pm \frac{1}{2} \rangle = \pm 1.$$

Es gelten folgende Hermitizitätseigenschaften der Operatoren:

$$\sigma_3^+ = \sigma_3, \quad \sigma_+^+ = -\sigma_-.$$

Für die τ_{\pm}, τ_3 Operatoren gilt selbstverständlich das Gleiche. Die Konsequenzen der Vernachlässigung des Nukleonenrückstosses bei Streuprozessen werden später behandelt.

II. Das Variationsprinzip

LIPPMANN und SCHWINGER¹⁰⁾ haben verschiedene Variationsprinzipien für die Operatoren der Streutheorie angegeben. Die Auswertung derselben ist aber, ausser für die elastische Streuung, sehr umständlich. Wir benutzen deshalb in dieser Arbeit ein anderes Variationsprinzip, welches eine direkte Berechnung der Matrixelemente der Streuoperatoren gestattet. Es stammt ursprünglich auch von SCHWINGER und wurde von CHEW¹¹⁾ und ALTSHULER¹²⁾ diskutiert. Die Theorie dieser Methode soll kurz skizziert werden.

Hat man eine Integralgleichung der Art

$$|\psi_a\rangle = |\varphi_a\rangle + G V |\psi_a\rangle \quad (1)$$

und die «adjungierte»

$$|\psi'_b\rangle = |\varphi_b\rangle + G^+ V^+ |\psi'_b\rangle \quad (2)$$

wobei $|\varphi_{a,b}\rangle$ und G sowie V vorgegeben sind, so interessieren uns nach der Lösung Ausdrücke der Form

$$X_{ba} = \langle \varphi_b | V | \psi_a \rangle.$$

Dabei ist die Bedeutung von X abhängig von G (s. u.). Wir definieren nun nach SCHWINGER ein Funktional

$$X_{ba}^{(v)} = \frac{\langle \psi_b' | V | \varphi_a \rangle \langle \varphi_b | V | \psi_a \rangle}{\langle \psi_b' | V | \psi_a \rangle - \langle \psi_b' | V G V | \psi_a \rangle} \quad (3)$$

irgendwelcher $|\psi_a\rangle$ und $|\psi_b'\rangle$, sowie der gegebenen $|\varphi_a\rangle$, $|\varphi_b\rangle$, von welchem wir zeigen, dass es stationär ist, wenn $|\psi_b'\rangle$ und $|\psi_a\rangle$ Lösungen von (1) bzw. (2) sind. Den stationären Wert von $X_{ba}^{(v)}$ nennen wir $X_{ba}^{(vs)}$ und zeigen, dass er mit X_{ba} übereinstimmt.

Variation von $X_{ba}^{(v)}$ nach $|\psi_a\rangle$ und $|\psi_b'\rangle$ gibt:

$$\begin{aligned} \delta X_{ba}^{(v)} &= \frac{\langle \psi_b' | V | \varphi_a \rangle \langle \varphi_b | V | \psi_a \rangle}{(\langle \psi_b' | V | \psi_a \rangle - \langle \psi_b' | V G V | \psi_a \rangle)^2} \times \\ &\times \left\{ \left[\frac{\langle \psi_b' | V | \psi_a \rangle - \langle \psi_b' | V G V | \psi_a \rangle}{\langle \varphi_b | V | \psi_a \rangle} \langle \varphi_b | - \langle \psi_b' | + \langle \psi_b' | V G \right] V | \delta \psi_a \rangle + \right. \\ &\left. + \langle \delta \psi_b' | V \left[\frac{\langle \psi_b' | V | \psi_a \rangle - \langle \psi_b' | V G V | \psi_a \rangle}{\langle \psi_b' | V | \varphi_a \rangle} |\varphi_a\rangle - |\psi_a\rangle + G V |\psi_a\rangle \right] \right\}. \end{aligned}$$

$\delta X_{ba}^{(v)} = 0$ erfordert wegen der Unabhängigkeit der Variationen

$$|\varphi_b\rangle \frac{\langle \psi_a | V^+ | \psi_b' \rangle - \langle \psi_a | V^+ G^+ V^+ | \psi_b' \rangle}{\langle \psi_a | V^+ | \varphi_b \rangle} - |\psi_b'\rangle + G^+ V^+ |\psi_b'\rangle = 0, \quad (4)$$

$$|\varphi_a\rangle \frac{\langle \psi_b' | V | \psi_a \rangle - \langle \psi_b' | V G V | \psi_a \rangle}{\langle \psi_b' | V | \varphi_a \rangle} - |\psi_a\rangle + G V |\psi_a\rangle = 0. \quad (5)$$

Diese beiden Gleichungen sind aber für Lösungen von (2) und (1) erfüllt, da dann wegen der aus (1) und (2) folgenden Lösungseigenschaft,

$$\langle \psi_b' | V | \varphi_a \rangle = \langle \psi_b' | V | \psi_a \rangle - \langle \psi_b' | V G V | \psi_a \rangle,$$

die Faktoren von $|\varphi_a\rangle$ und $|\varphi_b\rangle$ in (4) bzw. (5) = 1 werden. Damit ist auch sofort gezeigt, dass

$$X_{ba}^{(vs)} = \frac{\langle \psi_b' | V | \varphi_a \rangle}{\langle \psi_b' | V | \psi_a \rangle - \langle \psi_b' | V G V | \psi_a \rangle} X_{ba} \equiv X_{ba}.$$

Um dieses Variationsprinzip praktisch anzuwenden, wählen wir folgenden Weg:

Formal lassen sich die Lösungen von (1) und (2) unter Voraussetzung der Konvergenz einer Potenzreihenentwicklung nach V schreiben:

$$\begin{aligned} |\psi_a\rangle &= \sum_{i=0}^{\infty} (G V)^i |\varphi_a\rangle, \\ |\psi_b'\rangle &= \sum_{i=0}^{\infty} (G^+ V^+)^i |\varphi_b\rangle. \end{aligned}$$

Eine Lösung N -ter Ordnung in V erhält man, wenn man nur bis N summiert. Setzen wir diese in (3) ein, so erhält man

$${}^{(N)}X_{ba}^{(v)} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N+1} X_{ba}^{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{N+1} (X_{ba}^{(i)} - X_{ba}^{(i+N+1)})}$$

wobei $X_{ba}^{(i)}$ das Glied i -ter Ordnung in V bei einer Entwicklung von X_{ba} nach V bedeutet:

$$X_{ba}^{(i)} = \langle \varphi_b | V (G V)^{i-1} | \varphi_a \rangle.$$

Man sieht, dass für $N \rightarrow \infty$ die Potenzreihenentwicklung von X_{ba} resultiert.

Für einen bestimmten Erzeugungsprozess m -ter Ordnung (d.h. $|\varphi_a\rangle$ enthält 1 Meson, $|\varphi_b\rangle$ enthält m Mesonen) geben wir nun folgende Näherungsvorschrift erster Ordnung zur Auswertung des Variationsprinzips: Man setze in der Entwicklung der Versuchsfunktionen $|\psi_a\rangle$, $|\psi'_b\rangle$ des Variationsprinzips $N = m$. Dann wird $(X_{ba}^{(v_i)})$ bedeutet i -te Näherung im Variationsprinzip!

$$X_{ba}^{(v_1)} = \frac{(X_{ba}^{(1)} + X_{ba}^{(2)} + \dots + X_{ba}^{(m+1)})^2}{X_{ba}^{(1)} + X_{ba}^{(2)} + \dots + X_{ba}^{(m+1)} - X_{ba}^{(m+2)} - X_{ba}^{(m+3)} - \dots - X_{ba}^{(2m+2)}}.$$

Das erste nichtverschwindende Matrixelement bei einer Potenzreihenentwicklung für einen Erzeugungsprozess m -ter Ordnung ist $X_{ba}^{(m+1)}$. Ferner sind dann nur alle $X_{ba}^{(m+1+2i)} \neq 0$ und man erhält

$$X_{ba}^{(v_1)} = \frac{(X_{ba}^{(m+1)})^2}{X_{ba}^{(m+1)} - X_{ba}^{(m+3)} - \dots - X_{ba}^{(2m+2)}} \quad (6)$$

wobei im Nenner das letzte Glied $X_{ba}^{(2m+2)}$ verschwindet, wenn $m+2$ gerade ist.

Entwickelt man in (6) den Nenner nach den $X_{ba}^{(l)}$, $l \geq m+3$, so sieht man, dass

$$\begin{aligned} X_{ba}^{(v_1)} &= X_{ba}^{(m+1)} + X_{ba}^{(m+3)} + \dots + X_{ba}^{(2m+2)} + \\ &+ \frac{(X_{ba}^{(m+3)} + X_{ba}^{(m+5)} + \dots + X_{ba}^{(2m+2)})^2}{X_{ba}^{(m+1)}} + \dots \end{aligned}$$

Der letzte aufgeschriebene Term enthält Beiträge $m+5$ -ter und höherer Ordnung; der entscheidende Unterschied zu den ersten Gliedern ist jedoch, dass die ersten Glieder sich eindeutig Feynmandiagrammen zu-

ordnen lassen. Der Rest der Glieder ist typisch für das Variationsprinzip und lässt sich nicht in Form solcher Diagramme deuten, obwohl er natürlich aus Produkten von Diagrammbeiträgen besteht.

Diese Auswertung des Variationsprinzips gibt also mehr Aussagen als eine Entwicklung nach V bis zur $2m + 2$ -ten Ordnung. Dabei steht natürlich a priori nicht fest, ob die Zusatzglieder eine erhebliche Verbesserung oder sogar eine Verschlechterung des Ergebnisses bedeuten. Das kann erst nach Angabe von G und insbesondere von V entschieden werden.

Will man im Variationsprinzip eine Ordnung höher gehen, so setze man $N = m + 2$. (Würde man $N = m + 1$ setzen, so erhielte man zwar Zusatzglieder im Nenner, nicht aber im Zähler; das entspräche aber im Nenner einer Entwicklung nach der Kopplungskonstanten.) Mit $N = m + 2$ ergibt sich:

$$X_{ba}^{(v_2)} = \frac{(X_{ba}^{(m+1)} + X_{ba}^{(m+3)})^2}{X_{ba}^{(m+1)} + X_{ba}^{(m+3)} - X_{ba}^{(m+5)} - \dots - X_{ba}^{(2m+5)}}.$$

Als Beispiel ermitteln wir für die Streuung:

$$X_{ba}^{(v_2)} = \frac{(X_{ba}^{(2)})^2}{X_{ba}^{(2)} - X_{ba}^{(4)}}, \quad X_{ba}^{(v_2)} = \frac{(X_{ba}^{(2)} + X_{ba}^{(4)})^2}{X_{ba}^{(2)} + X_{ba}^{(4)} - X_{ba}^{(6)} - X_{ba}^{(8)}}$$

und für die Doppelerzeugung:

$$X_{ba}^{(v_1)} = \frac{(X_{ba}^{(3)})^2}{X_{ba}^{(3)} - X_{ba}^{(5)}}, \quad X_{ba}^{(v_2)} = \frac{(X_{ba}^{(3)} + X_{ba}^{(5)})^2}{X_{ba}^{(3)} + X_{ba}^{(5)} - X_{ba}^{(7)} - X_{ba}^{(9)}}.$$

Um einen Eindruck von der Wirksamkeit des Variationsprinzips zu bekommen, könnte man die Konvergenz prüfen, d.h. $X^{(v_1)}$ mit $X^{(v_2)}$ vergleichen. Dies erfordert jedoch einen zu grossen Rechenaufwand, da die Ermittlung von Matrixelementen mindestens 8-ter Ordnung notwendig ist. Man kann andererseits die Methode an einem exakt lösbaaren Modell prüfen. Dieses ist z.B. das LEE-Modell²⁾. Seine Lösungen für die Streumatrizen sind von der Form

$$X_{ba} = \frac{X_{ba}^{(2)}}{1 + g^2 F_{ba}} = X_{ba}^{(2)} - g^2 X_{ba}^{(2)} F_{ba} + \dots$$

also ist

$$X_{ba}^{(4)} = -g^2 X_{ba}^{(2)} F_{ba}$$

und das Variationsprinzip liefert:

$$X_{ba}^{(v_1)} = \frac{(X_{ba}^{(2)})^2}{X_{ba}^{(2)} - X_{ba}^{(4)}} = \frac{X_{ba}^{(2)}}{1 + g^2 F_{ba}} \equiv X_{ba},$$

d.h. man hat die exakte Lösung in 2-ter Näherung gefunden. Die höheren Näherungen, z.B. $X_{ba}^{(v_2)}$ liefern aber wieder ein nichtexaktes Ergebnis und erst für $N \rightarrow \infty$ erhält man wieder das richtige Resultat.

Für Anwendungen in der Feldtheorie ist $V = H_I$ und entweder

$$G = P \frac{1}{E - H_0} \quad \text{oder} \quad G = \frac{1}{E - H_0 + i \varepsilon}.$$

Im ersten Fall berechnet man mit X die Reaktionsmatrix K , im zweiten Fall die Übergangsmatrix U , wie aus (1) hervorgeht, K und U hängen zusammen nach der Heitlerschen Integralgleichung¹³⁾:

$$U_{\beta\alpha} = K_{\beta\alpha} - i \pi \sum_{\gamma} K_{\beta\gamma} \varrho_{\gamma}(E_{\alpha}) U_{\gamma\alpha} \quad (7)$$

während die übliche S -Matrix

$$S_{\beta\alpha} = 1 - 2 \pi i \delta(E_{\beta} - E_{\alpha}) U_{\beta\alpha}$$

ist.

Der gesamte hier entwickelte Formalismus ist natürlich nicht auf die statische Mesontheorie oder nichtrelativistische Theorien beschränkt. Er könnte z.B. auch auf die relativistische Meson-Nukleonkopplung angewandt werden. Die Notwendigkeit der Ermittlung von reduzierten Matrixelementen höherer als der ersten nichtverschwindenden Ordnung erfordert aber die Renormalisierbarkeit der Wechselwirkung oder ein Abschneideverfahren für hohe virtuelle Impulse. Die Rechnungen werden dann jedoch enorm kompliziert.

III. Streuung

Die Streuung lässt sich in dem behandelten Modell bekanntlich auf die Ermittlung der drei Phasendifferenzen $\delta_{2T \ 2J} = \delta_{33}$, $\delta_{31} = \delta_{13}$, δ_{11} zurückführen, wobei T und J die Gesamtquantenzahlen des Isobarenspins und des Drehimpulses des ein-Meson-ein-Nukleon-Systems sind. Dabei sind diese Phasendifferenzen definiert durch

$$K = - \frac{1}{\pi} \tan \delta \quad \text{oder} \quad U = - \frac{1}{\pi} e^{i\delta} \sin \delta.$$

Wendet man das Variationsprinzip in erster Näherung in der angegebenen Form für die Streuung an, so erhält man

$$K^{(v_1)} = \frac{(K^{(2)})^2}{K^{(2)} - K^{(4)}}, \quad U^{(v_1)} = \frac{(U^{(2)})^2}{U^{(2)} - U^{(4)}}. \quad (8)$$

Dieselben Formeln erhielten CINI und FUBINI¹⁴⁾ bei Auswertung eines

anderen Variationsprinzips und SATORIN und WATAGHIN¹⁵⁾ berechneten daraus unter Benutzung der K -Matrix

$$\begin{aligned}\tan \delta_{33} &= \frac{2y}{1 - 2\Delta_- - 4\Delta_+}, \\ \tan \delta_{31} &= \frac{-y}{1 + \Delta_- - 4\Delta_+}, \\ \tan \delta_{11} &= \frac{-4y}{1 + 4\Delta_- + 2\Delta_+}, \\ y &= \frac{2}{3} f_r^2 \frac{q^3}{\omega_q} |q(q)|^2,\end{aligned}\tag{9}$$

$$\Delta_{\pm}(\omega_q) = \frac{2}{3\pi} f_r^2 \omega_q P \int_1^{\infty} \frac{k^3}{\omega_k^2 (\omega_k \pm \omega_q)} |q(k)|^2 d\omega_k.$$

Dazu ist zu bemerken, dass man dieselben Phasendifferenzen unter Benutzung der U -Matrix erhalten hätte; das bedeutet, dass die aus (8) berechneten Matrizen $K^{(v_1)}$ und $U^{(v_1)}$ die Integralgleichung (7) für $\omega_q < 2$ exakt erfüllen. In einer exakten Lösung würde δ für $\omega_q > 2$ komplex. Beschränkt man sich jedoch auf 1-Meson-1-Nukleon-Konfigurationen, so bleibt δ auch für $\omega_q > 2$ reell und $K^{(v_1)}$ und $U^{(v_1)}$ genügen der Integralgleichung auch für $\omega_q \geq 2$. Das Ganze ist analog der Einmeson-näherung der CHEW-LOW-Gleichung für Streuung³⁾. In der Tat ist (9) identisch mit den Lösungen dieser Gleichung, wenn man die «crossingmatrix» des CHEW-LOW-Formalismus' leicht verändert, um die Gleichungen separieren zu können⁸⁾, was keine wesentliche Änderung des Resultats bedingt. Dieser Umstand bildet eine Rechtfertigung für die Anwendbarkeit des Variationsprinzips in der statischen Mesontheorie.

IV. Die nichtrenormalisierte Kopplungskonstante

Um die Konsistenz des Modells zu prüfen, berechnen wir in diesem Abschnitt die nichtrenormalisierte Kopplungskonstante f^2 . Sie wird abhängen von der renormalisierten Kopplungskonstanten f_r^2 und $q(k)$. Wir verwenden ein scharfes Abschneiden, d.h.

$$\begin{aligned}q(k) &= 1 \quad \text{für} \quad \omega(k) = \sqrt{k^2 + 1} \leq \omega_{\max}, \\ q(k) &= 0 \quad \text{für} \quad \omega(k) = \sqrt{k^2 + 1} \geq \omega_{\max}.\end{aligned}$$

Man kann im allgemeinen f_r^2 nach f^2 entwickeln:

$$f_r^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i} f^{2i} = f^2 \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i} f^{2i-2}.\tag{10}$$

Es ist bei der Renormalisation für ein Matrixelement elastischer Streuung

$$\lim_{\omega_q \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{{}^{(r)}K^{(2i)}(\omega_q) f_r^{2i}}{{}^{(r)}K^{(2)}(\omega_q)} = f_r^2 \quad (11)$$

wobei ${}^{(r)}K^{(2i)}(\omega_q)$ das renormalisierte Matrixelement $2i$ -ter Ordnung dividiert durch f_r^{2i} ist.

In allen bisherigen vertrauenswürdigen Auswertungen des statischen Modells ging ebenso wie in die Dispersionsrelationen nur f_r^2 ein. Dieses wird aus verschiedenen Prozessen (π - N -Streuung, Photoproduktion) zu $f_r^2 = 0,08$ angenommen.

Mit Hilfe des Variationsprinzips ist es nun möglich, die K -Matrix auch in der nichtrenormalisierten Theorie zu berechnen. Dann erhält man durch Vergleich der Resultate einen Wert für f^2 , der natürlich von ω_{\max} und f_r^2 abhängt.

In der nichtrenormalisierten Theorie ist

$$\lim_{\omega_q \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K^{(2i)}(\omega_q) f^{2i}}{K^{(2)}(\omega_q)} \equiv \sum_{i=1}^{\infty} d_{2i} f^{2i}$$

wobei $K^{(2i)}(\omega_q)$ das nichtrenormalisierte Matrixelement $2i$ -ter Ordnung dividiert durch f^{2i} ist.

Da in einer konvergenten Theorie die Ergebnisse der renormalisierten und der nichtrenormalisierten Auswertung gleich sein müssen¹⁶⁾, gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} {}^{(r)}K^{(2i)}(\omega_q) f_r^{2i} = \sum_{i=1}^{\infty} K^{(2i)}(\omega_q) f^{2i} \quad (12)$$

und da ferner stets

$${}^{(r)}K^{(2)}(\omega_q) \equiv K^{(2)}(\omega_q)$$

folgt durch Gleichsetzen von (10) und (11) unter Berücksichtigung von (12):

$$c_{2i} = \lim_{\omega_q \rightarrow 0} \frac{K^{(2i)}(\omega_q)}{K^{(2)}(\omega_q)} . \quad (13)$$

In erster Näherung des Variationsprinzips für Streuung gilt:

$${}^{(r)}K^{(v_1)}(\omega_q) = \frac{f_r^4 ({}^{(r)}K^{(2)}(\omega_q))^2}{f_r^2 {}^{(r)}K^{(2)}(\omega_q) - f_r^4 {}^{(r)}K^{(4)}(\omega_q)} ,$$

$$K^{(v_1)}(\omega_q) = \frac{f^4 (K^{(2)}(\omega_q))^2}{f^2 K^{(2)}(\omega_q) - f^4 K^{(2)}(\omega_q)} ,$$

wobei ${}^{(r)}K^{(v_1)}(\omega_q)$ ($K^{(v_1)}(\omega_q)$) das in erster Variationsnäherung in der renormalisierten (nichtrenormalisierten) Theorie berechnete Matrixelement ist.

Beide Matrixelemente sollen übereinstimmen, sofern die Variationsmethode gut ist. Für kleine ω_q ist sie sicher verlässlich. Wir gehen deshalb über zum Grenzfall $\omega_q \rightarrow 0$. Durch Gleichsetzen in diesem Grenzfall von ${}^{(r)}K^{(v_1)}(\omega_q)$ und $K^{(v_1)}(\omega_q)$ folgt

$$\lim_{\omega_q \rightarrow 0} \frac{f_r^2}{1 - \frac{{}^{(r)}K^{(4)}(\omega_q)}{{}^{(r)}K^{(2)}(\omega_q)} f_r^2} = \lim_{\omega_q \rightarrow 0} \frac{f^2}{1 - \frac{K^{(4)}(\omega_q)}{K^{(2)}(\omega_q)} f^2}$$

oder

$$f_r^2 = \frac{f^2}{1 - c_4 + f^2}, \quad f^2 = \frac{f_r^2}{1 + c_4 f_r^2}.$$

Das ist eine ähnliche Formel wie sie KÄLLEN und PAULI bei der Auswertung des LEE-Modells²⁾ erhielten.

Für c_4 erhält man ohne grössere Rechnung aus Selbstenergie- und Vertexmodifikationen:

$$c_4 = - \frac{16}{3\pi} \int_1^{\omega_{\max}} \frac{k^3}{\omega_k^2} d\omega_k.$$

Wir gehen nun im Variationsprinzip eine Ordnung weiter und erhalten

$${}^{(r)}K^{(v_2)}(\omega_q) = \frac{f_r^4 ({}^{(r)}K^{(2)}(\omega_q) + f_r^2 {}^{(r)}K^{(4)}(\omega_q))^2}{f_r^2 {}^{(r)}K^{(2)}(\omega_q) + f_r^4 {}^{(r)}K^{(4)}(\omega_q) - f_r^6 {}^{(r)}K^{(6)}(\omega_q) - f_r^8 {}^{(r)}K^{(8)}(\omega_q)},$$

$$K^{(v_2)}(\omega_q) = \frac{f^4 (K^{(2)}(\omega_q) + f^2 K^{(4)}(\omega_q))^2}{f^2 K^{(2)}(\omega_q) + f^4 K^{(4)}(\omega_q) - f^6 K^{(6)}(\omega_q) - f^8 K^{(8)}(\omega_q)},$$

wobei ${}^{(r)}K^{(v_2)}(\omega_q)$ ($K^{(v_2)}(\omega_q)$) das in zweiter Variationsnäherung in der renormalisierten (nichtrenormalisierten) Theorie berechnete Matrixelement ist.

Wieder folgt mit den selben Argumenten wie vorher durch Gleichsetzen von ${}^{(r)}K^{(v_2)}(\omega_q)$ und $K^{(v_2)}(\omega_q)$

$$\lim_{\omega_q \rightarrow 0} \frac{f_r^2 \left(1 + f_r^2 \frac{{}^{(r)}K^{(4)}(\omega_q)}{{}^{(r)}K^{(2)}(\omega_q)} \right)^2}{1 + f_r^2 \frac{{}^{(r)}K^{(4)}(\omega_q)}{{}^{(r)}K^{(2)}(\omega_q)} - f_r^4 \frac{{}^{(r)}K^{(6)}(\omega_q)}{{}^{(r)}K^{(2)}(\omega_q)} - f_r^6 \frac{{}^{(r)}K^{(8)}(\omega_q)}{{}^{(r)}K^{(2)}(\omega_q)}} =$$

$$= \lim_{\omega_q \rightarrow 0} \frac{f^2 \left(1 + f^2 \frac{K^{(4)}(\omega_q)}{K^{(2)}(\omega_q)} \right)^2}{1 + f^2 \frac{K^{(4)}(\omega_q)}{K^{(2)}(\omega_q)} - f^4 \frac{K^{(6)}(\omega_q)}{K^{(2)}(\omega_q)} - f^6 \frac{K^{(8)}(\omega_q)}{K^{(2)}(\omega_q)}},$$

$$f_r^2 = f^2 \frac{(1 + c_4 f^2)^2}{1 + c_4 f^2 - c_6 f^4 - c_8 f^6} . \quad (14)$$

Um nun c_6 und c_8 zu bekommen, gehen wir folgendermassen vor: Es ist

$$f_r^2 = \frac{Z_2^2}{Z_1^2} f^2, \quad Z_2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{d\Sigma(E)}{dE} \right)_{E=0}} .$$

Dabei ist $\Sigma(E)$ die Summe aller Selbstenergiemodifikationen. Man erhält $\Sigma(E)$ aus der Chewschen Arbeit¹⁷⁾¹⁸⁾ mit dessen Bezeichnungsweise wie folgt:

$E' = E - E_s$ ist die renormalisierte Energie, E_s die Selbstenergie. Der exakte Nukleonenpropagator ist

$$\tilde{S}(E') = (E' - \tilde{\Sigma}(E'))^{-1}$$

oder

$$S(E) = (E - \Sigma(E))^{-1}$$

wobei

$$\tilde{S}(E') = S(E(E')) ,$$

$$(\tilde{S}(E'))^{-1} = E' - \Sigma(E') - \Sigma(0) = \int_0^{E'} \Gamma_0(\lambda) d\lambda$$

also

$$\tilde{\Sigma}(E') = \Sigma(E') - \Sigma(0) .$$

Es ist

$$\frac{d\tilde{\Sigma}(E')}{dE'} = \frac{d\Sigma(E')}{dE'}$$

und damit erhält man sofort

$$\begin{aligned} Z_2 &= \lim_{E' \rightarrow 0} E' \tilde{S}(E') = \lim_{E' \rightarrow 0} \frac{E'}{E' - \tilde{\Sigma}(E')} = \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{d\tilde{\Sigma}(E')}{dE'} \right)_{E'=0}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{d\Sigma(E)}{dE} \right)_{E=0}} \end{aligned}$$

Z_1 braucht man nicht zu berücksichtigen; es kommt von den Vertexmodifikationen; diese betragen höchstens 1/9 der Selbstenergiemodifikationen¹⁸⁾ und treten additiv auf. Würde man sie in c_4 vernachlässigen, so ergäbe sich z.B.

$$c_4' = - \frac{18}{3\pi} \int_1^{\omega_{\max}} \frac{k^3}{\omega_k^2} d\omega_k$$

anstatt

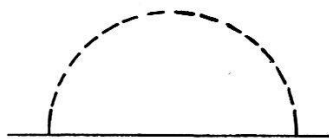
$$c_4 = - \frac{16}{3\pi} \int_1^{\omega_{\max}} \frac{k^3}{\omega_k^2} d\omega_k.$$

Wir entwickeln nun

$$- \left(\frac{d\Sigma(E)}{dE} \right)_{E=0} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i} f^{2i},$$

$$a_{2i} = - f^{-2i} \left(\frac{d\Sigma^{(2i)}(E)}{dE} \right)_{E=0}.$$

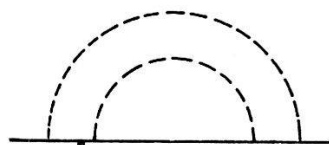
Es ergibt sich für a_2



$$\Sigma^{(2)}(E) = \frac{3f^2}{\pi} \int_1^{\omega_{\max}} \frac{k^3}{E - \omega_k} d\omega_k,$$

$$a_2 = \frac{3}{\pi} \int_1^{\omega_{\max}} \frac{k^3}{\omega_k^2} d\omega_k.$$

Für a_4 ergibt sich



$$\Sigma^{(4)}(E) = \frac{9}{\pi^2} \int_1^{\omega_{\max}} \int_1^{\omega_{\max}} \frac{k^3 x^3}{(E - \omega_x)^2 (E - \omega_x - \omega_k)} d\omega_x d\omega_k +$$



$$\frac{1}{\pi^2} \int_1^{\omega_{\max}} \int_1^{\omega_{\max}} \frac{k^3 x^3}{(E - \omega_x) (E - \omega_k) (E - \omega_x - \omega_k)} d\omega_k d\omega_x,$$

$$a_4 = \frac{1}{\pi^2} \int_1^{\omega_{\max}} \int_1^{\omega_{\max}} k^3 x^3 \left(\frac{18}{\omega_x^3 (\omega_k + \omega_x)} + \frac{9}{\omega_x^2 (\omega_k + \omega_x)^2} + \frac{2}{\omega_x^2 \omega_k (\omega_k + \omega_x)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega_k \omega_x (\omega_k + \omega_x)^2} \right) d\omega_k d\omega_x.$$

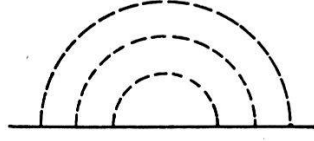
Für a_6 hat man $\Sigma^{(6)}(E)$ zu ermitteln. Dazu tragen 10 Diagramme bei, so dass man schreiben kann

$$\Sigma^{(6)}(E) = \sum_{i=1}^{10} L_i(E)$$

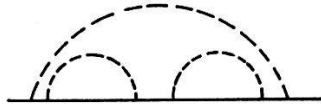
mit

$$L_i(E) = \int_1^{\omega_{\max}} \int_1^{\omega_{\max}} \int_1^{\omega_{\max}} \frac{k^3 x^3 p^3}{N_i(\omega_k, \omega_x, \omega_p, E)} d\omega_k d\omega_x d\omega_p.$$

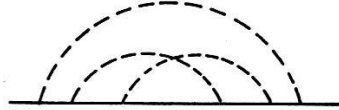
Die Diagramme und die entsprechenden Funktionen $N_i(\omega_k, \omega_x, \omega_p, E)$ sind nachstehend angegeben. Die nach der Differentiation beitragenden 24 dreifachen Integrale sind langwierig und mussten numerisch ermittelt werden.



$$N_1 = \frac{27 \pi^3}{9^3} (E - \omega_p)^2 (E - \omega_p - \omega_k)^2 (E - \omega_p - \omega_k - \omega_x),$$



$$N_2 = \frac{27 \pi^3}{9^2} (E - \omega_p)^3 (E - \omega_k - \omega_p) (E - \omega_x - \omega_p),$$



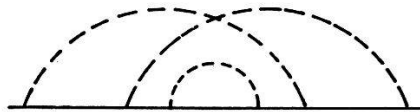
$$N_3 = \frac{27 \pi^3}{9^2} (E - \omega_p)^2 (E - \omega_p - \omega_k) (E - \omega_p - \omega_k - \omega_x) (E - \omega_p - \omega_x),$$



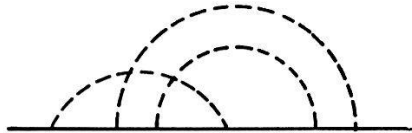
$$N_4 = \frac{27 \pi^3}{9^2} (E - \omega_p) (E - \omega_p - \omega_k) (E - \omega_k)^2 (E - \omega_k - \omega_x).$$



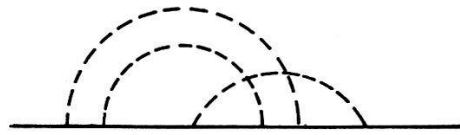
$$N_5 = \frac{27 \pi^3}{9^2} (E - \omega_p)^3 (E - \omega_k - \omega_p) (E - \omega_p - \omega_x) (E - \omega_x),$$



$$N_6 = \frac{27 \pi^3}{9^2} (E - \omega_p) (E - \omega_p - \omega_k)^2 (E - \omega_p - \omega_k - \omega_x) (E - \omega_k),$$



$$N_7 = \frac{27 \pi^3}{9} (E - \omega_p) (E - \omega_p - \omega_k) (E - \omega_p - \omega_k - \omega_x) (E - \omega_k - \omega_x) \times \\ \times (E - \omega_k),$$



$$N_8 = \frac{27 \pi^3}{9} (E - \omega_p) (E - \omega_p - \omega_k) (E - \omega_p - \omega_k - \omega_x) (E - \omega_p - \omega_x) \times \\ \times (E - \omega_x),$$



$$N_9 = \frac{27 \pi^3}{9} (E - \omega_p) (E - \omega_p - \omega_k) (E - \omega_k) (E - \omega_k - \omega_x) (E - \omega_x),$$



$$N_{10} = \frac{27 \pi^3}{9} (E - \omega_k) (E - \omega_k - \omega_p) (E - \omega_k - \omega_p - \omega_x) (E - \omega_p - \omega_x) \times \\ \times (E - \omega_x).$$

Es ist also

$$Z_2^2 = (1 + a_2 f^2 + a_4 f^4 + a_6 f^6)^{-2}$$

und daraus folgt durch Entwicklung nach f^2

$$c_2 = 1,$$

$$c_4 = -2 a_2,$$

$$c_6 = 3 a_2^2 - 2 a_4,$$

$$c_8 = 6 a_2 a_4 - 2 a_6 - 4 a_2^3.$$

Die Gleichung (14) wird dann

$$f^6 (c_4^2 + c_8 f_r^2) + f^4 (2 c_4 + c_6 f_r^2) + f^2 (1 - c_4 f_r^2) - f_r^2 = 0.$$

Eine Lösung ist

$$f^2 = \left(-\frac{s}{2} + \sqrt{D} \right)^{1/3} + \left(-\frac{s}{2} - \sqrt{D} \right)^{1/3} - \frac{1}{3} \alpha \quad (15)$$

wobei

$$\alpha = \frac{2 c_4 + c_6 f_r^2}{c_4^2 + c_8 f_r^2}, \quad \beta = \frac{1 - c_4 f_r^2}{c_4^2 + c_8 f_r^2}, \quad \gamma = -\frac{f_r^2}{c_4^2 + c_8 f_r^2},$$

$$s = \frac{2}{27} \alpha^3 - \frac{1}{3} \alpha \beta + \gamma, \quad t = \beta - \frac{1}{3} \alpha^2, \quad D = \frac{s^2}{4} + \frac{t^3}{27}.$$

Aus der Form der vorkommenden Integrale ist ersichtlich, dass c_8 und c_6 mit ω_{\max} schneller verschwinden als c_4 , so dass für $1 < \omega_{\max} < 2$ nur noch c_4 in die Lösung wesentlich eingeht:

$$\alpha \rightarrow \frac{2}{c_4}, \quad \beta \rightarrow \frac{1 - c_4 f_r^2}{c_4^2}, \quad \gamma \rightarrow -\frac{f_r^2}{c_4^2}.$$

Damit erhält man für kleine ω_{\max} , d.h. kleine c_4 aus (15)

$$f^2 = f_r^2 - c_4 f_r^4 + O(c_4^2).$$

Man kann ferner den Grenzfall kleiner f_r^2 betrachten und erhält:

$$f^2 = f_r^2 + O(f_r^4).$$

Damit ist gezeigt, dass die oben angegebene Lösung (15) für f^2 die richtige ist, da sie für kleine f_r^2 oder kleine ω_{\max} in die Ergebnisse der Störungstheorie übergeht.

Die numerischen Resultate für die verschiedenen Näherungen für f^2 sind in Tabelle I zusammengestellt.

Die erste Näherung des Variationsprinzips gibt ein Ergebnis, welches für $\omega_{\max} > 4,5$ zu einem negativen f^2 führen würde. Die zweite Näherung des Variationsprinzips zeigt zwar, dass dies nicht der Fall ist, dass aber für $\omega_{\max} > 5$ $f_r^2 > f^2$. Das widerspricht der Unitarität der S-Matrix, da man unter Voraussetzung der Unitarität $f_r^2 < f^2$ ableiten kann. Wie CHEW und LOW³⁾ und CINI und FUBINI¹⁹⁾ gezeigt haben, ist dann nämlich exakt:

$$f^2 = f_r^2 + \frac{1}{8\pi^2} \int_1^{\omega_{\max}} \frac{1}{p} (\sigma^+(\omega_p) + \sigma^-(\omega_p)) d\omega_p$$

wobei σ^+ und σ^- die totalen Wirkungsquerschnitte für die Prozesse $\pi^+ + p$ bzw. $\pi^- + p$ sind. Man kann diese Formel numerisch auswerten, wenn man die Messergebnisse für σ^+ und σ^- einsetzt. Man erhält auf diese Weise mit $f_r^2 = 0,08$ und $\omega_{\max} \approx 5$

$$f^2 \approx 0,18$$

in guter Übereinstimmung mit den aus dieser Arbeit folgenden Ergebnissen. Es ist möglich, dass die nächste Näherung im Variationsprinzip den kritischen Wert für ω_{\max} noch erhöht. Dieser hängt auch wesentlich von f_r^2 ab und erhöht sich für kleinere f_r^2 . Wir können also sagen, dass das übliche Abschneiden bei $\omega_{\max} \approx 5$ und $f_r^2 = 0,08$ durchaus noch vertretbar ist, während ein wesentlich höherer Abschneideimpuls eventuell zu prinzipiellen Schwierigkeiten führen könnte. Man bekommt dann nämlich

voraussichtlich Werte für f^2 , die mit der Unitarität der S-Matrix nicht verträglich sind.

Tabelle I

ω_{\max}	Störungstheorie $f^2 = f_r^2 - c_4 f_r^2$	erste Variationsnäherung $f^2 = \frac{f_r^2}{1 + c_4 f_r^2}$	zweite Variationsnäherung $f^2 = \left(-\frac{s}{2} + \sqrt{D}\right)^{1/3} + \left(-\frac{s}{2} - \sqrt{D}\right)^{1/3} - \frac{1}{3}\alpha$
1,5	0,08	0,08	0,09
2,0	0,09	0,09	0,10
2,5	0,10	0,10	0,16
3,0	0,11	0,12	0,26
4,0	0,14	0,33	0,15
5,0	0,19	negativ	0,07

V. Die Doppelerzeugung

Wir berechnen nun mit der Variationsmethode in erster Näherung den totalen Wirkungsquerschnitt für Doppelerzeugung. Dieser soll dann mit den aus CHEW-LOW-Integralgleichungen⁴⁻⁷⁾ ermittelten Wirkungsquerschnitten und den Experimenten verglichen werden. Dabei gilt für das Matrixelement der Übergangsamplitude in erster Variationsnäherung

$$U_{ba}^{(v_1)} = \frac{(U_{ba}^{(3)})^2}{U_{ba}^{(3)} - U_{ba}^{(5)}} = U_{ba}^{(3)} \left(1 - \frac{U_{ba}^{(5)}}{U_{ba}^{(3)}}\right)^{-1}. \quad (16)$$

Damit die Erhaltungssätze und die Symmetrien des Modells ausgenutzt werden können, berechnen wir die Matrixelemente zwischen Eigenzuständen des Drehimpulses J und des Isotopenspins T sowie ihrer diagonalen Komponenten J_3 und T_3 . Für die numerischen Rechnungen verwenden wir die gebräuchlichen Parameter $f_r^2 = 0,08$ und $\omega_{\max} = 6$.

a) Zerlegung des Wirkungsquerschnittes nach diagonalen Matrixelementen von J , J_3 , T , T_3 .

Der totale Wirkungsquerschnitt für den in leicht verständlicher Weise geschriebenen Prozess

$$\pi(\mathbf{k}, t_3) + N\left(\frac{1}{2}\tau_3\right) \rightarrow \pi(t'_3) + \pi(t''_3) + N\left(\frac{1}{2}\tau'_3\right)$$

wird

$$\sigma = \frac{\pi}{v_k} \int_1^{\omega_k-1} d\omega_p \varrho(\omega_p) \varrho(\omega_k - \omega_p) \iint d\Omega_p d\Omega_q \times \\ \times \sum_{\sigma_3'} \left| \sum_{\sigma_3} \langle \mathbf{p}, t_3'; \mathbf{q}, t_3''; \frac{1}{2}\sigma_3', \frac{1}{2}\tau_3' | U | \mathbf{k}, t_3; \frac{1}{2}\sigma_3, \frac{1}{2}\tau_3 \rangle \right|^2.$$

Man macht mit Vorteil von der aus der symmetrischen Kopplung folgenden Erhaltung aller drei Gesamtisobarensplinkomponenten und der Gesamtdrehimpulserhaltung Gebrauch sowie von der wegen der alleinigen Wechselwirkung von p -Mesonen folgenden Symmetrie zwischen den Isobarenspln- und Drehimpulsquantenzahlen. Die in der Streutheorie vorkommenden Matrizen sind also diagonal in den Gesamtdrehimpuls- und Gesamtisobarensplnquantenzahlen und ändern sich nicht bei Vertauschung von Drehimpuls und Isobarenspln untereinander. Sie sind ferner unabhängig von der zusätzlichen diagonalen Komponente der Gesamtvariablen. Wie bezeichnen mit $J J_3, T T_3$ den Gesamtdrehimpuls bzw. Isobarenspln eines Zustandes und seine z -Komponente, und mit $j j_3, \vartheta \vartheta_3$ den Betrag des jeweiligen Mesonanteils an den Gesamtquantenzahlen bei zwei-Meson-ein-Nukleon-Zuständen. Es wird dann:

$$| \mathbf{k}, t_3; \frac{1}{2}\sigma_3, \frac{1}{2}\tau_3 \rangle = a^+(\mathbf{k}, t_3) | \frac{1}{2}\sigma_3, \frac{1}{2}\tau_3 \rangle = \\ = i \frac{2\sqrt{2}\pi}{k} \sum_{l_3 J J_3 T T_3} Y_1^{*(l_3)}(\mathbf{k}) (1 \frac{1}{2} l_3 \frac{1}{2}\sigma_3 | 1 \frac{1}{2} J J_3) \times \\ \times (1 \frac{1}{2} t_3 \frac{1}{2}\tau_3 | 1 \frac{1}{2} T T_3) | \omega_k J J_3 T T_3 \rangle, \\ | \mathbf{p}, t_3'; \mathbf{q}, t_3''; \frac{1}{2}\sigma_3', \frac{1}{2}\tau_3' \rangle = a^+(\mathbf{p}, t_3') a^+(\mathbf{q}, t_3'') | \frac{1}{2}\sigma_3', \frac{1}{2}\tau_3' \rangle = \\ = - \frac{8\pi^2}{p q} \sum_{l_3' l_3'' j j_3 J' J_3' \vartheta \vartheta_3 T' T_3'} Y_1^{*(l_3')}(\mathbf{p}) Y_1^{*(l_3'')}(\mathbf{q}) (11 l_3' l_3'' | 11 j j_3) \times \\ \times (\frac{1}{2} j \frac{1}{2}\sigma_3' j_3 | \frac{1}{2} j J' J_3') (11 t_3' t_3'' | 11 \vartheta \vartheta_3) (\frac{1}{2} \vartheta \frac{1}{2}\tau_3' \vartheta_3 | \frac{1}{2} \vartheta T' T_3') \times \\ \times | \omega_p \omega_q J' J_3' j T' T_3' \vartheta \rangle.$$

Es ist

$$\langle \omega_p \omega_q J' J_3' j T' T_3' \vartheta | U | \omega_k J J_3 T T_3 \rangle = \\ = U(J j T \vartheta \omega_k \omega_p \omega_q) \delta_{J' T' J_3' T_3' | J T J_3 T_3}$$

unabhängig von T_3 und J_3 . Wir legen \mathbf{k} in die z -Achse, also

$$Y_1^{(l_3)}(\mathbf{k}) = \delta_{0|l_3} \sqrt{\frac{3}{4\pi}},$$

integrieren über die Kugelfunktionen und summieren über die magnetischen Quantenzahlen²⁰⁾. Dann führt man die Winkelintegrationen und Spinsummationen aus. Der Wirkungsquerschnitt wird damit:

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{2}{k^2 v_k} \int_1^{\omega_k-1} \frac{\omega_p \omega_q}{p q} d\omega_q \sum_{\substack{T T_3 \tilde{T} \tilde{\vartheta} \\ \vartheta_3 \vartheta J j}} (2J+1) U(J j T \vartheta \omega_k \omega_p \omega_q) \times \\ & \times U^*(J j \tilde{T} \tilde{\vartheta} \omega_k \omega_p \omega_q) \times \\ & \times (11 t'_3 t''_3 | 11 \vartheta \vartheta_3) (\frac{1}{2} \vartheta \frac{1}{2} \tau'_3 \vartheta_3 | \frac{1}{2} \vartheta T T_3) (1 \frac{1}{2} t_3 \frac{1}{2} \tau_3 | 1 \frac{1}{2} T T_3) \times \\ & \times (11 t'_3 t''_3 | 11 \tilde{\vartheta} \vartheta_3) (\frac{1}{2} \tilde{\vartheta} \frac{1}{2} \tau'_3 \vartheta_3 | \frac{1}{2} \tilde{\vartheta} \tilde{T} T_3) (1 \frac{1}{2} t_3 \frac{1}{2} \tau_3 | 1 \frac{1}{2} \tilde{T} T_3) + \\ & + t'_3 \leftrightarrow t''_3. \end{aligned} \quad (17)$$

Wir nennen σ_{total} den Wirkungsquerschnitt bei Summation über alle zwei-Mesonen-Endzustände, d. h. alle t'_3, t''_3, τ'_3 :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{total}} = & \frac{2}{k^2 v_k} \int_1^{\omega_k-1} \frac{\omega_p \omega_q}{p q} d\omega_q \times \\ & \times \sum_{\substack{J j \\ T \vartheta}} (2J+1) (1 \frac{1}{2} t_3 \frac{1}{2} \tau_3 | 1 \frac{1}{2} T t_3 + \frac{1}{2} \tau_3)^2 | U(J j T \vartheta \omega_k \omega_p \omega_q) |^2. \end{aligned}$$

b) Zerlegung der diagonalen Matrixelemente.

Zerlegt man die Eigenzustände von Gesamtdrehimpuls und Gesamtisobarens핀 in bekannter Weise nach Nukleonen und π -Mesonen bestimmter Ladung und bestimmten Drehimpulses, so erhält man für das in $J J_3$ und $T T_3$ diagonale Doppelerzeugungsmatrixelement der höchsten z -Komponente der Gesamtvariablen allgemein:

$$\begin{aligned} \langle \omega_p \omega_q J j T \vartheta | U | J T \omega_k \rangle = & \sum_{\substack{l_3 t_3 l'_3 l''_3 \\ t'_3 t''_3}} U^{\omega_k, l_3, t_3; J-l_3, T-t_3}_{\omega_p, l'_3, t'_3; \omega_q, l''_3, t''_3; J-l'_3-l''_3, T-t'_3-t''_3} \times \\ & \times (\frac{1}{2} 1 T - t_3 t_3 | \frac{1}{2} 1 T T) (\frac{1}{2} \vartheta T - t'_3 - t''_3 t'_3 + t''_3 | \frac{1}{2} \vartheta T T) \times \\ & \times (11 t'_3 t''_3 | 11 \vartheta t'_3 + t''_3) \times \\ & \times (\frac{1}{2} 1 J - l_3 l_3 | \frac{1}{2} 1 J J) (\frac{1}{2} j J - l'_3 - l''_3 l'_3 + l''_3 | \frac{1}{2} j J J) \times \\ & \times (11 l'_3 l''_3 | 11 j l'_3 + l''_3). \end{aligned} \quad (18)$$

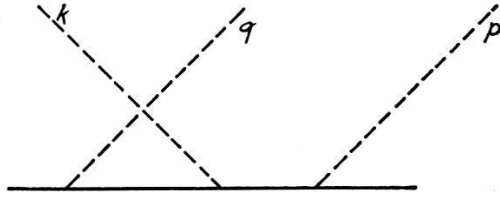
c) Berechnung der diagonalen Matricelemente.

Aus (18) sieht man, dass wir zuerst die

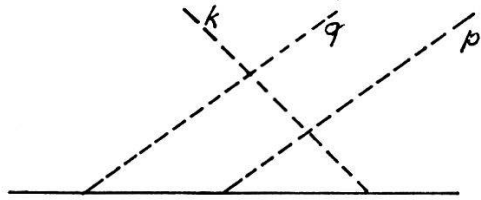
$$U_{\omega_p, l'_3, t'_3; \omega_q, l''_3, t''_3; J-l'_3-l''_3, T-t'_3-t''_3} \omega_k, l_3, t_3; J-l_3, T-t_3}$$

berechnen müssen. Dazu definieren wir entsprechend den folgenden drei Graphen die drei Funktionen $A_i^{(3)}(\omega_k; \omega_q, \omega_p)$ und sechs Operatoren

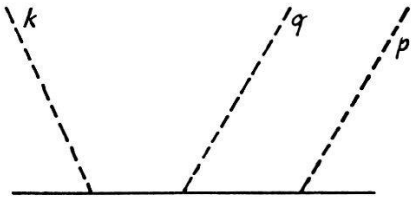
$$\Omega_i^{(3)}(l_k; l_q, l_p), \quad \Gamma_i^{(3)}(t_k; t_q, t_p).$$



$$A_1^{(3)} = -\frac{1}{\omega_q (\omega_k - \omega_q)}, \quad \Omega_1^{(3)} = \sigma_{l_p}^+ \sigma_{l_k} \sigma_{l_q}^+, \quad \Gamma_1^{(3)} = \tau_{t_p}^+ \tau_{t_k} \tau_{t_q}^+,$$



$$A_2^{(3)} = \frac{1}{\omega_k \omega_q}, \quad \Omega_2^{(3)} = \sigma_{l_k} \sigma_{l_p}^+ \sigma_{l_q}^+, \quad \Gamma_2^{(3)} = \tau_{t_k} \tau_{t_p}^+ \tau_{t_q}^+,$$



$$A_3^{(3)} = \frac{1}{\omega_k (\omega_k - \omega_q)}, \quad \Omega_3^{(3)} = \sigma_{l_p}^+ \sigma_{l_q}^+ \sigma_{l_k}, \quad \Gamma_3^{(3)} = \tau_{t_p}^+ \tau_{t_q}^+ \tau_{t_k}.$$

Die Matricelemente 3. Ordnung zwischen den Zuständen

$$|\frac{1}{2}\sigma_3, \frac{1}{2}\tau_3; \omega_k, l_k, t_k\rangle \quad \text{und} \quad |\frac{1}{2}\sigma'_3, \frac{1}{2}\tau'_3; \omega_q, l_q, t_q; \omega_p, l_p, t_p\rangle$$

kann man dann schreiben:

$$U_{\omega_q, l_q, t_q; \omega_p, l_p, t_p; 1/2 \sigma'_3, 1/2 \tau'_3}^{(3) \omega_k, l_k, t_k; 1/2 \sigma_3, 1/2 \tau_3} = M \sum_{i=1}^3 A_i^{(3)}(\omega_k; \omega_q, \omega_p) \times \\ \times \langle \frac{1}{2}\sigma'_3 | \Omega_i^{(3)}(l_k; l_q, l_p) | \frac{1}{2}\sigma_3 \rangle \langle \frac{1}{2}\tau'_3 | \Gamma_i^{(3)}(t_k; t_q, t_p) | \frac{1}{2}\tau_3 \rangle + p \leftrightarrow q,$$

$$M = N^3 \frac{\hbar^2}{\sqrt{\omega_k}} \frac{p^2}{\sqrt{\omega_p}} \frac{q^2}{\sqrt{\omega_q}}, \quad N^2 = \frac{f_r^2}{3}.$$

Die Renormalisation wird durchgeführt nach CHEW¹⁷⁾¹⁸⁾; nur die Selbstenergiemodifikationen werden berücksichtigt, da die Vertexanteile um

einen Faktor $1/9$ kleiner sind und additiv auftreten¹⁸⁾. Entsprechend den obigen drei Diagrammen definieren wir:

$$S_1(\omega_k; \omega_q, \omega_p) = -f_r^2 [\Delta(-\omega_q) + \Delta(\omega_k - \omega_q)],$$

$$S_2(\omega_k; \omega_q, \omega_p) = -f_r^2 [\Delta(-\omega_q) + \Delta(-\omega_k)],$$

$$S_3(\omega_k; \omega_q, \omega_p) = -f_r^2 [\Delta(\omega_k) + \Delta(\omega_k - \omega_q)],$$

$$\Delta(\omega_q) = \frac{3}{\pi} \int_1^6 \frac{k^3}{\omega_k} \frac{\omega_q}{\omega_k - \omega_q - i\varepsilon} d\omega_k.$$

Die renormalisierten Matrixelemente schreiben wir dann:

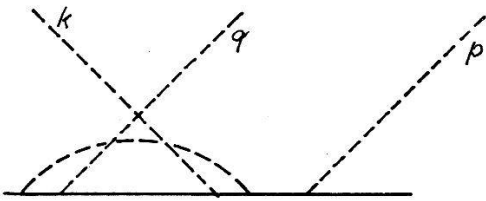
$$\begin{aligned} \text{ren } U_{\omega_q, l_q, t_q; \omega_p, l_p, t_p; 1/2 \sigma_3, 1/2 \tau_3}^{(3) \omega_k, l_k, t_k; 1/2 \sigma_3', 1/2 \tau_3'} &= M \sum_{i=1}^3 A_i^{(3)}(\omega_k; \omega_q, \omega_p) S_i(\omega_k; \omega_q, \omega_p) \times \\ &\times \langle \frac{1}{2} \sigma_3' | \Omega_i^{(3)}(l_k; l_q, l_p) | \frac{1}{2} \sigma_3 \rangle \langle \frac{1}{2} \tau_3' | \Gamma_i^{(3)}(t_k; t_q, t_p) | \frac{1}{2} \tau_3 \rangle + p \leftrightarrow q. \end{aligned}$$

Entsprechend den weiteren 9 Graphen definieren wir die 9 Funktionen

$$A_i^{(5)}(\omega_k; \omega_q, \omega_p) = \frac{N^2}{\pi} \int_1^6 \frac{1}{B_i(\omega_k; \omega_q, \omega_p; \omega_x)} x^3 d\omega_x$$

und die 18 Operatoren

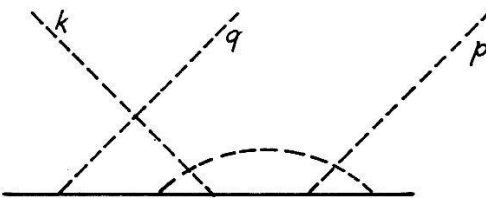
$$\Omega_i^{(5)}(l_k; l_q, l_p), \quad \Gamma_i^{(5)}(t_k; t_q, t_p).$$



$$B_1 = (\omega_k - \omega_q) (\omega_x + \omega_q) \omega_x (\omega_k - \omega_q - \omega_x + i\varepsilon),$$

$$\Omega_1^{(5)} = \sigma_{l_p}^+ \sigma_\mu \sigma_{l_k} \sigma_{l_q}^+ \sigma_\mu^+,$$

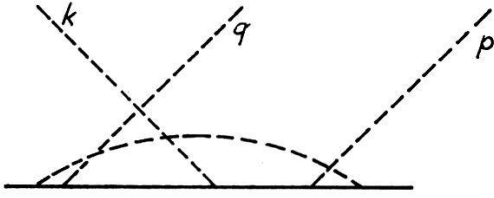
$$\Gamma_1^{(5)} = \tau_{t_p}^+ \tau_\mu \tau_{t_k} \tau_{t_q}^+ \tau_\mu^+,$$



$$B_2 = -\omega_q (\omega_x + \omega_q) \omega_x (\omega_k - \omega_q - \omega_x + i\varepsilon),$$

$$\Omega_2^{(5)} = \sigma_\mu \sigma_{l_p}^+ \sigma_{l_k} \sigma_\mu^+ \sigma_{l_q}^+,$$

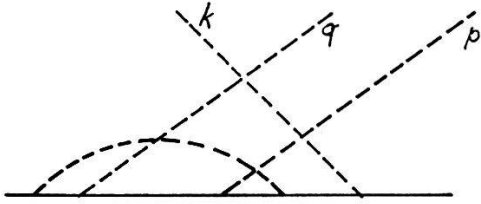
$$\Gamma_2^{(5)} = \tau_\mu \tau_{t_p}^+ \tau_{t_k} \tau_\mu^+ \tau_{t_q}^+,$$



$$B_3 = -\omega_x^2 (\omega_x + \omega_q) (\omega_k - \omega_x - \omega_q + i \varepsilon),$$

$$\Omega_3^{(5)} = \sigma_\mu \sigma_{l_p}^+ \sigma_{l_k} \sigma_{l_q}^+ \sigma_\mu^+,$$

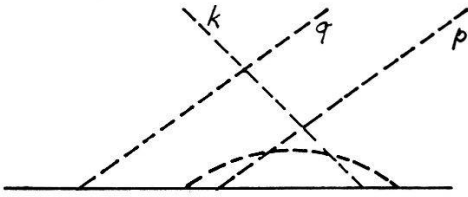
$$\Gamma_3^{(5)} = \tau_\mu \tau_{t_p}^+ \tau_{t_k} \tau_{t_q}^+ \tau_\mu^+,$$



$$B_4 = \omega_k \omega_x (\omega_x + \omega_q) (\omega_x + \omega_k),$$

$$\Omega_4^{(5)} = \sigma_{l_k} \sigma_\mu \sigma_{l_p}^+ \sigma_{l_q}^+ \sigma_\mu^+,$$

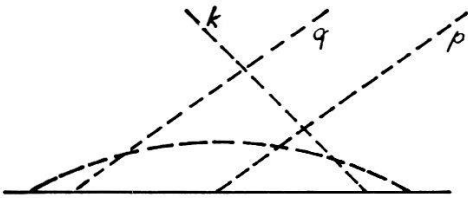
$$\Gamma_4^{(5)} = \tau_{t_k} \tau_\mu \tau_{t_p}^+ \tau_{t_q}^+ \tau_\mu^+,$$



$$B_5 = \omega_q \omega_x (\omega_x + \omega_q) (\omega_x + \omega_k),$$

$$\Omega_5^{(5)} = \sigma_\mu \sigma_{l_k} \sigma_{l_p}^+ \sigma_\mu^+ \sigma_{l_q}^+,$$

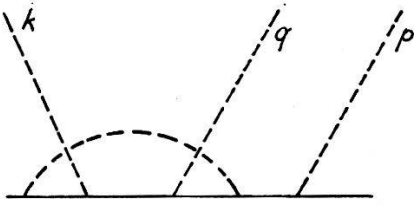
$$\Gamma_5^{(5)} = \tau_\mu \tau_{t_k} \tau_{t_p}^+ \tau_\mu^+ \tau_{t_q}^+,$$



$$B_6 = \omega_x^2 (\omega_x + \omega_q) (\omega_x + \omega_k),$$

$$\Omega_6^{(5)} = \sigma_\mu \sigma_{l_k} \sigma_{l_p}^+ \sigma_{l_q}^+ \sigma_\mu^+,$$

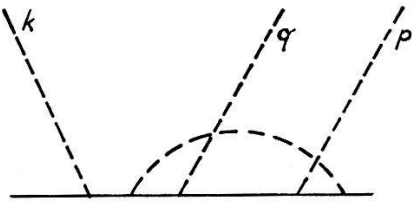
$$\Gamma_6^{(5)} = \tau_\mu \tau_{t_k} \tau_{t_p}^+ \tau_{t_q}^+ \tau_\mu^+,$$



$$B_7 = (\omega_q - \omega_k) \omega_x (\omega_k - \omega_x + i\varepsilon) (\omega_k - \omega_x - \omega_q + i\eta),$$

$$\Omega_7^{(5)} = \sigma_{l_p}^+ \sigma_\mu \sigma_{l_q}^+ \sigma_{l_k} \sigma_\mu^+,$$

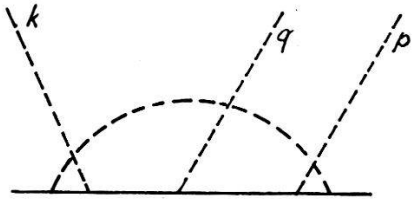
$$\Gamma_7^{(5)} = \tau_{t_p}^+ \tau_\mu \tau_{t_q}^+ \tau_{t_k} \tau_\mu^+,$$



$$B_8 = -\omega_k \omega_x (\omega_k - \omega_x + i\varepsilon) (\omega_k - \omega_x - \omega_q + i\eta),$$

$$\Omega_8^{(5)} = \sigma_\mu \sigma_{l_p}^+ \sigma_{l_q}^+ \sigma_\mu^+ \sigma_{l_k},$$

$$\Gamma_8^{(5)} = \tau_\mu \tau_{t_p}^+ \tau_{t_q}^+ \tau_\mu^+ \tau_{t_k},$$



$$B_9 = \omega_x^2 (\omega_k - \omega_x + i\varepsilon) (\omega_k - \omega_x - \omega_q + i\eta),$$

$$\Omega_9^{(5)} = \sigma_\mu \sigma_p^+ \sigma_{l_q}^+ \sigma_{l_k} \sigma_\mu^+,$$

$$\Gamma_9^{(5)} = \tau_\mu \tau_{t_p}^+ \tau_{t_q}^+ \tau_{t_k} \tau_\mu^+.$$

Die irreduziblen Matrixelemente 5. Ordnung kann man dann schreiben:

$$U_{\omega_q l_q t_q; \omega_p l_p t_p; 1/2 \sigma_3, 1/2 \tau_3}^{(5) \omega_k l_k t_k; 1/2 \sigma_3', 1/2 \tau_3'} = M \sum_{i=1}^9 A_i^{(5)}(\omega_k; \omega_q, \omega_p) \times \\ \times \langle \frac{1}{2} \sigma_3' | \Omega_i^{(5)}(l_k; l_q, l_p) | \frac{1}{2} \sigma_3 \rangle \langle \frac{1}{2} \tau_3' | \Gamma_i^{(5)}(t_k; t_q, t_p) | \frac{1}{2} \tau_3 \rangle + p \leftrightarrow q.$$

Wir sind somit vom weiteren Gebrauch der Graphen unabhängig und können alle Matrixelemente zwischen den Zuständen

$$|\omega_k, l_k, t_k; \frac{1}{2} \sigma_3, \frac{1}{2} \tau_3\rangle \quad \text{und} \quad |\omega_q, l_q, t_q; \omega_p, l_p, t_p; \frac{1}{2} \sigma_3', \frac{1}{2} \tau_3'\rangle$$

schematisch ermitteln. Es ist notwendig, 50 derartige Matrixelemente in 3. und 5. Ordnung zu berechnen, um die diagonalen Matrixelemente zwischen den Zuständen

$$|\omega_k J J_3 T T_3\rangle \quad \text{und} \quad |\omega_q \omega_p J J_3 j T T_3 \vartheta\rangle$$

ermitteln zu können. Diese ergeben sich dann aus (16) und (18) in der Form

$$U^{(v)}(J j T \vartheta \omega_k \omega_p \omega_q) = \frac{U^{(3)}(J j T \vartheta \omega_k \omega_p \omega_q)}{1 - \alpha(J j T \vartheta \omega_k \omega_p \omega_q) - i \beta(J j T \vartheta \omega_k \omega_p \omega_q)},$$

$$\alpha + i \beta = \frac{U^{(5)}}{U^{(3)}},$$

(α, β reelle Funktionen).

Während die α -Beiträge virtuelle Zustände beschreiben, die nicht auf der Energieschale liegen, entsprechen die β virtuellen Zuständen auf der Energieschale; sie sind somit ein Ausdruck für die Heitlerschen Dämpfungsterme¹³⁾, die hier automatisch ohne Lösung einer Integralgleichung auftreten.

d) Berechnung der Wirkungsquerschnitte und Vergleich mit Experimenten.

Die numerische Ermittlung der α und β zeigt, dass sie im wesentlichen unabhängig von ω_p, ω_q sind und sehr stark von ω_k abhängen. Die Matrixelemente in Bornscher Näherung $U^{(3)}(J j T \vartheta \omega_k \omega_p \omega_q)$ werden dann durch einen Faktor

$$[1 - \alpha(J j T \vartheta \omega_k \omega_p \omega_q) - i \beta(J j T \vartheta \omega_k \omega_p \omega_q)]^{-1}.$$

korrigiert.

Auf Grund elementarer Überlegungen sieht man, dass

$$U\left(\frac{3}{2} \ 2 \ \frac{3}{2} \ 1 \ \omega_k \ \omega_p \ \omega_q\right), \quad U\left(\frac{3}{2} \ 2 \ \frac{1}{2} \ 1 \ \omega_k \ \omega_p \ \omega_q\right),$$

$$U\left(\frac{3}{2} \ 1 \ \frac{1}{2} \ 0 \ \omega_k \ \omega_p \ \omega_q\right), \quad U\left(\frac{1}{2} \ 1 \ \frac{1}{2} \ 0 \ \omega_k \ \omega_p \ \omega_q\right),$$

antisymmetrisch sind in ω_p und ω_q und die restlichen symmetrisch. Man überlegt sich leicht, dass der Beitrag der antisymmetrischen Matrixelemente bei Berechnung des totalen Wirkungsquerschnittes vernachlässigt werden kann gegenüber dem Beitrag der symmetrischen. Es zeigt sich, dass die α und β von der Grössenordnung 1 sind und somit eine beträchtliche Korrektur der Bornschen Näherung ergeben.

Der grösste Fehler bei der Vernachlässigung des Nukleonenrückstosses kommt durch die Energiebilanz, die im statischen Modell im Laboratoriumssystem lautet

$$\omega_k = \omega_p + \omega_q.$$

Man kann dem Rückstoss des Nukleons Rechnung tragen durch die Annahme, dass die gesamte Energie im Schwerpunktsystem abzüglich der Nukleonenruheenergie für die Endmesonen verfügbar ist⁵⁾⁷⁾. Diese ist

$$\sqrt{M^2 + 1 + 2 M \omega_k} - M \quad (M = \text{Nukleonmasse}).$$

Mit dieser Modifikation wird der Vergleich mit dem Experiment durchgeführt. Berechnet werden nur totale Wirkungsquerschnitte nach Formel (17). Infolge der grossen Vernachlässigungen bei Anwendung des statischen Modells in diesen Energiebereichen kann man auch nur eine grössenordnungsgemässe Übereinstimmung mit dem Experiment erwarten. Besonders im Gebiet $3 m_\pi c^2 < \omega_k < 5 m_\pi c^2$ sollte sich eine Übereinstimmung mit den Messungen ergeben, da die Energie zu hoch für *s*-Mesonerzeugung und zu niedrig für *d*-Mesonerzeugung ist⁷⁾.

1. Tabelle II zeigt die berechneten Wirkungsquerschnitte für den Prozess $\pi^+ + p \rightarrow 2\pi + N$. Experimentelle Angaben in dem Energiebereich von $3.2 m_\pi c^2$ bis $5.1 m_\pi c^2$ wurden von WILLIS und BLEVINS gemacht²¹⁻²³⁾. Bei $\omega_k = 4.7 m_\pi c^2$ misst WILLIS für den gesamten Wirkungsquerschnitt für Doppelerzeugung $\sigma_{\text{total}} = (2.85 \pm 0.5)$ mb gegenüber einem gerechneten Wert $\sigma_{\text{total}} = 2.0$ mb. Bei einer Vernachlässigung des Nukleonenrückstosses gäbe hier die Rechnung $\sigma_{\text{total}} = 6.0$ mb. Man sieht, dass wegen der starken Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes die Vernachlässigung des Rückstosses das Ergebnis vollkommen verändert. Auch die angenäherte Berücksichtigung dieses Effektes (s. o.) bringt immer noch eine grosse Unsicherheit in der Energieskala mit sich. Das gemessene Verhältnis

$$\frac{\sigma(\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + p)}{\sigma(\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + n)} = 1, 5^{+1.5}_{-0.5}$$

ergibt sich aus der Rechnung zu 0,7.

BLEVINS *et al.*²²⁾ messen im Energiebereich $3,2 m_\pi c^2$ bis $5,1 m_\pi c^2$ für das Verhältnis von Doppelerzeugung zu elastischer Streuung

$$0,06 \pm 0,02.$$

Es ist in diesem Energiebereich $\sigma_{\text{el}} \approx 20$ mb, also

$$\sigma_{\text{total}} \approx (1,2 \pm 0,4) \text{ mb}$$

was ungefähr in Übereinstimmung mit der Rechnung steht, ebenso wie das (jedoch nur aus 18 Ereignissen, darunter 4 nichtidentifizierbaren) gemessene Verhältnis

$$\frac{\sigma(\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + p)}{\sigma(\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + n)} \approx \frac{7}{7}.$$

BLEVINS *et al.*²³⁾ erhalten bei $\omega_k = (4,4 \pm 0,5) m_\pi c^2$ einen Doppel-erzeugungswirkungsquerschnitt von 2 mb; die Rechnung ergibt

$$1,6^{+0,7}_{-0,6} \text{ mb},$$

wenn man den Fehler aus der Unbestimmtheit der Primärenergie abschätzt.

Ähnliche Wirkungsquerschnitte sind auch von KAZES⁷⁾ auf Grund von CHEW-LOW-Gleichungen für das statische Modell ermittelt worden. Die Voraussagen dieses Modells stehen hier also in befriedigender Übereinstimmung mit den Experimenten.

Tabelle II

ω_k [$m_\pi c^2$]	$\sigma(\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + p)$ [mb]	$\sigma(\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + n)$ [mb]
2,75	0,0086	0,019
4,3	0,53	1,0
5,1	1,0	1,9
6,0	1,9	3,4
6,9	2,8	4,3

2. Tabelle III zeigt die berechneten Wirkungsquerschnitte für den Prozess $\pi^- + p \rightarrow 2\pi + N$. Die Figur zeigt den berechneten Wirkungsquerschnitt $\sigma(\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \pi^+ + n)$ und die Experimente von PERKINS *et al.*²⁴⁾ sowie zum Vergleich die auf Grund verschiedener Auswertungen von CHEW-LOW-Gleichungen desselben Modells gefundenen Kurven von FRANKLIN⁵⁾ und KAZES⁷⁾. Die Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen ist hier bedeutend schlechter. Obwohl auch die Versuchswerte noch mit grossen Fehlern behaftet sind, bleibt eine erhebliche Diskrepanz mit den gerechneten Grössen. PERKINS²⁴⁾ gibt an, dass bei einem Vergleich mit ZINOV und KORENCHENKO²⁵⁾ in dem betrachteten Energiebereich folgt:

$$\frac{\sigma(\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n)}{\sigma(\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \pi^0 + p)} \approx 1;$$

das steht in Übereinstimmung mit dem gerechneten Wert $\approx 0,8$. Ferner

ergibt sich in Übereinstimmung mit den Messungen, dass der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung zweier ungeladener Mesonen beträchtlich kleiner als der für die beiden anderen Prozesse ist.

Tabelle III

ω_k [$m_\pi c^2$]	$\sigma (\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n)$ [mb]	$\sigma (\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \pi^0 + p)$ [mb]	$\sigma (\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + n)$ [mb]
2,75	0,0059	0,0084	0,0018
4,3	0,37	0,51	0,092
5,1	0,71	0,98	0,19
6,0	1,4	1,87	0,31
6,9	2,1	2,71	0,46

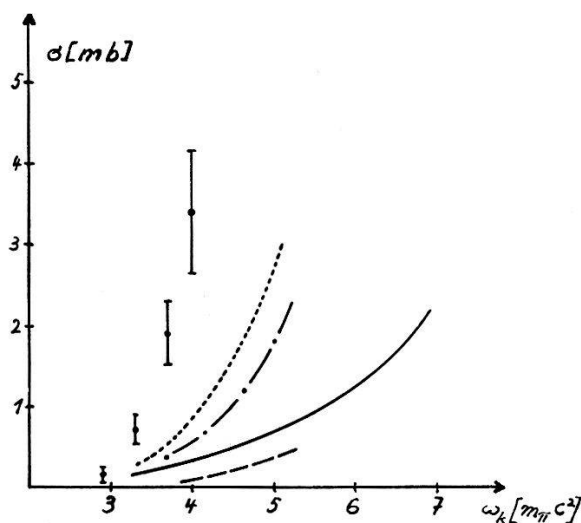


Fig.

- FRANKLIN
- · - · - diese Rechnung ohne Rückstoss
- diese Rechnung mit Rückstoss
- - - KAZES
- ⊥ Messungen von PERKINS *et al.*

e) Diskussion der anderen Arbeiten und des Modells.

Die Autoren⁴⁻⁷⁾, die die Doppelerzeugung bisher behandelt haben, gehen alle von Integralgleichungen aus, die auf ähnliche Weise wie die CHEW-LOW-Gleichungen abgeleitet werden. Sie verwenden dann zur Lösung verschiedenartige Vernachlässigungen, unter denen immer die Einmesonnäherung vorkommt. Ferner werden die Phasen für elastische Streuung auch im hochenergetischen Gebiet benötigt; die Autoren ent-

nehmen diese dem Experiment oder der Einmesonnäherung der CHEW-Low-Gleichung für Streuung. Die Phasen werden auch für $\omega_k > 2$ als reell angenommen, d. h. alle inelastischen Prozesse werden vernachlässigt. In den Integralgleichungen sind die Amplituden für Doppelerzeugung ferner noch gekoppelt und ihre zum Zwecke der Lösung notwendige Separation ist nur näherungsweise möglich. In unserer Rechnung dagegen treten die Matrixelemente unabhängig voneinander auf und werden direkt berechnet. Streuphasen werden überhaupt nicht benötigt. Die Ergebnisse sind also eine direktere Anwendung des statischen Modells.

Trotz diesen verschiedenartigen Näherungen sind unsere Ergebnisse denen der anderen Autoren ähnlich, wie z. B. die Figur zeigt. Während die Ergebnisse für

$$\pi^+ + p \begin{cases} \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + p \\ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + n \end{cases}$$

und die «branching ratios»

$$\frac{\sigma(\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + p)}{\sigma(\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + n)} \quad \text{und} \quad \frac{\sigma(\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n)}{\sigma(\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \pi^0 + p)}$$

in befriedigender Übereinstimmung mit der Erfahrung sind, ist das für die Prozesse

$$\pi^- + p \begin{cases} \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n \\ \rightarrow \pi^- + \pi^0 + p \\ \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + n \end{cases}$$

nicht der Fall. Es ist schwer zu sagen, ob diese Diskrepanz an den Näherungsmethoden oder am Modell liegt. Es scheint uns wahrscheinlicher, dass der Fehler im Modell begründet liegt, da die verschiedensten Näherungen zu ähnlichen Resultaten führen. Die $\pi^+ + p$ -Prozesse beruhen ausschliesslich auf den $T = 3/2$ -Zuständen und der $T = 3/2$, $J = 3/2$ -Zustand gibt den grössten Beitrag. Die $\pi^- + p$ -Prozesse enthalten auch die $T = 1/2$ -Zustände. Schon bei der elastischen Streuung gibt das Modell nur den $T = 3/2$, $J = 3/2$ -Zustand einigermaßen richtig wieder, während alle anderen Zustände (deren Streuphasen allerdings experimentell und theoretisch klein sind) nur mangelhaft beschrieben werden. Es scheint, dass für die Doppelerzeugung die Verhältnisse ähnlich liegen, dass also das statische Modell insbesondere die $T = 1/2$ -Zustände nicht richtig wiedergibt.

Zur Beseitigung der Diskrepanz ist vorgeschlagen worden, eine direkte π - π -Wechselwirkung einzuführen und es war möglich, diese so zu wählen,

dass Übereinstimmung mit der Erfahrung resultiert²⁶⁾ *). Auf diesen Problemkreis können wir aber hier nicht näher eingehen.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. HEITLER, bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für sein dauerndes Interesse zu grösstem Dank verpflichtet. Herrn Prof. Dr. A. THELLUNG danke ich für viele Diskussionen, die mir eine grosse Hilfe waren.

Literatur

- 1) KÄLLEN-PAULI, Meddelelser Kgl. Danske 30, No. 7 (1955).
- 2) T. D. LEE, PR 95, 1329 (1954).
- 3) CHEW and Low, PR 101, 1570 (1956),
- 4) BARSHAY, PR 103, 1102 (1956).
- 5) FRANKLIN, PR 105, 1101 (1957).
- 6) RODBERG, PR 106, 1090 (1957).
- 7) KAZES, PR 107, 1131 (1957).
- 8) CHEW, Encyclopedia of Physics (Springer Berlin, 1959).
- 9) WICK, RMP 27, 339 (1955).
- 10) LIPPMANN und SCHWINGER, PR 79, 469 (1950).
- 11) CHEW, PR 93, 341 (1954).
- 12) ALTSHULER, PR 89, 1278 (1953).
- 13) HEITLER, Quantum Theory of Radiation (Oxford University Press (1954), 3rd ed.).
- 14) CINI und FUBINI, NC 11, 142 (1954).
- 15) SATORIN und WATAGHIN, NC 12, 145 (1954).
- 16) A. THELLUNG, HPA 25, 307 (1952).
- 17) CHEW, PR 94, 1755 (1954).
- 18) CHEW, PR 94, 1748 (1954).
- 19) CINI und FUBINI, NC 3, 764 (1956).
- 20) BLATT, BIEDENHARN *et al.*, RMP 24, 294 (1952).
- 21) WILLIS, PR 116, 753 (1959).
- 22) BLEVINS *et al.*, PR 112, 1287 (1958).
- 23) BLEVINS *et al.*, Bull. Am. Phys. Soc., Ser. II, 1, 174 (1956).
- 24) PERKINS *et al.*, PR 118, 1364 (1960).
- 25) ZINOV und KORENCHENKO, Soviet Phys. JETP 34 (7), 210 (1958).
- 26) RODBERG, PR Letters 3, 58 (1959).
- 27) MAGLIĆ *et al.*, PR Letters 7, 178 (1961).

*) Eine starke π - π -Wechselwirkung mit Resonanz darf experimentell als gesichert angesehen werden²⁷⁾. Es ist aber noch nicht klar, ob diese im Sinne der Feldtheorie eine direkte π - π -Wechselwirkung ist, oder ob sie indirekt durch die π -Nukleon-Wechselwirkung zustandekommt.